シンクロトロン振動のほへと

吉本伸一

2019 年 5 月 5 日

目次

1 Synchrotron motion

シンクロトロン蓄積リングでは、偏向電磁石によって分散 (dispersion) が発生する為、粒子の横方向と縦方向の運動が結合する。この結合が、リングを周回する粒子の縦方向の振動 (シンクロトロン振動) において重要な役割を演じる。

1.1 Synchronous particle

運動量 p_0 を持つ粒子が、基準軌道*[1] を周期 T_0 で周回し、高周波加速空洞を同じ位相 ϕ_s で通過する時、このような粒子のことを同期粒子 (synchronous particle) と呼ぶ。同期粒子であるためには、周回周波数 $f_0(=1/T_0)$ と空洞の RF 周波数 f_{RF} の間に

$$f_{RF} = hf_0 \tag{1}$$

という関係が必要である。整数 h を harmonic number と言い、周波数 f_{RF} で加速できる最大の粒子数になる。この時、空洞の加速電圧は

$$V_c(\phi) = V_0 \sin(\phi),\ \phi = \omega_{RF}t + \phi_s \tag{2}$$

となる。図 1 は、$h = 2$ の時の空洞電圧と同期粒子の関係を表してる。

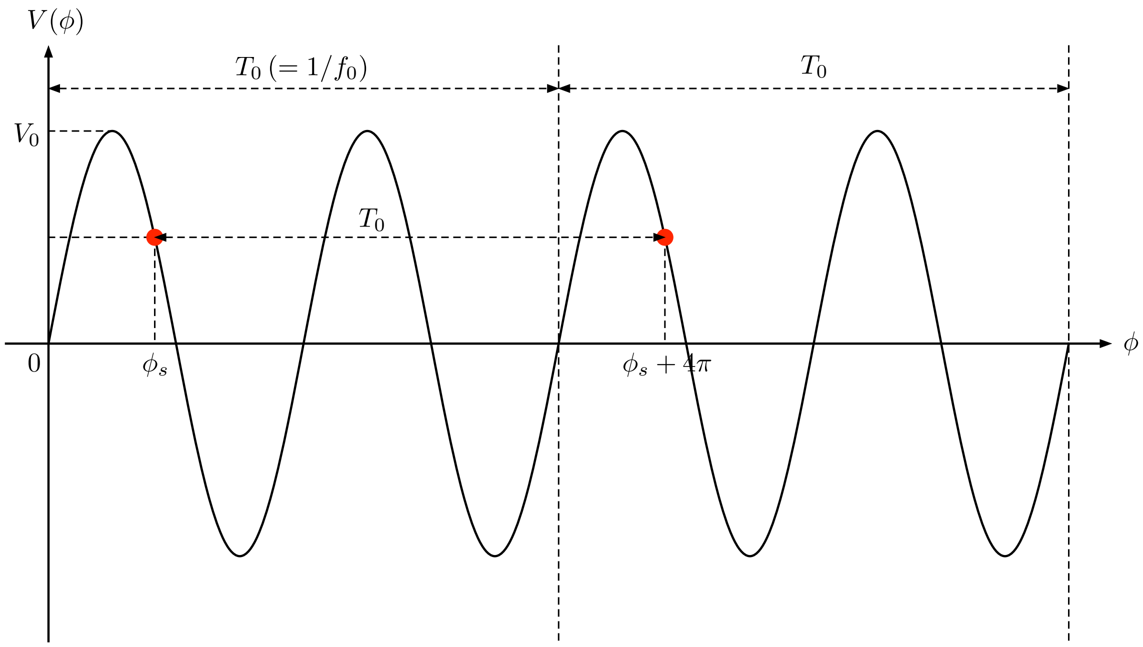

図 1: $f_{RF} = hf_0\ (h = 2)$

*[1] 粒子の運動量に対応して、一定の閉じた軌道 (閉軌道) が存在する。

SuperKEKB における f_{RF}, f_0, h の関係

SuperKEKB のリングでは、電子と陽電子は、ほぼ光速 c で回っており、周長 C_0 は 3016.315 m なので周回周波数 f_0 は

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{c}{C_0} = \frac{2.997\,924\,58 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}{3016.315\,\mathrm{m}} = 99.39\,\mathrm{kHz}$$

