Beam Loading

Shin-ichi YOSHIMOTO

2022/12/23

Contents

第I部　Beam Loading

第 1 章　Static Beam Loading

1.1　Cavity の基礎

1.1.1　Power dissipation

$$P_{diss} = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{cav}^2}{R} = \frac{V_{cav}^2}{R_{sh}} \tag{1.1}$$

1.1.2　Shut impedance

$$R = \frac{1}{2} \cdot R_{sh} \tag{1.2}$$

空洞の入力カップラーの変圧比を $1 : n$ とすると (Fig. 1.1)、

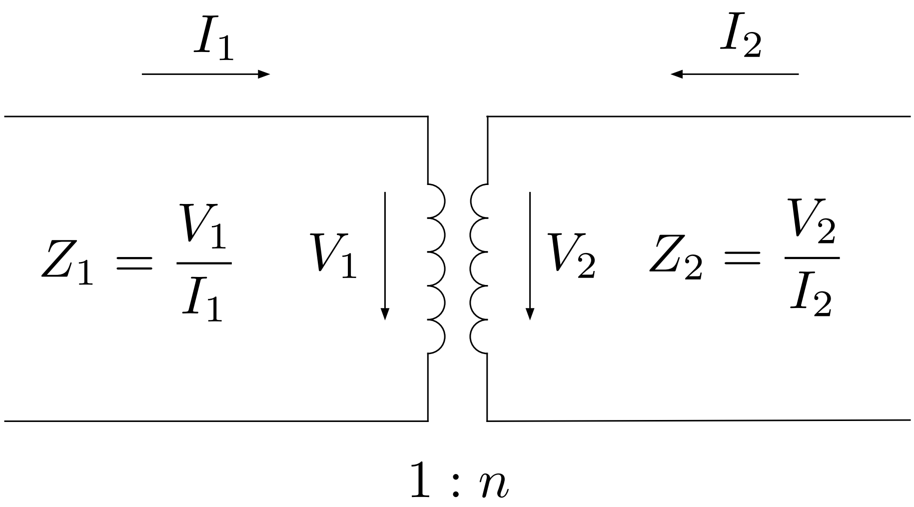

Fig. 1.1　理想的なトランスによる入力カップラー.

$$V_2 = N \cdot V_1,\ I_2 = \frac{1}{N} \cdot I_1 \tag{1.3}$$

したがって、

$$Z_2 = n^2 \cdot Z_1 \tag{1.4}$$

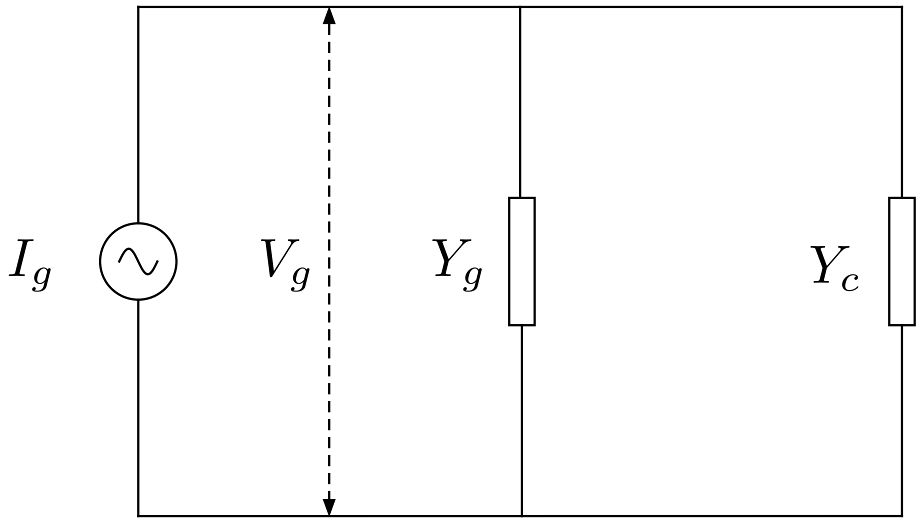

Fig. 1.2 理想的なトランスによる入力カップラー.

