Time-domain and Frequency-domain Signals

吉本伸一

2021 年 6 月 10 日

目次

1 Fourier 級数展開

周期が T_0 の周期関数 $f(t)$ を Fourier 級数展開すると

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{1}$$

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \tag{2}$$

ただし、$\omega_0 = 2\pi/T_0$ とおいた。

2 Fourier 変換

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{3}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{4}$$

3 デルタ関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \tag{7}$$

4 デルタ関数の Fourier 変換

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1 \tag{8}$$

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega t_0} \tag{9}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi} \tag{10}$$

したがって、

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega) \tag{11}$$

5 ポアソン和公式

$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ とした時、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{\alpha}\right) \tag{12}$$

が成り立つ。これをポアソン和公式 (Poisson summation formula) という。

証明

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{\alpha}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\frac{2\pi n}{\alpha}t}dt \tag{13}$$

□

6 Single-bunch Spectrum

リングに 1 個のバンチが周期が T_0 で周回している時、ビームの信号は、くし型関数を用いて以下のよう表せる。

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \tag{14}$$

$\delta_T(t)$ は周期 T_0 の周期関数なので、フーリエ級数展開でき、$\omega_0 = 2\pi/T_0$ とすると

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0}\left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right] e^{jn\omega_0 t} \tag{15}$$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \tag{16}$$

となる。なお、区間 $[-T_0/2, T_0/2]$ においては $\delta_T(t)$ は $\delta(t)$ とみなせることを使った。ここで、式 (9) より

$$
\begin{aligned}
e^{jn\omega_0 t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) e^{j\omega t} d\omega && (17)\\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) e^{j\omega t} d\omega && (18)\\
&= \mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - n\omega_0)] && (19)
\end{aligned}
$$

したがって、くし型関数の Fourier 変換は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[\delta_T(t)] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}\right] && (20)\\
&= \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - n\omega_0)]] && (21)\\
&= \frac{2\pi}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) && (22)\\
&= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) && (23)
\end{aligned}
$$

これより、周期 T_0 で周回するバンチのスペクトルをスペアナなどで観測すると、周回周波数 ω_0 毎にピークを持つ信号が観測されることがわかる。

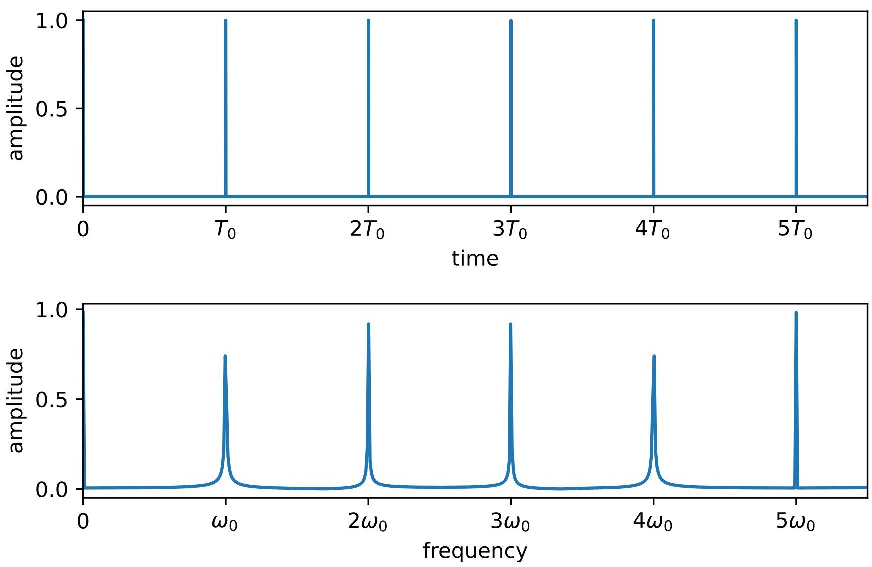

Fig. 1　単バンチのビーム信号のスペクトル.

7 Multi-bunch Spectrum

リングに M 個のバンチが均等に配置されている場合、ビームの信号は

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{M-1} \delta(t - kT_0 - nT_0/M) \tag{24}$$

と表すことができる。くし型関数と同様に考えると、$f(t)$ は周期 T_0/M の周期関数で、区間 $[-T_0/2M, T_0/2M]$ においては $f(t)$ は $\delta(t)$ とみなせるから

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{M}{T_0} \left[\int_{-T_0/2M}^{T_0/2M} \delta(t) e^{-jnM\omega_0 t} dt \right] e^{jnM\omega_0 t} \tag{25}$$

$$= \frac{M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnM\omega_0 t} \tag{26}$$

したがって、

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnM\omega_0 t} \right] \tag{27}$$

$$= \frac{M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - nM\omega_0)]] \tag{28}$$

$$= \frac{2\pi M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - nM\omega_0) \tag{29}$$

$$= M\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - nM\omega_0) \tag{30}$$

8 Synchrotron oscillation

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - nT_0 - \tau_a \cos(\omega_s nT_0 + \phi)] \tag{31}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt \tag{32}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\{nT_0 + \tau_a \cos(\omega_s nT_0 + \phi)\}} \tag{33}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-j\omega nT_0} + e^{-j\omega\tau_a \cos(\omega_s nT_0 + \phi)} \right] \tag{34}$$

ここで、

$$e^{jz\cos\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k(z) e^{jk\theta} \tag{35}$$

という関係を使うと（ただし、J_n はベッセル関数）

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-j)^k J_k(\omega\tau_a) e^{jk\phi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+k\omega_s)nT_0} \tag{36}$$

$$= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-j)^k J_k(\omega\tau_a) e^{jk\phi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + k\omega_s - n\omega_0) \tag{37}$$

参考文献

[1] 平松成範, 加速器のビームモニター (Beam Instrumentaion for Accelerrators), KEK Internal 2004-4 A.