

Beam Loading

Shin-ichi YOSHIMOTO

2023/7/7

Contents

第 I 部	Beam Loading	5
第 1 章	Static Beam Loading	7
1.1	Cavity の基礎	7
1.1.1	Power dissipation	7
1.1.2	Shut impedance	7
1.1.3	Available Power	8
1.2	ビーム負荷付き空洞の RCL 等価回路	8
1.2.1	Cavity parameters	8
1.3	Equations for cavity voltage	11
1.4	変調	12
1.4.1	定義とベクトル表記	12
1.5	Pedersen Model	13
1.5.1	空洞を介した位相、振幅、チューニング伝送	13
1.5.2	Modulation Transfer Function	14
1.5.3	空洞共振器への適用	18
第 2 章	Robinson instability	19
付録 A	加速空洞の等価回路	21
A.1	RLC 並列共振回路の微分方程式	21

第I部 Beam Loading

第 1 章 Static Beam Loading

1.1 Cavity の基礎

1.1.1 Power dissipation

$$P_{diss} = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{cav}^2}{R} = \frac{V_{cav}^2}{R_{sh}} \quad (1.1)$$

1.1.2 Shut impedance

$$R = \frac{1}{2} \cdot R_{sh} \quad (1.2)$$

空洞の入力カップラーの変圧比を $1:n$ とすると (Fig. 1.1)、

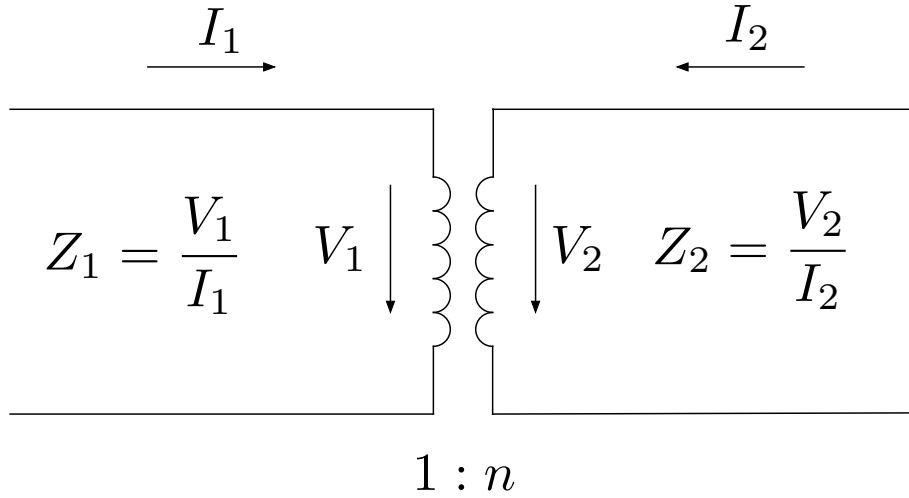


Fig. 1.1 理想的なトランスによる入力カップラー.

$$V_2 = N \cdot V_1, I_2 = \frac{1}{N} \cdot I_1 \quad (1.3)$$

したがって、

$$Z_2 = n^2 \cdot Z_1 \quad (1.4)$$

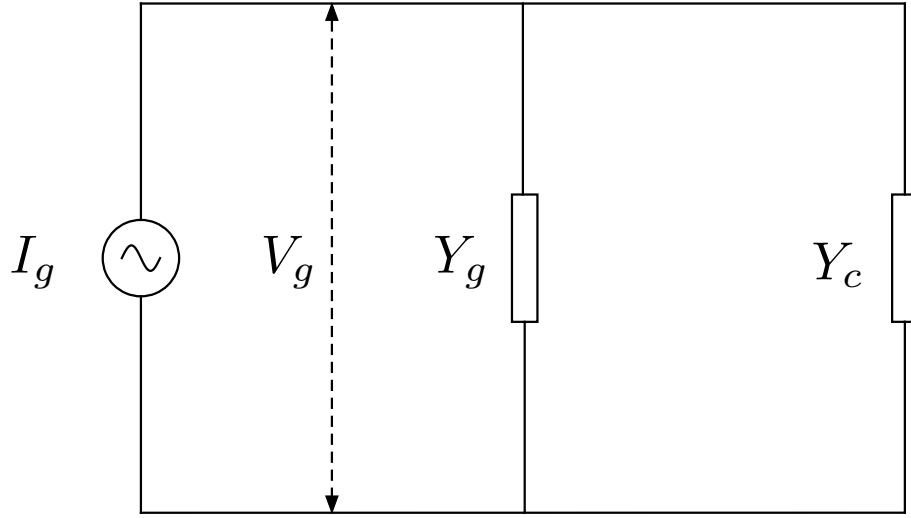


Fig. 1.2 理想的なトランスによる入力カップラー.