一方、RF 周波数 f_{RF} は 508.887 MHz なので

$$f_{RF} = 5120 f_0$$

となり、確かに (1) を満たしている。

1.2 Dispersion effects in a synchrotron

粒子の運動量が変化すると、速度や軌道長も変わる。今、運動量偏差 (momentum deviation) を

$$\delta_p = \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} \tag{3}$$

とし、同期粒子より運動量が大きい粒子 ($\delta_p > 0$) が偏光磁石を通過する場合を考える (図 2)。その粒子は曲げられにくい為、基準軌道とは異なる軌道を通ることになる。この軌道のずれ $x(s)$ は分散関数 (dispersion function) $D_x(s)$ を用いて、

$$x(s) = D_x(s)\frac{\Delta p}{p_0} = D_x(s)\delta_p \tag{4}$$

と表される。今、基準軌道の曲率半径を ρ とすると $ds = \rho d\theta$ より、

$$dC = (\rho + x)d\theta = (\rho + x)\frac{ds}{\rho} \tag{5}$$

したがって、この粒子の軌道長 C は、

$$\begin{aligned} C &= \oint (\rho + x)\frac{ds}{\rho} = \int_0^{C_0} ds + \int_0^{C_0} \frac{x}{\rho} ds \\ &= C_0 + \delta_p \int_0^{C_0} \frac{D_x(s)}{\rho} ds \end{aligned} \tag{6}$$

ここで運動量圧縮率 (momentum compaction factor) α_p を

$$\alpha_p \equiv \frac{1}{C_0} \oint \frac{D(s)}{\rho} ds \tag{7}$$

と定義すると、軌道長の差 $\Delta C = C - C_0$ は、

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0} = \alpha_p \delta_p \tag{8}$$

