

Modulation

Shin-ichi YOSHIMOTO

2023/8/17

Contents

第 1 章	変調	5
1.1	定義とベクトル表記	5
1.2	線形システムを介した伝送	5
1.3	Pedersen Model	6
1.3.1	Modulation Transfer Function	6
1.3.2	空洞共振器への適用	11
付録 A	信号解析	13
A.1	アナログ信号とシステム	13
A.2	周波数伝達関数	14
A.2.1	部分分数展開を用いたラプラス逆変換の計算	14
付録 B	ラプラス変換	15
B.1	Pedersen Model	16
B.1.1	空洞を介した位相、振幅、チューニング伝送	16

第 1 章 変調

1.1 定義とベクトル表記

高周波の搬送波で情報を伝送するには変調が必要である。実際、信号が時間の純粋な正弦関数から外れるたびに変調が行われる。

振幅 ($a(t)$) と位相 ($p(t)$) で変調された ω_c における搬送波正弦波の時間依存性は次式で表される:

$$x(t) = \text{Re}\left\{\hat{X}(1 + a(t))e^{j(\omega_c t + \phi(t))}\right\} \quad (1.1)$$

純粋な正弦波変調の場合:

$$a(t) = \hat{a} \cos \omega_{AM} t \quad (1.2)$$

$$\phi(t) = \hat{\phi} \sin \omega_{PM} t \quad (1.3)$$

$$x(t) = \text{Re}\left\{\hat{X}(1 + \hat{a} \cos \omega_{AM} t)e^{j(\omega_c t + \hat{\phi} \sin \omega_{PM} t)}\right\} \quad (1.4)$$

変調の振幅が小さい場合、便利な近似式は:

$$x(t) \approx \text{Re}\left\{\hat{X}(1 + \hat{a} \cos \omega_{AM} t)(1 + j\hat{\phi} \sin \omega_{PM} t)e^{j\omega_c t}\right\} \quad (1.5)$$

この式は次のように再構成できる:

$$x(t) \approx \text{Re}\left\{\hat{X}\left[e^{j\omega_c t} + \frac{\hat{a}}{2}\left(e^{j(\omega_c + \omega_{AM})t} + e^{j(\omega_c - \omega_{AM})t}\right) + \frac{\hat{\phi}}{2}\left(e^{j(\omega_c + \omega_{PM})t} - e^{j(\omega_c - \omega_{PM})t}\right)\right]\right\} \quad (1.6)$$

1.2 線形システムを介した伝送

入力信号 $x(t)$ の変調振幅が小さい場合、式 (1.6) を用いることができ、システムは線形なので、出力信号 $y(t)$ は、それぞれの異なる周波数の重ね合わせとして書くことができる。

$$y(t) = \hat{X} \text{Re}\left\{\left[H(j\omega_c)e^{j\omega_c t} + \frac{\hat{a}}{2}\left[H(j(\omega_c + \omega_{AM}))e^{j(\omega_c + \omega_{AM})t} + H(j(\omega_c - \omega_{AM}))e^{j(\omega_c - \omega_{AM})t}\right] + \frac{\hat{\phi}}{2}\left[H(j(\omega_c + \omega_{PM}))e^{j(\omega_c + \omega_{PM})t} - H(j(\omega_c - \omega_{PM}))e^{j(\omega_c - \omega_{PM})t}\right]\right]\right\} \quad (1.7)$$

これは次のように書ける、

$$y(t) = \hat{X} \operatorname{Re} \left\{ H(j\omega_c) e^{j\omega_c t} \left[1 + \frac{\hat{a}}{2} \left[\frac{H(j(\omega_c + \omega_{AM}))}{H(j\omega_c)} e^{j\omega_{AM} t} + \frac{H(j(\omega_c - \omega_{AM}))}{H(j\omega_c)} e^{-j\omega_{AM} t} \right] + \frac{\hat{\phi}}{2} \left[\frac{H(j(\omega_c + \omega_{PM}))}{H(j\omega_c)} e^{j\omega_{PM} t} - \frac{H(j(\omega_c - \omega_{PM}))}{H(j\omega_c)} e^{-j\omega_{PM} t} \right] \right] \right\} \quad (1.8)$$

ここで、

$$G_s(j\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{H(j(\omega + \omega_c))}{H(j\omega_c)} + \frac{H(j(\omega - \omega_c))}{H(-j\omega_c)} \right] \quad (1.9)$$

$$G_c(j\omega) = \frac{j}{2} \left[\frac{H(j(\omega + \omega_c))}{H(j\omega_c)} - \frac{H(j(\omega - \omega_c))}{H(-j\omega_c)} \right] \quad (1.10)$$