1.1.3 Available Power

$$P_{diss} = \frac{1}{2} Y_c V_g^2 \quad (1.5)$$

$$V_g = \frac{I_g}{Y_L} = \frac{I_g}{Y_g + Y_c} \quad (1.6)$$

$$P_{diss} = \frac{1}{2} \frac{Y_c}{(Y_g + Y_c)^2} I_g^2 \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{diss}}{\partial Y_c} &= \frac{1}{2} \frac{(Y_g + Y_c)^2 - 2Y_c(Y_g + Y_c)}{(Y_g + Y_c)^4} I_g^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{Y_g - Y_c}{(Y_g + Y_c)^3} I_g^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$\partial P_{diss} / \partial Y_c = 0$ より、 $Y_g = Y_c$ の時、 P_{diss} は最大になり

$$P_{diss}^{max} = \frac{1}{8} Y_g I_g^2 = \frac{1}{8} \frac{R}{\beta} I_g^2 \equiv P_g \quad (1.9)$$

1.2 ビーム負荷付き空洞の RCL 等価回路

1.2.1 Cavity parameters

共振周波数

$$\omega_0 = \frac{1}{LC} \quad (1.10)$$

Quality factor

$$Q = 2\pi \frac{\text{stored energy in cavity}}{\text{dissipated energy per cycle}} = \frac{\omega_0 W}{P_{diss}} \quad (1.11)$$

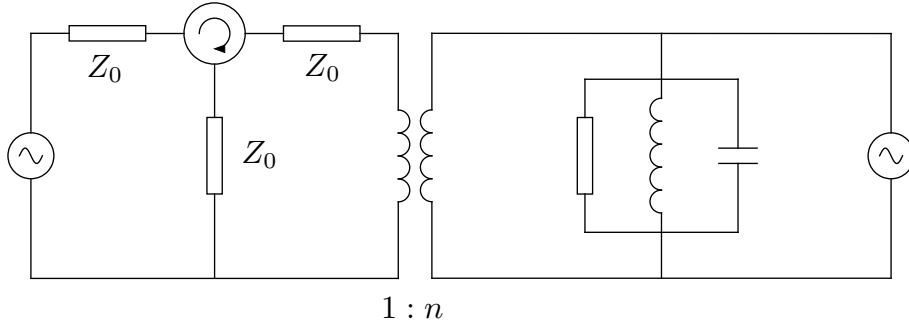


Fig. 1.3 理想的なトランスによる入力カップラー。

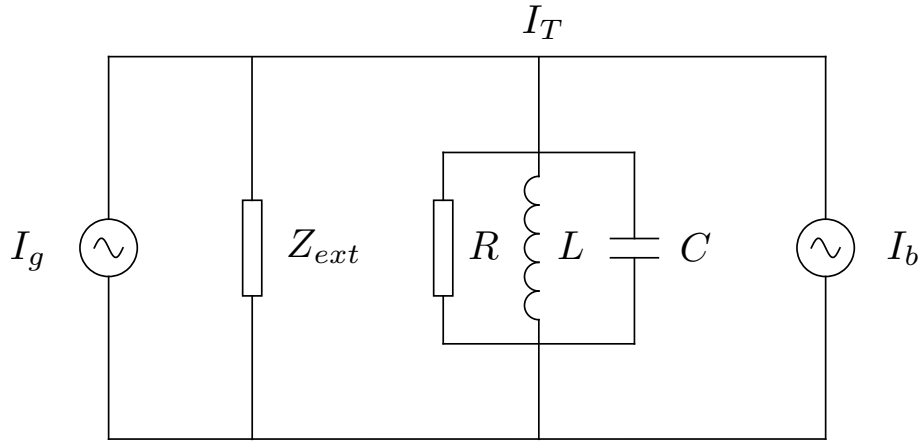


Fig. 1.4 等価回路

Unloaded quality factor

$$Q_0 = \omega_0 \frac{(1/2)CV^2}{V^2/(2R)} = \omega_0 RC \quad (1.12)$$

External quality factor

$$Q_{ext} = 2\pi \frac{\text{stored energy in cavity}}{\text{dissipated energy in external devices per cycle}} = \frac{\omega_0 W}{P_{ext}} \quad (1.13)$$

