Modulation

Shin-ichi YOSHIMOTO

2023/8/21

Contents

第 1 章　変調

1.1　定義とベクトル表記

高周波の搬送波で情報を伝送するには変調が必要である。実際、信号が時間の純粋な正弦関数から外れるたびに変調が行われる。

振幅 ($a(t)$) と位相 ($p(t)$) で変調された ω_c における搬送波正弦波の時間依存性は次式で表される:

$$x(t) = \mathrm{Re}\Big\{\hat{X}(1 + a(t))e^{j(\omega_c t + \phi(t))}\Big\} \tag{1.1}$$

純粋な正弦波変調の場合:

$$a(t) = \hat{a}\cos\omega_{AM}t \tag{1.2}$$

$$\phi(t) = \hat{\phi}\sin\omega_{PM}t \tag{1.3}$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\Big\{\hat{X}(1 + \hat{a}\cos\omega_{\mathrm{AM}}t)e^{j(\omega_c t + \hat{\phi}\sin\omega_{\mathrm{PM}}t)}\Big\} \tag{1.4}$$

変調の振幅が小さい場合、便利な近似式は:

$$x(t) \approx \mathrm{Re}\Big\{\hat{X}(1 + \hat{a}\cos\omega_{AM}t)(1 + j\hat{\phi}\sin\omega_{PM}t)e^{j\omega_c t}\Big\} \tag{1.5}$$

この式は次のように再構成できる:

$$x(t) \approx \mathrm{Re}\left\{\hat{X}\left[e^{j\omega_c}t + \frac{\hat{a}}{2}\left(e^{j(\omega_c+\omega_{AM})t} + e^{j(\omega_c-\omega_{AM})t}\right) + \frac{\hat{\phi}}{2}\left(e^{j(\omega_c+\omega_{PM})t} - e^{j(\omega_c-\omega_{PM})t}\right)\right]\right\} \tag{1.6}$$

1.2　線形システムを介した伝送

入力信号 $x(t)$ の変調振幅が小さい場合、式 (1.6) を用いることができ、システムは線形なので、出力信号 $y(t)$ は、それぞれの異なる周波数の重ね合わせとして書くことができる。

$$\begin{aligned} y(t) = \hat{X}\,\mathrm{Re}\Bigg\{\Bigg[&H(j\omega_c)e^{j\omega_c}t \\ &+ \frac{\hat{a}}{2}\Big[H(j(\omega_c+\omega_{AM}))e^{j(\omega_c+\omega_{AM})t} + H(j(\omega_c-\omega_{AM}))e^{j(\omega_c-\omega_{AM})t}\Big] \\ &\quad + \frac{\hat{\phi}}{2}\Big[H(j(\omega_c+\omega_{PM}))e^{j(\omega_c+\omega_{PM})t} - H(j(\omega_c-\omega_{PM}))e^{j(\omega_c-\omega_{PM})t}\Big]\Bigg]\Bigg\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

これは次のように書ける、

$$
\begin{aligned}
y(t) = \hat{X}\,\mathrm{Re}\Bigg\{ H(j\omega_c) e^{j\omega_c} t \Bigg[1 \\
&+ \frac{\hat{a}}{2}\left[\frac{H(j(\omega_c+\omega_{AM}))}{H(j\omega_c)}e^{j\omega_{AM}t} + \frac{H(j(\omega_c-\omega_{AM}))}{H(j\omega_c)}e^{-j\omega_{AM}t}\right] \\
&+ \frac{\hat{\phi}}{2}\left[\frac{H(j(\omega_c+\omega_{PM}))}{H(j\omega_c)}e^{j\omega_{PM}t} - \frac{H(j(\omega_c-\omega_{PM}))}{H(j\omega_c)}e^{-j\omega_{PM}t}\right]\Bigg]\Bigg\} \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
G_s(j\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{H(j(\omega+\omega_c))}{H(j\omega_c)} + \frac{H(j(\omega-\omega_c))}{H(-j\omega_c)}\right] \qquad (1.9)
$$

$$
G_c(j\omega) = \frac{j}{2}\left[\frac{H(j(\omega+\omega_c))}{H(j\omega_c)} - \frac{H(j(\omega-\omega_c))}{H(-j\omega_c)}\right] \qquad (1.10)
$$

と定義すると、

$$
G_s(j\omega) + jG_c(j\omega) = \frac{H(j(\omega-\omega_c))}{H(-j\omega)} \qquad (1.11)
$$

$$
G_s(j\omega) - jG_c(j\omega) = \frac{H(j(\omega+\omega_c))}{H(j\omega)} \qquad (1.12)
$$