となり α_p は運動量の変化による相対的な軌道長の変化を表していることになる。

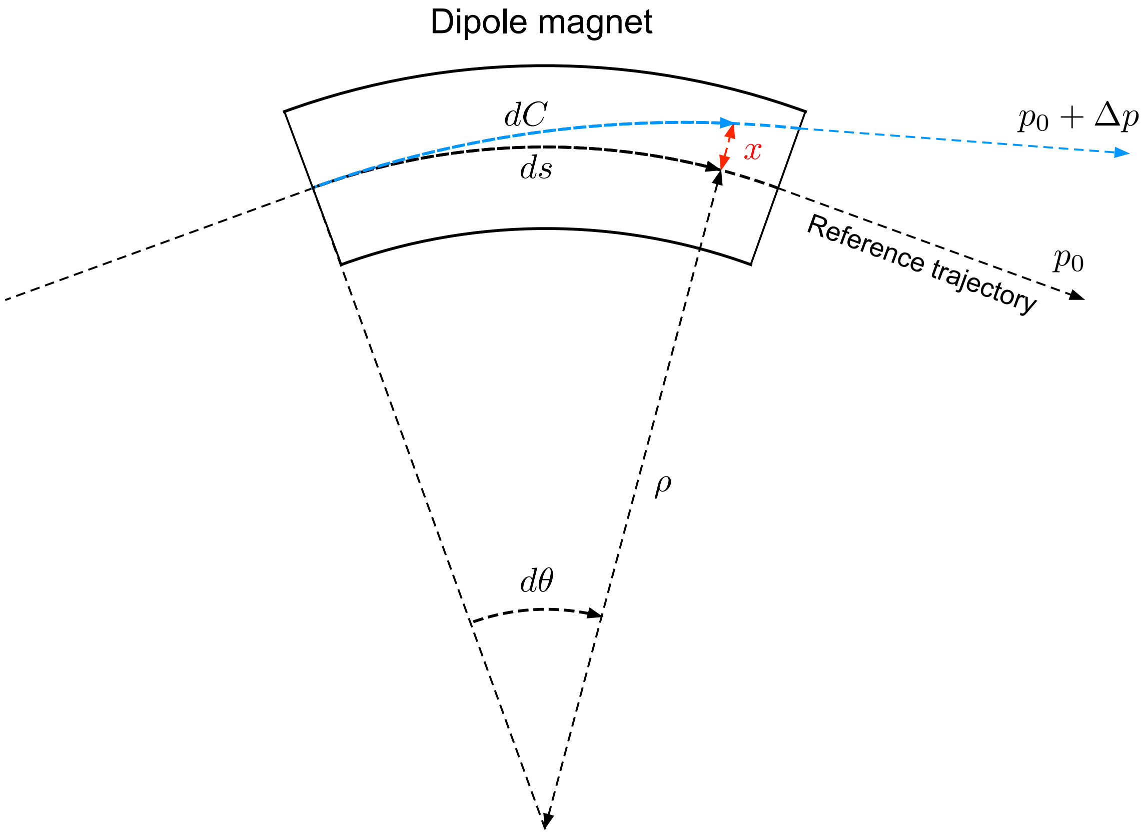

図 2: Dispersion

次に、運動量の変化が回転周期に及ぼす影響を考える事にする。運動量の変化 Δp によって、速度と回転周期がそれぞれ $v = v_0 + \Delta v$ と $T = T_0 + \Delta T$ に変化した時、回転周期は $T = C/v$ であるので、

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta C}{C_0} - \frac{\Delta v}{v_0} \tag{9}$$

となる。この式より、回転周期の変化 $(\Delta T/T_0)$ をもたらす要因として、軌道長の変化 $(\Delta C/C_0)$ と粒子の速度の変化 $(\Delta v/v_0)$ である事が分かる。ここで (A.5) より

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{\gamma_0^2}\frac{\Delta p}{p_0} \tag{10}$$

(9) に (8) と (10) を代入すると、

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \left(\alpha_p - \frac{1}{\gamma_0^2}\right)\frac{\Delta p}{p_0} = \eta_p \delta_p \tag{11}$$

ただし、

$$\eta_p \equiv \alpha_p - \frac{1}{\gamma_0^2} = \frac{1}{\gamma_t^2} - \frac{1}{\gamma_0^2} \tag{12}$$

は phase slip factor と言い、運動量の変化による相対的な回転周期 T の変化率を表している。

運動量圧縮率が正の場合 $(\alpha_p > 0)$ を考える。このとき、粒子の運動量を増加させると経路長が増加する。しかし、粒子の運動量がまだ低く、光度よりも十分遅い場合、粒子の運動量の増加による速度

の増加は、運動量の増加による経路長の増加を越えることがあり得る。その結果、粒子の回転周期は短くなる ($\eta_p < 0$)。一方、粒子の運動量が十分高く超相対論的粒子の場合、粒子の速度は既に光速に十分近く、運動量の増加による速度の増加は極僅かである。この場合、経路長の増加が速度の増加を上回り、粒子の回転周期は長くなる ($\eta_p > 0$)。$\eta_p = 0$ の時、つまり

$$\gamma_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha_p}} \tag{13}$$

では回転周期は運動量に依存しない。この γ_t を遷移エネルギー (transition energy) と言う。

式 (9) の導出

$v = v_0 + \Delta v, C = C_0 + \Delta C, T = T_0 + \Delta T$ とすると $T = C/v$ より、

$$T_0 + \Delta T = \frac{C_0 + \Delta C}{v_0 + \Delta v}$$

分母を払って整理すると、(二次の微小量は無視する)

$$\begin{aligned}
& (T_0 + \Delta T)(v_0 + \Delta v) = C_0 + \Delta C \\
\iff \quad & \underbrace{\cancel{v_0 T_0}}_{C_0} + \Delta v T_0 + v_0 \Delta T + \underbrace{\cancel{\Delta v \Delta T}}_{0} = \cancel{C_0} + \Delta C \\
\iff \quad & v_0 \Delta T = \Delta C - \Delta v T_0 \\
\iff \quad & \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta C_0}{\underbrace{v_0 T_0}_{C_0}} - \frac{\Delta v}{v_0} \\
\iff \quad & \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta C_0}{C_0} - \frac{\Delta v}{v_0}
\end{aligned}$$