Loaded quality factor

$$Q_L = 2\pi \frac{\text{stored energy in cavity}}{\text{total energy per cycle}} = \frac{\omega_0 W}{P_{tot}} \quad (1.14)$$

ここで、

$$P_{tot} = P_{diss} + P_{ext} \quad (1.15)$$

したがって、

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ext}} \quad (1.16)$$

$$\frac{1}{R_L} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_{ext}} \quad (1.17)$$

Coupling factor β

$$\beta = \frac{P_{ext}}{P_{cav}} = \frac{Q_0}{Q_{ext}} = \frac{R}{Z_{ext}} = \frac{R}{n^2 Z_0} \quad (1.18)$$

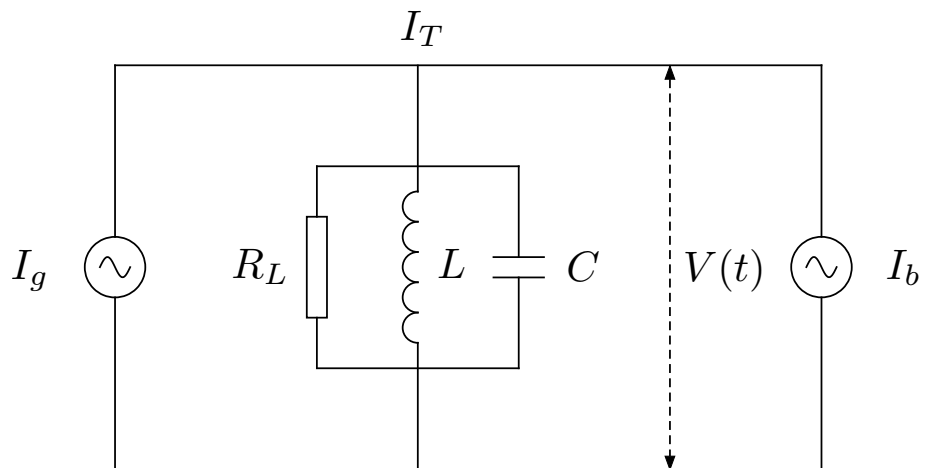


Fig. 1.5 等価回路 2

$$\ddot{V}(t) + \frac{1}{R_L C} \dot{V}(t) + \frac{1}{LC} V(t) = \frac{1}{C} \dot{I}(t) \quad (1.19)$$

Phasor

$$V(t) = \tilde{V} e^{j\omega_c t}, \quad I(t) = \tilde{I} e^{j\omega_c t} \quad (1.20)$$

1.3 Equations for cavity voltage

$$\begin{aligned}
V_c(t) &= \tilde{V}(t)e^{j\omega_c t}, & \tilde{V}(t) &= \hat{V}(1 + a_v(t))e^{j(\phi_v(t) + \psi_v)} \\
I_b(t) &= \tilde{I}_b(t)e^{j\omega_c t}, & \tilde{I}_b(t) &= \hat{I}_b(1 + a_b(t))e^{j(\phi_b(t) + \psi_b)} \\
I_g(t) &= \tilde{I}_g(t)e^{j\omega_c t}, & \tilde{I}_g(t) &= \hat{I}_g(1 + a_g(t))e^{j(\phi_g(t) + \psi_g)} \\
I_t(t) &= I_g(t) + I_b(t) = \tilde{I}_t(t)e^{j\omega_c t}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\ddot{V}_c(t) + 2\sigma\dot{V}_c(t) + \omega_0^2 V_c(t) = 2\sigma R\dot{I}_t(t) \tag{1.22}$$