1.1.3 Available Power

$$P_{diss} = \frac{1}{2} Y_c V_g^2 \tag{1.5}$$

$$V_g = \frac{I_g}{Y_L} = \frac{I_g}{Y_g + Y_c} \tag{1.6}$$

$$P_{diss} = \frac{1}{2} \frac{Y_c}{(Y_g + Y_c)^2} I_g^2 \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{diss}}{\partial Y_c} &= \frac{1}{2} \frac{(Y_g + Y_c)^2 - 2Y_c(Y_g + Y_c)}{(Y_g + Y_c)^4} I_g^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{Y_g - Y_c}{(Y_g + Y_c)^3} I_g^2 \end{aligned} \tag{1.8}$$

$\partial P_{diss}/\partial Y_c = 0$ より、$Y_g = Y_c$ の時、P_{diss} は最大になり

$$P_{diss}^{max} = \frac{1}{8} Y_g I_g^2 = \frac{1}{8} \frac{R}{\beta} I_g^2 \equiv P_g \tag{1.9}$$

1.2 ビーム負荷付き空洞の RCL 等価回路

1.2.1 Cavity parameters

共振周波数

$$\omega_0 = \frac{1}{LC} \tag{1.10}$$

Quality factor

$$Q = 2\pi \frac{\text{stored energy in cavity}}{\text{dissipated energy per cycle}} = \frac{\omega_0 W}{P_{diss}} \tag{1.11}$$

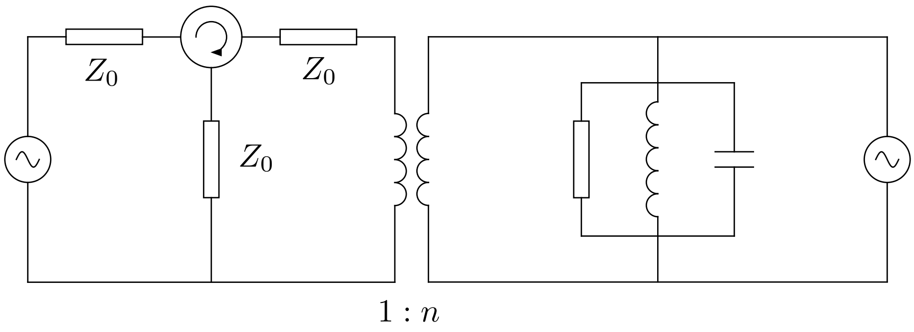

Fig. 1.3　理想的なトランスによる入力カップラー.

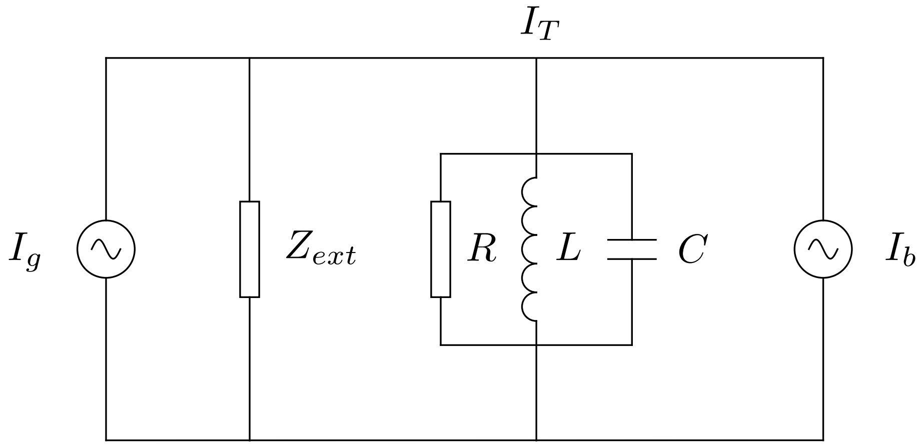

Fig. 1.4　等価回路

Unloaded quality factor

$$Q_0 = \omega_0 \frac{(1/2)CV^2}{V^2/(2R)} = \omega_0 RC \tag{1.12}$$

External quality factor

$$Q_{ext} = 2\pi \frac{\text{stored energy in cavity}}{\text{dissipated energy in external devices per cycle}} = \frac{\omega_0 W}{P_{ext}} \tag{1.13}$$