と定義すると、

$$G_s(j\omega) + jG_c(j\omega) = \frac{H(j(\omega - \omega_c))}{H(-j\omega)} \quad (1.11)$$

$$G_s(j\omega) - jG_c(j\omega) = \frac{H(j(\omega + \omega_c))}{H(j\omega)} \quad (1.12)$$

1.3 Pedersen Model

1.3.1 Modulation Transfer Function

振幅変調 (AM) や位相変調 (PM) された正弦波信号を伝達関数 $H(s)$ を持つシステムを介した場合、出力信号も一般に振幅変調と位相変調の両方を受けることになる。このようなシステムの完全な特性評価には、システムの伝達関数 $H(s)$ から導き出すことができる次の 4 つの異なる変調伝達関数 (Modulation Transfer Function) を求める必要がある。(Fig.1.1)

1. 入力の変調が出力の振幅を変調する伝達関数： $G_{aa}(s)$
2. 入力の変調が出力の位相を変調する伝達関数： $G_{pp}(s)$
3. 入力の振幅変調が出力の位相を変調する伝達関数： $G_{ap}(s)$
4. 入力の位相変調が出力の振幅を変調する伝達関数： $G_{pa}(s)$

変調の振幅が十分小さい場合、変調の伝送は線形であり、次のようにして求めることができる。

最初に、入力信号の振幅のみが $a_i(t)$ で変調された場合を考える。このとき、入力信号 $x(t)$ は次のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \hat{X} (1 + a_i(t)) e^{j\omega_c t} \right\} \\ &= \hat{X} \{ \cos \omega_c t + a_i(t) \cos \omega_c t \} \end{aligned} \quad (1.13)$$

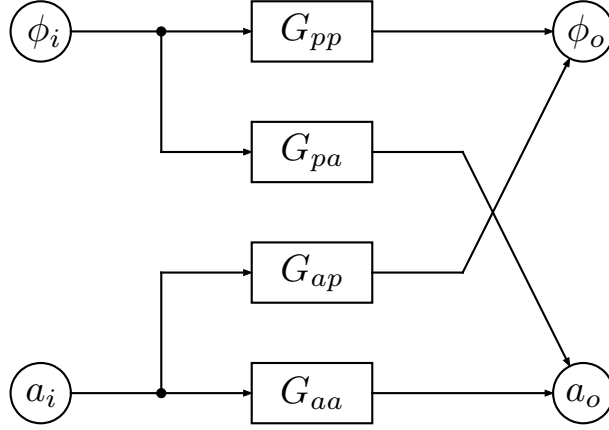


Fig. 1.1 Modulation Transfer Function.

出力信号 $y(t)$ は $a_i(t)$ によって振幅だけでなく位相も変調され、

$$y(t) = \text{Re} \left\{ \hat{Y} (1 + a_{o,a}(t)) e^{j(\omega_c t + \phi_0 + \phi_{o,a}(t))} \right\} \quad (1.14)$$

と表すことができる。この時、変調伝達関数 $G_{aa}(s)$, $G_{ap}(s)$ は、次のように定義される。

$$G_{aa}(s) = \frac{\hat{a}_{o,a}(s)}{\hat{a}_i(s)}, \quad G_{ap}(s) = \frac{\hat{\phi}_{o,a}(s)}{\hat{a}_i(s)} \quad (1.15)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos \omega_c t] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})] \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{j\omega_c t} e^{-st} dt + \int_0^\infty e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)} \right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)} \right]_0^\infty \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega_c} + \frac{1}{s+j\omega_c} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_c^2} \end{aligned} \quad (1.16)$$

また、 $\mathcal{L}\{a_i(t)\} = \hat{a}_i(s)$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[a_i(t) \cos \omega_c t] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(a_i(t)e^{j\omega_c t} + a_i(t)e^{-j\omega_c t})] \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty a_i(t)e^{j\omega_c t} e^{-st} dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty a_i(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \{ \hat{a}_i(s-j\omega_c) + \hat{a}_i(s+j\omega_c) \} \end{aligned} \quad (1.17)$$

