

# Modulation

Shin-ichi YOSHIMOTO

2023/8/9



# Contents

第 1 章	フーリエ変換	5
第 2 章	ラプラス変換	7
第 3 章	振幅変調	9
第 4 章	角度変調	11
4.1	Cavity の基礎	11
4.1.1	Power dissipation	11
4.1.2	Shut impedance	11
4.1.3	Available Power	12
4.2	ビーム負荷付き空洞の RCL 等価回路	12
4.2.1	Cavity parameters	12
4.3	Equations for cavity voltage	15
4.4	Pedersen Model	16
4.4.1	Modulation Transfer Function	16
4.4.2	空洞共振器への適用	21
第 5 章	Robinson instability	23
付録 A	ラプラス変換	25
付録 B	変調	27
B.1	定義とベクトル表記	27
B.2	Pedersen Model	28
B.2.1	空洞を介した位相、振幅、チューニング伝送	28
付録 C	加速空洞の等価回路	31
C.1	RLC 並列共振回路の微分方程式	31



## 第 1 章 フーリエ変換



## 第 2 章 ラプラス変換





## 第 3 章 振幅変調



## 第 4 章 角度変調

### 4.1 Cavity の基礎

#### 4.1.1 Power dissipation

$$P_{diss} = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{cav}^2}{R} = \frac{V_{cav}^2}{R_{sh}} \quad (4.1)$$

#### 4.1.2 Shut impedance

$$R = \frac{1}{2} \cdot R_{sh} \quad (4.2)$$

空洞の入力カップラーの変圧比を  $1:n$  とすると (Fig. 4.1)、

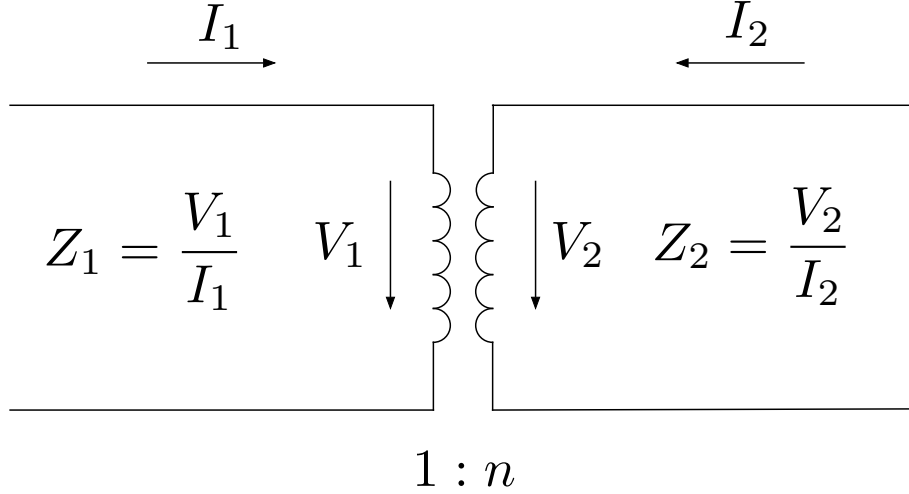


Fig. 4.1 理想的なトランスによる入力カップラー.

$$V_2 = N \cdot V_1, I_2 = \frac{1}{N} \cdot I_1 \quad (4.3)$$

したがって、

$$Z_2 = n^2 \cdot Z_1 \quad (4.4)$$

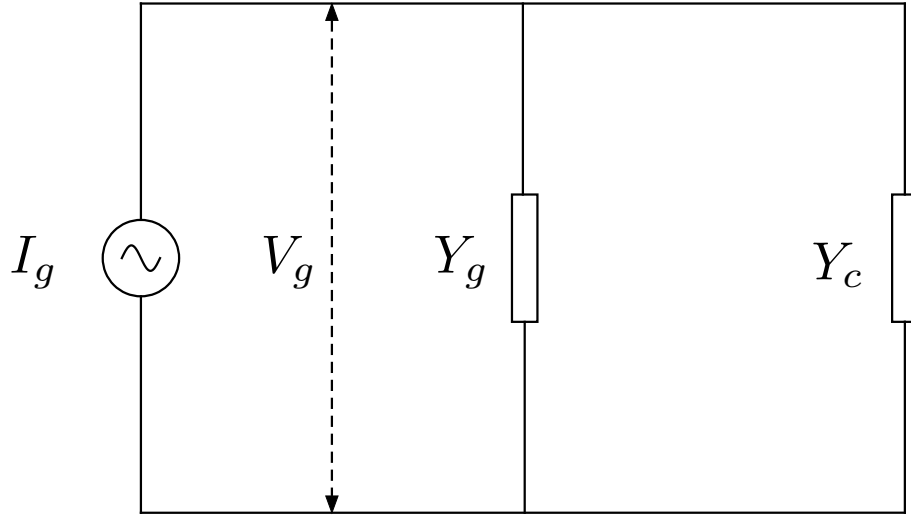


Fig. 4.2 理想的なトランスによる入力カップラー.