1.4 変調

1.4.1 定義とベクトル表記

高周波の搬送波で情報を伝送するには変調が必要である。実際、信号が時間の純粋な正弦関数から外れるたびに変調が行われる。

振幅 ($a(t)$) と位相 ($p(t)$) で変調された ω_c における搬送波正弦波の時間依存性は次式で表される:

$$x(t) = \operatorname{Re}\left\{\hat{X}(1 + a(t))e^{j(\omega_c t + \phi(t))}\right\} \quad (1.23)$$

純粋な正弦波変調の場合:

$$x(t) = \operatorname{Re}\left\{\hat{X}(1 + \hat{a} \cos \omega_{\text{AM}} t)e^{j(\omega_c t + \hat{\phi} \sin \omega_{\text{PM}} t)}\right\} \quad (1.24)$$

1.5 Pedersen Model

1.5.1 空洞を介した位相、振幅、チューニング伝送

伝達関数 (インピーダンス) $Z(s)$ を通して送信する場合、出力信号は一般的に振幅変調と位相変調の両方になります：

位相および振幅が変調された正弦波信号は次のように表せる。

位相および振幅変調された正弦波信号を送信する場合：

$a_i(t)$ で振幅変調され、 $\phi(t)$ で位相変調された角振動数 ω_c の正弦波信号は、次のように表される。

$$x(t) = \text{Re}\left\{A_i(1 + a_i(t))e^{j(\omega_c t + \phi_i(t))}\right\} \quad (1.25)$$

$a_i \ll 1$, $\phi_i \ll 1$ の場合、(1.25) は

$$\begin{aligned} x(t) &\simeq \text{Re}\left\{A_i(1 + a_i(t))(1 + j\phi_i(t))e^{j\omega_c t}\right\} \\ &= \text{Re}\left\{A_i(1 + a_i(t) + j\phi_i(t) + \underbrace{ja_i(t)\phi(t)}_0)e^{j\omega_c t}\right\} \\ &\simeq \text{Re}\left\{A_i(1 + a_i(t) + j\phi_i(t))e^{j\omega_c t}\right\} \\ &= \text{Re}\left\{A_i(1 + a_i(t) + j\phi_i(t))(\cos \omega_c t + j \sin \omega_c t)\right\} \\ &= A_i(\cos \omega_c t + a_i(t) \cos \omega_c t - \phi(t) \sin \omega_c t) \end{aligned} \quad (1.26)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos \omega_c t] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}] \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{j\omega_c t} e^{-st} dt + \int_0^\infty e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)} \right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)} \right]_0^\infty \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega_c} + \frac{1}{s+j\omega_c} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega_c^2} \end{aligned} \quad (1.27)$$

また、 $\mathcal{L}\{a_i(t)\} = a_i(s)$, $\mathcal{L}\{\phi_i(t)\} = \phi_i(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[a_i(t) \cos \omega_c t] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(a_i(t)e^{j\omega_c t} + a_i(t)e^{-j\omega_c t})] \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty a_i(t)e^{j\omega_c t} e^{-st} dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty a_i(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\ &= \frac{a_i(s-j\omega_c) + a_i(s+j\omega_c)}{2}\end{aligned}\tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\phi_i(t) \sin \omega_c t] &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[(\phi_i(t)e^{j\omega_c t} - \phi_i(t)e^{-j\omega_c t})] \\ &= \frac{1}{2j} \left(\int_0^\infty \phi_i(t)e^{j\omega_c t} e^{-st} dt - \int_0^\infty \phi_i(t)e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\int_0^\infty \phi_i(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt - \int_0^\infty \phi_i(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\ &= \frac{\phi_i(s-j\omega_c) - \phi_i(s+j\omega_c)}{2j}\end{aligned}\tag{1.29}$$

以上より、 $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ とし、(1.26) をラプラス変換すると、

$$X(s) = A_i \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega_c^2} + \frac{a_i(s-j\omega_c) + a_i(s+j\omega_c)}{2} - \frac{\phi_i(s-j\omega_c) - \phi_i(s+j\omega_c)}{2j} \right\}\tag{1.30}$$

$$y(t) = \text{Re} \left\{ A_o(1 + a_o(t))e^{j(\omega_c t + \phi_z + \phi_o(t))} \right\}\tag{1.31}$$