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ とし、(1.13) をラプラス変換すると、

$$X(s) = \frac{\hat{X}}{2} \left\{ \frac{2s}{s^2 + \omega_c^2} + a_i(s-j\omega_c) + a_i(s+j\omega_c) \right\} \quad (1.18)$$

一方、出力信号 $y(t)$ は $a_o \ll 1$, $\phi_o \ll 1$ の場合、以下のように近次できる。

$$\begin{aligned}
y(t) &\simeq \text{Re} \left\{ \hat{Y}(1 + a_{o,a}(t))(1 + j\phi_{o,a}(t))e^{j(\omega_c t + \phi_o)} \right\} \\
&= \text{Re} \left\{ \hat{Y}(1 + a_{o,a}(t) + j\phi_{o,a}(t) + \underbrace{j a_{o,a}(t)\phi_{o,a}(t)}_0) e^{j(\omega_c t + \phi_o)} \right\} \\
&\simeq \text{Re} \left\{ \hat{Y}(1 + a_{o,a}(t) + j\phi_{o,a}(t))(\cos(\omega_c t + \phi_o) + j \sin(\omega_c t + \phi_o)) \right\} \\
&= \hat{Y} \{ \cos(\omega_c t + \phi_o) + a_o(t) \cos(\omega_c t + \phi_o) - \phi_o(t) \sin(\omega_c t + \phi_o) \}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos(\omega_c t + \phi_o)] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(e^{j(\omega_c t + \phi_o)} + e^{-j(\omega_c t + \phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt + \int_0^\infty e^{-j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2} \int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \frac{e^{-j\phi_o}}{2} \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t} dt \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2} \left[\frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)} \right]_0^\infty + \frac{e^{-j\phi_o}}{2} \left[\frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)} \right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j\phi_o}}{s-j\omega_c} + \frac{e^{-j\phi_o}}{s+j\omega_c} \right) = \frac{\cos \phi_o s - \omega_c \sin \phi_o}{s^2 + \omega_c^2}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

また、 $\mathcal{L}\{a_{o,a}(t)\} = \hat{a}_{o,a}(s)$, $\mathcal{L}\{\phi_{o,a}(t)\} = \hat{\phi}_{o,a}(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_{o,a}(t) \cos(\omega_c t + \phi_o)] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(a_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t + \phi_o)} + a_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt + \int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2} \int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \frac{e^{-j\phi_o}}{2} \int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \\
&= \frac{1}{2} \{ e^{j\phi_o} \hat{a}_{o,a}(s-j\omega_c) + e^{-j\phi_o} \hat{a}_{o,a}(s+j\omega_c) \}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\phi_{o,a}(t) \sin(\omega_c t + \phi_o)] &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[(\phi_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t + \phi_o)} - \phi_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2j} \left(\int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt - \int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2j} \int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt - \frac{e^{-j\phi_o}}{2j} \int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \\
&= -\frac{j}{2} \{ e^{j\phi_o} \hat{\phi}_{o,a}(s-j\omega_c) - e^{-j\phi_o} \hat{\phi}_{o,a}(s+j\omega_c) \}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

したがって、 $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ とし (1.19) をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{\hat{Y}}{2} \left[\frac{2(\cos \phi_o s - \omega_c \sin \phi_o)}{s^2 + \omega_c^2} + e^{j\phi_o} \hat{a}_{o,a}(s-j\omega_c) + e^{-j\phi_o} \hat{a}_{o,a}(s+j\omega_c) \right. \\
&\quad \left. + j \{ e^{j\phi_o} \hat{\phi}_{o,a}(s-j\omega_c) - e^{-j\phi_o} \hat{\phi}_{o,a}(s+j\omega_c) \} \right]
\end{aligned} \tag{1.23}$$

ここで、(1.15) より (1.23) は

$$Y(s) = \frac{\hat{Y}}{2} \left[\frac{2(\cos \phi_o s - \omega_c \sin \phi_o)}{s^2 + \omega_c^2} + e^{j\phi_0} G_{aa}(s - j\omega_c) \hat{a}_i(s - j\omega_c) + e^{-j\phi_0} G_{aa}(s + j\omega_c) \hat{a}_i(s + j\omega_c) + j \{ e^{j\phi_0} G_{ap}(s - j\omega_c) \hat{a}_i(s - j\omega_c) - e^{-j\phi_0} G_{ap}(s + j\omega_c) \hat{a}_i(s + j\omega_c) \} \right]$$

