

# シンクロトロン振動のほへと

吉本伸一

2019 年 4 月 30 日

## 目次

1	Synchrotron motion	2
1.1	Synchronous particle . . . . .	2
1.2	各パラメータの運動量依存性 . . . . .	3
1.3	Transition . . . . .	3
1.4	シンクロトロン振動の方程式 . . . . .	5
2	Longitudinal Dynamics	6
2.1	6-D Phase Space . . . . .	6
2.2	Phase slip factor . . . . .	6
2.3	Energy Equation . . . . .	6
3	Transverse – Longitudinal Coupling	8
3.1	Dispersion . . . . .	8
3.2	Momentum compaction factor . . . . .	8
3.3	$\delta$ and $\delta_p$ . . . . .	8
4	Difference Equations for Longitudinal Motion in a Synchrotron	9

# 1 Synchrotron motion

シンクロトロン蓄積リングでは、偏向電磁石によって分散 (dispersion) が発生する為、粒子の横方向と縦方向の運動が結合する。この結合が、リングを周回する粒子の縦方向の振動 (シンクロトロン振動) において重要な役割を演じる。

## 1.1 Synchronous particle

運動量  $p_0$  を持つ粒子が、基準軌道<sup>\*1</sup> を周期  $T_0$  で周回し、高周波加速空洞を同じ位相  $\phi_s$  で通過する時、このような粒子のことを同期粒子 (synchronous particle) と呼ぶ。同期粒子であるためには、周回周波数  $f_0 (= 1/T_0)$  と空洞の RF 周波数  $f_{RF}$  の間に

$$f_{RF} = hf_0 \quad (1)$$

という関係が必要である。整数  $h$  を harmonic number と言い、周波数  $f_{RF}$  で加速できる最大の粒子数になる。この時、空洞の加速電圧は

$$V_c(\phi) = V_0 \sin(\phi), \quad \phi = \omega_{RF}t + \phi_s \quad (2)$$

となる。図 1 は、 $h = 2$  の時の空洞電圧と同期粒子の関係を表してる。

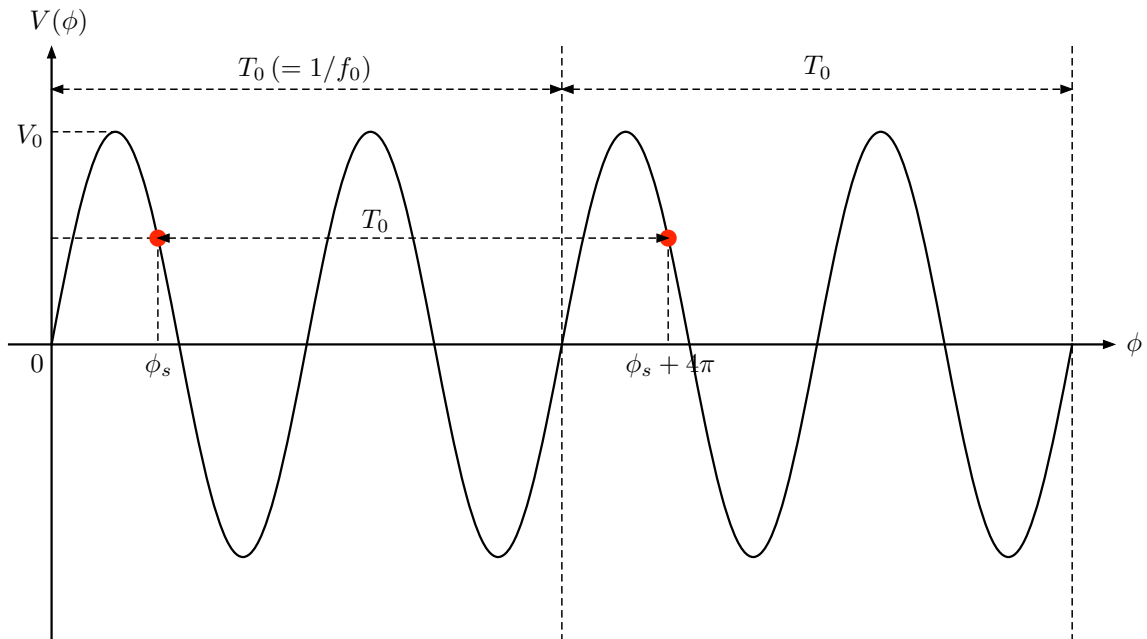


図 1:  $f_{RF} = hf_0$  ( $h = 2$ )