1.5.2 Modulation Transfer Function

振幅変調 (AM) や位相変調 (PM) された正弦波信号を伝達関数 $H(s)$ を持つシステムを介した場合、出力信号も一般に振幅変調と位相変調の両方を受けることになる。このようなシステムの完全な特性評価には、システムの伝達関数 $H(s)$ から導き出すことができる次の 4 つの異なる変調伝達関数 (Modulation Transfer Function) を求める必要がある。(Fig.1.6)

1. 入力の振幅変調が出力の振幅を変調する伝達関数 : $G_{aa}(s)$
2. 入力の位相変調が出力の位相を変調する伝達関数 : $G_{pp}(s)$
3. 入力の振幅変調が出力の位相を変調する伝達関数 : $G_{ap}(s)$
4. 入力の位相変調が出力の振幅を変調する伝達関数 : $G_{pa}(s)$

変調の振幅が十分小さい場合、変調の伝送は線形であり、次のようにして求めることができる。

最初に、入力信号の振幅のみが $a_i(t)$ で変調された場合を考える。このとき、入力信号 $x(t)$ は次のようにあらわされる。

$$x(t) = \text{Re} \left\{ \hat{X}(1 + a_i(t))e^{j\omega_c t} \right\}\tag{1.32}$$

出力信号 $y(t)$ は $a_i(t)$ によって振幅だけでなく位相も変調され、

$$y(t) = \text{Re} \left\{ \hat{Y}(1 + a_{o,a}(t))e^{j(\omega_c t + \phi_0 + \phi_{o,a}(t))} \right\}\tag{1.33}$$

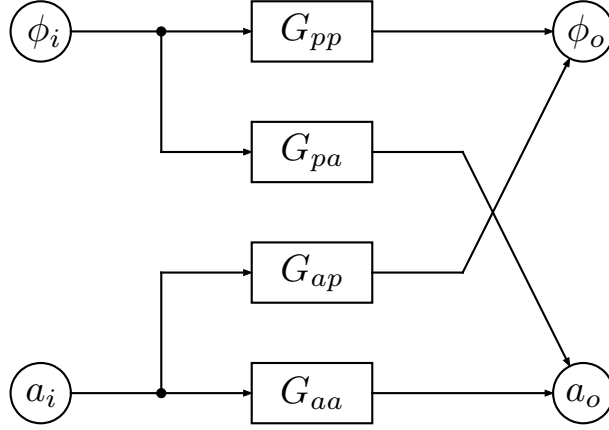


Fig. 1.6 Pedersen Model

と表すことができる。この時、入力の変調に関する変調伝達関数 $G_{aa}(s)$, $G_{ap}(s)$ は、

$$G_{aa}(s) = \frac{a_{o,a}(s)}{a_i(s)}, \quad G_{ap}(s) = \frac{\phi_{o,a}(s)}{a_i(s)} \quad (1.34)$$

となる。ここで、(1.32) は、

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re}\{\hat{X}(1 + a_i(t))e^{j\omega_c t}\} \\ &= \hat{X}(\cos \omega_c t + a_i(t) \cos \omega_c t) \\ &= \frac{\hat{X}}{2} \{(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}) + a_i(t)(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})\} \end{aligned} \quad (1.35)$$

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $a_i(s) = \mathcal{L}\{a_i(t)\}$ とし、(1.35) をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{\hat{X}}{2} \left\{ \frac{1}{s - j\omega_c} + \frac{1}{s + j\omega_c} + a_i(s - j\omega_c) + a_i(s + j\omega_c) \right\} \\ &= \hat{X} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega_c^2} + a_i(s - j\omega_c) + a_i(s + j\omega_c) \right\} \end{aligned} \quad (1.36)$$

変調の振幅が十分小さい場合、つまり、 $a_{o,a}(t) \ll 1$, $\phi_{o,a}(t) \ll 1$ の時、二次の微少量を無視すると (1.33) は、

