Time-domain and Frequency-domain Signals

吉本伸一

2021 年 6 月 12 日

目次

1　Fourier 級数展開

周期が T_0 の周期関数 $f(t)$ を Fourier 級数展開すると

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{1}$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \tag{2}$$

ただし、$\omega_0 = 2\pi/T_0$ とおいた。

2　Fourier 変換

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{3}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{4}$$

3　デルタ関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a) \tag{7}$$

4　デルタ関数の Fourier 変換

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \tag{8}$$

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \tag{9}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

したがって、

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega) \tag{10}$$

5 Single-bunch Spectrum

リングに 1 個のバンチが周期が T_0 で周回している時、ビームの信号は次のよう表せる。

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \tag{11}$$

$i(t)$ は、周期 T_0 の周期関数なのでフーリエ級数展開でき、区間 $[-T_0/2, T_0/2]$ において $\delta(t-nT_0)$ は $\delta(t)$ とみなせるので、$\omega_0 = 2\pi/T_0$ とおくと (1), (2) より

$$\begin{aligned} i(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0}\left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right] e^{jn\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \tag{12}$$

となる。ここで、(4), (9) より

$$\begin{aligned} e^{jn\omega_0 t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - n\omega_0)] \end{aligned} \tag{13}$$

したがって、

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}\right] \\ &= \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - n\omega_0)]] \\ &= \frac{2\pi}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \tag{14}$$

これより、周期 T_0 で周回するバンチのスペクトルをスペアナなどで観測すると、周回周波数 ω_0 毎にピークを持つ信号が観測されることがわかる。

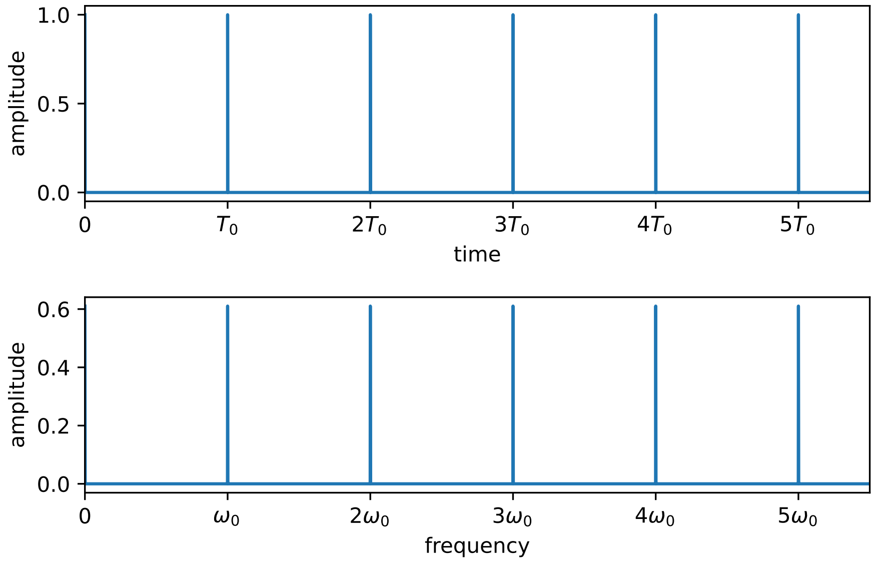

Fig. 1　単バンチのビーム信号のスペクトル.

6　Multi-bunch Spectrum

リングに M 個のバンチが均等に配置されている場合、ビームの信号は次のように表せる。

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{M-1} \delta(t - kT_0 - nT_0/M) \tag{15}$$

先ほどと同様に考えると、$i(t)$ は周期 T_0/M の周期関数なのでフーリエ級数展開でき、区間 $[-T_0/2M, T_0/2M]$ において $i(t)$ は $\delta(t)$ とみなせるので、$\omega_0 = 2\pi/T_0$ とおくと

$$\begin{aligned} i(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{M}{T_0} \left[\int_{-T_0/2M}^{T_0/2M} \delta(t) e^{-jnM\omega_0 t} dt \right] e^{jnM\omega_0 t} \\ &= \frac{M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnM\omega_0 t} \end{aligned} \tag{16}$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
I(\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{M}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnM\omega_0 t}\right] \\
&= \frac{M}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - nM\omega_0)]] \\
&= \frac{2\pi M}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - nM\omega_0) \\
&= M\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - nM\omega_0)
\end{aligned} \tag{17}
$$