### 4.1.3 Available Power

$$P_{diss} = \frac{1}{2} Y_c V_g^2 \quad (4.5)$$

$$V_g = \frac{I_g}{Y_L} = \frac{I_g}{Y_g + Y_c} \quad (4.6)$$

$$P_{diss} = \frac{1}{2} \frac{Y_c}{(Y_g + Y_c)^2} I_g^2 \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{diss}}{\partial Y_c} &= \frac{1}{2} \frac{(Y_g + Y_c)^2 - 2Y_c(Y_g + Y_c)}{(Y_g + Y_c)^4} I_g^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{Y_g - Y_c}{(Y_g + Y_c)^3} I_g^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$\partial P_{diss} / \partial Y_c = 0$  より、 $Y_g = Y_c$  の時、 $P_{diss}$  は最大になり

$$P_{diss}^{max} = \frac{1}{8} Y_g I_g^2 = \frac{1}{8} \frac{R}{\beta} I_g^2 \equiv P_g \quad (4.9)$$

## 4.2 ビーム負荷付き空洞の RCL 等価回路

### 4.2.1 Cavity parameters

共振周波数

$$\omega_0 = \frac{1}{LC} \quad (4.10)$$

Quality factor

$$Q = 2\pi \frac{\text{stored energy in cavity}}{\text{dissipated energy per cycle}} = \frac{\omega_0 W}{P_{diss}} \quad (4.11)$$

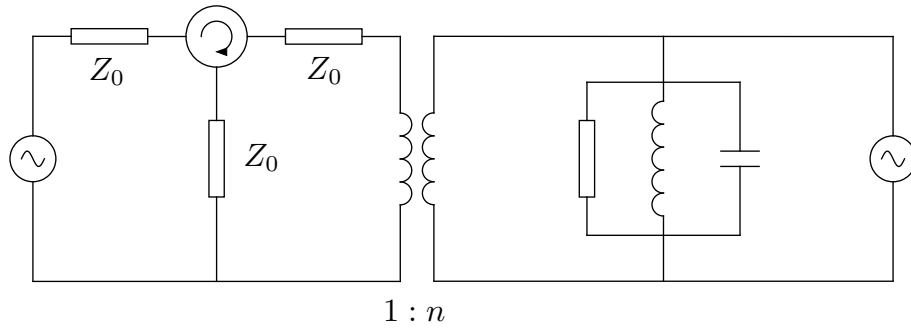


Fig. 4.3 理想的なトランスによる入力カップラー。

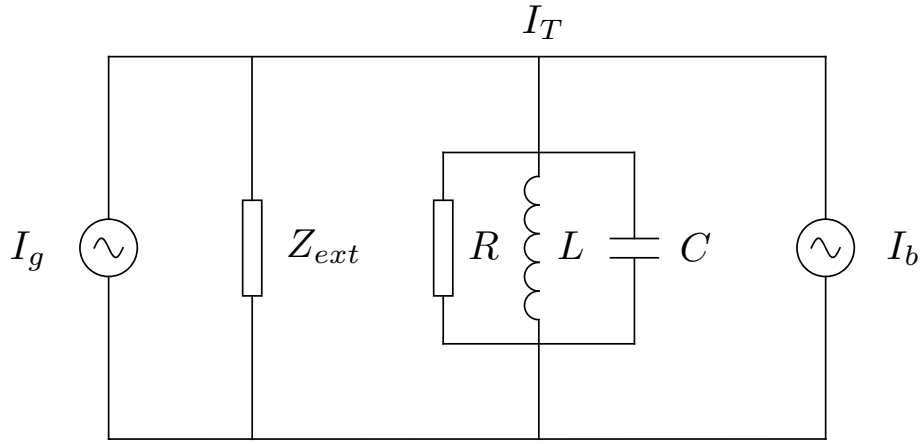


Fig. 4.4 等価回路

**Unloaded quality factor**

$$Q_0 = \omega_0 \frac{(1/2)CV^2}{V^2/(2R)} = \omega_0 RC \quad (4.12)$$

**External quality factor**

$$Q_{ext} = 2\pi \frac{\text{stored energy in cavity}}{\text{dissipated energy in external devices per cycle}} = \frac{\omega_0 W}{P_{ext}} \quad (4.13)$$

**Loaded quality factor**

$$Q_L = 2\pi \frac{\text{stored energy in cavity}}{\text{total energy per cycle}} = \frac{\omega_0 W}{P_{tot}} \quad (4.14)$$

ここで、

$$P_{tot} = P_{diss} + P_{ext} \quad (4.15)$$

したがって、

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ext}} \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{R_L} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_{ext}} \quad (4.17)$$

**Coupling factor  $\beta$**

$$\beta = \frac{P_{ext}}{P_{cav}} = \frac{Q_0}{Q_{ext}} = \frac{R}{Z_{ext}} = \frac{R}{n^2 Z_0} \quad (4.18)$$

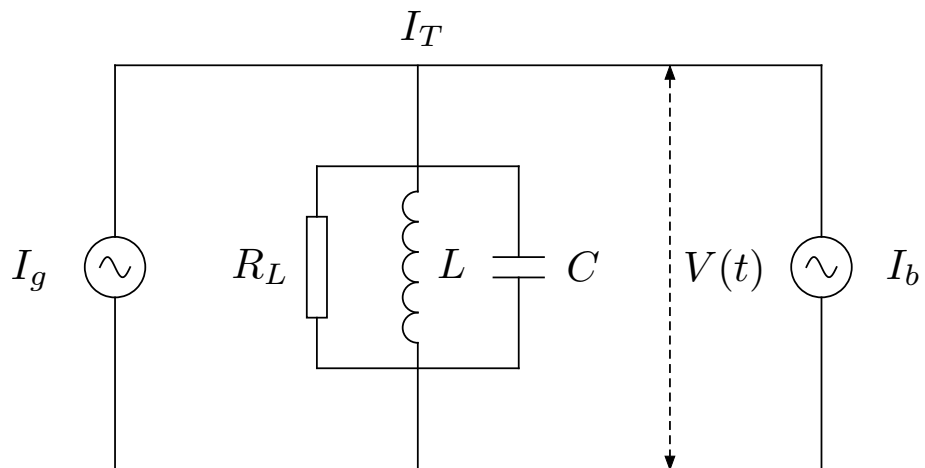


Fig. 4.5 等価回路 2

$$\ddot{V}(t) + \frac{1}{R_L C} \dot{V}(t) + \frac{1}{LC} V(t) = \frac{1}{C} \dot{I}(t) \quad (4.19)$$