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{Re} \left\{ \hat{Y}(1 + a_{o,a}(t))e^{j(\omega_c t + \phi_0 + \phi_{o,a}(t))} \right\} \\ &\simeq \text{Re} \left\{ \hat{Y}(1 + a_{o,a}(t))\{1 + j\phi_{o,a}(t)\}e^{j(\omega_c t + \phi_0)} \right\} \\ &\simeq \text{Re} \left\{ \hat{Y}(1 + a_{o,a}(t) + j\phi_{o,a}(t))e^{j(\omega_c t + \phi_0)} \right\} \\ &= \hat{Y} \{(1 + a_{o,a}(t)) \cos(\omega_c t + \phi_0) - \phi_{o,a}(t) \sin(\omega_c t + \phi_0)\} \\ &= \frac{\hat{Y}}{2} \left\{ (1 + a_{o,a}(t)) (e^{j(\omega_c t + \phi_0)} + e^{-j(\omega_c t + \phi_0)}) + j\phi_{o,a}(t) (e^{j(\omega_c t + \phi_0)} - e^{-j(\omega_c t + \phi_0)}) \right\} \end{aligned} \quad (1.37)$$

(1.37) をラプラス変換すると、

$$Y(s) = \frac{\hat{Y}}{2} \left[\frac{e^{j\phi_0}}{s - j\omega_c} + \frac{e^{-j\phi_0}}{s + j\omega_c} + e^{j\phi_0} a_{o,a}(s - j\omega_c) + e^{-j\phi_0} a_{o,a}(s + j\omega_c) \right. \\ \left. + j \{ e^{j\phi_0} \phi_{o,a}(s - j\omega_c) - e^{-j\phi_0} \phi_{o,a}(s + j\omega_c) \} \right] \quad (1.38)$$

ここで、(1.34) より (1.38) は

$$Y(s) = \frac{\hat{Y}}{2} \left[\frac{e^{j\phi_0}(s + j\omega_c) + e^{-j\phi_0}(s - j\omega_c)}{s^2 + \omega_c^2} \right. \\ \left. + e^{j\phi_0} G_{aa}(s - j\omega_c) a_i(s - j\omega_c) + e^{-j\phi_0} G_{aa}(s + j\omega_c) a_i(s + j\omega_c) \right. \\ \left. + j \{ e^{j\phi_0} G_{ap}(s - j\omega_c) a_i(s - j\omega_c) - e^{-j\phi_0} G_{ap}(s + j\omega_c) a_i(s + j\omega_c) \} \right]$$

したがって、

$$Y(s) = \hat{Y} \left[\frac{\cos \phi_0 s - \omega_c \sin \phi_0}{s^2 + \omega_c^2} + e^{j\phi_0} \{ G_{aa}(s - j\omega_c) + j G_{ap}(s - j\omega_c) \} a_i(s - j\omega_c) \right. \\ \left. + e^{-j\phi_0} \{ G_{aa}(s + j\omega_c) - j G_{ap}(s + j\omega_c) \} a_i(s + j\omega_c) \right] \quad (1.39)$$

ここで $Y(s) = H(s)X(s)$ より、

$$Y(s) = \hat{X} \left[\frac{s}{s^2 + \omega_c^2} + a_i(s - j\omega_c) + a_i(s + j\omega_c) \right] H(s) \quad (1.40)$$

(1.39) と (1.40) で係数を比較すると、

$$\hat{Y}(\cos \phi_0 s - \omega_c \sin \phi_0) = \hat{X} H(s) s \quad (1.41)$$

$$G_{aa}(s - j\omega_c) + j G_{ap}(s - j\omega_c) = \frac{\hat{X}}{\hat{Y}} e^{-j\phi_0} H(s) \\ G_{aa}(s + j\omega_c) - j G_{ap}(s + j\omega_c) = \frac{\hat{X}}{\hat{Y}} e^{j\phi_0} H(s) \quad (1.42)$$

(1.41) より

$$H(\pm j\omega_c) = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}} e^{\pm j\phi_0} \quad (1.43)$$

(1.42) と (1.43) より、

$$G_{aa}(s) + j G_{ap}(s) = \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} \\ G_{aa}(s) - j G_{ap}(s) = \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \quad (1.44)$$

以上より、入力振幅変調に関する変調伝達関数 $G_{aa}(s)$, $G_{ap}(s)$ は、

$$G_{aa}(s) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} + \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \right\} = G_s(s) \\ G_{ap}(s) = \frac{-j}{2} \left\{ \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} - \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \right\} = G_c(s) \quad (1.45)$$