1.3 Pedersen Model

1.3.1 Modulation Transfer Function

振幅変調 (AM) や位相変調 (PM) された正弦波信号を伝達関数 $H(s)$ を持つシステムを介した場合、出力信号も一般に振幅変調と位相変調の両方を受けることになる。このようなシステムの完全な特性評価には、システムの伝達関数 $H(s)$ から導き出すことができる次の 4 つの異なる変調伝達関数 (Modulation Transfer Function) を求める必要がある。(Fig.1.1)

1. 入力の振幅変調が出力の振幅を変調する伝達関数：$G_{aa}(s)$
2. 入力の位相変調が出力の位相を変調する伝達関数：$G_{pp}(s)$
3. 入力の振幅変調が出力の位相を変調する伝達関数：$G_{ap}(s)$
4. 入力の位相変量が出力の振幅を変調する伝達関数：$G_{pa}(s)$

変調の振幅が十分小さい場合、変調の伝送は線形であり、次のようにして求めることができる。

最初に、入力信号の振幅のみが $a_i(t)$ で変調された場合を考える。このとき、入力信号 $x(t)$ は次のようにあらわせる。

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathrm{Re}\left\{\hat{X}(1+a_i(t))e^{j\omega_c t}\right\} \\
&= \hat{X}\left\{\cos\omega_c t + a_i(t)\cos\omega_c t\right\} \qquad (1.13)
\end{aligned}
$$

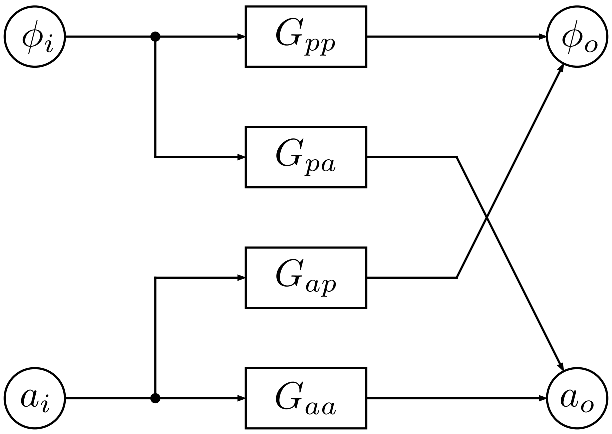

Fig. 1.1 Modulation Transfer Function.

出力信号 $y(t)$ は $a_i(t)$ によって振幅だけでなく位相も変調され、

$$y(t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{Y}(1 + a_{o,a}(t))e^{j(\omega_c t + \phi_0 + \phi_{o,a}(t))}\right\} \tag{1.14}$$

と表すことができる。この時、変調伝達関数 $G_{aa}(s)$, $G_{ap}(s)$ は、次のように定義される。

$$G_{aa}(s) = \frac{\hat{a}_{o,a}(s)}{\hat{a}_i(s)}, \quad G_{ap}(s) = \frac{\hat{\phi}_{o,a}(s)}{\hat{a}_i(s)} \tag{1.15}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos\omega_c t] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{j\omega_c t}e^{-st}dt + \int_0^\infty e^{-j\omega_c t}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t}dt + \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)}\right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)}\right]_0^\infty\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega_c} + \frac{1}{s+j\omega_c}\right) = \frac{s}{s^2+\omega_c^2}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

また、$\mathcal{L}\{a_i(t)\} = \hat{a}_i(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_i(t)\cos\omega_c t] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[(a_i(t)e^{j\omega_c t} + a_i(t)e^{-j\omega_c t})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty a_i(t)e^{j\omega_c t}e^{-st}dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-j\omega_c t}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty a_i(t)e^{-(s-j\omega_c)t}dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-(s+j\omega_c)t}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\{\hat{a}_i(s-j\omega_c) + \hat{a}_i(s+j\omega_c)\}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ とし、(1.13) をラプラス変換すると、

$$X(s) = \frac{\hat{X}}{2}\left\{\frac{2s}{s^2+\omega_c^2} + a_i(s-j\omega_c) + a_i(s+j\omega_c)\right\} \tag{1.18}$$