したがって、

$$Y(s) = \frac{\hat{Y}}{2} \left[\frac{2(\cos \phi_0 s - \omega_c \sin \phi_0)}{s^2 + \omega_c^2} + e^{j\phi_0} \{ G_{aa}(s - j\omega_c) + jG_{ap}(s - j\omega_c) \} \hat{a}_i(s - j\omega_c) + e^{-j\phi_0} \{ G_{aa}(s + j\omega_c) - jG_{ap}(s + j\omega_c) \} \hat{a}_i(s + j\omega_c) \right] \quad (1.24)$$

ここで $Y(s) = H(s)X(s)$ より、(1.18) は、

$$Y(s) = \frac{\hat{X}H(s)}{2} \left[\frac{2s}{(s^2 + \omega_c^2)} + \hat{a}_i(s - j\omega_c) + \hat{a}_i(s + j\omega_c) \right] \quad (1.25)$$

(1.24) と (1.25) で係数を比較すると、

$$\hat{Y}(\cos \phi_0 s - \omega_c \sin \phi_0) = \hat{X}H(s)s \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} G_{aa}(s - j\omega_c) + jG_{ap}(s - j\omega_c) &= \frac{\hat{X}}{\hat{Y}} e^{-j\phi_0} H(s) \\ G_{aa}(s + j\omega_c) - jG_{ap}(s + j\omega_c) &= \frac{\hat{X}}{\hat{Y}} e^{j\phi_0} H(s) \end{aligned} \quad (1.27)$$

(1.26) で、 $s = \pm j\omega_c$ の時を考えると、

$$H(\pm j\omega_c) = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}} e^{\pm j\phi_0} \quad (1.28)$$

(1.27) と (1.28) より、

$$\begin{aligned} G_{aa}(s - j\omega_c) + jG_{ap}(s - j\omega_c) &= \frac{H(s)}{H(j\omega_c)} \\ G_{aa}(s + j\omega_c) - jG_{ap}(s + j\omega_c) &= \frac{H(s)}{H(-j\omega_c)} \end{aligned} \quad (1.29)$$

以上より、入力振幅変調に関する変調伝達関数 $G_{aa}(s)$, $G_{ap}(s)$ は、

$$\begin{aligned} G_{aa}(s) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} + \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \right\} = G_s(s) \\ G_{ap}(s) &= \frac{-j}{2} \left\{ \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} - \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \right\} = G_c(s) \end{aligned} \quad (1.30)$$

今度は、入力信号の位相のみが $\phi_i(t)$ で変調された信号を考えると、

$$x(t) = \text{Re}\{\hat{X}e^{j(\omega_c t + \phi_i(t))}\} \quad (1.31)$$

出力信号は先程と同様に考えると、

$$y(t) = \text{Re}\{\hat{Y}(1 + a_{o,p}(t))e^{j(\omega_c t + \phi_0 + \phi_{o,p}(t))}\} \quad (1.32)$$

入力の位相変調に関する変調伝達関数 $G_{pp}(s)$, $G_{pa}(s)$ は、

$$G_{pp}(s) = \frac{\hat{\phi}_{o,p}(s)}{\hat{\phi}_i(s)}, \quad G_{pa}(s) = \frac{\hat{a}_{o,p}(s)}{\hat{\phi}_i(s)} \quad (1.33)$$

(1.31) は、 $\phi_i(t) \ll 1$ の時、

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re}\{\hat{X}e^{j(\omega_c t + \phi_i(t))}\} \\ &\simeq \text{Re}\{\hat{X}(1 + j\phi_i(t))e^{j\omega_c t}\} \\ &= \hat{X}(\cos \omega_c t - \phi_i(t) \sin \omega_c t) \end{aligned} \quad (1.34)$$

(1.34) をラプラス変換すると、

$$X(s) = \hat{X} \left[\frac{s}{s^2 + \omega_c^2} + j \left\{ \hat{\phi}_i(s - j\omega_c) - \hat{\phi}_i(s + j\omega_c) \right\} \right] \quad (1.35)$$

(1.23) と同様にして (1.32) もラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\hat{Y}}{2} \left[\frac{2(\cos \phi_0 s - \omega_c \sin \phi_0)}{s^2 + \omega_c^2} + e^{j\phi_0} a_{o,p}(s - j\omega_c) + e^{-j\phi_0} \hat{a}_{o,p}(s + j\omega_c) \right. \\ &\quad \left. + j \left\{ e^{j\phi_0} \hat{\phi}_{o,p}(s - j\omega_c) - e^{-j\phi_0} \hat{\phi}_{o,p}(s + j\omega_c) \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