**Phasor**

$$V(t) = \tilde{V} e^{j\omega_c t}, \quad I(t) = \tilde{I} e^{j\omega_c t} \quad (4.20)$$

### 4.3 Equations for cavity voltage

$$\begin{aligned}
V_c(t) &= \tilde{V}(t)e^{j\omega_c t}, & \tilde{V}(t) &= \hat{V}(1 + a_v(t))e^{j(\phi_v(t) + \psi_v)} \\
I_b(t) &= \tilde{I}_b(t)e^{j\omega_c t}, & \tilde{I}_b(t) &= \hat{I}_b(1 + a_b(t))e^{j(\phi_b(t) + \psi_b)} \\
I_g(t) &= \tilde{I}_g(t)e^{j\omega_c t}, & \tilde{I}_g(t) &= \hat{I}_g(1 + a_g(t))e^{j(\phi_g(t) + \psi_g)} \\
I_t(t) &= I_g(t) + I_b(t) = \tilde{I}_t(t)e^{j\omega_c t}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\ddot{V}_c(t) + 2\sigma\dot{V}_c(t) + \omega_0^2 V_c(t) = 2\sigma R\dot{I}_t(t) \tag{4.22}$$

## 4.4 Pedersen Model

### 4.4.1 Modulation Transfer Function

振幅変調 (AM) や位相変調 (PM) された正弦波信号を伝達関数  $H(s)$  を持つシステムを介した場合、出力信号も一般に振幅変調と位相変調の両方を受けることになる。このようなシステムの完全な特性評価には、システムの伝達関数  $H(s)$  から導き出すことができる次の 4 つの異なる変調伝達関数 (Modulation Transfer Function) を求める必要がある。(Fig.4.6)

1. 入力の変調振幅が出力の振幅を変調する伝達関数:  $G_{aa}(s)$
2. 入力の変調位相が出力の位相を変調する伝達関数:  $G_{pp}(s)$
3. 入力の変調振幅が出力の位相を変調する伝達関数:  $G_{ap}(s)$
4. 入力の変調位相が出力の振幅を変調する伝達関数:  $G_{pa}(s)$

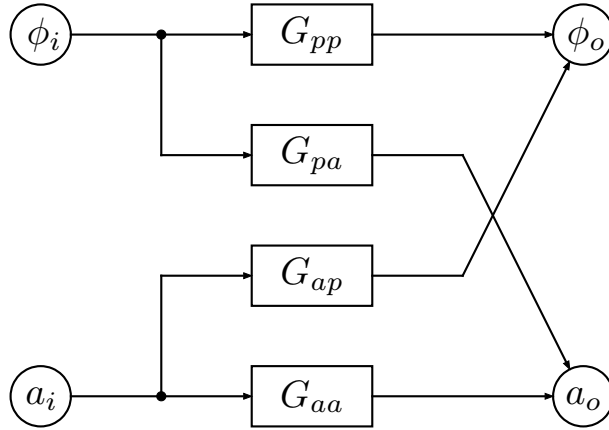


Fig. 4.6 Modulation Transfer Function.

変調の振幅が十分小さい場合、変調の伝送は線形であり、次のようにして求めることができる。

最初に、入力信号の振幅のみが  $a_i(t)$  で変調された場合を考える。このとき、入力信号  $x(t)$  は次のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re} \left\{ \hat{X}(1 + a_i(t))e^{j\omega_c t} \right\} \\ &= \hat{X} \{ \cos \omega_c t + a_i(t) \cos \omega_c t \} \end{aligned} \quad (4.23)$$

出力信号  $y(t)$  は  $a_i(t)$  によって振幅だけでなく位相も変調され、

$$y(t) = \text{Re} \left\{ \hat{Y}(1 + a_{o,a}(t))e^{j(\omega_c t + \phi_0 + \phi_{o,a}(t))} \right\} \quad (4.24)$$



と表すことができる。この時、変調伝達関数  $G_{aa}(s)$ ,  $G_{ap}(s)$  は、次のように定義される。

$$G_{aa}(s) = \frac{\hat{a}_{o,a}(s)}{\hat{a}_i(s)}, \quad G_{ap}(s) = \frac{\hat{\phi}_{o,a}(s)}{\hat{a}_i(s)} \quad (4.25)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos \omega_c t] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}] \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty e^{j\omega_c t} e^{-st} dt + \int_0^\infty e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)} \right]_0^\infty + \left[ \frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)} \right]_0^\infty \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-j\omega_c} + \frac{1}{s+j\omega_c} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_c^2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

また、 $\mathcal{L}\{a_i(t)\} = \hat{a}_i(s)$  とすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[a_i(t) \cos \omega_c t] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(a_i(t)e^{j\omega_c t} + a_i(t)e^{-j\omega_c t})] \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty a_i(t)e^{j\omega_c t} e^{-st} dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty a_i(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \{ \hat{a}_i(s-j\omega_c) + \hat{a}_i(s+j\omega_c) \} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  とし、(4.23) をラプラス変換すると、

$$X(s) = \frac{\hat{X}}{2} \left\{ \frac{2s}{s^2 + \omega_c^2} + a_i(s-j\omega_c) + a_i(s+j\omega_c) \right\} \quad (4.28)$$

