シンクロトロン振動のほへと

吉本伸一

2019 年 4 月 15 日

目次

1 Synchrotron motion

偏向電磁石によって分散 (dispersion) が発生する為、シンクロトロン蓄積リングでは、粒子の横方向と縦方向の運動が結合する。リングを周回する粒子による縦方向の振動 (シンクロトロン振動) において、横方向と縦方向の運動のカップリングが重要な役割を演じる。シンクロトロン振動は基準粒子（設計軌道を設計速度で運動する粒子）に対する、到着時間と運動量偏差の振動である。

1. 粒子の速度の違い
2. 軌道の長さの違い

1.1 Transition

運動量偏差 (momentum deviation)

$$\delta_p = \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} \tag{1}$$

momentum compaction factor

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0} = \alpha_p \delta_p \tag{2}$$

phase slip factor

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \eta_p \frac{\Delta p}{p_0} \tag{3}$$

周長を C、粒子の速度を v とすると回転周期 T は

$$T = \frac{C}{v} \tag{4}$$

となるので、両辺を v で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dv} &= \frac{1}{v}\frac{dC}{dv} - \frac{C}{v^2} \\ &= \frac{T}{C}\frac{dC}{dv} - \frac{T}{v} \end{aligned} \tag{5}$$

したがって、

$$\frac{dT}{T} = \frac{dC}{C} - \frac{dv}{v} \tag{6}$$

これより

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta C}{C_0} - \frac{\Delta v}{v_0} \tag{7}$$

この式より、到着時間の変動 ($\Delta T/T_0$) をもたらす要因が、軌道の長さの違い ($\Delta C/C_0$) と粒子の速度の違い ($\Delta v/v_0$) である事が分かる。

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{\gamma_0^2}\frac{\Delta p}{p_0} \tag{8}$$

したがって、

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \left(\alpha_p - \frac{1}{\gamma_0^2}\right)\frac{\Delta p}{p_0} \tag{9}$$

相対論のおさらい

$$\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \tag{A.1}$$

$$p = mv = \gamma m_0 v \tag{A.2}$$

式 (8) の導出

$$\frac{dp}{dv} = m_0 \frac{d}{dv}(\gamma v) = m_0 \left(\gamma + v \frac{d\gamma}{dv} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dv} &= \frac{1}{c}\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{1}{c}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \\ &= \frac{1}{c}\beta\underbrace{(1-\beta^2)}_{\gamma^{-2}}{}^{-\frac{3}{2}} = \frac{\beta\gamma^3}{c} \\ &= \frac{1}{c}\beta\underset{\gamma^{-2}}{\underset{\sim\sim\sim}{(1-\beta^2)}}{}^{-\frac{3}{2}} = \frac{\beta\gamma^3}{c} \end{aligned}$$

これより、

$$\frac{dp}{dv} = m_0 \left(\gamma + v\frac{\beta\gamma^3}{c} \right) = m_0 \gamma \underset{\gamma^2}{\underset{\sim\sim\sim}{(1+\beta^2\gamma^2)}} = \frac{\gamma^2 p}{v}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{v} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{dp}{p} \tag{B.1}$$

$$\alpha_p = \frac{1}{C_0} \left. \frac{dC}{d\delta_p} \right|_{\delta_p = 0} \tag{10}$$

1.2 Phase slip factor

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \eta \frac{\Delta p}{p_0} \tag{11}$$

$$\eta_p = \frac{1}{T_0} \left. \frac{dT}{d\delta_p} \right|_{\delta_p = 0} \tag{12}$$

$$\eta_p = \alpha_p - \frac{1}{\gamma_0^2} \tag{13}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \tag{14}$$

正の運動量圧縮率 $\alpha_p > 0$ を持つ電磁石の配列を考えます。このような磁石の配列では、粒子のエネルギーを増加させると経路長が増加する。しかしながら、粒子が光の速度よりも十分低い速度を有するようにビームが低エネルギーである場合、粒子のエネルギーを増加させることはその速度の増加をもたらし、それは経路長の増加を補償する以上のことがあり得る。その結果、粒子は単位時間あたりの回転数が多くなります。

しかしながら、超相対論的粒子の場合、粒子はすでに光速に非常に近いところを移動しているので、エネルギーの増加はごくわずかな速度の増加をもたらす。この場合、光路長の増加は速度の増加よりも優先され、粒子は単位時間あたりの回転数が少なくなります。

これら 2 つの体制の間にあるエネルギーでは、回転数はエネルギーに依存しません。このエネルギーは遷移エネルギーとして知られています。

1.3　シンクロトロン振動の方程式

$$\Delta\phi = \omega_{RF}\Delta T = \omega_{RF} T_0 \eta_p \frac{\Delta p}{p_0} \tag{15}$$

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{\beta_0^2}\frac{\Delta E}{E_0} \tag{16}$$

$$\Delta\phi = \frac{\omega_{RF} T_0 \eta_p}{\beta_0^2 E_0}\Delta E \tag{17}$$

$$\frac{d\phi}{dt} \simeq \frac{\Delta\phi}{T_0} = \frac{\omega_{RF}\eta_p}{\beta_0^2 E_0}\Delta E \tag{18}$$

$$\Delta E = eV_c(\sin\phi - \sin\phi_s) \tag{19}$$

$$\frac{d\Delta E}{dt} \simeq \frac{\Delta E}{T_0} = \frac{eV_c(\sin\phi - \sin\phi_s)}{T_0} \tag{20}$$

式 (16) の導出

$$p = mv = m_0 c\gamma\beta\,, \quad E = \gamma E_0 = m_0 c\gamma$$

$$\gamma\beta = \gamma\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dE} &= \frac{1}{c}\frac{d(\gamma\beta)}{d\gamma} = \frac{1}{c}\frac{d}{d\gamma}\sqrt{\gamma^2 - 1} \\ &= \frac{\gamma}{c}(\underbrace{\gamma^2 - 1}_{\gamma^2\beta^2})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{c\beta} = \frac{p}{\beta^2 E}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{dp}{p} = \frac{1}{\beta^2}\frac{dE}{E} \tag{C.1}$$

スムーズ近似

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\omega}\dot{E} - \frac{1}{\omega_0}\dot{E}_0 &= \frac{1}{\omega_0}\Delta\dot{E} - \dot{E}\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2} \\
&\approx \frac{1}{\omega_0}\Delta\dot{E} + \left[\dot{E}\frac{\Delta\left(1/\omega_0\right)}{\Delta E}\right] + \dots \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta E}{\omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

2 Longitudinal Dynamics

2.1 6-D Phase Space

$$
\begin{aligned}
&(x, x^{'}, y, y^{'}, z, \delta_p) \\
z = -ct, &\quad \delta_p = \frac{p - p_0}{p_0}
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Andy Wolski, Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators, Imperial College Pr (2014).

[2] S. Y. Lee, Accelerator physics, World Scientific (2004), ISBN 9789812562005.