一方、出力信号 $y(t)$ は $a_o \ll 1,\ \phi_o \ll 1$ の場合、以下のように近次できる。

$$\begin{aligned}
y(t) &\simeq \mathrm{Re}\Big\{\hat{Y}(1+a_{o,a}(t))(1+j\phi_{o,a}(t))e^{j(\omega_c t+\phi_o)}\Big\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\hat{Y}(1+a_{o,a}(t)+j\phi_{o,a}(t)+j\underbrace{a_{o,a}(t)\phi_{o,a}(t)}_{0})e^{j(\omega_c t+\phi_0)}\right\} \\
&\simeq \mathrm{Re}\Big\{\hat{Y}(1+a_{o,a}(t)+j\phi_{o,a}(t))(\cos(\omega_c t+\phi_0)+j\sin(\omega_c+\phi_0))\Big\} \\
&= \hat{Y}\{\cos(\omega_c t+\phi_o)+a_o(t)\cos(\omega_c t+\phi_o)-\phi_o(t)\sin(\omega_c t+\phi_o)\} \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos(\omega_c t+\phi_o)] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[(e^{j(\omega_c t+\phi_o)}+e^{-j(\omega_c t+\phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{j(\omega_c t+\phi_o)}e^{-st}dt+\int_0^\infty e^{-j()\omega_c t+\phi_o)}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2}\int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t}dt+\frac{e^{-j\phi_o}}{2}\int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t}dt \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2}\left[\frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)}\right]_0^\infty+\frac{e^{-j\phi_o}}{2}\left[\frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\phi_o}}{s-j\omega_c}+\frac{e^{-j\phi_o}}{s+j\omega_c}\right)=\frac{\cos\phi_o s-\omega_c\sin\phi_o}{s^2+\omega_c^2} \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

また、$\mathcal{L}\{a_{o,a}(t)\}=\hat{a}_{o,a}(s),\ \mathcal{L}\{\phi_{o,a}(t)\}=\hat{\phi}_{o,a}(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_{o,a}(t)\cos(\omega_c t+\phi_o)] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[(a_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t+\phi_o)}+a_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t+\phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t+\phi_o)}e^{-st}dt+\int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t+\phi_o)}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2}\int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-(s-j\omega_c)t}dt+\frac{e^{-j\phi_o}}{2}\int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-(s+j\omega_c)t}dt \\
&= \frac{1}{2}\left\{e^{j\phi_o}\hat{a}_{o,a}(s-j\omega_c)+e^{-j\phi_o}\hat{a}_{o,a}(s+j\omega_c)\right\} \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\phi_{o,a}(t)\sin(\omega_c t+\phi_o)] &= \frac{1}{2j}\mathcal{L}[(\phi_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t+\phi_o)}-\phi_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t+\phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2j}\left(\int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t+\phi_o)}e^{-st}dt-\int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t+\phi_o)}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2j}\int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-(s-j\omega_c)t}dt-\frac{e^{-j\phi_o}}{2j}\int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-(s+j\omega_c)t}dt \\
&= -\frac{j}{2}\left\{e^{j\phi_o}\hat{\phi}_{o,a}(s-j\omega_c)-e^{-j\phi_o}\hat{\phi}_{o,a}(s+j\omega_c)\right\} \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

したがって、$Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}$ とし (1.19) をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned}
Y(s) = \frac{\hat{Y}}{2}\Bigg[&\frac{2(\cos\phi_o s-\omega_c\sin\phi_o)}{s^2+\omega_c^2}+e^{j\phi_0}\hat{a}_{o,a}(s-j\omega_c)+e^{-j\phi_0}\hat{a}_{o,a}(s+j\omega_c) \\
&+j\left\{e^{j\phi_0}\hat{\phi}_{o,a}(s-j\omega_c)-e^{-j\phi_0}\hat{\phi}_{o,a}(s+j\omega_c)\right\}\Bigg] \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

ここで、(1.15) より (1.23) は

$$
\begin{aligned}
Y(s) = \frac{\hat{Y}}{2}\Bigg[&\frac{2(\cos\phi_o s - \omega_c \sin\phi_o)}{s^2+\omega_c^2} \\
&+ e^{j\phi_0} G_{aa}(s-j\omega_c)\hat{a}_i(s-j\omega_c) + e^{-j\phi_0} G_{aa}(s+j\omega_c)\hat{a}_i(s+j\omega_c) \\
&+ j\left\{e^{j\phi_0} G_{ap}(s-j\omega_c)\hat{a}_i(s-j\omega_c) - e^{-j\phi_0} G_{ap}(s+j\omega_c)\hat{a}_i(s+j\omega_c)\right\}\Bigg]
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
Y(s) = \frac{\hat{Y}}{2}\Bigg[&\frac{2(\cos\phi_0 s - \omega_c \sin\phi_0)}{s^2+\omega_c^2} + e^{j\phi_0}\{G_{aa}(s-j\omega_c) + jG_{ap}(s-j\omega_c)\}\hat{a}_i(s-j\omega_c) \\
&+ e^{-j\phi_0}\{G_{aa}(s+j\omega_c) - jG_{ap}(s+j\omega_c)\}\hat{a}_i(s+j\omega_c)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

ここで $Y(s) = H(s)X(s)$ より、(1.18) は、

$$
Y(s) = \frac{\hat{X}H(s)}{2}\left[\frac{2s}{(s^2+\omega_c^2} + \hat{a}_i(s-j\omega_c) + \hat{a}_i(s+j\omega_c)\right] \tag{1.25}
$$

