シンクロトロン振動のほへと

吉本伸一

2019 年 5 月 2 日

目次

1　Synchrotron motion

シンクロトロン蓄積リングでは、偏向電磁石によって分散 (dispersion) が発生する為、粒子の横方向と縦方向の運動が結合する。この結合が、リングを周回する粒子の縦方向の振動 (シンクロトロン振動) において重要な役割を演じる。

1.1　Synchronous particle

運動量 p_0 を持つ粒子が、基準軌道*[1] を周期 T_0 で周回し、高周波加速空洞を同じ位相 ϕ_s で通過する時、このような粒子のことを同期粒子 (synchronous particle) と呼ぶ。同期粒子であるためには、周回周波数 $f_0(=1/T_0)$ と空洞の RF 周波数 f_{RF} の間に

$$f_{RF} = hf_0 \tag{1}$$

という関係が必要である。整数 h を harmonic number と言い、周波数 f_{RF} で加速できる最大の粒子数になる。この時、空洞の加速電圧は

$$V_c(\phi) = V_0 \sin(\phi),\ \phi = \omega_{RF}t + \phi_s \tag{2}$$

となる。図 1 は、$h = 2$ の時の空洞電圧と同期粒子の関係を表してる。

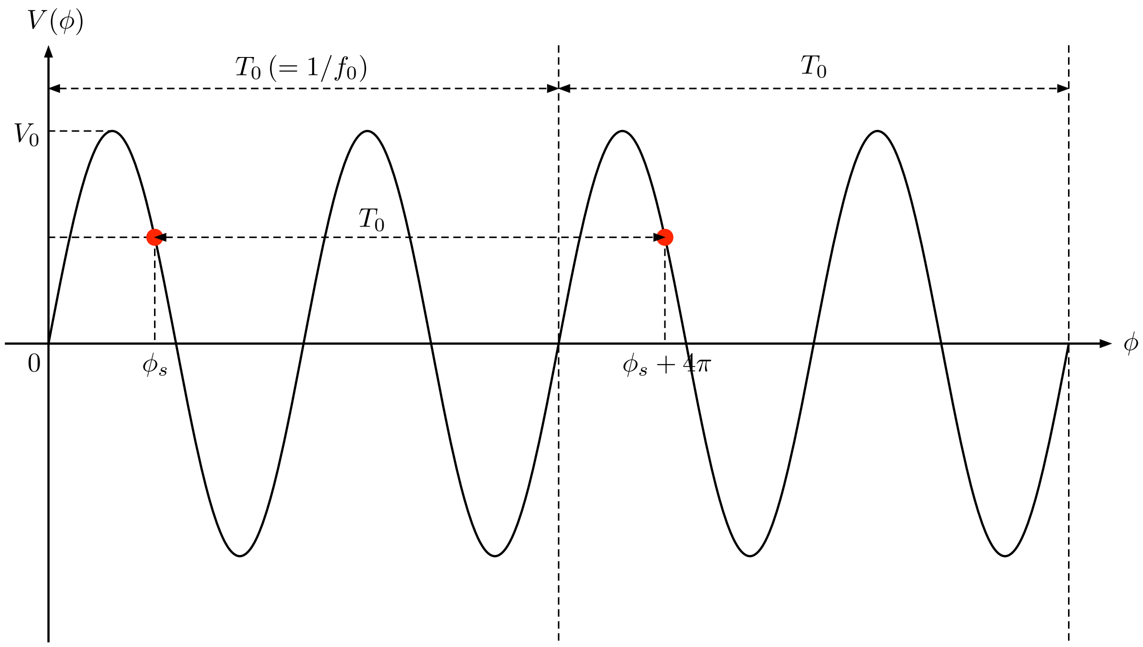

図 1: $f_{RF} = hf_0\ (h = 2)$

*[1] 粒子の運動量に対応して、一定の閉じた軌道 (閉軌道) が存在する。

SuperKEKB における f_{RF}, f_0, h の関係

SuperKEKB のリングでは、電子と陽電子は、ほぼ光速 c で回っており、周長 C_0 は 3016.315 m なので周回周波数 f_0 は

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{c}{C_0} = \frac{2.997\,924\,58 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}{3016.315\,\mathrm{m}} = 99.39\,\mathrm{kHz}$$