<sup>\*1</sup> 粒子の運動量に対応して、一定の閉じた軌道 (閉軌道) が存在する。

### SuperKEKB における $f_{RF}, f_0, h$ の関係

SuperKEKB のリングでは、電子と陽電子は、ほぼ光速  $c$  で回っており、周長  $C_0$  は 3016.315 m なので周回周波数  $f_0$  は

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{c}{C_0} = \frac{2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}}{3016.315 \text{ m}} = 99.39 \text{ kHz}$$

一方、RF 周波数  $f_{RF}$  は 508.887 MHz なので

$$f_{RF} = 5120 f_0$$

となり、確かに (1) を満たしている。

## 1.2 各パラメータの運動量依存性

同期粒子が平衡軌道  $C_0$  を速度  $v_0$  で周回する時、回転周期は

$$T_0 = \frac{C_0}{v_0}$$

となる。今、 $v = v_0 + \Delta v, C = C_0 + \Delta C, T = T_0 + \Delta T$

$$T = T_0 + \Delta T = \frac{C_0 + \Delta C}{v_0 + \Delta v}$$

これより

$$\begin{aligned} (T_0 + \Delta T)(v_0 + \Delta v) &= C_0 + \Delta C \\ \Leftrightarrow \underbrace{v_0 T_0}_{C_0} + \Delta v T_0 + v_0 \Delta T + \underbrace{\Delta v \Delta T}_0 &= \cancel{C_0} + \Delta C \\ \Leftrightarrow v_0 \Delta T &= \Delta C - \Delta v T_0 \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta T}{T_0} &= \frac{\Delta C_0}{\underbrace{v_0 T_0}_{C_0}} - \frac{\Delta v}{v_0} \end{aligned}$$

したがって、

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta C}{C_0} - \frac{\Delta v}{v_0} \quad (3)$$

この式より、回転周期の変動 ( $\Delta T/T_0$ ) をもたらす要因として、軌道の長さの変動 ( $\Delta C/C_0$ ) と粒子の速度の変動 ( $\Delta v/v_0$ ) である事が分かる。

## 1.3 Transition

運動量偏差 (momentum deviation)

$$\delta_p = \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} \quad (4)$$

momentum compaction factor

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0} = \alpha_p \delta_p \quad (5)$$

phase slip factor

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \eta_p \frac{\Delta p}{p_0} \quad (6)$$

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (7)$$

したがって、

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \left( \alpha_p - \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \frac{\Delta p}{p_0} \quad (8)$$

#### 相対論のおさらい

$$E_0 = m_0 c^2, \quad E = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} \quad (A.1)$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (A.2)$$

$$p = mv = \gamma m_0 v = \gamma m_0 \beta c \quad (A.3)$$

$$\frac{p}{E} = \frac{\gamma m_0 \beta c}{\gamma m_0 c^2} = \frac{\beta}{c} \quad (A.4)$$

#### 式 (7) の導出

$$\frac{dp}{dv} = m_0 \frac{d}{dv} (\gamma v) = m_0 \left( \gamma + v \frac{d\gamma}{dv} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dv} &= \frac{1}{c} \frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\beta} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \\ &= \frac{1}{c} \underbrace{\beta(1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}}}_{\gamma^{-2}} = \frac{\beta \gamma^3}{c} \\ &= \frac{1}{c} \underbrace{\beta(1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}}}_{\gamma^{-2}} = \frac{\beta \gamma^3}{c} \end{aligned}$$

これより、

$$\frac{dp}{dv} = m_0 \left( \gamma + v \frac{\beta \gamma^3}{c} \right) = m_0 \gamma \underbrace{(1 + \beta^2 \gamma^2)}_{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 p}{v}$$

$$\therefore \frac{dv}{v} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p} \quad (B.1)$$

正の運動量圧縮率  $\alpha_p > 0$  を持つ電磁石の配列を考えます。このような磁石の配列では、粒子のエネルギーを増加させると経路長が増加する。しかしながら、粒子が光の速度よりも十分低い速度を有す

るようにビームが低エネルギーである場合、粒子のエネルギーを増加させることはその速度の増加をもたらす、それは経路長の増加を補償する以上のことがあり得る。その結果、粒子は単位時間あたりの回転数が多くなります。