同様に (1.36) は

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\hat{Y}}{2} \left[\frac{2(\cos \phi_0 s - \omega_c \sin \phi_0)}{s^2 + \omega_c^2} + e^{j\phi_0} \{G_{pa}(s - j\omega_c) + jG_{pp}(s - j\omega_c)\} \hat{\phi}_i(s - j\omega_c) \right. \\ &\quad \left. + e^{-j\phi_0} \{G_{pa}(s + j\omega_c) - jG_{pp}(s + j\omega_c)\} \hat{\phi}_i(s + j\omega_c) \right] \end{aligned} \quad (1.37)$$

ここで $Y(s) = H(s)X(s)$ より、

$$Y(s) = \frac{\hat{X}H(s)}{2} \left[\frac{2s}{s^2 + \omega_c^2} + j \left\{ \hat{\phi}_i(s - j\omega_c) - \hat{\phi}_i(s + j\omega_c) \right\} \right] \quad (1.38)$$

(1.37) と (1.38) で係数を比較し、(1.28) を使うと、

$$\begin{aligned} G_{pa}(s - j\omega_c) + jG_{pp}(s - j\omega_c) &= j \frac{H(s)}{H(j\omega_c)} \\ G_{pa}(s + j\omega_c) - jG_{pp}(s + j\omega_c) &= -j \frac{H(s)}{H(-j\omega_c)} \end{aligned} \quad (1.39)$$

したがって、

$$\begin{aligned} G_{pa}(s) + jG_{pp}(s) &= j \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} \\ G_{pa}(s) - jG_{pp}(s) &= -j \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \end{aligned} \quad (1.40)$$

以上の結果から、変調伝達関数は以下の様になる。

$$\begin{aligned} G_{aa}(s) = G_{pp}(s) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} + \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \right\} = G_s(s) \\ G_{ap}(s) = -G_{pa}(s) &= \frac{j}{2} \left\{ \frac{H(s + j\omega_c)}{H(j\omega_c)} - \frac{H(s - j\omega_c)}{H(-j\omega_c)} \right\} = G_c(s) \end{aligned} \quad (1.41)$$

1.3.2 空洞共振器への適用

$$Z(s) = \frac{2\sigma R_s}{s^2 + 2\sigma s + \omega_r^2} \quad (1.42)$$

$$G_{aa}(s) = G_{pp} = \frac{\sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z) + \sigma s}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z)} \quad (1.43)$$

$$G_{pa}(s) = -G_{ap} = \frac{\sigma \tan \phi_z s}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z)} \quad (1.44)$$

付録 A 信号解析

A.1 アナログ信号とシステム

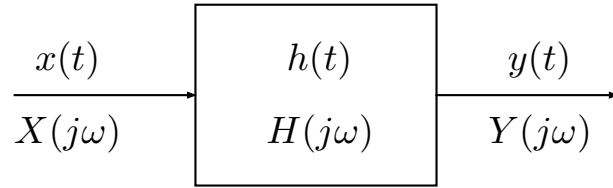


Fig. A.1 System Function.

Convolution

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (\text{A.1})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.2})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (\text{A.3})$$

入力信号を $x(t) = e^{j\omega t}$ とすると

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau \quad (\text{A.4})$$

$$= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau) d\tau \quad (\text{A.5})$$

ここで、 $h(t)$ のフーリエ変換を $H(j\omega)$ とすると、

$$\mathcal{F}[h(t)] = H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{A.6})$$

したがって、

$$y(t) = H(j\omega) e^{j\omega t} \quad (\text{A.7})$$

係数 $H(\omega)$ をシステム関数と呼びます。(1-37) または (1-38) から決定できます。(1-38) から $H(\omega)$ を決定するには、入力 $f(t) = e^{j\omega t}$ を適用します。関数 $H(\omega)$ は、結果の応答 $H(\omega)e^{j\omega t}$ の係数と等しくなります。

A.2 周波数伝達関数

A.2.1 部分分数展開を用いたラプラス逆変換の計算

一般に、有理関数で表された伝達関数 $G(s)$ は、

$$G(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad (\text{A.8})$$

入力を、 $u(t) = e^{j\omega t}$ とすると、ラプラス変換は、次式で与えられる。

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[e^{j\omega t}] = \frac{1}{s - j\omega} \quad (\text{A.9})$$

したがって、出力 $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ は、次のように部分分数展開できる。