(1.24) と (1.25) で係数を比較すると、

$$
\hat{Y}(\cos\phi_0 s - \omega_c \sin\phi_0) = \hat{X}H(s)s \tag{1.26}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{aa}(s-j\omega_c) + jG_{ap}(s-j\omega_c) &= \frac{\hat{X}}{\hat{Y}} e^{-j\phi_0} H(s) \\
G_{aa}(s+j\omega_c) - jG_{ap}(s+j\omega_c) &= \frac{\hat{X}}{\hat{Y}} e^{j\phi_0} H(s)
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

(1.26) で、$s = \pm j\omega_c$ の時を考えると、

$$
H(\pm j\omega_c) = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}} e^{\pm j\phi_0} \tag{1.28}
$$

(1.27) と (1.28) より、

$$
\begin{aligned}
G_{aa}(s-j\omega_c) + jG_{ap}(s-j\omega_c) &= \frac{H(s)}{H(j\omega_c)} \\
G_{aa}(s+j\omega_c) - jG_{ap}(s+j\omega_c) &= \frac{H(s)}{H(-j\omega_c)}
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

以上より、入力の振幅変調に関する変調伝達関数 $G_{aa}(s),\ G_{ap}(s)$ は、

$$
\begin{aligned}
G_{aa}(s) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{H(s+j\omega_c)}{H(j\omega_c)} + \frac{H(s-j\omega_c)}{H(-j\omega_c)}\right\} = G_s(s) \\
G_{ap}(s) &= \frac{-j}{2}\left\{\frac{H(s+j\omega_c)}{H(j\omega_c)} - \frac{H(s-j\omega_c)}{H(-j\omega_c)}\right\} = G_c(s)
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

今度は、入力信号の位相のみが $\phi_i(t)$ で変調された信号を考えると、

$$
x(t) = \mathrm{Re}\{\hat{X}e^{j(\omega_c t + \phi_i(t))}\} \tag{1.31}
$$

出力信号は先程と同様に考えると、

$$y(t) = \mathrm{Re}\{\hat{Y}(1 + a_{o,p}(t))e^{j(\omega_c t + \phi_0 + \phi_{o,p}(t))}\} \tag{1.32}$$

入力の位相変調に関する変調伝達関数 $G_{pp}(s)$, $G_{pa}(s)$ は、

$$G_{pp}(s) = \frac{\hat{\phi}_{o,p}(s)}{\hat{\phi}_i(s)}, \quad G_{pa}(s) = \frac{\hat{a}_{o,p}(s)}{\hat{\phi}_i(s)} \tag{1.33}$$

(1.31) は、$\phi_i(t) \ll 1$ の時、

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}\{\hat{X}e^{j(\omega_c t + \phi_i(t))}\} \\ &\simeq \mathrm{Re}\{\hat{X}(1 + j\phi_i(t))e^{j\omega_c t}\} \\ &= \hat{X}(\cos\omega_c t - \phi_i(t)\sin\omega_c t) \end{aligned} \tag{1.34}$$

(1.34) をラプラス変換すると、

$$X(s) = \hat{X}\left[\frac{s}{s^2 + \omega_c^2} + j\left\{\hat{\phi}_i(s - j\omega_c) - \hat{\phi}_i(s + j\omega_c)\right\}\right] \tag{1.35}$$

(1.23) と同様にして (1.32) もラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{\hat{Y}}{2}\Bigg[&\frac{2(\cos\phi_0 s - \omega_c\sin\phi_0)}{s^2 + \omega_c^2} + e^{j\hat{\phi}_0}a_{o,p}(s - j\omega_c) + e^{-j\phi_0}\hat{a}_{o,p}(s + j\omega_c) \\ &+ j\left\{e^{j\phi_0}\hat{\phi}_{o,p}(s - j\omega_c) - e^{-j\phi_0}\hat{\phi}_{o,p}(s + j\omega_c)\right\}\Bigg] \end{aligned} \tag{1.36}$$

同様に (1.36) は

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{\hat{Y}}{2}\Bigg[&\frac{2(\cos\phi_0 s - \omega_c\sin\phi_0)}{s^2 + \omega_c^2} + e^{j\phi_0}\{G_{pa}(s - j\omega_c) + jG_{pp}(s - j\omega_c)\}\hat{\phi}_i(s - j\omega_c) \\ &+ e^{-j\phi_0}\{G_{pa}(s + j\omega_c) - jG_{pp}(s + j\omega_c)\}\hat{\phi}_i(s + j\omega_c)\Bigg] \end{aligned} \tag{1.37}$$