しかしながら、超相対論的粒子の場合、粒子はすでに光速に非常に近いところを移動しているので、エネルギーの増加はごくわずかな速度の増加をもたらす。この場合、光路長の増加は速度の増加よりも優先され、粒子は単位時間あたりの回転数が少なくなります。

これら2つの体制の間にあるエネルギーでは、回転数はエネルギーに依存しません。このエネルギーは遷移エネルギーとして知られています。

#### 1.4 シンクロトロン振動の方程式

$$\Delta\phi = \omega_{RF}\Delta T = \omega_{RF}T_0\eta_p \frac{\Delta p}{p_0} \quad (9)$$

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{\beta_0^2} \frac{\Delta E}{E_0} \quad (10)$$

$$\Delta\phi = \frac{\omega_{RF}T_0\eta_p}{\beta_0^2 E_0} \Delta E \quad (11)$$

$$\frac{d\phi}{dt} \simeq \frac{\Delta\phi}{T_0} = \frac{\omega_{RF}\eta_p}{\beta_0^2 E_0} \Delta E \quad (12)$$

$$\Delta E = eV_c(\sin\phi - \sin\phi_s) \quad (13)$$

$$\frac{d\Delta E}{dt} \simeq \frac{\Delta E}{T_0} = \frac{eV_c(\sin\phi - \sin\phi_s)}{T_0} \quad (14)$$

式 (10) の導出

$$p = mv = \gamma m_0 \beta c, \quad E = \gamma E_0 = \gamma m_0 c^2$$

$$\gamma\beta = \gamma \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dE} &= \frac{1}{c} \frac{d(\gamma\beta)}{d\gamma} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\gamma} \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ &= \frac{\gamma}{c} \underbrace{(\gamma^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}}_{\gamma^2 \beta^2} = \frac{1}{c\beta} = \frac{p}{\beta^2 E} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dp}{p} = \frac{1}{\beta^2} \frac{dE}{E} \quad (C.1)$$

## 2 Longitudinal Dynamics

### 2.1 6-D Phase Space

canonical variables:  $(x, x', y, y', z, \delta_p)$  synchronous phase:  $\phi_s = \omega_{RF} t_0$

$$z = -v(t - t_0)$$

$$\delta_p = \frac{p - p_0}{p_0}$$

### 2.2 Phase slip factor

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \eta \frac{\Delta p}{p_0} \quad (15)$$

$$\eta_p = \frac{1}{T_0} \left. \frac{dT}{d\delta_p} \right|_{\delta_p=0} \quad (16)$$

$$\eta_p = \alpha_p - \frac{1}{\gamma_0^2} \quad (17)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (18)$$

周長を  $C$ 、粒子の速度を  $v$  とすると回転周期  $T$  は

$$T = \frac{C}{v} \quad (19)$$

となるので、両辺を  $v$  で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dv} &= \frac{1}{v} \frac{dC}{dv} - \frac{C}{v^2} \\ &= \frac{T}{C} \frac{dC}{dv} - \frac{T}{v} \end{aligned} \quad (20)$$

したがって、

$$\frac{dT}{T} = \frac{dC}{C} - \frac{dv}{v} \quad (21)$$

### 2.3 Energy Equation

The energy of a particle at the  $(n+1)$ -th turn  $E_{n+1}$  is expressed by the energy  $E_n$  and RF phase  $\phi_n$  at the  $n$ -th turn as

$$E_{n+1} = E_n + eV \sin \phi_n \quad (22)$$

For a synchronous particle with suffix  $s$ ,

$$E_{0,n+1} = E_{0,n} + eV \sin \phi_s \quad (23)$$

Thus, the energy error,  $\Delta E = E - E_0$ , is expressed as

$$\Delta E_{n+1} = \Delta E_n + eV(\sin \phi_n - \sin \phi_s) \quad (24)$$

ここで、

$$\delta = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{\beta_0^2} \frac{\Delta E}{E_0} \quad (25)$$

より、

$$\Delta E_{n+1} - \Delta E_n = \beta^2 E_0 (\delta_{n+1} - \delta_n) \quad (26)$$

したがって、

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{eV}{\beta_0^2 E_0} (\sin \phi_n - \sin \phi_s) \quad (27)$$

