Time-domain and Frequency-domain Signals

吉本伸一

2021 年 6 月 4 日

目次

1 Fourier 級数展開

周期が T_0 の周期関数 $f(t)$ を Fourier 級数展開すると

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{1}$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \tag{2}$$

ただし、$\omega_0 = 2\pi/T_0$ とおいた。

2 Fourier 変換

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{3}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{4}$$

3 デルタ関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a) \tag{7}$$

4 デルタ関数の Fourier 変換

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \tag{8}$$

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \tag{9}$$

5 Single-bunch Spectrum

リングに 1 個のバンチが周期が T_0 で周回している時、ビームの信号は、くし型関数を用いて以下のよう表せる。

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \tag{10}$$

$\delta_T(t)$ は周期 T_0 の周期関数なので、フーリエ級数展開でき、$\omega_0 = 2\pi/T_0$ とすると

$$\begin{aligned}
\delta_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{in\omega_0 t} && (11) \\
&= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} && (12)
\end{aligned}$$

となる。なお、区間 $[-T_0/2, T_0/2]$ においては $\delta_T(t)$ は $\delta(t)$ とみなせることを使った。ここで、式 (9) より

$$\begin{aligned}
e^{jn\omega_0 t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) e^{j\omega t} d\omega && (13) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) e^{j\omega t} d\omega && (14) \\
&= \mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - n\omega_0)] && (15)
\end{aligned}$$

したがって、くし型関数の Fourier 変換は

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\delta_T(t)] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \right] && (16) \\
&= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - n\omega_0)]] && (17) \\
&= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) && (18) \\
&= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) && (19)
\end{aligned}$$

これより、周期 T_0 で周回するバンチのスペクトルをスペアナなどで観測すると、周回周波数 ω_0 毎にピークを持つ信号が観測されることがわかる。

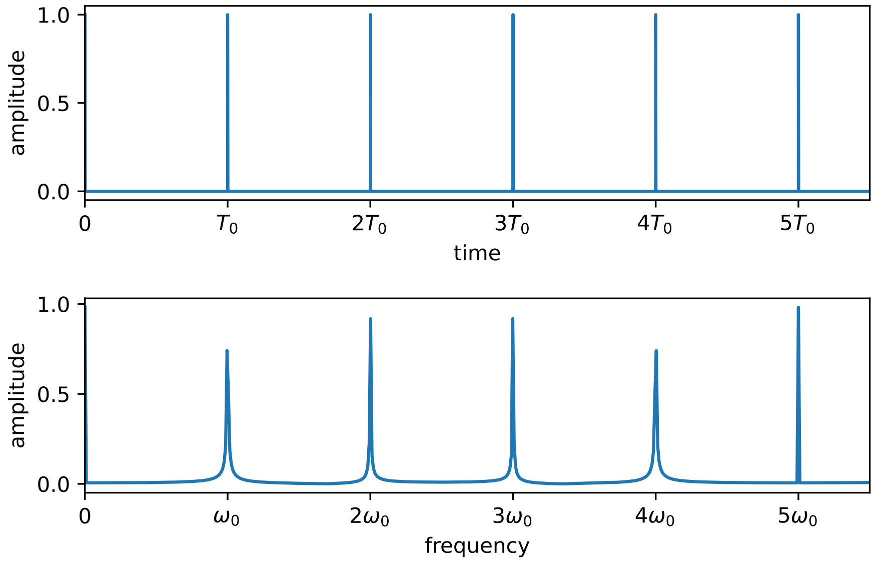

Fig. 1　単バンチのビーム信号のスペクトル.

6　Multi-bunch Spectrum

リングに M 個のバンチが均等に配置されている場合、ビームの信号は

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{M-1} \delta(t - kT_0 - nT_0/M) \tag{20}$$

と表すことができる。くし型関数と同様に考えると、$f(t)$ は周期 T_0/M の周期関数で、区間 $[-T_0/2M, T_0/2M]$ においては $f(t)$ は $\delta(t)$ とみなせるから

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{M}{T_0} \left[\int_{-T_0/2M}^{T_0/2M} \delta(t) e^{-jnM\omega_0 t} dt \right] e^{jnM\omega_0 t} \tag{21}$$

$$= \frac{M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnM\omega_0 t} \tag{22}$$

したがって、

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{M}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnM\omega_0 t}\right] \tag{23}$$

$$= \frac{M}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - nM\omega_0)]] \tag{24}$$

$$= \frac{2\pi M}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - nM\omega_0) \tag{25}$$

$$= M\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - nM\omega_0) \tag{26}$$

参考文献

[1] 平松成範, 加速器のビームモニター (Beam Instrumentaion for Accelerrators), KEK Internal 2004-4 A.