2 Phase stability

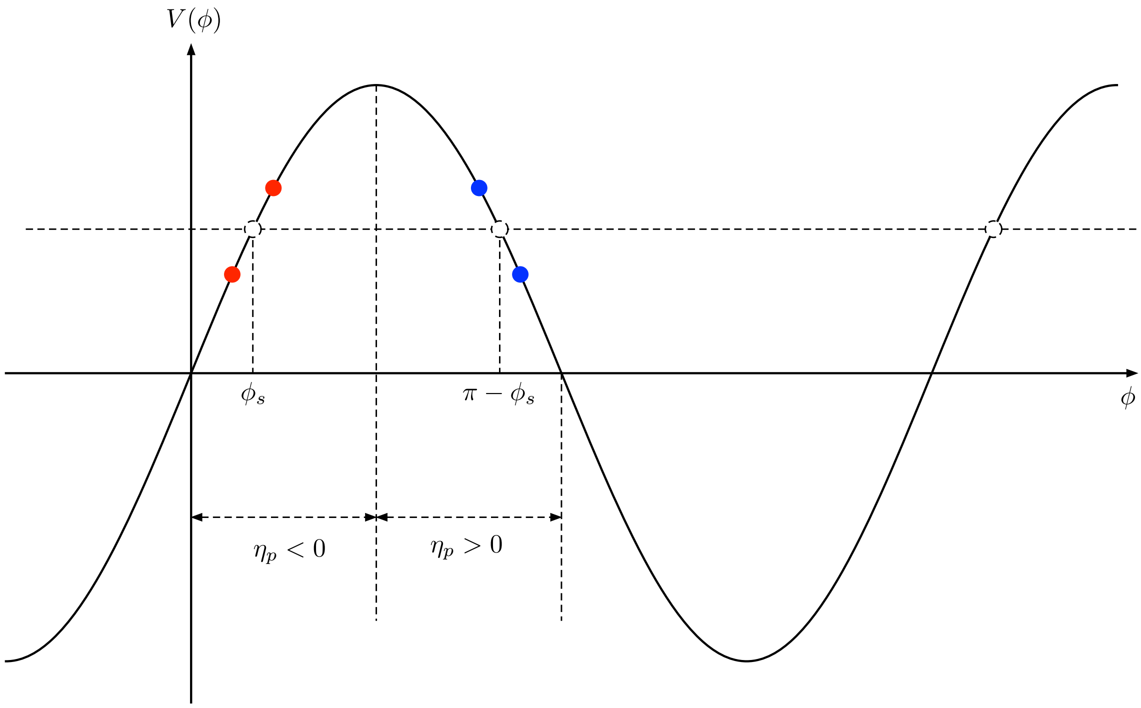

図 3: phase stability

2.1 Energy Equation

The energy of a particle at the (n+1)-th turn E_{n+1} is expressed by the energy E_n and RF phase ϕ_n at the n-th turn as

$$E_{n+1} = E_n + eV \sin \phi_n \tag{14}$$

For a synchronous particle with suffix s,

$$E_{0,n+1} = E_{0,n} + eV \sin \phi_s \tag{15}$$

Thus, the energy error, $\Delta E = E - E_0$, is expressed as

$$\Delta E_{n+1} = \Delta E_n + eV(\sin \phi_n - \sin \phi_s) \tag{16}$$

ここで、

$$\delta = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{\beta_0^2} \frac{\Delta E}{E_0} \tag{17}$$

より、

$$\Delta E_{n+1} - \Delta E_n = \beta^2 E_0 (\delta_{n+1} - \delta_n) \tag{18}$$

したがって、

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{eV}{\beta_0^2 E_0}(\sin\phi_n - \sin\phi_s) \tag{19}$$