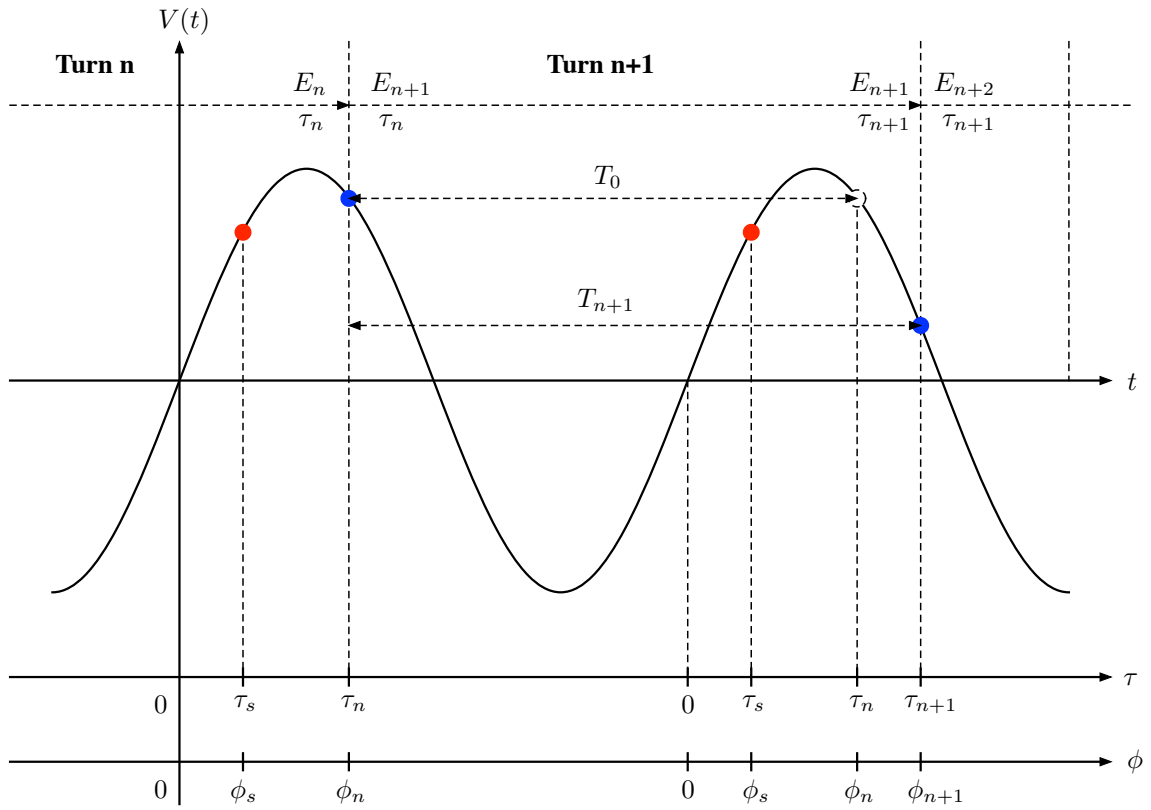


図 2: Relative and absolute coordinates. ( $h = 1$ )

粒子がエネルギー  $E_n$  でリングを  $n$  周回し、加速空洞で加速されエネルギーが  $E_{n+1}$  増えた時、 $n+1$  周回し再び加速空洞で加速する時間  $T_{n+1}$  は、

$$\Delta \tau_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n = T_{n+1} - T_{0,n+1} \quad (28)$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \omega_{RF} \Delta \tau_{n+1} = \omega_{RF} (T_{n+1} - T_{0,n+1}) \quad (29)$$

$$\frac{T_{n+1} - T_{0,n+1}}{T_{0,n+1}} = \eta \delta_{n+1} \quad (30)$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \omega_{RF} T_0 \eta \delta_{n+1} \quad (31)$$

以上より、

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{eV}{\beta_0^2 E_0} (\sin \phi_n - \sin \phi_s) \quad (32)$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \omega_{RF} T_0 \eta \delta_{n+1} \quad (33)$$

### 3 Transverse – Longitudinal Coupling

#### 3.1 Dispersion

運動量偏差 (momentum deviation)

$$\delta_p = \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} \quad (34)$$

分散 (dispersion)

$$x(\delta_p) = x|_{\delta_p=0} + \eta_x \delta_p + \eta_x^{(2)} \delta_p^2 + \dots \quad (35)$$

#### 3.2 Momentum compaction factor

momentum compaction factor

$$\alpha_p = \frac{1}{C_0} \left. \frac{dC}{d\delta_p} \right|_{\delta_p=0} \quad (36)$$

#### 3.3 $\delta$ and $\delta_p$

Note that the momentum deviation  $\delta_p$  is not the same as the energy deviation  $\delta$ . To proceed, it is useful to have a relationship between the derivative with respect to  $\delta_p$  and the derivative with respect to  $\delta$ .