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \frac{1}{s - j\omega} \\ &= \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n} + \frac{a}{s - j\omega} \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} k_i &= \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)G(s) \frac{s}{s - j\omega} \\ a &= \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)G(s) \frac{1}{s - j\omega} = \lim_{s \rightarrow j\omega} G(s) \cdot 1 = G(j\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

したがって、出力は $Y(s)$ を逆ラプラス変換して次式で求められる。

$$y(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_n e^{p_n t} + a e^{j\omega t} \quad (\text{A.11})$$

極の実部は負であるから、定常状態では次式で与えられる。

$$y(t) = a e^{j\omega t} = G(j\omega) e^{j\omega t} \quad (\text{A.12})$$

付録 B ラプラス変換

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\cos \omega_c t] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{j\omega_c t} e^{-st} dt + \int_0^\infty e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)} \right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)} \right]_0^\infty \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega_c} + \frac{1}{s+j\omega_c} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_c^2}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\cos(\omega_c t + \phi_o)] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j(\omega_c t + \phi_o)} + e^{-j(\omega_c t + \phi_o)}] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt + \int_0^\infty e^{-j(\omega_c t + \phi_o)} e^{-st} dt \right) \\
 &= \frac{e^{j\phi_o}}{2} \int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \frac{e^{-j\phi_o}}{2} \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t} dt \\
 &= \frac{e^{j\phi_o}}{2} \left[\frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)} \right]_0^\infty + \frac{e^{-j\phi_o}}{2} \left[\frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)} \right]_0^\infty \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j\phi_o}}{s-j\omega_c} + \frac{e^{-j\phi_o}}{s+j\omega_c} \right) = \frac{\cos \phi_o s - \omega_c \sin \phi_o}{s^2 + \omega_c^2}
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

$\mathcal{L}\{a_i(t)\} = \hat{a}_i(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[a_i(t) \cos \omega_c t] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(a_i(t)e^{j\omega_c t} + a_i(t)e^{-j\omega_c t})] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty a_i(t)e^{j\omega_c t} e^{-st} dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty a_i(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} \{ \hat{a}_i(s-j\omega_c) + \hat{a}_i(s+j\omega_c) \}
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

$\mathcal{L}\{a_{o,a}(t)\} = \hat{a}_{o,a}(s)$, $\mathcal{L}\{\phi_{o,a}(t)\} = \hat{\phi}_{o,a}(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_{o,a}(t) \cos(\omega_c t + \phi_o)] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(a_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t + \phi_o)} + a_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t + \phi_o)}e^{-st}dt + \int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_o)}e^{-st}dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2} \int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-(s-j\omega_c)t}dt + \frac{e^{-j\phi_o}}{2} \int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-(s+j\omega_c)t}dt \\
&= \frac{1}{2} \{ e^{j\phi_o} \hat{a}_{o,a}(s - j\omega_c) + e^{-j\phi_o} \hat{a}_{o,a}(s + j\omega_c) \} \tag{B.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\phi_{o,a}(t) \sin(\omega_c t + \phi_o)] &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[(\phi_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t + \phi_o)} - \phi_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2j} \left(\int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t + \phi_o)}e^{-st}dt - \int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_o)}e^{-st}dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2j} \int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-(s-j\omega_c)t}dt - \frac{e^{-j\phi_o}}{2j} \int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-(s+j\omega_c)t}dt \\
&= -\frac{j}{2} \{ e^{j\phi_o} \hat{\phi}_{o,a}(s - j\omega_c) - e^{-j\phi_o} \hat{\phi}_{o,a}(s + j\omega_c) \} \tag{B.5}
\end{aligned}$$

B.1 Pedersen Model

B.1.1 空洞を介した位相、振幅、チューニング伝送

位相および振幅が変調された正弦波信号は次のように表せる。

位相および振幅変調された正弦波信号を送信する場合：

$a_i(t)$ で振幅変調され、 $\phi(t)$ で位相変調された角振動数 ω_c の正弦波信号は、次のように表される。

$$x(t) = \text{Re} \left\{ A_i(1 + a_i(t))e^{j(\omega_c t + \phi_i(t))} \right\} \tag{B.6}$$