これより、時間領域で密になるほど、周波数領域では疎になることが分かる。

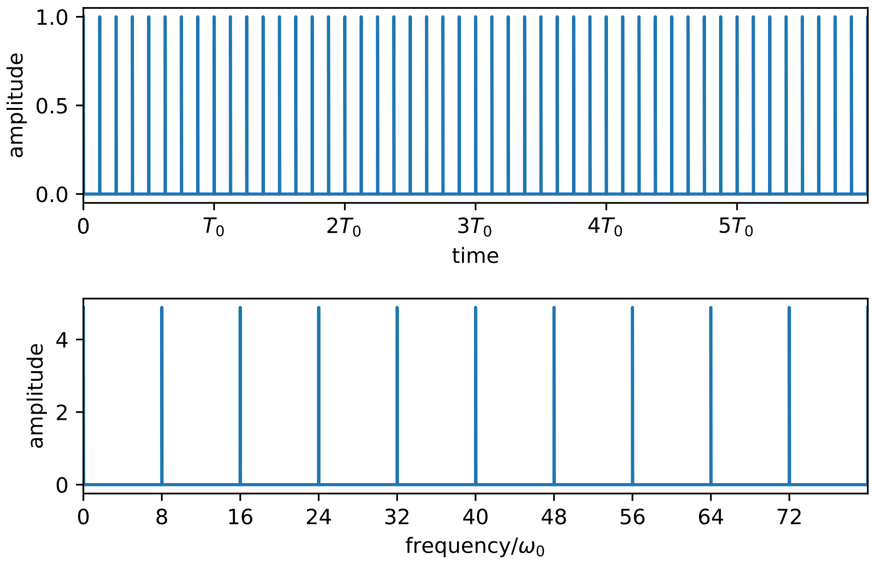

Fig. 2　多バンチのビーム信号のスペクトル ($M = 8$).

7　Synchrotron oscillation

周期 T_0 で周回している 1 個ののバンチが ω_s でシンクロトロン振動している場合、ビーム信号は

$$
i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - nT_0 - \tau_a \cos(\omega_s nT_0 + \phi)] \tag{18}
$$

と表せるので、フーリエ変換すると、

$$
\begin{aligned}
I(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\{nT_0 + \tau_a \cos(\omega_s n T_0 + \phi)\}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-j\omega n T_0} e^{-j\omega\tau_a \cos(\omega_s n T_0 + \phi)} \right]
\end{aligned} \tag{19}
$$

ここで、

$$
e^{jz\cos\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k(z) e^{jk\theta} \tag{20}
$$

という関係 (Jacobi–Anger expansion) を使うと（ただし、J_n はベッセル関数）

$$
\begin{aligned}
I(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-j)^k J_k(\omega\tau_a) e^{jk\phi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + k\omega_s)nT_0} \\
&= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-j)^k J_k(\omega\tau_a) e^{jk\phi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + k\omega_s - n\omega_0)
\end{aligned} \tag{21}
$$

となり、ω_0 毎のスペクトルの両サイドにシンクロトロン・サイドバンドが見える。

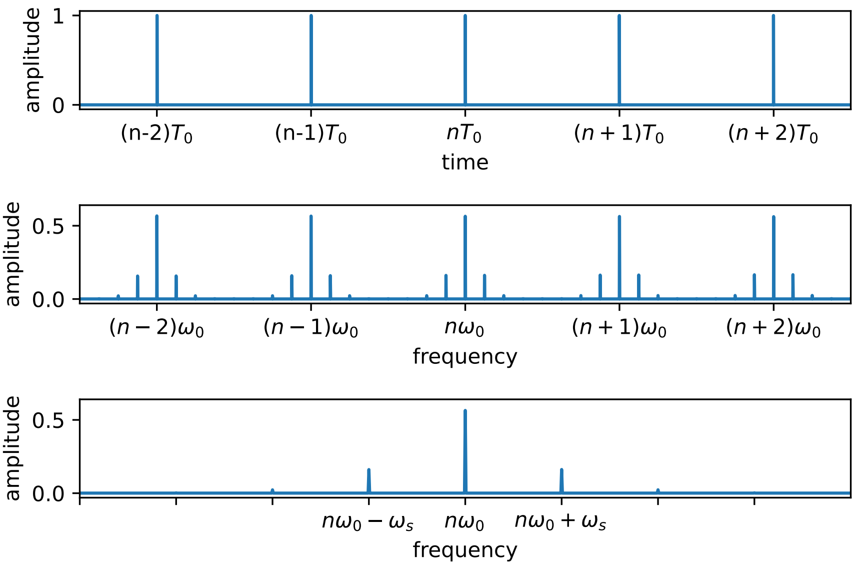

Fig. 3　シンクロトロン振動するバンチのビーム信号のスペクトル ($\omega_s/\omega_0 = 1/8$).

A　ポアソン和公式

$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ とした時、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{\alpha}\right) \tag{A.1}$$

が成り立つ。これをポアソン和公式 (Poisson summation formula) という。

証明　(9) より

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\alpha n)dt \tag{A.2}$$

$\sum \delta(t-\alpha n)$ は、周期 α の周期関数なのでフーリエ級数展開でき、区間 $[-\alpha/2, \alpha/2]$ において $\delta(t-\alpha n)$ は $\delta(t)$ とみなせるので、$\omega_0 = 2\pi/\alpha$ とおくと (1), (2) より

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-\alpha n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha}\left[\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right] e^{jn\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega_0 t}\end{aligned} \tag{A.3}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) &= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

□

参考文献

[1] 平松成範, 加速器のビームモニター (Beam Instrumentaion for Accelerrators), KEK Internal 2004-4 A.

[2] 菊谷英司, Fourier 解析入門, KEK Internal 2006-2 AD.

[3] A. W. Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, Wiley 1993, Chapter 4, pp. 165-169. `https://www.slac.stanford.edu/~achao/wileybook.html`