ここで $Y(s) = H(s)X(s)$ より、

$$Y(s) = \frac{\hat{X}H(s)}{2}\left[\frac{2s}{s^2 + \omega_c^2} + j\left\{\hat{\phi}_i(s - j\omega_c) - \hat{\phi}_i(s + j\omega_c)\right\}\right] \tag{1.38}$$

(1.37) と (1.38) で係数を比較すし、(1.28) を使うと、

$$\begin{aligned} G_{pa}(s - j\omega_c) + jG_{pp}(s - j\omega_c) &= j\frac{H(s)}{H(j\omega_c)} \\ G_{pa}(s + j\omega_c) - jG_{pp}(s + j\omega_c) &= -j\frac{H(s)}{H(-j\omega_c)} \end{aligned} \tag{1.39}$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
G_{pa}(s) + jG_{pp}(s) &= j\frac{H(s+j\omega_c)}{H(j\omega_c)} \\
G_{pa}(s) - jG_{pp}(s) &= -j\frac{H(s-j\omega_c)}{H(-j\omega_c)}
\end{aligned}
\tag{1.40}
$$

以上の結果から、変調伝達関数は以下の様になる。

$$
\begin{aligned}
G_{aa}(s) = G_{pp}(s) \quad &= \frac{1}{2}\left\{\frac{H(s+j\omega_c)}{H(j\omega_c)} + \frac{H(s-j\omega_c)}{H(-j\omega_c)}\right\} = G_s(s) \\
G_{ap}(s) = -G_{pa}(s) \quad &= \frac{j}{2}\left\{\frac{H(s+j\omega_c)}{H(j\omega_c)} - \frac{H(s-j\omega_c)}{H(-j\omega_c)}\right\} = G_c(s)
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

1.3.2 空洞共振器への適用

$$
Z(s) = \frac{2\sigma R_s}{s^2 + 2\sigma s + \omega_r^2} \tag{1.42}
$$

$$
G_{aa}(s) = G_{pp} = \frac{\sigma^2(1+\tan^2\phi_z) + \sigma s}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1+\tan^2\phi_z)} \tag{1.43}
$$

$$
G_{pa}(s) = -G_{ap} = \frac{\sigma \tan\phi_z s}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1+\tan^2\phi_z)} \tag{1.44}
$$

付録 A　信号解析

A.1　アナログ信号とシステム

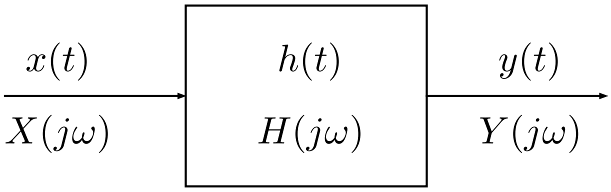

Fig. A.1　System Function.

Convolution

$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{A.1}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{A.2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \tag{A.3}$$

入力信号を $x(t) = e^{j\omega t}$ とすると

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)}h(\tau)d\tau \tag{A.4}$$

$$= e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}h(\tau)d\tau \tag{A.5}$$

ここで、$h(t)$ のフーリエ変換を $H(j\omega)$ とすると、

$$\mathcal{F}[h(t)] = H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \tag{A.6}$$

したがって、

$$y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t} \tag{A.7}$$

係数 $H(j\omega)$ をシステム関数と呼びます。(1-37) または (1-38) から決定できます。(1-38) から $H(j\omega)$ を決定するには、入力 $f(t) = e^{j\omega t}$ を適用します。関数 $H(j\omega)$ は、結果の応答 $H(j\omega)e^{j\omega t}$ の係数と等しくなります。

A.2　周波数伝達関数

A.2.1　部分分数展開を用いたラプラス逆変換の計算

一般に、有理関数で表された伝達関数 $G(s)$ は、

$$G(s) = K\frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \tag{A.8}$$

入力を、$u(t) = e^{j\omega t}$ とすると、ラプラス変換は、次式で与えられる。

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[e^{j\omega t}] = \frac{1}{s-j\omega} \tag{A.9}$$

したがって、出力 $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ は、次のように部分分数展開できる。

$$\begin{aligned} Y(s) = G(s)U(s) &= \frac{k(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}\frac{1}{s-j\omega} \\ &= \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n} + \frac{a}{s-j\omega} \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} k_i &= \lim_{s\to p_i}(s-p_i)G(s)\frac{s}{s-j\omega} \\ a &= \lim_{s\to j\omega}(s-j\omega)G(s)\frac{1}{s-j\omega} = \lim_{s\to j\omega} G(s)\cdot 1 = G(j\omega) \end{aligned} \tag{A.10}$$