$a_i \ll 1$, $\phi_i \ll 1$ の場合、(B.6) は

$$\begin{aligned}
x(t) &\simeq \text{Re} \{ A_i(1 + a_i(t))(1 + j\phi_i(t))e^{j\omega_c t} \} \\
&= \text{Re} \left\{ A_i(1 + a_i(t) + j\phi_i(t) + \underbrace{ja_i(t)\phi_i(t)}_0)e^{j\omega_c t} \right\} \\
&\simeq \text{Re} \{ A_i(1 + a_i(t) + j\phi_i(t))e^{j\omega_c t} \} \\
&= \text{Re} \{ A_i(1 + a_i(t) + j\phi_i(t))(\cos \omega_c t + j \sin \omega_c t) \} \\
&= A_i(\cos \omega_c t + a_i(t) \cos \omega_c t - \phi(t) \sin \omega_c t) \tag{B.7}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos \omega_c t] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})] \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{j\omega_c t} e^{-st} dt + \int_0^\infty e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)} \right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)} \right]_0^\infty \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega_c} + \frac{1}{s+j\omega_c} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_c^2}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

また、 $\mathcal{L}\{a_i(t)\} = a_i(s)$, $\mathcal{L}\{\phi_i(t)\} = \phi_i(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_i(t) \cos \omega_c t] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(a_i(t)e^{j\omega_c t} + a_i(t)e^{-j\omega_c t})] \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty a_i(t)e^{j\omega_c t} e^{-st} dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty a_i(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\
&= \frac{a_i(s-j\omega_c) + a_i(s+j\omega_c)}{2}
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\phi_i(t) \sin \omega_c t] &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[(\phi_i(t)e^{j\omega_c t} - \phi_i(t)e^{-j\omega_c t})] \\
&= \frac{1}{2j} \left(\int_0^\infty \phi_i(t)e^{j\omega_c t} e^{-st} dt - \int_0^\infty \phi_i(t)e^{-j\omega_c t} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{1}{2j} \left(\int_0^\infty \phi_i(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt - \int_0^\infty \phi_i(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \right) \\
&= \frac{\phi_i(s-j\omega_c) - \phi_i(s+j\omega_c)}{2j}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

以上より、 $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ とし、(B.7) をラプラス変換すると、

$$X(s) = \frac{A_i}{2} \left\{ \frac{2s}{s^2 + \omega_c^2} + a_i(s-j\omega_c) + j\phi_i(s-j\omega_c) + a_i(s+j\omega_c) - j\phi_i(s+j\omega_c) \right\} \tag{B.11}$$

伝達関数 $H(s)$ を介して、出力される信号 $y(t)$ は一般的に振幅と位相の両方は変調され、次の様に表せる。

$$y(t) = \text{Re} \left\{ A_o(1 + a_o(t))e^{j(\omega_c t + \phi_z + \phi_o(t))} \right\} \tag{B.12}$$

$a_o \ll 1$, $\phi_o \ll 1$ の場合、(B.12) は

$$\begin{aligned}
y(t) &\simeq \text{Re} \left\{ A_o(1 + a_o(t))(1 + j\phi_o(t))e^{j(\omega_c t + \phi_z)} \right\} \\
&= \text{Re} \left\{ A_o(1 + a_o(t) + j\phi_o(t) + \underbrace{j a_o(t)\phi_o(t)}_0) e^{j(\omega_c t + \phi_z)} \right\} \\
&\simeq \text{Re} \{ A_o(1 + a_o(t) + j\phi_o(t))(\cos(\omega_c t + \phi_z) + j \sin(\omega_c t + \phi_z)) \} \\
&= A_o(\cos(\omega_c t + \phi_z) + a_o(t) \cos(\omega_c t + \phi_z) - \phi_o(t) \sin(\omega_c t + \phi_z))
\end{aligned} \tag{B.13}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos(\omega_c t + \phi_z)] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(e^{j(\omega_c t + \phi_z)} + e^{-j(\omega_c t + \phi_z)})] \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{j(\omega_c t + \phi_z)} e^{-st} dt + \int_0^\infty e^{-j(\omega_c t + \phi_z)} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2} \int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \frac{e^{-j\phi_z}}{2} \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t} dt \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2} \left[\frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)} \right]_0^\infty + \frac{e^{-j\phi_z}}{2} \left[\frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)} \right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j\phi_z}}{s-j\omega_c} + \frac{e^{-j\phi_z}}{s+j\omega_c} \right) = \frac{\cos \phi_z s - \omega_c \sin \phi_z}{s^2 + \omega_c^2}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