今度は、入力信号の位相のみが $\phi_i(t)$ で変調された信号を考えると、

$$x(t) = \text{Re}\{\hat{X}e^{j(\omega_c t + \phi_i(t))}\} \quad (1.46)$$

出力信号は先程と同様に考えると、

$$y(t) = \text{Re}\{\hat{Y}(1 + a_{o,p}(t))e^{j(\omega_c t + \phi_0 + \phi_{o,p}(t))}\} \quad (1.47)$$

入力の位相変調に関する変調伝達関数 $G_{pp}(s)$, $G_{pa}(s)$ は、

$$G_{pp}(s) = \frac{\phi_{o,p}(s)}{\phi_i(s)}, \quad G_{pa}(s) = \frac{a_{o,p}(s)}{\phi_i(s)} \quad (1.48)$$

(1.46) は、 $\phi_i(t) \ll 1$ より、

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re}\{\hat{X}e^{j(\omega_c t + \phi_i(t))}\} \\ &\simeq \text{Re}\{\hat{X}(1 + j\phi_i(t))e^{j\omega_c t}\} \\ &= \hat{X}(\cos \omega_c t - \phi_i(t) \sin \omega_c t) \\ &= \frac{\hat{X}}{2} \{(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}) + j\phi_i(t)(e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t})\} \end{aligned} \quad (1.49)$$

(1.49) をラプラス変換すると、

$$X(s) = \hat{X} \left[\frac{s}{s^2 + \omega_c^2} + j \{ \phi_i(s - j\omega_c) - \phi_i(s + j\omega_c) \} \right] \quad (1.50)$$

(1.38) と同様に (1.47) もラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} Y(s) = \hat{Y} \left[\frac{\cos \phi_0 s - \omega_c \sin \phi_0}{s^2 + \omega_c^2} + e^{j\phi_0} a_{o,p}(s - j\omega_c) + e^{-j\phi_0} a_{o,p}(s + j\omega_c) \right. \\ \left. + j \{ e^{j\phi_0} \phi_{o,p}(s - j\omega_c) - e^{-j\phi_0} \phi_{o,p}(s + j\omega_c) \} \right] \end{aligned} \quad (1.51)$$

同様に (1.51) は

$$\begin{aligned} Y(s) = \hat{Y} \left[\frac{\cos \phi_0 s - \omega_c \sin \phi_0}{s^2 + \omega_c^2} + e^{j\phi_0} \{ G_{pa}(s - j\omega_c) + jG_{pp}(s - j\omega_c) \} \phi_i(s - j\omega_c) \right. \\ \left. + e^{-j\phi_0} \{ G_{pa}(s + j\omega_c) - jG_{pp}(s + j\omega_c) \} \phi_i(s + j\omega_c) \right] \end{aligned} \quad (1.52)$$

ここで $Y(s) = H(s)X(s)$ より、

$$Y(s) = \hat{X} \left[\frac{s}{s^2 + \omega_c^2} + j \{ \phi_i(s - j\omega_c) - \phi_i(s + j\omega_c) \} \right] H(s) \quad (1.53)$$

(1.52) と (1.53) で係数を比較し、(1.43) を使うと、

$$\begin{aligned} G_{pa}(s - j\omega_c) + jG_{pp}(s - j\omega_c) &= j \frac{H(s)}{H(j\omega_c)} \\ G_{pa}(s + j\omega_c) - jG_{pp}(s + j\omega_c) &= -j \frac{H(s)}{H(-j\omega_c)} \end{aligned} \quad (1.54)$$

したがって、

$$\begin{aligned} G_{pa}(s) + jG_{pp}(s) &= j \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} \\ G_{pa}(s) - jG_{pp}(s) &= -j \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \end{aligned} \quad (1.55)$$

以上の結果から、変調伝達関数は以下の様になる。

$$\begin{aligned} G_{aa}(s) = G_{pp}(s) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} + \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \right\} = G_s(s) \\ G_{ap}(s) = -G_{pa}(s) &= \frac{j}{2} \left\{ \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} - \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \right\} = G_c(s) \end{aligned} \quad (1.56)$$