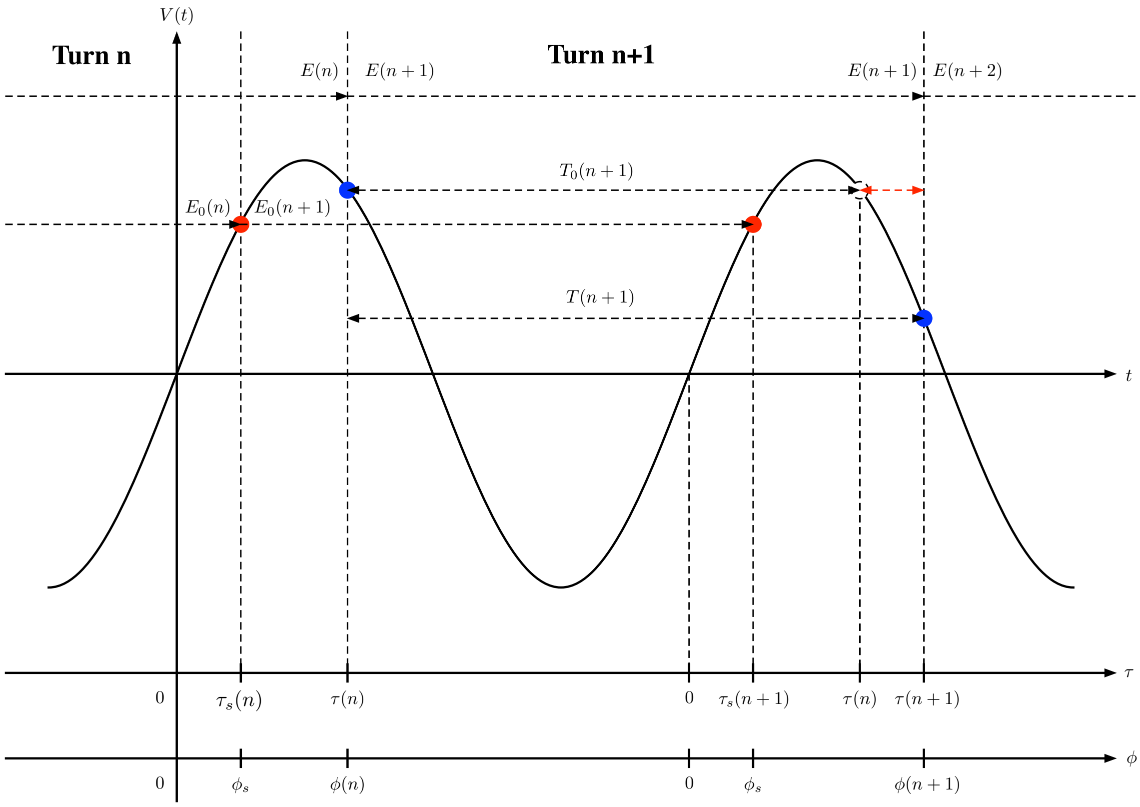

図 4: Relative and absolute coodinates. ($h = 1$)

粒子がエネルギー E_n でリングを n 周回し、加速空洞で加速されエネルギーが E_{n+1} 増えた時、$n+1$ 周回し再び加速空洞で加速する時間 T_{n+1} は、

$$\Delta\tau_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n = T_{n+1} - T_{0,n+1} \tag{20}$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \omega_{RF}\Delta\tau_{n+1} = \omega_{RF}(T_{n+1} - T_{0,n+1}) \tag{21}$$

$$\frac{T_{n+1} - T_{0,n+1}}{T_{0,n+1}} = \eta\delta_{n+1} \tag{22}$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \omega_{RF} T_0 \eta \delta_{n+1} \tag{23}$$

以上より、

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{eV}{\beta_0^2 E_0}(\sin\phi_n - \sin\phi_s) \tag{24}$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \omega_{RF} T_0 \eta \delta_{n+1} \tag{25}$$

3 Transverse − Longitudinal Coupling

3.1 Dispersion

運動量偏差 (momentum deviation)

$$\delta_p = \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} \tag{26}$$

分散 (dispersion)

$$x(\delta_p) = x|_{\delta_p=0} + \eta_x \delta_p + \eta_x^{(2)} \delta_p^2 + \dots \tag{27}$$

3.2 Momentum compaction factor

momentum compaction factor

$$\alpha_p = \frac{1}{C_0} \left.\frac{dC}{d\delta_p}\right|_{\delta_p=0} \tag{28}$$

3.3 δ and δ_p

Note that the momentum deviation δ_p is not the same as the energy deviation δ. To proceed, it is useful to have a relationship between the derivative with respect to δ_p and the derivative with respect to δ.