Loaded quality factor

$$Q_L = 2\pi \frac{\text{stored energy in cavity}}{\text{total energy per cycle}} = \frac{\omega_0 W}{P_{tot}} \tag{1.14}$$

ここで、

$$P_{tot} = P_{diss} + P_{ext} \tag{1.15}$$

したがって、

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ext}} \tag{1.16}$$

$$\frac{1}{R_L} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_{ext}} \tag{1.17}$$

Coupling factor β

$$\beta = \frac{P_{ext}}{P_{cav}} = \frac{Q_0}{Q_{ext}} = \frac{R}{Z_{ext}} = \frac{R}{n^2 Z_0} \tag{1.18}$$

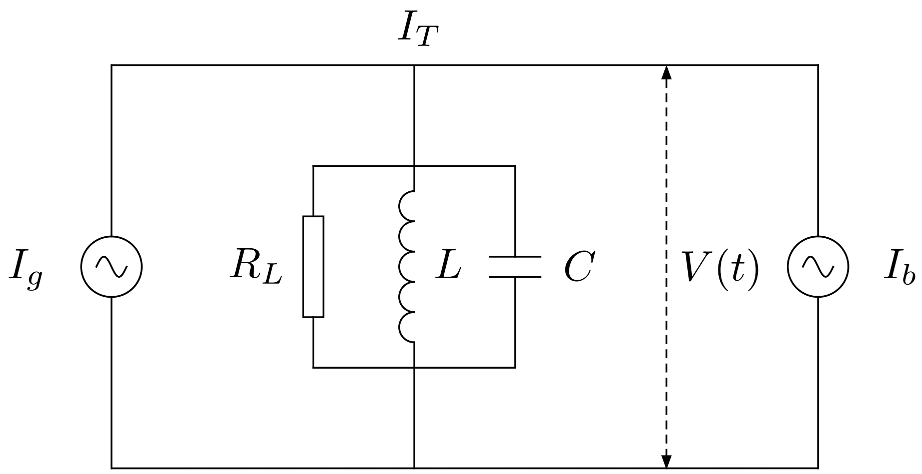

Fig. 1.5　等価回路 2

$$\ddot{V}(t) + \frac{1}{R_L C}\dot{V}(t) + \frac{1}{LC}V(t) = \frac{1}{C}\dot{I}(t) \tag{1.19}$$

Phasor

$$V(t) = \tilde{V}e^{j\omega_c t},\ I(t) = \tilde{I}e^{j\omega_c t} \tag{1.20}$$

1.3 Equations for cavity voltage

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_c(t) &= \tilde{V}(t)e^{j\omega_c t}, \qquad \tilde{V}(t) = \hat{V}(1+a_v(t))e^{j(\phi_v(t)+\psi_v)} \\
\boldsymbol{I}_b(t) &= \tilde{I}_b(t)e^{j\omega_c t}, \qquad \tilde{I}_b(t) = \hat{I}_b(1+a_b(t))e^{j(\phi_b(t)+\psi_b)} \\
\boldsymbol{I}_g(t) &= \tilde{I}_g(t)e^{j\omega_c t}, \qquad \tilde{I}_g(t) = \hat{I}_g(1+a_g(t))e^{j(\phi_g(t)+\psi_g)} \\
\boldsymbol{I}_t(t) &= \boldsymbol{I}_g(t) + \boldsymbol{I}_b(t) = \tilde{I}_t(t)e^{j\omega_c t}
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

$$
\ddot{\boldsymbol{V}}_c(t) + 2\sigma\dot{\boldsymbol{V}}_c(t) + \omega_0^2\boldsymbol{V}_c(t) = 2\sigma R\dot{\boldsymbol{I}}_t(t) \tag{1.22}
$$

1.4 Pedersen Model [1] [2]

振幅変調 (AM) や位相変調 (PM) された正弦波信号を伝達関数 $H(s)$ を持つシステムを介した場合、出力信号も一般に振幅変調と位相変調の両方を受けることになる。このようなシステムの完全な特性評価には、システムの伝達関数 $H(s)$ から導き出すことができる次の 4 つの異なる変調伝達関数 (Modulation Transfer Function) を求める必要がある。(Fig.1.6)

