

# Time-domain and Frequency-domain Signals

吉本伸一

2021 年 6 月 3 日

## 目次

1	Fourier 級数展開 .....	2
2	Fourier 変換 .....	2
3	デルタ関数 .....	2
4	デルタ関数の Fourier 変換 .....	2
5	くし型関数の Fourier 変換 .....	3
6	Multi-bunch Spectrum .....	3

## 1 Fourier 級数展開

周期が  $T_0$  の周期関数  $f(t)$  を Fourier 級数展開すると

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (1)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (2)$$

ただし、 $\omega_0 = 2\pi/T_0$  とおいた。

## 2 Fourier 変換

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4)$$

## 3 デルタ関数

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad (7)$$

## 4 デルタ関数の Fourier 変換

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1 \quad (8)$$

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-i\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \quad (9)$$

## 5 くし型関数の Fourier 変換

周期が  $T_0$  のくし型関数は以下のように表せる。

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) \quad (10)$$

$\delta_T(t)$  は周期  $T_0$  の周期関数なので、フーリエ級数展開でき、 $\omega_0 = 2\pi/T_0$  とすると

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \left[ \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right] e^{in\omega_0 t} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 t} \quad (12)$$

となる。なお、区間  $[-T_0/2, T_0/2]$  においては  $\delta_T(t)$  は  $\delta(t)$  とみなせることを使った。ここで、式 (9) より

$$e^{in\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) e^{i\omega t} d\omega \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - n\omega_0) e^{i\omega t} d\omega \quad (14)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}[2\pi \delta(\omega - n\omega_0)] \quad (15)$$

したがって、くし型関数の Fourier 変換は

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \mathcal{F} \left[ \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 t} \right] \quad (16)$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[2\pi \delta(\omega - n\omega_0)]] \quad (17)$$

$$= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad (18)$$

$$= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad (19)$$

## 6 Multi-bunch Spectrum

リングに  $M$  個のバンチが均等に配置されている場合、ビームの信号は

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{M-1} \delta(t - kT_0 - nT_0/M) \quad (20)$$

と表すことができる。くし型関数と同様に考えると、 $f(t)$  は周期  $T_0/M$  の周期関数で、区間  $[-T_0/2M, T_0/2M]$  においては  $f(t)$  は  $\delta(t)$  とみなせるから

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{M}{T_0} \left[ \int_{-T_0/2M}^{T_0/2M} \delta(t) e^{-inM\omega_0 t} dt \right] e^{inM\omega_0 t} \quad (21)$$

$$= \frac{M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inM\omega_0 t} \quad (22)$$

したがって、

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F} \left[ \frac{M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inM\omega_0 t} \right] \quad (23)$$

$$= \frac{M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - nM\omega_0)]] \quad (24)$$

$$= \frac{2\pi M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - nM\omega_0) \quad (25)$$

$$= M\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - nM\omega_0) \quad (26)$$

## 参考文献

- [1] E.M. McMillan, Phys. Rev., 68, 143 (1945); V.I. Veksler, Compt. Rend. Acad. Sci. U.S.S.R., 43, 329 (1944); 44, 365 (1944).