したがって、出力は $Y(s)$ を逆ラプラス変換して次式で求められる。

$$y(t) = k_1e^{p_1t} + k_2e^{p_2t} + \cdots + k_ne^{p_nt} + ae^{j\omega t} \tag{A.11}$$

極の実部は負であるから、定常状態では次式で与えられる。

$$y(t) = ae^{j\omega t} = G(j\omega)e^{j\omega t} \tag{A.12}$$

付録 B　ラプラス変換

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos\omega_c t] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{j\omega_c t}e^{-st}dt + \int_0^\infty e^{-j\omega_c t}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t}dt + \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)}\right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)}\right]_0^\infty\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega_c} + \frac{1}{s+j\omega_c}\right) = \frac{s}{s^2+\omega_c^2}
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos(\omega_c t + \phi_o)] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[(e^{j(\omega_c t+\phi_o)} + e^{-j(\omega_c t+\phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{j(\omega_c t+\phi_o)}e^{-st}dt + \int_0^\infty e^{-j()\omega_c t+\phi_o)}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2}\int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t}dt + \frac{e^{-j\phi_o}}{2}\int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t}dt \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2}\left[\frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)}\right]_0^\infty + \frac{e^{-j\phi_o}}{2}\left[\frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\phi_o}}{s-j\omega_c} + \frac{e^{-j\phi_o}}{s+j\omega_c}\right) = \frac{\cos\phi_o s - \omega_c \sin\phi_o}{s^2+\omega_c^2}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$\mathcal{L}\{a_i(t)\} = \hat{a}_i(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_i(t)\cos\omega_c t] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[(a_i(t)e^{j\omega_c t} + a_i(t)e^{-j\omega_c t})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty a_i(t)e^{j\omega_c t}e^{-st}dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-j\omega_c t}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty a_i(t)e^{-(s-j\omega_c)t}dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-(s+j\omega_c)t}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\{\hat{a}_i(s-j\omega_c) + \hat{a}_i(s+j\omega_c)\}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$\mathcal{L}\{a_{o,a}(t)\} = \hat{a}_{o,a}(s),\ \mathcal{L}\{\phi_{o,a}(t)\} = \hat{\phi}_{o,a}(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_{o,a}(t)\cos(\omega_c t+\phi_o)] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[(a_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t+\phi_o)} + a_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t+\phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t+\phi_o)}e^{-st}dt + \int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t+\phi_o)}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2}\int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-(s-j\omega_c)t}dt + \frac{e^{-j\phi_o}}{2}\int_0^\infty a_{o,a}(t)e^{-(s+j\omega_c)t}dt \\
&= \frac{1}{2}\left\{e^{j\phi_o}\hat{a}_{o,a}(s-j\omega_c) + e^{-j\phi_o}\hat{a}_{o,a}(s+j\omega_c)\right\}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\phi_{o,a}(t)\sin(\omega_c t+\phi_o)] &= \frac{1}{2j}\mathcal{L}[(\phi_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t+\phi_o)} - \phi_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t+\phi_o)})] \\
&= \frac{1}{2j}\left(\int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{j(\omega_c t+\phi_o)}e^{-st}dt - \int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-j(\omega_c t+\phi_o)}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{e^{j\phi_o}}{2j}\int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-(s-j\omega_c)t}dt - \frac{e^{-j\phi_o}}{2j}\int_0^\infty \phi_{o,a}(t)e^{-(s+j\omega_c)t}dt \\
&= -\frac{j}{2}\left\{e^{j\phi_o}\hat{\phi}_{o,a}(s-j\omega_c) - e^{-j\phi_o}\hat{\phi}_{o,a}(s+j\omega_c)\right\}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

B.1 Pedersen Model

B.1.1 空洞を介した位相、振幅、チューニング伝送

位相および振幅が変調された正弦波信号は次のように表せる。
位相および振幅変調された正弦波信号を送信する場合：
$a_i(t)$ で振幅変調され、$\phi(t)$ で位相変調された角振動数 ω_c の正弦波信号は、次のように表される。

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{A_i(1+a_i(t))e^{j(\omega_c t+\phi_i(t))}\right\} \tag{B.6}$$

$a_i \ll 1,\ \phi_i \ll 1$ の場合、(B.6) は

$$\begin{aligned}
x(t) &\simeq \mathrm{Re}\left\{A_i(1+a_i(t))(1+j\phi_i(t))e^{j\omega_c t}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{A_i(1+a_i(t)+j\phi_i(t)+j\underbrace{a_i(t)\phi_i(t)}_{0})e^{j\omega_c t}\right\} \\
&\simeq \mathrm{Re}\left\{A_i(1+a_i(t)+j\phi_i(t))e^{j\omega_c t}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\{A_i(1+a_i(t)+j\phi_i(t))(\cos\omega_c t + j\sin\omega_c t)\} \\
&= A_i(\cos\omega_c t + a_i(t)\cos\omega_c t - \phi(t)\sin\omega_c t)
\end{aligned} \tag{B.7}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos\omega_c t] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{j\omega_c t}e^{-st}dt + \int_0^\infty e^{-j\omega_c t}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t}dt + \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)}\right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)}\right]_0^\infty\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega_c} + \frac{1}{s+j\omega_c}\right) = \frac{s}{s^2+\omega_c^2}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