一方、RF 周波数 f_{RF} は 508.887 MHz なので

$$f_{RF} = 5120 f_0$$

となり、確かに (1) を満たしている。

1.2 各パラメータの運動量依存性

同期粒子が平衡軌道 C_0 を速度 v_0 で周回する時、回転周期は

$$T_0 = \frac{C_0}{v_0}$$

となる。今、$v = v_0 + \Delta v, C = C_0 + \Delta C, T = T_0 + \Delta T$

$$T = T_0 + \Delta T = \frac{C_0 + \Delta C}{v_0 + \Delta v}$$

これより

$$\begin{aligned}
& (T_0 + \Delta T)(v_0 + \Delta v) = C_0 + \Delta C \\
\iff\ & \underbrace{\cancel{v_0 T_0}}_{C_0} + \Delta v T_0 + v_0 \Delta T + \underbrace{\cancel{\Delta v \Delta T}}_{0} = \cancel{C_0} + \Delta C \\
\iff\ & v_0 \Delta T = \Delta C - \Delta v T_0 \\
\iff\ & \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta C_0}{\underbrace{v_0 T_0}_{C_0}} - \frac{\Delta v}{v_0}
\end{aligned}$$

したがって、

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta C}{C_0} - \frac{\Delta v}{v_0} \tag{3}$$

この式より、回転周期の変動 $(\Delta T/T_0)$ をもたらす要因として、軌道の長さの変動 $(\Delta C/C_0)$ と粒子の速度の変動 $(\Delta v/v_0)$ である事が分かる。

1.3 Transition

運動量偏差 (momentum deviation)

$$\delta_p = \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} \tag{4}$$

momentum compaction factor

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0} = \alpha_p \delta_p \tag{5}$$

phase slip factor

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \eta_p \frac{\Delta p}{p_0} \tag{6}$$

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} \tag{7}$$

したがって、

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \left(\alpha_p - \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \frac{\Delta p}{p_0} \tag{8}$$

相対論のおさらい

$$E_0 = m_0 c^2, \quad E = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} \tag{A.1}$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{A.2}$$

$$p = mv = \gamma m_0 v = \gamma m_0 \beta c \tag{A.3}$$

$$\frac{p}{E} = \frac{\gamma m_0 \beta c}{\gamma m_0 c^2} = \frac{\beta}{c} \tag{A.4}$$

式 (7) の導出

$$\frac{dp}{dv} = m_0 \frac{d}{dv}(\gamma v) = m_0 \left(\gamma + v \frac{d\gamma}{dv} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{dv} &= \frac{1}{c}\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{1}{c}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \\
&= \frac{1}{c}\beta \underbrace{(1-\beta^2)}_{\gamma^{-2}}{}^{-\frac{3}{2}} = \frac{\beta\gamma^3}{c} \\
&= \frac{1}{c}\beta \underbrace{(1-\beta^2)}_{\gamma^{-2}}{}^{-\frac{3}{2}} = \frac{\beta\gamma^3}{c}
\end{aligned}$$

これより、

$$\frac{dp}{dv} = m_0 \left(\gamma + v \frac{\beta\gamma^3}{c} \right) = m_0 \gamma \underbrace{(1 + \beta^2\gamma^2)}_{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 p}{v}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{v} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p} \tag{B.1}$$

正の運動量圧縮率 $\alpha_p > 0$ を持つ電磁石の配列を考えます。このような磁石の配列では、粒子のエネルギーを増加させると経路長が増加する。しかしながら、粒子が光の速度よりも十分低い速度を有す

るようにビームが低エネルギーである場合、粒子のエネルギーを増加させることはその速度の増加をもたらし、それは経路長の増加を補償する以上のことがあり得る。その結果、粒子は単位時間あたりの回転数が多くなります。

しかしながら、超相対論的粒子の場合、粒子はすでに光速に非常に近いところを移動しているので、エネルギーの増加はごくわずかな速度の増加をもたらす。この場合、光路長の増加は速度の増加よりも優先され、粒子は単位時間あたりの回転数が少なくなります。

これら 2 つの体制の間にあるエネルギーでは、回転数はエネルギーに依存しません。このエネルギーは遷移エネルギーとして知られています。

1.4　シンクロトロン振動の方程式

$$\Delta\phi = \omega_{RF}\Delta T = \omega_{RF}T_0\eta_p\frac{\Delta p}{p_0} \tag{9}$$

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{\beta_0^2}\frac{\Delta E}{E_0} \tag{10}$$

$$\Delta\phi = \frac{\omega_{RF}T_0\eta_p}{\beta_0^2 E_0}\Delta E \tag{11}$$

$$\frac{d\phi}{dt} \simeq \frac{\Delta\phi}{T_0} = \frac{\omega_{RF}\eta_p}{\beta_0^2 E_0}\Delta E \tag{12}$$

$$\Delta E = eV_c(\sin\phi - \sin\phi_s) \tag{13}$$

$$\frac{d\Delta E}{dt} \simeq \frac{\Delta E}{T_0} = \frac{eV_c(\sin\phi - \sin\phi_s)}{T_0} \tag{14}$$