また、 $\mathcal{L}\{a_o(t)\} = a_o(s)$, $\mathcal{L}\{\phi_o(t)\} = \phi_o(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_o(t) \cos(\omega_c t + \phi_z)] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[(a_o(t)e^{j(\omega_c t + \phi_z)} + a_o(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_z)})] \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty a_o(t)e^{j(\omega_c t + \phi_z)} e^{-st} dt + \int_0^\infty a_o(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_z)} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2} \int_0^\infty a_o(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt + \frac{e^{-j\phi_z}}{2} \int_0^\infty a_o(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2} a_o(s-j\omega_c) + \frac{e^{-j\phi_z}}{2} a_o(s+j\omega_c)
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\phi_o(t) \sin(\omega_c t + \phi_z)] &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[(\phi_o(t)e^{j(\omega_c t + \phi_z)} - \phi_o(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_z)})] \\
&= \frac{1}{2j} \left(\int_0^\infty \phi_o(t)e^{j(\omega_c t + \phi_z)} e^{-st} dt - \int_0^\infty \phi_o(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_z)} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2j} \int_0^\infty \phi_o(t)e^{-(s-j\omega_c)t} dt - \frac{e^{-j\phi_z}}{2j} \int_0^\infty \phi_o(t)e^{-(s+j\omega_c)t} dt \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2j} \phi_o(s-j\omega_c) - \frac{e^{-j\phi_z}}{2j} \phi_o(s+j\omega_c)
\end{aligned} \tag{B.16}$$

以上より、 $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ とし、(B.13) をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned}
Y(s) &= A_o \left[\frac{\cos \phi_z s - \omega_c \sin \phi_z}{s^2 + \omega_c^2} + \frac{e^{j\phi_z}}{2} \{a_o(s-j\omega_c) + j\phi_o(s-j\omega_c)\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-j\phi_z}}{2} \{a_o(s+j\omega_c) + j\phi_o(s+j\omega_c)\} \right]
\end{aligned} \tag{B.17}$$

ここで、

$$\begin{cases} a_o(s) = G_{aa}(s)a_i(s) + G_{pa}(s)\phi_i(s) \\ \phi_o(s) = G_{ap}(s)a_i(s) + G_{pp}(s)\phi_i(s) \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

より、(B.18) を (B.17) に代入すると、

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{A_o}{2} \left[\frac{2(\cos \phi_z s - \omega_c \sin \phi_z)}{s^2 + \omega_c^2} \right. \\ + e^{j\phi_z} \{ (G_{aa}(s - j\omega_c) + jG_{ap}(s - j\omega_c))a_i(s - j\omega_c) \\ + (G_{pa}(s - j\omega_c) + jG_{pp}(s - j\omega_c))\} \phi_i(s - j\omega_c) \\ + e^{-j\phi_z} \{ (G_{aa}(s + j\omega_c) - jG_{ap}(s + j\omega_c))a_i(s + j\omega_c) \\ \left. + (G_{pa}(s + j\omega_c) - jG_{pp}(s + j\omega_c))\} \phi_i(s + j\omega_c) \right] \quad (\text{B.19}) \end{aligned}$$

ここで $Y(s) = H(s)X(s)$ より、

$$Y(s) = \frac{A_i H(s)}{2} \left\{ \frac{2s}{s^2 + \omega_c^2} + a_i(s - j\omega_c) + j\phi_i(s - j\omega_c) + a_i(s + j\omega_c) - j\phi_i(s + j\omega_c) \right\} \quad (\text{B.20})$$

(B.19) と (B.20) で係数を比較すると、

References

- [1] B.P. Lathi, Signals, systems and communication, Publ. John Wiley & Sons, 1965.
- [2] A. Papoulis, Signal analysis. New York : McGraw-Hill, 1977.
- [3] P.F. Panter, ‘Modulation, Noise and Spectral Analysis’, McGraw-Hill, 1966.
- [4] F. Pedersen, Beam Loading Effects in the CERN PS Booster, IEEE Trans. Nucl. Sci. 22, 3, June 1975.
- [5] S. Ninomiya, Beam Loading Effect on RF System in Proton Synchrotrons, KEK Report 89-18 (1989).
- [6] S. Simrock, Z. Geng, Low-Level Radio Frequency Systems, Springer (2022)
- [7] T. Schilcher Vector sum control of pulsed accelerating fields in Lorentz force detuned superconducting cavities (1998).
- [8] P. B. Wilson, High energy electron linacs; application to storage ring RF systems and linear colliders (1987)