3.3.1 energy deviation

$$\delta \equiv \frac{E}{P_0 c} - \frac{1}{\beta_0} \tag{29}$$

$E = \gamma mc^2$, $P_0 = \beta_0 \gamma_0 mc$ より

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\gamma mc^2}{c(\beta_0\gamma_0 mc)} - \frac{1}{\beta_0} \\ &= \frac{1}{\beta_0}\left(\frac{\gamma}{\gamma_0} - 1\right) \\ &= \frac{1}{\beta_0}\left(\frac{E}{E_0} - 1\right)\end{aligned} \tag{30}$$

3.3.2 momentum deviation

$$\delta_p = \frac{P}{P_0} - 1 \tag{31}$$

Since $\delta_p = 0$ when $\delta = 0$, we can write:

4 Difference Equations for Longitudinal Motion in a Synchrotron

The relative time τ and the relative phase ϕ are measured with respect to the zero crossing of the gap voltage.

$$\tau(n+1) - \tau(n) = T(n+1) - T_0(n+1) \tag{32}$$

$\phi(n) = \omega_{RF}(n)\tau(n)$ と置くと

$$\begin{aligned}\phi(n+1) &= \omega_{RF}(n+1)\tau(n+1)\\ &= \omega_{RF}(n+1)\{\tau(n) + T(n+1) - T_0(n+1)\}\\ &= \frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) + \omega_{RF}(n+1)\{T(n+1) - T_0(n+1)\}\end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{T(n+1) - T_0(n+1)}{T_0(n+1)} = \eta\delta_p(n+1) \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\phi(n+1) &= \frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) + \omega_{RF}(n+1)T_0(n+1)\eta\delta_p(n+1)\\ &= \frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) + 2\pi h\eta\delta_p(n+1) \qquad (34)\end{aligned}$$

$$\frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) \approx 1 \tag{35}$$

$$\phi(n+1) = \phi(n) + 2\pi h\eta\delta_p(n+1) \tag{36}$$

The energy of a particle at the (n+1)-th turn $E(n+1)$ is expressed by the energy $E(n)$ and RF phase $\phi(n)$ at the n-th turn as

$$E(n+1) = E(n) + eV\sin\phi(n) \tag{37}$$

For a synchronous particle with suffix 0,

$$E_0(n+1) = E_0(n) + eV\sin\phi_s \tag{38}$$

Thus, the energy error, $\Delta E = E - E_0$, is expressed as

$$\Delta E(n+1) = \Delta E(n) + eV(\sin\phi(n) - \sin\phi_s) \tag{39}$$

ここで、

$$\delta_p = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{\beta_0^2}\frac{\Delta E}{E_0} \tag{40}$$

より、

$$\Delta E(n+1) - \Delta E(n) = \beta^2 E_0\{\delta_p(n+1) - \delta_p(n)\} \tag{41}$$

したがって、

$$\delta_p(n+1) - \delta_p(n) = \frac{eV}{\beta_0^2 E_0}(\sin\phi(n) - \sin\phi_s) \tag{42}$$

the symplectic mapping equation:

$$\begin{aligned}\delta_p(n+1) - \delta_p(n) &= \frac{eV}{\beta_0^2 E_0}(\sin\phi(n) - \sin\phi_s)\\ \phi(n+1) &= \phi(n) + 2\pi h\eta\delta_p(n+1)\end{aligned} \tag{43}$$