1. 入力の振幅変調が出力の振幅を変調する伝達関数：$G_{aa}(s)$
2. 入力の位相変調が出力の位相を変調する伝達関数：$G_{pp}(s)$
3. 入力の振幅変調が出力の位相を変調する伝達関数：$G_{ap}(s)$
4. 入力の位相変量が出力の振幅を変調する伝達関数：$G_{pa}(s)$

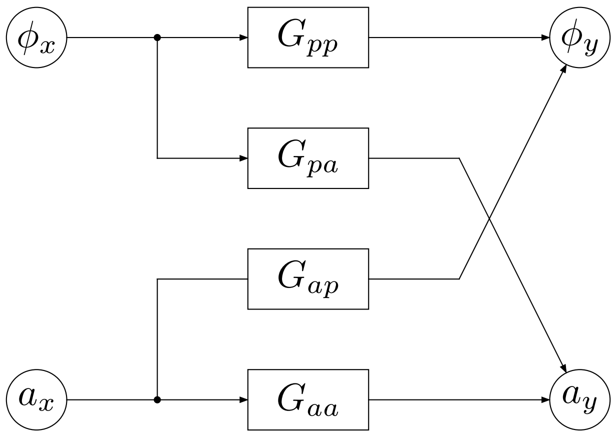

Fig. 1.6 Pedersen Model

変調の振幅が十分小さい場合、変調の伝送は線形であり、次のようにして求めることができる。

最初に、入力信号の振幅のみが $a_x(t)$ で変調された場合を考える。このとき、入力信号 $x(t)$ は次のようにあらわせる。

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{X}(1 + a_x(t))e^{j\omega_c t}\right\} \tag{1.23}$$

出力信号 $y(t)$ は $a_x(t)$ によって振幅だけでなく位相も変調され、

$$y(t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{Y}(1 + a_{y,a}(t))e^{j(\omega_c t + \phi_0 + \phi_{y,a}(t))}\right\} \tag{1.24}$$

と表すことができる。この時、入力の振幅変調に関する変調伝達関数 $G_{aa}(s),\ G_{ap}(s)$ は、

$$G_{aa}(s) = \frac{a_{y,a}(s)}{a_x(s)}, \quad G_{ap}(s) = \frac{\phi_{y,a}(s)}{a_x(s)} \tag{1.25}$$

となる。ここで、(1.23) は、

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}\{\hat{X}(1+a_x(t))e^{j\omega_c t}\} \\ &= \hat{X}(\cos\omega_c t + a_x(t)\cos\omega_c t) \\ &= \frac{\hat{X}}{2}\left\{(e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t}) + a_x(t)(e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t})\right\} \end{aligned} \tag{1.26}$$

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\},\ a_x(s) = \mathcal{L}\{a_x(s)\}$ とし、(1.26) をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{\hat{X}}{2}\left\{\frac{1}{s-j\omega_c} + \frac{1}{s+j\omega_c} + a_x(s-j\omega_c) + a_x(s+j\omega_c)\right\} \\ &= \hat{X}\left\{\frac{s}{s^2+\omega_c^2} + a_x(s-j\omega_c) + a_x(s+j\omega_c)\right\} \end{aligned} \tag{1.27}$$

変調の振幅が十分小さい場合、つまり、$a_{y,a}(t) \ll 1,\ \phi_{y,a}(t) \ll 1$ の時、二次の微少量を無視すると (1.24) は、

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{Re}\left\{\hat{Y}(1+a_{y,a}(t))e^{j(\omega_c t+\phi_0+\phi_{y,a}(t))}\right\} \\ &\simeq \mathrm{Re}\left\{\hat{Y}(1+a_{y,a}(t))\{1+j\phi_{y,a}(t)\}e^{j(\omega_c t+\phi_0)}\right\} \\ &\simeq \mathrm{Re}\left\{\hat{Y}(1+a_{y,a}(t)+j\phi_{y,a}(t))e^{j(\omega_c t+\phi_0)}\right\} \\ &= \hat{Y}\left\{(1+a_{y,a}(t))\cos(\omega_c t+\phi_0) - \phi_{y,a}(t)\sin(\omega_c t+\phi_0)\right\} \\ &= \frac{\hat{Y}}{2}\left\{(1+a_{y,a}(t))\left(e^{j(\omega_c t+\phi_0)}+e^{-j(\omega_c t+\phi_0)}\right) + j\phi_{y,a}(t)\left(e^{j(\omega_c t+\phi_0)}-e^{-j(\omega_c t+\phi_0)}\right)\right\} \end{aligned} \tag{1.28}$$