式 (10) の導出

$$p = mv = \gamma m_0\beta c\,,\quad E = \gamma E_0 = \gamma m_0 c^2$$

$$\gamma\beta = \gamma\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{\gamma^2-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dE} &= \frac{1}{c}\frac{d(\gamma\beta)}{d\gamma} = \frac{1}{c}\frac{d}{d\gamma}\sqrt{\gamma^2-1}\\ &= \frac{\gamma}{c}\underbrace{(\gamma^2-1)}_{\gamma^2\beta^2}{}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{c\beta} = \frac{p}{\beta^2 E}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{dp}{p} = \frac{1}{\beta^2}\frac{dE}{E} \tag{C.1}$$

2 Longitudinal Dynamics

2.1 6-D Phase Space

canonical variables: $(x, x^{'}, y, y^{'}, z, \delta_p)$ synchronous phase: $\phi_s = \omega_{RF} t_0$

$$z = -v(t - t_0)$$
$$\delta_p = \frac{p - p_0}{p_0}$$

2.2 Phase slip factor

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \eta \frac{\Delta p}{p_0} \tag{15}$$

$$\eta_p = \frac{1}{T_0} \left.\frac{dT}{d\delta_p}\right|_{\delta_p = 0} \tag{16}$$

$$\eta_p = \alpha_p - \frac{1}{\gamma_0^2} \tag{17}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \tag{18}$$

周長を C、粒子の速度を v とすると回転周期 T は

$$T = \frac{C}{v} \tag{19}$$

となるので、両辺を v で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dv} &= \frac{1}{v}\frac{dC}{dv} - \frac{C}{v^2} \\ &= \frac{T}{C}\frac{dC}{dv} - \frac{T}{v} \end{aligned} \tag{20}$$

したがって、

$$\frac{dT}{T} = \frac{dC}{C} - \frac{dv}{v} \tag{21}$$

2.3 Energy Equation

The energy of a particle at the (n+1)-th turn E_{n+1} is expressed by the energy E_n and RF phase ϕ_n at the n-th turn as

$$E_{n+1} = E_n + eV \sin\phi_n \tag{22}$$

For a synchronous particle with suffix s,

$$E_{0,n+1} = E_{0,n} + eV \sin\phi_s \tag{23}$$

Thus, the energy error, $\Delta E = E - E_0$, is expressed as

$$\Delta E_{n+1} = \Delta E_n + eV(\sin\phi_n - \sin\phi_s) \tag{24}$$

ここで、

$$\delta = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{\beta_0^2}\frac{\Delta E}{E_0} \tag{25}$$

より、

$$\Delta E_{n+1} - \Delta E_n = \beta^2 E_0(\delta_{n+1} - \delta_n) \tag{26}$$

したがって、

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{eV}{\beta_0^2 E_0}(\sin\phi_n - \sin\phi_s) \tag{27}$$