一方、出力信号  $y(t)$  は  $a_o \ll 1$ ,  $\phi_o \ll 1$  の場合、以下のように近次できる。

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq \text{Re} \left\{ \hat{Y}(1 + a_{o,a}(t))(1 + j\phi_{o,a}(t))e^{j(\omega_c t + \phi_o)} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \hat{Y}(1 + a_{o,a}(t) + j\phi_{o,a}(t) + \underbrace{ja_{o,a}(t)\phi_{o,a}(t)}_0)e^{j(\omega_c t + \phi_o)} \right\} \\ &\simeq \text{Re} \left\{ \hat{Y}(1 + a_{o,a}(t) + j\phi_{o,a}(t))(\cos(\omega_c t + \phi_o) + j\sin(\omega_c t + \phi_o)) \right\} \\ &= \hat{Y} \{ \cos(\omega_c t + \phi_o) + a_o(t) \cos(\omega_c t + \phi_o) - \phi_o(t) \sin(\omega_c t + \phi_o) \} \end{aligned} \quad (4.29)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos(\omega_c t + \phi_o)] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(e^{j(\omega_c t + \phi_o)} + e^{-j(\omega_c t + \phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty e^{j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt + \int_0^\infty e^{-j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2} \int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \frac{e^{-j\phi_o}}{2} \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t} dt \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2} \left[ \frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)} \right]_0^\infty + \frac{e^{-j\phi_o}}{2} \left[ \frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)} \right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{j\phi_o}}{s-j\omega_c} + \frac{e^{-j\phi_o}}{s+j\omega_c} \right) = \frac{\cos \phi_o s - \omega_c \sin \phi_o}{s^2 + \omega_c^2} \quad (4.30)
\end{aligned}$$

また、 $\mathcal{L}\{a_{o,a}(t)\} = \hat{a}_{o,a}(s)$ ,  $\mathcal{L}\{\phi_{o,a}(t)\} = \hat{\phi}_{o,a}(s)$  とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_{o,a}(t) \cos(\omega_c t + \phi_o)] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(a_{o,a}(t) e^{j(\omega_c t + \phi_o)} + a_{o,a}(t) e^{-j(\omega_c t + \phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty a_{o,a}(t) e^{j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt + \int_0^\infty a_{o,a}(t) e^{-j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2} \int_0^\infty a_{o,a}(t) e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \frac{e^{-j\phi_o}}{2} \int_0^\infty a_{o,a}(t) e^{-(s+j\omega_c)t} dt \\
&= \frac{1}{2} \{ e^{j\phi_o} \hat{a}_{o,a}(s-j\omega_c) + e^{-j\phi_o} \hat{a}_{o,a}(s+j\omega_c) \} \quad (4.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\phi_{o,a}(t) \sin(\omega_c t + \phi_o)] &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[(\phi_{o,a}(t) e^{j(\omega_c t + \phi_o)} - \phi_{o,a}(t) e^{-j(\omega_c t + \phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2j} \left( \int_0^\infty \phi_{o,a}(t) e^{j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt - \int_0^\infty \phi_{o,a}(t) e^{-j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2j} \int_0^\infty \phi_{o,a}(t) e^{-(s-j\omega_c)t} dt - \frac{e^{-j\phi_o}}{2j} \int_0^\infty \phi_{o,a}(t) e^{-(s+j\omega_c)t} dt \\
&= -\frac{j}{2} \{ e^{j\phi_o} \hat{\phi}_{o,a}(s-j\omega_c) - e^{-j\phi_o} \hat{\phi}_{o,a}(s+j\omega_c) \} \quad (4.32)
\end{aligned}$$

したがって、 $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  とし (4.29) をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{\hat{Y}}{2} \left[ \frac{2(\cos \phi_o s - \omega_c \sin \phi_o)}{s^2 + \omega_c^2} + e^{j\phi_o} \hat{a}_{o,a}(s-j\omega_c) + e^{-j\phi_o} \hat{a}_{o,a}(s+j\omega_c) \right. \\
&\quad \left. + j \{ e^{j\phi_o} \hat{\phi}_{o,a}(s-j\omega_c) - e^{-j\phi_o} \hat{\phi}_{o,a}(s+j\omega_c) \} \right] \quad (4.33)
\end{aligned}$$

ここで、(4.25) より (4.33) は

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{\hat{Y}}{2} \left[ \frac{2(\cos \phi_o s - \omega_c \sin \phi_o)}{s^2 + \omega_c^2} \right. \\
&\quad + e^{j\phi_o} G_{aa}(s-j\omega_c) \hat{a}_i(s-j\omega_c) + e^{-j\phi_o} G_{aa}(s+j\omega_c) \hat{a}_i(s+j\omega_c) \\
&\quad \left. + j \{ e^{j\phi_o} G_{ap}(s-j\omega_c) \hat{a}_i(s-j\omega_c) - e^{-j\phi_o} G_{ap}(s+j\omega_c) \hat{a}_i(s+j\omega_c) \} \right]
\end{aligned}$$

したがって、

$$Y(s) = \frac{\hat{Y}}{2} \left[ \frac{2(\cos \phi_0 s - \omega_c \sin \phi_0)}{s^2 + \omega_c^2} + e^{j\phi_0} \{G_{aa}(s - j\omega_c) + jG_{ap}(s - j\omega_c)\} \hat{a}_i(s - j\omega_c) \right. \\ \left. + e^{-j\phi_0} \{G_{aa}(s + j\omega_c) - jG_{ap}(s + j\omega_c)\} \hat{a}_i(s + j\omega_c) \right] \quad (4.34)$$

ここで  $Y(s) = H(s)X(s)$  より、(4.28) は、

$$Y(s) = \frac{\hat{X}H(s)}{2} \left[ \frac{2s}{(s^2 + \omega_c^2)} + \hat{a}_i(s - j\omega_c) + \hat{a}_i(s + j\omega_c) \right] \quad (4.35)$$