##### 3.3.1 energy deviation

$$\delta \equiv \frac{E}{P_0 c} - \frac{1}{\beta_0} \quad (37)$$

$E = \gamma mc^2$ ,  $P_0 = \beta_0 \gamma_0 mc$  より

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\gamma mc^2}{c(\beta_0 \gamma_0 mc)} - \frac{1}{\beta_0} \\ &= \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{E}{E_0} - 1 \right) \end{aligned} \quad (38)$$

##### 3.3.2 momentum deviation

$$\delta_p = \frac{P}{P_0} - 1 \quad (39)$$

Since  $\delta_p = 0$  when  $\delta = 0$ , we can write:



## 4 Difference Equations for Longitudinal Motion in a Synchrotron

The relative time  $\tau$  and the relative phase  $\phi$  are measured with respect to the zero crossing of the gap voltage.

$$\tau(n+1) - \tau(n) = T(n+1) - T_0(n+1) \quad (40)$$

$\phi(n) = \omega_{RF}(n)\tau(n)$  と置くと

$$\begin{aligned} \phi(n+1) &= \omega_{RF}(n+1)\tau(n+1) \\ &= \omega_{RF}(n+1)\{\tau(n) + T(n+1) - T_0(n+1)\} \\ &= \frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) + \omega_{RF}(n+1)\{T(n+1) - T_0(n+1)\} \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{T(n+1) - T_0(n+1)}{T_0(n+1)} = \eta\delta_p(n+1) \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \phi(n+1) &= \frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) + \omega_{RF}(n+1)T_0(n+1)\eta\delta_p(n+1) \\ &= \frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) + 2\pi h\eta\delta_p(n+1) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) \approx 1 \quad (43)$$

$$\phi(n+1) = \phi(n) + 2\pi h\eta\delta_p(n+1) \quad (44)$$

The energy of a particle at the (n+1)-th turn  $E(n+1)$  is expressed by the energy  $E(n)$  and RF phase  $\phi(n)$  at the n-th turn as

$$E(n+1) = E(n) + eV \sin \phi(n) \quad (45)$$

For a synchronous particle with suffix 0,

$$E_0(n+1) = E_0(n) + eV \sin \phi_s \quad (46)$$

Thus, the energy error,  $\Delta E = E - E_0$ , is expressed as

$$\Delta E(n+1) = \Delta E(n) + eV(\sin \phi(n) - \sin \phi_s) \quad (47)$$

ここで、

$$\delta_p = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{\beta_0^2} \frac{\Delta E}{E_0} \quad (48)$$

より、

$$\Delta E(n+1) - \Delta E(n) = \beta^2 E_0 \{\delta_p(n+1) - \delta_p(n)\} \quad (49)$$

したがって、

$$\delta_p(n+1) - \delta_p(n) = \frac{eV}{\beta_0^2 E_0} (\sin \phi(n) - \sin \phi_s) \quad (50)$$

the symplectic mapping equation:

$$\begin{aligned} \delta_p(n+1) - \delta_p(n) &= \frac{eV}{\beta_0^2 E_0} (\sin \phi(n) - \sin \phi_s) \\ \phi(n+1) &= \phi(n) + 2\pi h\eta\delta_p(n+1) \end{aligned} \quad (51)$$

## 参考文献

- [1] A. Chao, K. Mess, M. Tigner, and F. Zimmermann, Handbook of Accelerator Physics and Engineering (2nd Edition), World Scientific Publishing Company Incorporated, Singapore (2013)
- [2] A.W.Chao and M.Tigner, editors. Handbook of Accelerator Physics and Engineering. World Scientific Pub. Co., 3rd printing edition, 2009.
- [3] Andy Wolski, Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators, Imperial College Pr (2014).
- [4] S. Y. Lee, Accelerator physics, World Scientific (2004), ISBN 9789812562005.
- [5] D.A. Edwards, M.J. Syphers, 'An introduction to the physics of high energy accelerators', Wiley (1993).