(1.28) をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{\hat{Y}}{2}\Bigg[&\frac{e^{j\phi_0}}{s-j\omega_c} + \frac{e^{-j\phi_0}}{s+j\omega_c} + e^{j\phi_0}a_{y,a}(s-j\omega_c) + e^{-j\phi_0}a_{y,a}(s+j\omega_c) \\ &+ j\left\{e^{j\phi_0}\phi_{y,a}(s-j\omega_c) - e^{-j\phi_0}\phi_{y,a}(s+j\omega_c)\right\}\Bigg] \end{aligned} \tag{1.29}$$

ここで、(1.25) より (1.29) は

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{\hat{Y}}{2}\Bigg[&\frac{e^{j\phi_0}(s+j\omega_c)+e^{-j\phi_0}(s-j\omega_c)}{s^2+\omega_c^2} \\ &+ e^{j\phi_0}G_{aa}(s-j\omega_c)a_x(s-j\omega_c) + e^{-j\phi_0}G_{aa}(s+j\omega_c)a_x(s+j\omega_c) \\ &+ j\left\{e^{j\phi_0}G_{ap}(s-j\omega_c)a_x(s-j\omega_c) - e^{-j\phi_0}G_{ap}(s+j\omega_c)a_x(s+j\omega_c)\right\}\Bigg] \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} Y(s) = \hat{Y}\Bigg[&\frac{\cos\phi_0 s - \omega_c\sin\phi_0}{s^2+\omega_c^2} + e^{j\phi_0}\{G_{aa}(s-j\omega_c)+jG_{ap}(s-j\omega_c)\}a_x(s-j\omega_c) \\ &+ e^{-j\phi_0}\{G_{aa}(s+j\omega_c)-jG_{ap}(s+j\omega_c)\}a_x(s+j\omega_c)\Bigg] \end{aligned} \tag{1.30}$$

ここで $Y(s)=H(s)X(s)$ より、

$$Y(s)=\hat{X}\left[\frac{s}{s^2+\omega_c^2}+a_x(s-j\omega_c)+a_x(s+j\omega_c)\right]H(s) \tag{1.31}$$

(1.30) と (1.31) で係数を比較すると、

$$\hat{Y}(\cos\phi_0 s-\omega_c\sin\phi_0)=\hat{X}H(s)s \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned} G_{aa}(s-j\omega_c)+jG_{ap}(s-j\omega_c)&=\frac{\hat{X}}{\hat{Y}}e^{-j\phi_0}H(s)\\ G_{aa}(s+j\omega_c)-jG_{ap}(s+j\omega_c)&=\frac{\hat{X}}{\hat{Y}}e^{j\phi_0}H(s) \end{aligned} \tag{1.33}$$

(1.32) より

$$H(\pm j\omega_c)=\frac{\hat{Y}}{\hat{X}}e^{\pm j\phi_0} \tag{1.34}$$

(1.33) と (1.34) より、

$$\begin{aligned} G_{aa}(s)+jG_{ap}(s)&=\frac{H(s+j\omega_c)}{H(j\omega_c)}\\ G_{aa}(s)-jG_{ap}(s)&=\frac{H(s-j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \end{aligned} \tag{1.35}$$

以上より、入力の振幅変調に関する変調伝達関数 $G_{aa}(s),\ G_{ap}(s)$ は、

$$\begin{aligned} G_{aa}(s)&=\frac{1}{2}\left\{\frac{H(s+j\omega_c)}{H(j\omega_c)}+\frac{H(s-j\omega_c)}{H(-j\omega_c)}\right\}=G_s(s)\\ G_{ap}(s)&=\frac{-j}{2}\left\{\frac{H(s+j\omega_c)}{H(j\omega_c)}-\frac{H(s-j\omega_c)}{H(-j\omega_c)}\right\}=G_c(s) \end{aligned} \tag{1.36}$$