また、$\mathcal{L}\{a_i(t)\} = a_i(s),\ \mathcal{L}\{\phi_i(t)\} = \phi_i(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_i(t)\cos\omega_c t] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[(a_i(t)e^{j\omega_c t} + a_i(t)e^{-j\omega_c t})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty a_i(t)e^{j\omega_c t}e^{-st}dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-j\omega_c t}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty a_i(t)e^{-(s-j\omega_c)t}dt + \int_0^\infty a_i(t)e^{-(s+j\omega_c)t}dt\right) \\
&= \frac{a_i(s-j\omega_c) + a_i(s+j\omega_c)}{2}
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\phi_i(t)\sin\omega_c t] &= \frac{1}{2j}\mathcal{L}[(\phi_i(t)e^{j\omega_c t} - \phi_i(t)e^{-j\omega_c t})] \\
&= \frac{1}{2j}\left(\int_0^\infty \phi_i(t)e^{j\omega_c t}e^{-st}dt - \int_0^\infty \phi_i(t)e^{-j\omega_c t}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{1}{2j}\left(\int_0^\infty \phi_i(t)e^{-(s-j\omega_c)t}dt - \int_0^\infty \phi_i(t)e^{-(s+j\omega_c)t}dt\right) \\
&= \frac{\phi_i(s-j\omega_c) - \phi_i(s+j\omega_c)}{2j}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

以上より、$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ とし、(B.7) をラプラス変換すると、

$$X(s) = \frac{A_i}{2}\left\{\frac{2s}{s^2+\omega_c^2} + a_i(s-j\omega_c) + j\phi_i(s-j\omega_c) + a_i(s+j\omega_c) - j\phi_i(s+j\omega_c)\right\} \tag{B.11}$$

伝達関数 $H(s)$ を介して、出力される信号 $y(t)$ は一般的に振幅と位相の両方は変調され、次の様に表せる。

$$y(t) = \mathrm{Re}\Big\{A_o(1+a_o(t))e^{j(\omega_c t+\phi_z+\phi_o(t))}\Big\} \tag{B.12}$$

$a_o \ll 1,\ \phi_o \ll 1$ の場合、(B.12) は

$$\begin{aligned}
y(t) &\simeq \mathrm{Re}\Big\{A_o(1+a_o(t))(1+j\phi_o(t))e^{j(\omega_c t+\phi_z)}\Big\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{A_i(1+a_o(t)+j\phi_o(t)+j\underbrace{a_o(t)\phi_o(t)}_{0})e^{j(\omega_c t+\phi_z)}\right\} \\
&\simeq \mathrm{Re}\{A_o(1+a_o(t)+j\phi_o(t))(\cos(\omega_c t+\phi_z)+j\sin(\omega_c+\phi_z))\} \\
&= A_o(\cos(\omega_c t+\phi_z)+a_o(t)\cos(\omega_c t+\phi_z)-\phi_o(t)\sin(\omega_c t+\phi_z))
\end{aligned} \tag{B.13}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos(\omega_c t+\phi_z)] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[(e^{j(\omega_c t+\phi_z)}+e^{-j(\omega_c t+\phi_z)})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{j(\omega_c t+\phi_z)}e^{-st}dt+\int_0^\infty e^{-j()\omega_c t+\phi_z)}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2}\int_0^\infty e^{-(s-j\omega_c)t}dt+\frac{e^{-j\phi_z}}{2}\int_0^\infty e^{-(s+j\omega_c)t}dt \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2}\left[\frac{e^{-(s-j\omega_c)t}}{-(s-j\omega_c)}\right]_0^\infty+\frac{e^{-j\phi_z}}{2}\left[\frac{e^{-(s+j\omega_c)t}}{-(s+j\omega_c)}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\phi_z}}{s-j\omega_c}+\frac{e^{-j\phi_z}}{s+j\omega_c}\right)=\frac{\cos\phi_z s-\omega_c\sin\phi_z}{s^2+\omega_c^2}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