1.5.3 空洞共振器への適用

$$Z(s) = \frac{2\sigma R_s}{s^2 + 2\sigma s + \omega_r^2} \quad (1.57)$$

$$G_{aa}(s) = G_{pp} = \frac{\sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z) + \sigma s}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z)} \quad (1.58)$$

$$G_{pa}(s) = -G_{ap} = \frac{\sigma \tan \phi_z s}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z)} \quad (1.59)$$

第 2 章 Robinson instability

付録 A 加速空洞の等価回路

A.1 RLC 並列共振回路の微分方程式

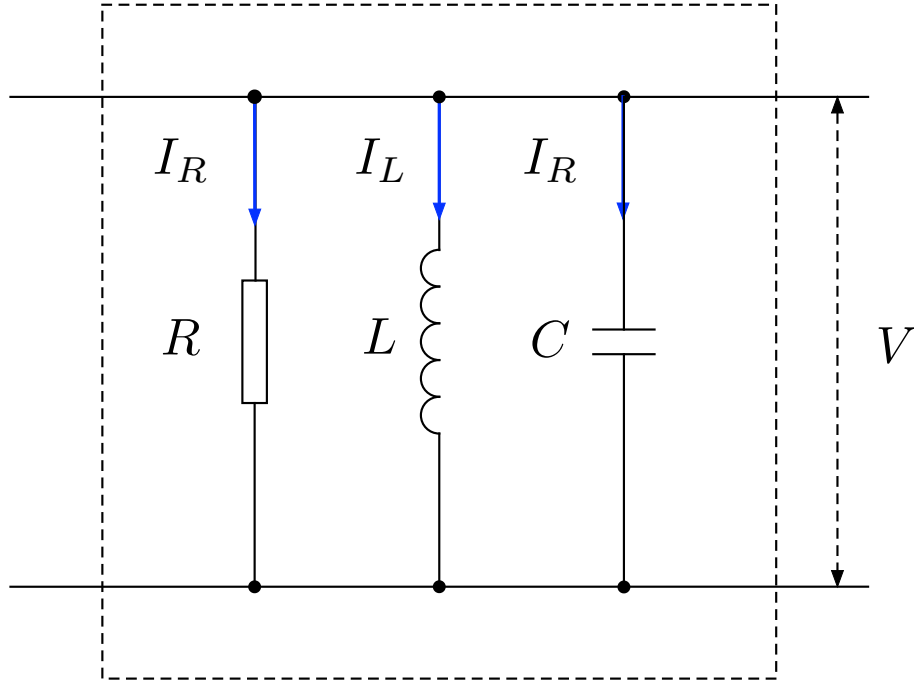


Fig. A.1 Cavity RLC Model

$$\begin{aligned}
 I(t) &= I_R(t) + I_L(t) + I_C(t) \\
 I_R(t) &= \frac{V(t)}{R}, \quad I_L(t) = \frac{1}{L} \int V(t) dt, \quad I_C(t) = C \frac{dV(t)}{dt}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

したがって、

$$\frac{V(t)}{R} + \frac{1}{L} \int V(t) dt + C \frac{dV(t)}{dt} = I(t) \tag{A.2}$$

両辺を時間 t で微分すると、

$$\frac{\dot{V}(t)}{R} + \frac{V(t)}{L} + CV\ddot{(t)} = I\dot{(t)} \tag{A.3}$$

$$\ddot{V}(t) + \frac{1}{CR} \dot{V}(t) + \frac{1}{LC} V(t) = \frac{1}{C} \dot{I}(t) \tag{A.4}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \sigma = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\omega_0}{2Q_L} \quad (\text{A.5})$$

$$\ddot{V}(t) + 2\sigma\dot{V}(t) + \omega_0^2 V(t) = 2\sigma R\dot{I}(t) \quad (\text{A.6})$$

References

- [1] F. Pedersen, Beam Loading Effects in the CERN PS Booster, IEEE Trans. Nucl. Sci. 22, 3, June 1975.
- [2] S. Ninomiya, Beam Loading Effect on RF System in Proton Synchrotrons, KEK Report 89-18 (1989).
- [3] S. Simrock, Z. Geng, Low-Level Radio Frequency Systems, Springer (2022)
- [4] T. Schilcher Vector sum control of pulsed accelerating fields in Lorentz force detuned superconducting cavities (1998).
- [5] P. B. Wilson, High energy electron linacs; application to storage ring RF systems and linear colliders (1987)