今度は、入力信号の位相のみが $\phi_x(t)$ で変調された信号を考えると、

$$x(t)=\mathrm{Re}\{\hat{X}e^{j(\omega_c t+\phi_x(t))}\} \tag{1.37}$$

出力信号は先程と同様に考えると、

$$y(t)=\mathrm{Re}\{\hat{Y}(1+a_{y,p}(t))e^{j(\omega_c t+\phi_0+\phi_{y,p}(t))}\} \tag{1.38}$$

入力の位相変調に関する変調伝達関数 $G_{pp}(s),\ G_{pa}(s)$ は、

$$G_{pp}(s)=\frac{\phi_{y,p}(s)}{\phi_x(s)},\quad G_{pa}(s)=\frac{a_{y,p}(s)}{\phi_x(s)} \tag{1.39}$$

(1.37) は、$\phi_x(t)\ll 1$ より、

$$\begin{aligned} x(t)&=\mathrm{Re}\{\hat{X}e^{j(\omega_c t+\phi_x(t))}\}\\ &\simeq \mathrm{Re}\{\hat{X}(1+j\phi_x(t))e^{j\omega_c t}\}\\ &=\hat{X}(\cos\omega_c t-\phi_x(t)\sin\omega_c t)\\ &=\frac{\hat{X}}{2}\{(e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t})+j\phi_x(t)(e^{j\omega_c t}-e^{-j\omega_c t})\} \end{aligned} \tag{1.40}$$

(1.40) をラプラス変換すると、

$$X(s) = \hat{X}\left[\frac{s}{s^2+\omega_c^2} + j\left\{\phi_x(s-j\omega_c) - \phi_x(s+j\omega_c)\right\}\right] \tag{1.41}$$

(1.29) と同様にして (1.38) もラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} Y(s) = \hat{Y}\Bigg[&\frac{\cos\phi_0 s - \omega_c \sin\phi_0}{s^2+\omega_c^2} + e^{j\phi_0} a_{y,p}(s-j\omega_c) + e^{-j\phi_0} a_{y,p}(s+j\omega_c) \\ &+ j\left\{e^{j\phi_0}\phi_{y,p}(s-j\omega_c) - e^{-j\phi_0}\phi_{y,p}(s+j\omega_c)\right\}\Bigg] \end{aligned} \tag{1.42}$$

同様に (1.42) は

$$\begin{aligned} Y(s) = \hat{Y}\Bigg[&\frac{\cos\phi_0 s - \omega_c \sin\phi_0}{s^2+\omega_c^2} + e^{j\phi_0}\{G_{pa}(s-j\omega_c) + jG_{pp}(s-j\omega_c)\}\phi_x(s-j\omega_c) \\ &+ e^{-j\phi_0}\{G_{pa}(s+j\omega_c) - jG_{pp}(s+j\omega_c)\}\phi_x(s+j\omega_c)\Bigg] \end{aligned} \tag{1.43}$$

ここで $Y(s) = H(s)X(s)$ より、

$$Y(s) = \hat{X}\left[\frac{s}{s^2+\omega_c^2} + j\left\{\phi_x(s-j\omega_c) - \phi_x(s+j\omega_c)\right\}\right]H(s) \tag{1.44}$$

(1.43) と (1.44) で係数を比較すし、(1.34) を使うと、

$$\begin{aligned} G_{pa}(s-j\omega_c) + jG_{pp}(s-j\omega_c) &= j\frac{H(s)}{H(j\omega_c)} \\ G_{pa}(s+j\omega_c) - jG_{pp}(s+j\omega_c) &= -j\frac{H(s)}{H(-j\omega_c)} \end{aligned} \tag{1.45}$$

したがって、

$$\begin{aligned} G_{pa}(s) + jG_{pp}(s) &= j\frac{H(s+j\omega_c)}{H(j\omega_c)} \\ G_{pa}(s) - jG_{pp}(s) &= -j\frac{H(s-j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \end{aligned} \tag{1.46}$$

以上の結果から、変調伝達関数は以下の様になる。

$$\begin{aligned} G_{aa}(s) = G_{pp}(s) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{H(s+j\omega_c)}{H(j\omega_c)} + \frac{H(s-j\omega_c)}{H(-j\omega_c)}\right\} = G_s(s) \\ G_{ap}(s) = -G_{pa}(s) &= \frac{j}{2}\left\{\frac{H(s+j\omega_c)}{H(j\omega_c)} - \frac{H(s-j\omega_c)}{H(-j\omega_c)}\right\} = G_c(s) \end{aligned} \tag{1.47}$$