また、$\mathcal{L}\{a_o(t)\}=a_o(s),\ \mathcal{L}\{\phi_o(t)\}=\phi_o(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_o(t)\cos(\omega_c t+\phi_z)] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[(a_o(t)e^{j(\omega_c t+\phi_z)}+a_o(t)e^{-j(\omega_c t+\phi_z)})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty a_o(t)e^{j(\omega_c t+\phi_z)}e^{-st}dt+\int_0^\infty a_o(t)e^{-j(\omega_c t+\phi_z)}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2}\int_0^\infty a_o(t)e^{-(s-j\omega_c)t}dt+\frac{e^{-j\phi_z}}{2}\int_0^\infty a_o(t)e^{-(s+j\omega_c)t}dt \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2}a_o(s-j\omega_c)+\frac{e^{-j\phi_z}}{2}a_o(s+j\omega_c)
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\phi_o(t)\sin(\omega_c t+\phi_z)] &= \frac{1}{2j}\mathcal{L}[(\phi_o(t)e^{j(\omega_c t+\phi_z)}-\phi_o(t)e^{-j(\omega_c t+\phi_z)})] \\
&= \frac{1}{2j}\left(\int_0^\infty \phi_o(t)e^{j(\omega_c t+\phi_z)}e^{-st}dt-\int_0^\infty \phi_o(t)e^{-j(\omega_c t+\phi_z)}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2j}\int_0^\infty \phi_o(t)e^{-(s-j\omega_c)t}dt-\frac{e^{-j\phi_z}}{2j}\int_0^\infty \phi_o(t)e^{-(s+j\omega_c)t}dt \\
&= \frac{e^{j\phi_z}}{2j}\phi_o(s-j\omega_c)-\frac{e^{-j\phi_z}}{2j}\phi_o(s+j\omega_c)
\end{aligned} \tag{B.16}$$

以上より、$Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}$ とし、(B.13) をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned}
Y(s) = A_o\Bigg[&\frac{\cos\phi_z s-\omega_c\sin\phi_z}{s^2+\omega_c^2}+\frac{e^{j\phi_z}}{2}\{a_o(s-j\omega_c)+j\phi_o(s-j\omega_c)\} \\
&+\frac{e^{-j\phi_z}}{2}\{a_o(s+j\omega_c)+j\phi_o(s+j\omega_c)\}\Bigg]
\end{aligned} \tag{B.17}$$

ここで、

$$
\begin{cases}
a_o(s) = G_{aa}(s)a_i(s) + G_{pa}(s)\phi_i(s) \\
\phi_o(s) = G_{ap}(s)a_i(s) + G_{pp}(s)\phi_i(s)
\end{cases}
\tag{B.18}
$$

より、(B.18) を (B.17) に代入すると、

$$
\begin{aligned}
Y(s) = \frac{A_o}{2}\Bigg[\frac{2(\cos\phi_z s - \omega_c \sin\phi_z)}{s^2+\omega_c^2} \\
&+ e^{j\phi_z}\{(G_{aa}(s-j\omega_c) + jG_{ap}(s-j\omega_c))a_i(s-j\omega_c) \\
&+ (G_{pa}(s-j\omega_c) + jG_{pp}(s-j\omega_c))\}\phi_i(s-j\omega_c) \\
&+ e^{-j\phi_z}\{(G_{aa}(s+j\omega_c) - jG_{ap}(s+j\omega_c))a_i(s+j\omega_c) \\
&+ (G_{pa}(s+j\omega_c) - jG_{pp}(s+j\omega_c))\}\phi_i(s-+j\omega_c)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{B.19}
$$

ここで $Y(s) = H(s)X(s)$ より、

$$
Y(s) = \frac{A_i H(s)}{2}\left\{\frac{2s}{s^2+\omega_c^2} + a_i(s-j\omega_c) + j\phi_i(s-j\omega_c) + a_i(s+j\omega_c) - j\phi_i(s+j\omega_c)\right\}
\tag{B.20}
$$

(B.19) と (B.20) で係数を比較すると、

References

[1] B.P. Lathi, Signals, systems and communication, Publ. John Wiley & Sons, 1965.

[2] A. Papoulis, Signal analysis. New York : McGraw-Hill, 1977.

[3] P.F. Panter, ‘Modulation, Noise and Spectral Analysis’, McGraw-Hill, 1966.

[4] F. Pedersen, Beam Loading Effects in the CERN PS Booster, IEEE Trans. Nucl. Sci. 22, 3, June 1975.

[5] S. Ninomiya, Beam Loading Effect on RF System in Proton Synchrotrons, KEK Report 89-18 (1989).

[6] S. Simrock, Z. Geng, Low-Level Radio Frequency Systems, Springer (2022)

[7] T. Schilcher Vector sum control of pulsed accelerating fields in Lorentz force detuned superconducting cavities (1998).

[8] P. B. Wilson, High energy electron linacs; application to storage ring RF systems and linear colliders (1987)