(4.34) と (4.35) で係数を比較すると、

$$\hat{Y}(\cos \phi_0 s - \omega_c \sin \phi_0) = \hat{X}H(s)s \quad (4.36)$$

$$G_{aa}(s - j\omega_c) + jG_{ap}(s - j\omega_c) = \frac{\hat{X}}{\hat{Y}} e^{-j\phi_0} H(s) \\ G_{aa}(s + j\omega_c) - jG_{ap}(s + j\omega_c) = \frac{\hat{X}}{\hat{Y}} e^{j\phi_0} H(s) \quad (4.37)$$

(4.36) で、 $s = \pm j\omega_c$  の時を考えると、

$$H(\pm j\omega_c) = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}} e^{\pm j\phi_0} \quad (4.38)$$

(4.37) と (4.38) より、

$$G_{aa}(s - j\omega_c) + jG_{ap}(s - j\omega_c) = \frac{H(s)}{H(j\omega_c)} \\ G_{aa}(s + j\omega_c) - jG_{ap}(s + j\omega_c) = \frac{H(s)}{H(-j\omega_c)} \quad (4.39)$$

以上より、入力の振幅変調に関する変調伝達関数  $G_{aa}(s)$ ,  $G_{ap}(s)$  は、

$$G_{aa}(s) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} + \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \right\} = G_s(s) \\ G_{ap}(s) = \frac{-j}{2} \left\{ \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} - \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \right\} = G_c(s) \quad (4.40)$$

今度は、入力信号の位相のみが  $\phi_i(t)$  で変調された信号を考えると、

$$x(t) = \text{Re}\{\hat{X}e^{j(\omega_c t + \phi_i(t))}\} \quad (4.41)$$

出力信号は先程と同様に考えると、

$$y(t) = \text{Re}\{\hat{Y}(1 + a_{o,p}(t))e^{j(\omega_c t + \phi_0 + \phi_{o,p}(t))}\} \quad (4.42)$$

入力の位相変調に関する変調伝達関数  $G_{pp}(s)$ ,  $G_{pa}(s)$  は、

$$G_{pp}(s) = \frac{\hat{\phi}_{o,p}(s)}{\hat{\phi}_i(s)}, \quad G_{pa}(s) = \frac{\hat{a}_{o,p}(s)}{\hat{\phi}_i(s)} \quad (4.43)$$

(4.41) は、 $\phi_i(t) \ll 1$  の時、

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re}\{\hat{X}e^{j(\omega_c t + \phi_i(t))}\} \\ &\simeq \text{Re}\{\hat{X}(1 + j\phi_i(t))e^{j\omega_c t}\} \\ &= \hat{X}(\cos \omega_c t - \phi_i(t) \sin \omega_c t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

(4.44) をラプラス変換すると、

$$X(s) = \hat{X} \left[ \frac{s}{s^2 + \omega_c^2} + j \left\{ \hat{\phi}_i(s - j\omega_c) - \hat{\phi}_i(s + j\omega_c) \right\} \right] \quad (4.45)$$

(4.33) と同様にして (4.42) もラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{\hat{Y}}{2} \left[ \frac{2(\cos \phi_0 s - \omega_c \sin \phi_0)}{s^2 + \omega_c^2} + e^{j\hat{\phi}_0} a_{o,p}(s - j\omega_c) + e^{-j\hat{\phi}_0} \hat{a}_{o,p}(s + j\omega_c) \right. \\ \left. + j \left\{ e^{j\hat{\phi}_0} \hat{\phi}_{o,p}(s - j\omega_c) - e^{-j\hat{\phi}_0} \hat{\phi}_{o,p}(s + j\omega_c) \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

同様に (4.46) は

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{\hat{Y}}{2} \left[ \frac{2(\cos \phi_0 s - \omega_c \sin \phi_0)}{s^2 + \omega_c^2} + e^{j\hat{\phi}_0} \{G_{pa}(s - j\omega_c) + jG_{pp}(s - j\omega_c)\} \hat{\phi}_i(s - j\omega_c) \right. \\ \left. + e^{-j\hat{\phi}_0} \{G_{pa}(s + j\omega_c) - jG_{pp}(s + j\omega_c)\} \hat{\phi}_i(s + j\omega_c) \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

ここで  $Y(s) = H(s)X(s)$  より、

$$Y(s) = \frac{\hat{X}H(s)}{2} \left[ \frac{2s}{s^2 + \omega_c^2} + j \left\{ \hat{\phi}_i(s - j\omega_c) - \hat{\phi}_i(s + j\omega_c) \right\} \right] \quad (4.48)$$

(4.47) と (4.48) で係数を比較し、(4.38) を使うと、

$$\begin{aligned} G_{pa}(s - j\omega_c) + jG_{pp}(s - j\omega_c) &= j \frac{H(s)}{H(j\omega_c)} \\ G_{pa}(s + j\omega_c) - jG_{pp}(s + j\omega_c) &= -j \frac{H(s)}{H(-j\omega_c)} \end{aligned} \quad (4.49)$$

したがって、

$$\begin{aligned} G_{pa}(s) + jG_{pp}(s) &= j \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} \\ G_{pa}(s) - jG_{pp}(s) &= -j \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \end{aligned} \quad (4.50)$$

以上の結果から、変調伝達関数は以下の様になる。

$$\begin{aligned} G_{aa}(s) = G_{pp}(s) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} + \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \right\} = G_s(s) \\ G_{ap}(s) = -G_{pa}(s) &= \frac{j}{2} \left\{ \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} - \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \right\} = G_c(s) \end{aligned} \quad (4.51)$$