5 Differential Equations for Longitudinal Motion in a Synchrotron

The difference equations (43) can be written as continuous differential equations, if the assumption is made that the change of the variables ϕ and δ_p during one turn in the ring is not too large. In this case, the difference quotient can be approximated by the differential quotient

$$\frac{\delta_p(n+1)-\delta_p(n)}{T_0(n+1)} \approx \frac{d\delta_p}{dt} = \dot{\delta_p}, \quad \frac{\phi(n+1)-\phi(n)}{T_0(n+1)} \approx \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta_p} &= \frac{eV\omega_0}{2\pi\beta_0^2 E_0}(\sin\phi - \sin\phi_s) \\ \dot{\phi} &= h\omega_0\eta\delta_p \end{aligned} \tag{45}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{eVh\eta\omega_0^2}{2\pi\beta_0^2 E_0}(\sin\phi - \sin\phi_s) \tag{46}$$

5.1 Small amplitude approximation

$\Delta\phi = \phi - \phi_s$ が非常に小さい時、

$$\sin\phi = \sin(\phi_s + \Delta\phi) \approx \sin\phi_s + \cos\phi_s\Delta\phi \tag{47}$$

より

$$\ddot{\Delta\phi} = \frac{eVh\eta\omega_0^2}{2\pi\beta_0^2 E_0}\cos\phi_s\Delta\phi = -\omega_s^2\Delta\phi \tag{48}$$

ただし、

$$\omega_s = \sqrt{-\frac{eVh\eta\omega_0^2\cos\phi_s}{2\pi\beta_0^2 E_0}} \tag{49}$$

付録 A　相対論のおさらい

$$E_0 = m_0c^2, \quad E = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2} \tag{A.1}$$

$$\beta = \frac{v}{c}\,, \quad \gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{A.2}$$

$$p = mv = \gamma m_0 v = \gamma m_0 \beta c \tag{A.3}$$

$$\frac{p}{E} = \frac{\gamma m_0 \beta c}{\gamma m_0 c^2} = \frac{\beta}{c} \tag{A.4}$$

式 (10) の導出

$$\frac{dp}{dv} = m_0 \frac{d}{dv}(\gamma v) = m_0 \left(\gamma + v\frac{d\gamma}{dv} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dv} &= \frac{1}{c}\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{1}{c}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \\ &= \frac{1}{c}\beta\underbrace{(1-\beta^2)}_{\gamma^{-2}}{}^{-\frac{3}{2}} = \frac{\beta\gamma^3}{c} \\ &= \frac{1}{c}\beta\underbrace{(1-\beta^2)}_{\gamma^{-2}}{}^{-\frac{3}{2}} = \frac{\beta\gamma^3}{c} \end{aligned}$$

これより、

$$\frac{dp}{dv} = m_0\left(\gamma + v\frac{\beta\gamma^3}{c} \right) = m_0\gamma\underbrace{(1+\beta^2\gamma^2)}_{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 p}{v}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{v} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{dp}{p} \tag{A.5}$$

$$p = mv = \gamma m_0 \beta c\,, \quad E = \gamma E_0 = \gamma m_0 c^2$$

$$\gamma\beta = \gamma\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{\gamma^2-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dE} &= \frac{1}{c}\frac{d(\gamma\beta)}{d\gamma} = \frac{1}{c}\frac{d}{d\gamma}\sqrt{\gamma^2-1} \\ &= \frac{\gamma}{c}(\underbrace{\gamma^2-1}_{\gamma^2\beta^2})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{c\beta} = \frac{p}{\beta^2 E} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{dp}{p} = \frac{1}{\beta^2}\frac{dE}{E} \tag{A.6}$$

付録 B　その他

参考文献

[1] A. Chao, K. Mess, M. Tigner, and F. Zimmermann, Handbook of Accelerator Physics and Engineering (2nd Edition), World Scientific Publishing Company Incorporated, Singapore (2013)

[2] A.W.Chao and M.Tigner,editors.Handbook of Accelerator Physics and Engineering. World Scientific Pub. Co., 3rd printing edition, 2009.

[3] Andy Wolski, Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators, Imperial College Pr (2014).

[4] S. Y. Lee, Accelerator physics, World Scientific (2004), ISBN 9789812562005.

[5] D.A. Edwards, M.J. Syphers, ‘An introduction to the physics of high energy accelerators’, Wiley (1993).