加速器における力学系理論

Shin-ichi YOSHIMOTO

2022/5/28

Contents

1　離散時間力学系

1.1　線形化方程式

次の離散時間系を考える。

$$x_i(k+1) = f_i(x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k)), \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

これはベクトル表記を用いて

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k)) \tag{2}$$

と表すことにする。いま、$\boldsymbol{f}(x)$ の固定点を $\boldsymbol{x}_0$ とすると、

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{3}$$

固定点からの微小な変動 $\delta\boldsymbol{x}(k)$ を考えると

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}_0 + \delta\boldsymbol{x}(k) \tag{4}$$

これを式 (2) に代入して

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{x}_0 + \delta\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \delta\boldsymbol{x}(k)) \tag{5}$$

右辺をテーラー展開して

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \delta\boldsymbol{x}(k)) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})\delta\boldsymbol{x}(k) + \mathcal{O}(|\delta\boldsymbol{x}(k)|^2) \tag{6}$$

ただし、変分 $\delta\boldsymbol{x}(k)$ が十分小さく、$\delta\boldsymbol{x}(k)$ について 2 次以上の項 $\mathcal{O}(|\delta\boldsymbol{x}(k)|^2)$ を無視すると、固定点 $\boldsymbol{x_0}$ に関する線形化方程式は以下のようになる。

$$\delta\boldsymbol{x}(k+1) = A\delta\boldsymbol{x}(k) \tag{7}$$

ただし、A はヤコビ行列で

$$A = Df(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) \tag{8}$$

2　The Synchrotron Mapping Equation

$$\begin{cases} \phi(k+1) = \phi(k) + \dfrac{2\pi h\eta}{\beta^2 E_s}[E(k+1) - E_s] \\ E(k+1) = E(k) + eV\sin\phi(k) \end{cases} \tag{9}$$

いま、この写像の固定点 (ϕ_s, E_s) からの微小な変動 $(\delta\phi(k), \delta E(k))$ を考えると

$$\begin{cases} \phi(k) = \phi_s + \delta\phi(k) \\ E(k) = E_s + \delta E(k) \end{cases} \tag{10}$$

線形化方程式は

$$\begin{pmatrix} \delta\phi(k+1) \\ \delta E(k+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta\phi(k) \\ \delta E(k) \end{pmatrix} \tag{11}$$

となり、ヤコビ行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi(k+1)}{\partial\phi(k)} & \frac{\partial\phi(k+1)}{\partial E(k)} \\ \frac{\partial E(k+1)}{\partial\phi(k)} & \frac{\partial E(k+1)}{\partial E(k)} \end{pmatrix}_{\phi_s, E_s} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\pi h\eta}{\beta^2 E_s} eV\cos\phi_s & \frac{2\pi h\eta}{\beta_s E_s} \\ eV\cos\phi_s & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

行列 A の固有方程式は

$$\lambda^2 - (\mathrm{Tr}A)\lambda + 1 = 0 \tag{13}$$

となり λ_1, λ_2 を A の固有値とすると、

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}M, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \mathrm{det}A = 1 \tag{14}$$

を満たす。$\mathrm{det}A = 1$ より、この写像は面積を保存する。

(1) $|\mathrm{tr}A| > 2$ の時

(2) $|\mathrm{tr}A| < 2$ の時

この実二次方程式の解 λ_1, λ_2 は $|\mathrm{tr}A| > 2$ の時は実数であり、$|\mathrm{tr}A| < 2$ の時は互いに共役な複素数である。先の場合には、固有値の絶対値は 1 つが 1 よりも大きく、1 つは 1 よりも小さい、つまり写像 A は双極的回転で不安定である。

一方、後の場合には、固有値は単位円周上にある。

$$1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2 \tag{15}$$

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\sigma} \tag{16}$$

したがって、このとき接戦軌道 $(\delta\phi, \delta E)$ は、固定点の周りを安定に回転し、

$$\mathrm{tr}A = e^{i\sigma} + e^{-i\sigma} = 2\cos\sigma \tag{17}$$

と書ける。σ は一周期あたりの平均回転角を与える。

$$\sigma = 2\pi\nu_s \tag{18}$$

これより、synchrotron tune ν_s は

$$\nu_s = \frac{1}{2\pi}\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{TrA}}{2}\right) \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cos^{-1}\left(1 + \frac{\pi h\eta}{\beta^2 E_s} eV\cos\phi_s\right) \tag{20}$$

3　周期係数を持つ線形方程式

3.1　周期写像

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{21}$$

4　Kicked rotator

$$\mathcal{H}(\theta, p, t) = \frac{1}{2}p^2 + K\cos\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{22}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = K\sin\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{23}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \tag{24}$$

5　Standard Map

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + K\sin\theta_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1} \end{cases} \tag{25}$$

演算子 $\tilde{h}$ を

$$\tilde{h}\theta_n \equiv K\sin\theta_n \tag{26}$$

と定義すると、式 (25) は

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{h} \\ 1 & 1 + \tilde{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ \theta_n \end{pmatrix} \tag{27}$$

と書ける。

変換 $(p_n, \theta_n) \mapsto (p_{n+1}, \theta_{n+1})$ に対する Jacobian は、

6　Linearization of a map at a fixed point

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases} \tag{28}$$

固定点 (x^*, y^*) に対して

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = x^* \\ g(x^*, y^*) = y^* \end{cases} \tag{29}$$

$f(x, y)$ と $g(x, y)$ を (x^*, y^*) の周りでテーラー展開すると

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) + ... \\ g(x, y) = g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) + ... \end{cases} \tag{30}$$

$\delta x_n = x_n - x^*,\ \delta y_n = y_n - y^*$ と置くと、$x_{n+1} = \delta x_{n+1} + x^*,\ y_{n+1} = \delta y_{n+1} + y^*$ だから

$$\begin{cases} \delta x_{n+1} + x^* = f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)\delta x_n + f_y(x^*, y^*)\delta y_n \\ \delta y_{n+1} + y^* = g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)\delta x_n + g_y(x^*, y^*)\delta y_n \end{cases} \tag{31}$$

式 (29) より、

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix} \tag{32}$$

6.0.1　例: 2 次元離散時間系

References

[1]　アーノルド, 古典力学の数学的方法

[2]　市川芳彦, プラズマにおける非線形現象の諸問題 (3), 核融合研究, 1988, 59 巻, 5 号, p. 362-391.

[3]　川上博, 非線形現象入門 定性的接近法, 2005

[4]　伊藤大輔, 非線形力学系における分岐理論の解析・応用 I, システム/制御/情報, Vol. 64, No. 2, pp. 70-75, 2020