#### 4.4.2 空洞共振器への適用

$$Z(s) = \frac{2\sigma R_s}{s^2 + 2\sigma s + \omega_r^2} \quad (4.52)$$

$$G_{aa}(s) = G_{pp} = \frac{\sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z) + \sigma s}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z)} \quad (4.53)$$

$$G_{pa}(s) = -G_{ap} = \frac{\sigma \tan \phi_z s}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z)} \quad (4.54)$$



## 第 5 章 Robinson instability





## 付録 A ラプラス変換

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\cos \omega_c t] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}] \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty e^{j\omega_c t} e^{-st} dt + \int_0^\infty e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)} \right]_0^\infty + \left[ \frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)} \right]_0^\infty \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-j\omega_c} + \frac{1}{s+j\omega_c} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_c^2}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\cos(\omega_c t + \phi_o)] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j(\omega_c t + \phi_o)} + e^{-j(\omega_c t + \phi_o)}] \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty e^{j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt + \int_0^\infty e^{-j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt \right) \\
 &= \frac{e^{j\phi_o}}{2} \int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \frac{e^{-j\phi_o}}{2} \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t} dt \\
 &= \frac{e^{j\phi_o}}{2} \left[ \frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)} \right]_0^\infty + \frac{e^{-j\phi_o}}{2} \left[ \frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)} \right]_0^\infty \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{j\phi_o}}{s-j\omega_c} + \frac{e^{-j\phi_o}}{s+j\omega_c} \right) = \frac{\cos \phi_o s - \omega_c \sin \phi_o}{s^2 + \omega_c^2}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$\mathcal{L}\{a_i(t)\} = \hat{a}_i(s)$  とすると、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[a_i(t) \cos \omega_c t] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(a_i(t)e^{j\omega_c t} + a_i(t)e^{-j\omega_c t})] \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty a_i(t)e^{j\omega_c t} e^{-st} dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty a_i(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} \{ \hat{a}_i(s-j\omega_c) + \hat{a}_i(s+j\omega_c) \}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$\mathcal{L}\{a_{o,a}(t)\} = \hat{a}_{o,a}(s)$ ,  $\mathcal{L}\{\phi_{o,a}(t)\} = \hat{\phi}_{o,a}(s)$  とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_{o,a}(t) \cos(\omega_c t + \phi_o)] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(a_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t + \phi_o)} + a_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t + \phi_o)}e^{-st}dt + \int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_o)}e^{-st}dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2} \int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-(s-j\omega_c)t}dt + \frac{e^{-j\phi_o}}{2} \int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-(s+j\omega_c)t}dt \\
&= \frac{1}{2} \{ e^{j\phi_o} \hat{a}_{o,a}(s - j\omega_c) + e^{-j\phi_o} \hat{a}_{o,a}(s + j\omega_c) \} \tag{A.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\phi_{o,a}(t) \sin(\omega_c t + \phi_o)] &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[(\phi_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t + \phi_o)} - \phi_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2j} \left( \int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t + \phi_o)}e^{-st}dt - \int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_o)}e^{-st}dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2j} \int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-(s-j\omega_c)t}dt - \frac{e^{-j\phi_o}}{2j} \int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-(s+j\omega_c)t}dt \\
&= -\frac{j}{2} \{ e^{j\phi_o} \hat{\phi}_{o,a}(s - j\omega_c) - e^{-j\phi_o} \hat{\phi}_{o,a}(s + j\omega_c) \} \tag{A.5}
\end{aligned}$$

## 付録 B 変調

### B.1 定義とベクトル表記

高周波の搬送波で情報を伝送するには変調が必要である。実際、信号が時間の純粋な正弦関数から外れるたびに変調が行われる。

振幅 ( $a(t)$ ) と位相 ( $p(t)$ ) で変調された  $\omega_c$  における搬送波正弦波の時間依存性は次式で表される:

$$x(t) = \operatorname{Re}\left\{\hat{X}(1 + a(t))e^{j(\omega_c t + \phi(t))}\right\} \quad (\text{B.1})$$

純粋な正弦波変調の場合:

$$x(t) = \operatorname{Re}\left\{\hat{X}(1 + \hat{a} \cos \omega_{\text{AM}} t)e^{j(\omega_c t + \hat{\phi} \sin \omega_{\text{PM}} t)}\right\} \quad (\text{B.2})$$

## B.2 Pedersen Model

### B.2.1 空洞を介した位相、振幅、チューニング伝送

位相および振幅が変調された正弦波信号は次のように表せる。

位相および振幅変調された正弦波信号を送信する場合：

$a_i(t)$  で振幅変調され、 $\phi(t)$  で位相変調された角振動数  $\omega_c$  の正弦波信号は、次のように表される。

$$x(t) = \text{Re}\left\{A_i(1 + a_i(t))e^{j(\omega_c t + \phi_i(t))}\right\} \quad (\text{B.3})$$

$a_i \ll 1$ ,  $\phi_i \ll 1$  の場合、(B.3) は

$$\begin{aligned} x(t) &\simeq \text{Re}\{A_i(1 + a_i(t))(1 + j\phi_i(t))e^{j\omega_c t}\} \\ &= \text{Re}\left\{A_i(1 + a_i(t) + j\phi_i(t) + \underbrace{ja_i(t)\phi_i(t)}_0)e^{j\omega_c t}\right\} \\ &\simeq \text{Re}\{A_i(1 + a_i(t) + j\phi_i(t))e^{j\omega_c t}\} \\ &= \text{Re}\{A_i(1 + a_i(t) + j\phi_i(t))(\cos \omega_c t + j \sin \omega_c t)\} \\ &= A_i(\cos \omega_c t + a_i(t) \cos \omega_c t - \phi(t) \sin \omega_c t) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos \omega_c t] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}] \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty e^{j\omega_c t} e^{-st} dt + \int_0^\infty e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)} \right]_0^\infty + \left[ \frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)} \right]_0^\infty \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-j\omega_c} + \frac{1}{s+j\omega_c} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_c^2} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

