

Time-domain and Frequency-domain Signals

吉本伸一

2021 年 6 月 10 日

目次

1	Fourier 級数展開	2
2	Fourier 変換	2
3	デルタ関数	2
4	デルタ関数の Fourier 変換	2
5	ポアソン和公式	3
6	Single-bunch Spectrum	3
7	Multi-bunch Spectrum	4
8	Synchrotron oscillation	5

1 Fourier 級数展開

周期が T_0 の周期関数 $f(t)$ を Fourier 級数展開すると

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (2)$$

ただし、 $\omega_0 = 2\pi/T_0$ とおいた。

2 Fourier 変換

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4)$$

3 デルタ関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \quad (7)$$

4 デルタ関数の Fourier 変換

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (8)$$

$$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \quad (9)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \quad (10)$$

したがって、

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega) \quad (11)$$

5 ポアソン和公式

$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ とした時、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{\alpha}\right) \quad (12)$$

が成り立つ。これをポアソン和公式 (Poisson summation formula) という。

証明

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{\alpha}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{\alpha}t} dt \quad (13)$$

□

6 Single-bunch Spectrum

リングに 1 個のバンチが周期が T_0 で周回している時、ビームの信号は、

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \quad (14)$$

のように表すことができる。ここで、 $i(t)$ をフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega nT_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n \frac{\omega}{\omega_0}} \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ とした。ここで、 $f(t) = e^{-j\omega t}$, $\alpha = 2\pi/\omega_0$ として、ポワソン和公式を使うと、

$$\begin{aligned}
I(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n \frac{\omega}{\omega_0}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) \\
&= \frac{1}{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{\alpha}\right) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) \\
&= \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\
&= \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + n\omega_0)t} dt \\
&= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)
\end{aligned} \tag{16}$$

これより、周期 T_0 で周回するバンチのスペクトルをスペアナなどで観測すると、周回周波数 ω_0 毎にピークを持つ信号が観測されることがわかる。

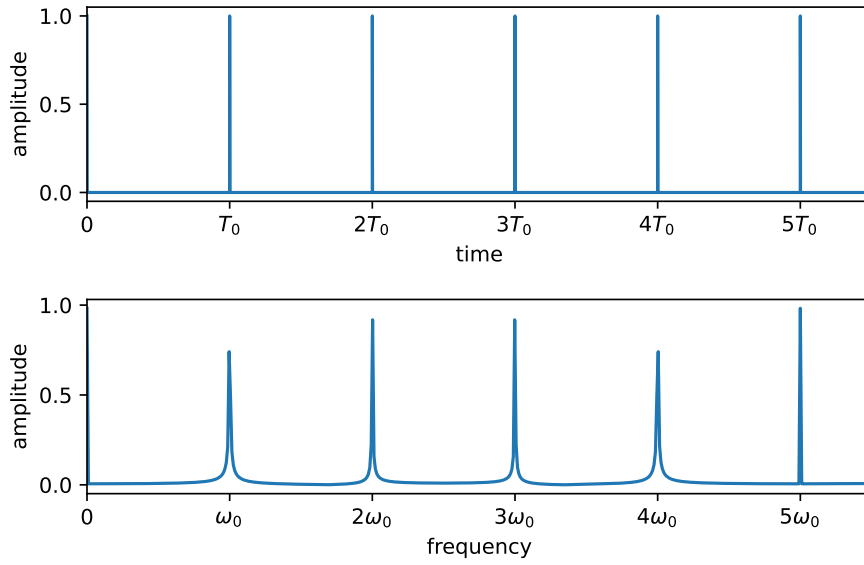


Fig. 1 単バンチのビーム信号のスペクトル.

7 Multi-bunch Spectrum

リングに M 個のバンチが均等に配置されている場合、ビームの信号は

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{M-1} \delta(t - kT_0 - nT_0/M) \tag{17}$$

と表すことができる。くし型関数と同様に考えると、 $f(t)$ は周期 T_0/M の周期関数で、区間 $[-T_0/2M, T_0/2M]$ においては $f(t)$ は $\delta(t)$ とみなせるから

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{M}{T_0} \left[\int_{-T_0/2M}^{T_0/2M} \delta(t) e^{-jnM\omega_0 t} dt \right] e^{jnM\omega_0 t} \quad (18)$$

$$= \frac{M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnM\omega_0 t} \quad (19)$$

したがって、

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F} \left[\frac{M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnM\omega_0 t} \right] \quad (20)$$

$$= \frac{M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - nM\omega_0)]] \quad (21)$$

$$= \frac{2\pi M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - nM\omega_0) \quad (22)$$

$$= M\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - nM\omega_0) \quad (23)$$

8 Synchrotron oscillation

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - nT_0 - \tau_a \cos(\omega_s nT_0 + \phi)] \quad (24)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt \quad (25)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\{nT_0 + \tau_a \cos(\omega_s nT_0 + \phi)\}} \quad (26)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-j\omega nT_0} + e^{-j\omega\tau_a \cos(\omega_s nT_0 + \phi)} \right] \quad (27)$$

ここで、

$$e^{jz \cos \theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k(z) e^{jk\theta} \quad (28)$$

という関係を使うと（ただし、 J_n はベッセル関数）

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-j)^k J_k(\omega\tau_a) e^{jk\phi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + k\omega_s)nT_0} \quad (29)$$

$$= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-j)^k J_k(\omega\tau_a) e^{jk\phi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + k\omega_s - n\omega_0) \quad (30)$$

参考文献

- [1] 平松成範, 加速器のビームモニター (Beam Instrumentaion for Accelerrators), KEK Internal 2004-4 A.