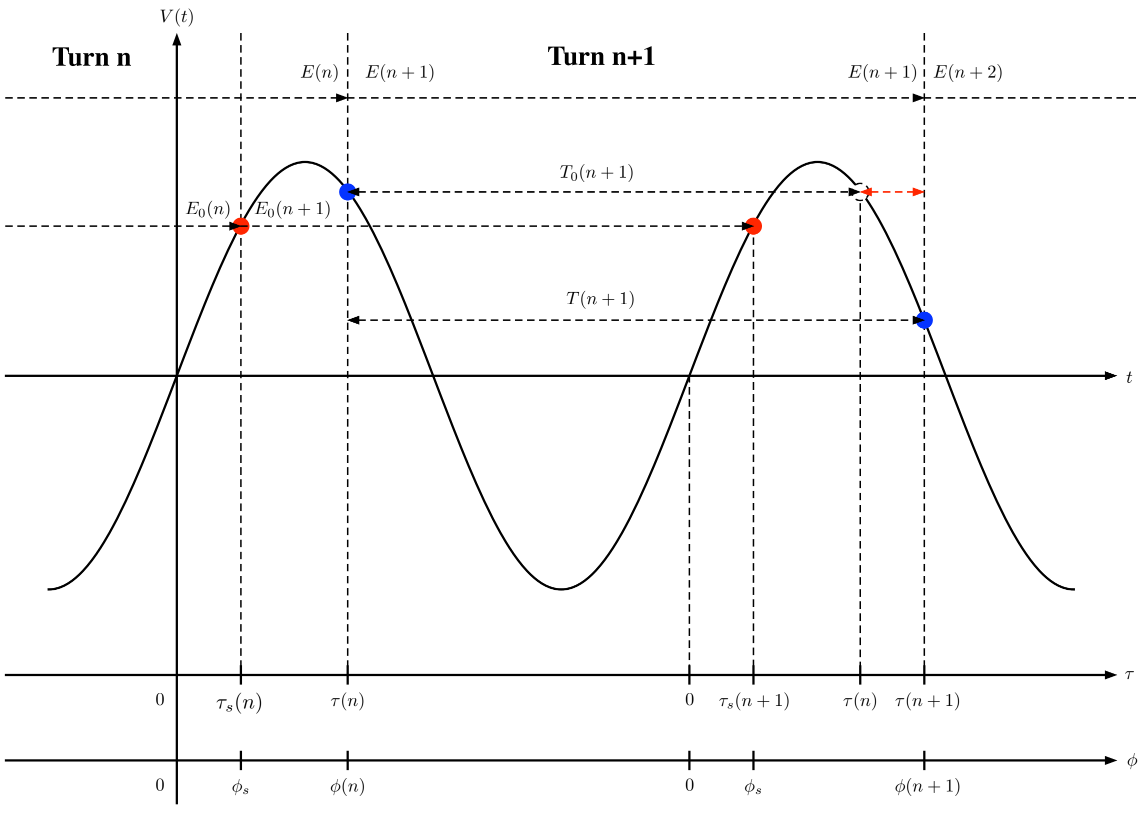

図 2: Relative and absolute coodinates. ($h = 1$)

粒子がエネルギー E_n でリングを n 周回し、加速空洞で加速されエネルギーが E_{n+1} 増えた時、$n+1$ 周回し再び加速空洞で加速する時間 T_{n+1} は、

$$\Delta\tau_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n = T_{n+1} - T_{0,n+1} \tag{28}$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \omega_{RF}\Delta\tau_{n+1} = \omega_{RF}(T_{n+1} - T_{0,n+1}) \tag{29}$$

$$\frac{T_{n+1} - T_{0,n+1}}{T_{0,n+1}} = \eta\delta_{n+1} \tag{30}$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \omega_{RF} T_0 \eta \delta_{n+1} \tag{31}$$

以上より、

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{eV}{\beta_0^2 E_0}(\sin\phi_n - \sin\phi_s) \tag{32}$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \omega_{RF} T_0 \eta \delta_{n+1} \tag{33}$$

3 Transverse − Longitudinal Coupling

3.1 Dispersion

運動量偏差 (momentum deviation)

$$\delta_p = \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} \tag{34}$$

分散 (dispersion)

$$x(\delta_p) = x|_{\delta_p=0} + \eta_x \delta_p + \eta_x^{(2)} \delta_p^2 + \dots \tag{35}$$

3.2 Momentum compaction factor

momentum compaction factor

$$\alpha_p = \frac{1}{C_0} \left.\frac{dC}{d\delta_p}\right|_{\delta_p=0} \tag{36}$$

3.3 δ and δ_p

Note that the momentum deviation δ_p is not the same as the energy deviation δ. To proceed, it is useful to have a relationship between the derivative with respect to δ_p and the derivative with respect to δ.

3.3.1 energy deviation

$$\delta \equiv \frac{E}{P_0 c} - \frac{1}{\beta_0} \tag{37}$$

$E = \gamma mc^2$, $P_0 = \beta_0 \gamma_0 mc$ より

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{\gamma mc^2}{c(\beta_0\gamma_0 mc)} - \frac{1}{\beta_0} \\
&= \frac{1}{\beta_0}\left(\frac{\gamma}{\gamma_0} - 1\right) \\
&= \frac{1}{\beta_0}\left(\frac{E}{E_0} - 1\right)
\end{aligned} \tag{38}$$

3.3.2 momentum deviation

$$\delta_p = \frac{P}{P_0} - 1 \tag{39}$$

Since $\delta_p = 0$ when $\delta = 0$, we can write:

4 Difference Equations for Longitudinal Motion in a Synchrotron

The relative time τ and the relative phase ϕ are measured with respect to the zero crossing of the gap voltage.