また、 $\mathcal{L}\{a_i(t)\} = a_i(s)$ ,  $\mathcal{L}\{\phi_i(t)\} = \phi_i(s)$  とすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[a_i(t) \cos \omega_c t] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(a_i(t)e^{j\omega_c t} + a_i(t)e^{-j\omega_c t})] \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty a_i(t)e^{j\omega_c t} e^{-st} dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty a_i(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\ &= \frac{a_i(s-j\omega_c) + a_i(s+j\omega_c)}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\phi_i(t) \sin \omega_c t] &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[(\phi_i(t) e^{j\omega_c t} - \phi_i(t) e^{-j\omega_c t})] \\
&= \frac{1}{2j} \left( \int_0^\infty \phi_i(t) e^{j\omega_c t} e^{-st} dt - \int_0^\infty \phi_i(t) e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{1}{2j} \left( \int_0^\infty \phi_i(t) e^{-(s-j\omega_c)t} dt - \int_0^\infty \phi_i(t) e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\
&= \frac{\phi_i(s-j\omega_c) - \phi_i(s+j\omega_c)}{2j}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

以上より、 $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  とし、(B.4) をラプラス変換すると、

$$X(s) = \frac{A_i}{2} \left\{ \frac{2s}{s^2 + \omega_c^2} + a_i(s-j\omega_c) + j\phi_i(s-j\omega_c) + a_i(s+j\omega_c) - j\phi_i(s+j\omega_c) \right\} \tag{B.8}$$

伝達関数  $H(s)$  を介して、出力される信号  $y(t)$  は一般的に振幅と位相の両方は変調され、次の様に表せる。

$$y(t) = \text{Re} \left\{ A_o(1 + a_o(t)) e^{j(\omega_c t + \phi_z + \phi_o(t))} \right\} \tag{B.9}$$

$a_o \ll 1$ ,  $\phi_o \ll 1$  の場合、(B.9) は

$$\begin{aligned}
y(t) &\simeq \text{Re} \left\{ A_o(1 + a_o(t))(1 + j\phi_o(t)) e^{j(\omega_c t + \phi_z)} \right\} \\
&= \text{Re} \left\{ A_i(1 + a_o(t) + j\phi_o(t) + \underbrace{ja_o(t)\phi_o(t)}_0) e^{j(\omega_c t + \phi_z)} \right\} \\
&\simeq \text{Re} \{ A_o(1 + a_o(t) + j\phi_o(t)) (\cos(\omega_c t + \phi_z) + j \sin(\omega_c t + \phi_z)) \} \\
&= A_o(\cos(\omega_c t + \phi_z) + a_o(t) \cos(\omega_c t + \phi_z) - \phi_o(t) \sin(\omega_c t + \phi_z))
\end{aligned} \tag{B.10}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos(\omega_c t + \phi_z)] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j(\omega_c t + \phi_z)} + e^{-j(\omega_c t + \phi_z)}] \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty e^{j(\omega_c t + \phi_z)} e^{-st} dt + \int_0^\infty e^{-j(\omega_c t + \phi_z)} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2} \int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \frac{e^{-j\phi_z}}{2} \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t} dt \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2} \left[ \frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)} \right]_0^\infty + \frac{e^{-j\phi_z}}{2} \left[ \frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)} \right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{j\phi_z}}{s-j\omega_c} + \frac{e^{-j\phi_z}}{s+j\omega_c} \right) = \frac{\cos \phi_z s - \omega_c \sin \phi_z}{s^2 + \omega_c^2}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

また、 $\mathcal{L}\{a_o(t)\} = a_o(s)$ ,  $\mathcal{L}\{\phi_o(t)\} = \phi_o(s)$  とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_o(t) \cos(\omega_c t + \phi_z)] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(a_o(t)e^{j(\omega_c t + \phi_z)} + a_o(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_z)})] \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty a_o(t)e^{j(\omega_c t + \phi_z)} e^{-st} dt + \int_0^\infty a_o(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_z)} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2} \int_0^\infty a_o(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \frac{e^{-j\phi_z}}{2} \int_0^\infty a_o(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2} a_o(s-j\omega_c) + \frac{e^{-j\phi_z}}{2} a_o(s+j\omega_c) \tag{B.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\phi_o(t) \sin(\omega_c t + \phi_z)] &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[(\phi_o(t)e^{j(\omega_c t + \phi_z)} - \phi_o(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_z)})] \\
&= \frac{1}{2j} \left( \int_0^\infty \phi_o(t)e^{j(\omega_c t + \phi_z)} e^{-st} dt - \int_0^\infty \phi_o(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_z)} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2j} \int_0^\infty \phi_o(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt - \frac{e^{-j\phi_z}}{2j} \int_0^\infty \phi_o(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2j} \phi_o(s-j\omega_c) - \frac{e^{-j\phi_z}}{2j} \phi_o(s+j\omega_c) \tag{B.13}
\end{aligned}$$

以上より、 $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  とし、(B.10) をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned}
Y(s) = A_o \left[ \frac{\cos \phi_z s - \omega_c \sin \phi_z}{s^2 + \omega_c^2} + \frac{e^{j\phi_z}}{2} \{a_o(s-j\omega_c) + j\phi_o(s-j\omega_c)\} \right. \\
\left. + \frac{e^{-j\phi_z}}{2} \{a_o(s+j\omega_c) + j\phi_o(s+j\omega_c)\} \right] \tag{B.14}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{cases} a_o(s) = G_{aa}(s)a_i(s) + G_{pa}(s)\phi_i(s) \\ \phi_o(s) = G_{ap}(s)a_i(s) + G_{pp}(s)\phi_i(s) \end{cases} \tag{B.15}$$