付録 A　加速空洞の等価回路

A.1　RLC 並列共振回路の微分方程式

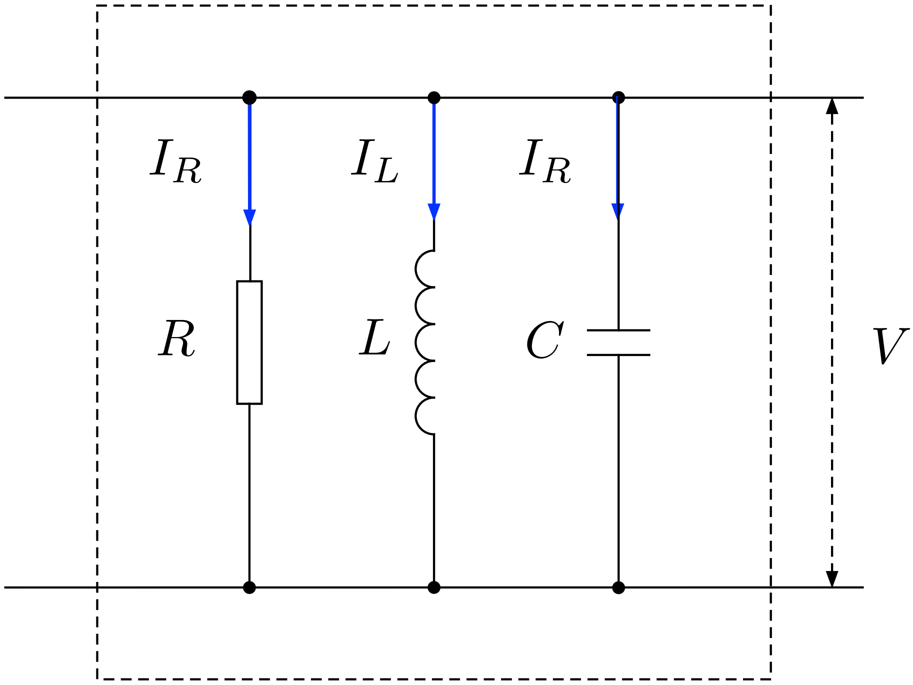

Fig. A.1　Cavity RLC Model

$$
\begin{aligned}
&I(t) = I_R(t) + I_L(t) + I_C(t) \\
&I_R(t) = \frac{V(t)}{R},\ I_L(t) = \frac{1}{L}\int V(t)dt,\ I_c(t) = C\frac{dV(t)}{dt}
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

したがって、

$$
\frac{V(t)}{R} + \frac{1}{L}\int V(t)dt + C\frac{dV(t)}{dt} = I(t) \tag{A.2}
$$

両辺を時間 t で微分すると、

$$
\frac{\dot{V}(t)}{R} + \frac{V(t)}{L} + C\ddot{V}(t) = \dot{I}(t) \tag{A.3}
$$

$$
\ddot{V}(t) + \frac{1}{CR}\dot{V}(t) + \frac{1}{LC}V(t) = \frac{1}{C}\dot{I}(t) \tag{A.4}
$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \qquad \sigma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\omega_0}{2Q_L} \tag{A.5}$$

$$\ddot{V}(t) + 2\sigma\dot{V}(t) + \omega_0^2 V(t) = 2\sigma R\dot{I}(t) \tag{A.6}$$

References

[1] F. Pedersen, Beam Loading Effects in the CERN PS Booster, IEEE Trans. Nucl. Sci. 22, 3, June 1975.

[2] S. Ninomiya, Beam Loading Effect on RF System in Proton Synchrotrons, KEK Report 89-18 (1989).

[3] S. Simrock, Z. Geng, Low-Level Radio Frequency Systems, Springer (2022)

[4] T. Schilcher Vector sum control of pulsed accelerating fields in Lorentz force detuned superconducting cavities (1998).

[5] P. B. Wilson, High energy electron linacs; application to storage ring RF systems and linear colliders (1987)