$$\tau(n+1) - \tau(n) = T(n+1) - T_0(n+1) \tag{40}$$

$\phi(n) = \omega_{RF}(n)\tau(n)$ と置くと

$$\begin{aligned}\phi(n+1) &= \omega_{RF}(n+1)\tau(n+1)\\ &= \omega_{RF}(n+1)\{\tau(n) + T(n+1) - T_0(n+1)\}\\ &= \frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) + \omega_{RF}(n+1)\{T(n+1) - T_0(n+1)\}\end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{T(n+1) - T_0(n+1)}{T_0(n+1)} = \eta\delta_p(n+1) \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\phi(n+1) &= \frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) + \omega_{RF}(n+1)T_0(n+1)\eta\delta_p(n+1)\\ &= \frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) + 2\pi h\eta\delta_p(n+1)\end{aligned} \tag{42}$$

$$\frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) \approx 1 \tag{43}$$

$$\phi(n+1) = \phi(n) + 2\pi h\eta\delta_p(n+1) \tag{44}$$

The energy of a particle at the (n+1)-th turn $E(n+1)$ is expressed by the energy $E(n)$ and RF phase $\phi(n)$ at the n-th turn as

$$E(n+1) = E(n) + eV\sin\phi(n) \tag{45}$$

For a synchronous particle with suffix 0,

$$E_0(n+1) = E_0(n) + eV\sin\phi_s \tag{46}$$

Thus, the energy error, $\Delta E = E - E_0$, is expressed as

$$\Delta E(n+1) = \Delta E(n) + eV(\sin\phi(n) - \sin\phi_s) \tag{47}$$

ここで、

$$\delta_p = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{\beta_0^2}\frac{\Delta E}{E_0} \tag{48}$$

より、

$$\Delta E(n+1) - \Delta E(n) = \beta^2 E_0\{\delta_p(n+1) - \delta_p(n)\} \tag{49}$$

したがって、

$$\delta_p(n+1) - \delta_p(n) = \frac{eV}{\beta_0^2 E_0}(\sin\phi(n) - \sin\phi_s) \tag{50}$$

the symplectic mapping equation:

$$\begin{aligned}\delta_p(n+1) - \delta_p(n) &= \frac{eV}{\beta_0^2 E_0}(\sin\phi(n) - \sin\phi_s)\\ \phi(n+1) &= \phi(n) + 2\pi h\eta\delta_p(n+1)\end{aligned} \tag{51}$$

5 Differential Equations for Longitudinal Motion in a Synchrotron

The difference equations (51) can be written as continuous differential equations, if the assumption is made that the change of the variables ϕ and δ_p during one turn in the ring is not too large. In this case, the difference quotient can be approximated by the differential quotient

$$\frac{\delta_p(n+1)-\delta_p(n)}{T_0(n+1)} \approx \frac{d\delta_p}{dt} = \dot{\delta}_p, \quad \frac{\phi(n+1)-\phi(n)}{T_0(n+1)} \approx \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_p &= \frac{eV\omega_0}{2\pi\beta_0^2 E_0}(\sin\phi - \sin\phi_s) \\ \dot{\phi} &= h\omega_0\eta\delta_p \end{aligned} \tag{53}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{eVh\eta\omega_0^2}{2\pi\beta_0^2 E_0}(\sin\phi - \sin\phi_s) \tag{54}$$

5.1 Small amplitude approximation

$\Delta\phi = \phi - \phi_s$ が非常に小さい時、

$$\sin\phi = \sin(\phi_s + \Delta\phi) \approx \sin\phi_s + \cos\phi_s\Delta\phi \tag{55}$$

より

$$\ddot{\Delta\phi} = \frac{eVh\eta\omega_0^2}{2\pi\beta_0^2 E_0}\cos\phi_s\Delta\phi = -\omega_s^2\Delta\phi \tag{56}$$

ただし、

$$\omega_s = \sqrt{-\frac{eVh\eta\omega_0^2\cos\phi_s}{2\pi\beta_0^2 E_0}} \tag{57}$$

参考文献

[1] A. Chao, K. Mess, M. Tigner, and F. Zimmermann, Handbook of Accelerator Physics and Engineering (2nd Edition), World Scientific Publishing Company Incorporated, Singapore (2013)

[2] A.W.Chao and M.Tigner,editors.Handbook of Accelerator Physics and Engineering. World Scientific Pub. Co., 3rd printing edition, 2009.

[3] Andy Wolski, Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators, Imperial College Pr (2014).

[4] S. Y. Lee, Accelerator physics, World Scientific (2004), ISBN 9789812562005.

[5] D.A. Edwards, M.J. Syphers, ‘An introduction to the physics of high energy accelerators’, Wiley (1993).