より、(B.15) を (B.14) に代入すると、

$$\begin{aligned}
Y(s) = \frac{A_o}{2} \left[ \frac{2(\cos \phi_z s - \omega_c \sin \phi_z)}{s^2 + \omega_c^2} \right. \\
+ e^{j\phi_z} \{ (G_{aa}(s-j\omega_c) + jG_{ap}(s-j\omega_c))a_i(s-j\omega_c) \\
+ (G_{pa}(s-j\omega_c) + jG_{pp}(s-j\omega_c))\phi_i(s-j\omega_c) \\
+ e^{-j\phi_z} \{ (G_{aa}(s+j\omega_c) - jG_{ap}(s+j\omega_c))a_i(s+j\omega_c) \\
+ (G_{pa}(s+j\omega_c) - jG_{pp}(s+j\omega_c))\phi_i(s+j\omega_c) \} \left. \right] \tag{B.16}
\end{aligned}$$

ここで  $Y(s) = H(s)X(s)$  より、

$$Y(s) = \frac{A_i H(s)}{2} \left\{ \frac{2s}{s^2 + \omega_c^2} + a_i(s-j\omega_c) + j\phi_i(s-j\omega_c) + a_i(s+j\omega_c) - j\phi_i(s+j\omega_c) \right\} \tag{B.17}$$

(B.16) と (B.17) で係数を比較すると、

## 付録 C 加速空洞の等価回路

### C.1 RLC 並列共振回路の微分方程式

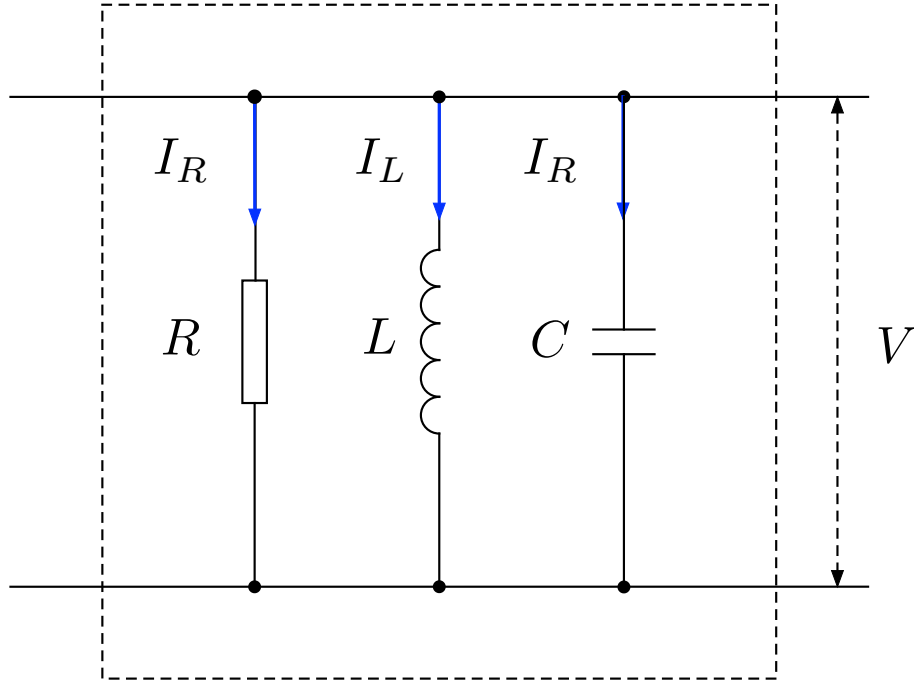


Fig. C.1 Cavity RLC Model

$$\begin{aligned}
 I(t) &= I_R(t) + I_L(t) + I_C(t) \\
 I_R(t) &= \frac{V(t)}{R}, \quad I_L(t) = \frac{1}{L} \int V(t) dt, \quad I_C(t) = C \frac{dV(t)}{dt}
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

したがって、

$$\frac{V(t)}{R} + \frac{1}{L} \int V(t) dt + C \frac{dV(t)}{dt} = I(t) \tag{C.2}$$

両辺を時間  $t$  で微分すると、

$$\frac{\dot{V}(t)}{R} + \frac{V(t)}{L} + CV\ddot{(t)} = \dot{I}(t) \tag{C.3}$$

$$\ddot{V}(t) + \frac{1}{CR} \dot{V}(t) + \frac{1}{LC} V(t) = \frac{1}{C} \dot{I}(t) \tag{C.4}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \sigma = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\omega_0}{2Q_L} \quad (\text{C.5})$$

$$\ddot{V}(t) + 2\sigma\dot{V}(t) + \omega_0^2 V(t) = 2\sigma R\dot{I}(t) \quad (\text{C.6})$$

## References

- [1] B.P. Lathi, Signals, systems and communication, Publ. John Wiley & Sons, 1965.
- [2] F. Pedersen, Beam Loading Effects in the CERN PS Booster, IEEE Trans. Nucl. Sci. 22, 3, June 1975.
- [3] S. Ninomiya, Beam Loading Effect on RF System in Proton Synchrotrons, KEK Report 89-18 (1989).
- [4] S. Simrock, Z. Geng, Low-Level Radio Frequency Systems, Springer (2022)
- [5] T. Schilcher Vector sum control of pulsed accelerating fields in Lorentz force detuned superconducting cavities (1998).
- [6] P. B. Wilson, High energy electron linacs; application to storage ring RF systems and linear colliders (1987)