

シンクロトロン振動のほへと

吉本伸一

2019 年 5 月 4 日

目次

1	Synchrotron motion	2
1.1	Synchronous particle	2
1.2	Dispersion effects in a synchrotron	3
2	Phase stability	6
2.1	Energy Equation	6
3	Transverse – Longitudinal Coupling	8
3.1	Dispersion	8
3.2	Momentum compaction factor	8
3.3	δ and δ_p	8
4	Difference Equations for Longitudinal Motion in a Synchrotron	9
5	Differential Equations for Longitudinal Motion in a Synchrotron	10
5.1	Small amplitude approximation	10
付録 A	相対論のおさらい	11
付録 B	その他	12

1 Synchrotron motion

シンクロトロン蓄積リングでは、偏向電磁石によって分散 (dispersion) が発生する為、粒子の横方向と縦方向の運動が結合する。この結合が、リングを周回する粒子の縦方向の振動 (シンクロトロン振動) において重要な役割を演じる。

1.1 Synchronous particle

運動量 p_0 を持つ粒子が、基準軌道^{*1} を周期 T_0 で周回し、高周波加速空洞を同じ位相 ϕ_s で通過する時、このような粒子のことを同期粒子 (synchronous particle) と呼ぶ。同期粒子であるためには、周回周波数 $f_0 (= 1/T_0)$ と空洞の RF 周波数 f_{RF} の間に

$$f_{RF} = hf_0 \quad (1)$$

という関係が必要である。整数 h を harmonic number と言い、周波数 f_{RF} で加速できる最大の粒子数になる。この時、空洞の加速電圧は

$$V_c(\phi) = V_0 \sin(\phi), \quad \phi = \omega_{RF}t + \phi_s \quad (2)$$

となる。図 1 は、 $h = 2$ の時の空洞電圧と同期粒子の関係を表してる。

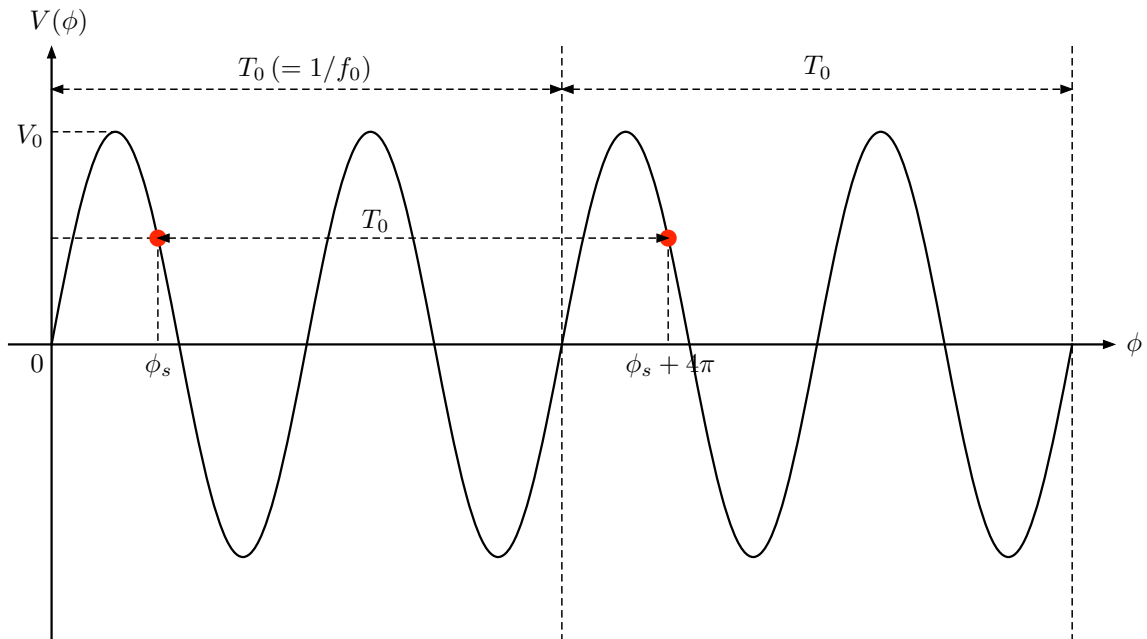


図 1: $f_{RF} = hf_0$ ($h = 2$)

^{*1} 粒子の運動量に対応して、一定の閉じた軌道 (閉軌道) が存在する。

SuperKEKB における f_{RF} , f_0 , h の関係

SuperKEKB のリングでは、電子と陽電子は、ほぼ光速 c で回っており、周長 C_0 は 3016.315 m なので周回周波数 f_0 は

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{c}{C_0} = \frac{2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}}{3016.315 \text{ m}} = 99.39 \text{ kHz}$$

一方、RF 周波数 f_{RF} は 508.887 MHz なので

$$f_{RF} = 5120 f_0$$

となり、確かに (1) を満たしている。

1.2 Dispersion effects in a synchrotron

粒子の運動量が変化すると、速度や軌道長も変わる。今、運動量偏差 (momentum deviation) を

$$\delta_p = \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} \quad (3)$$

とし、同期粒子より運動量が大きい粒子 ($\delta_p > 0$) が偏光磁石を通過する場合を考える (図 2)。その粒子は曲げられにくい為、基準軌道とは異なる軌道を通ることになる。この軌道のずれ $x(s)$ は分散関数 (dispersion function) $D_x(s)$ を用いて、

$$x(s) = D_x(s) \frac{\Delta p}{p_0} = D_x(s) \delta_p \quad (4)$$

と表される。今、基準軌道の曲率半径を ρ とすると $ds = \rho d\theta$ より、

$$dC = (\rho + x) d\theta = (\rho + x) \frac{ds}{\rho} \quad (5)$$

したがって、この粒子の軌道長 C は、

$$\begin{aligned} C &= \oint (\rho + x) \frac{ds}{\rho} = \int_0^{C_0} ds + \int_0^{C_0} \frac{x}{\rho} ds \\ &= C_0 + \delta_p \int_0^{C_0} \frac{D_x(s)}{\rho} ds \end{aligned} \quad (6)$$

ここで運動量圧縮率 (momentum compaction factor) α_p を

$$\alpha_p \equiv \frac{1}{C_0} \oint \frac{D(s)}{\rho} ds \quad (7)$$

と定義すると、 $\Delta C = C - C_0$ として

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0} = \alpha_p \delta_p \quad (8)$$

となり α_p は運動量の変化による相対的な軌道長の変化を表していることになる。同様に、運動量の変化による相対的な回転周期 T の変化率を phase slip factor η_p と言い、以下のように定義されている。

$$\frac{\Delta T}{T_0} \equiv \eta_p \delta_p \quad (9)$$

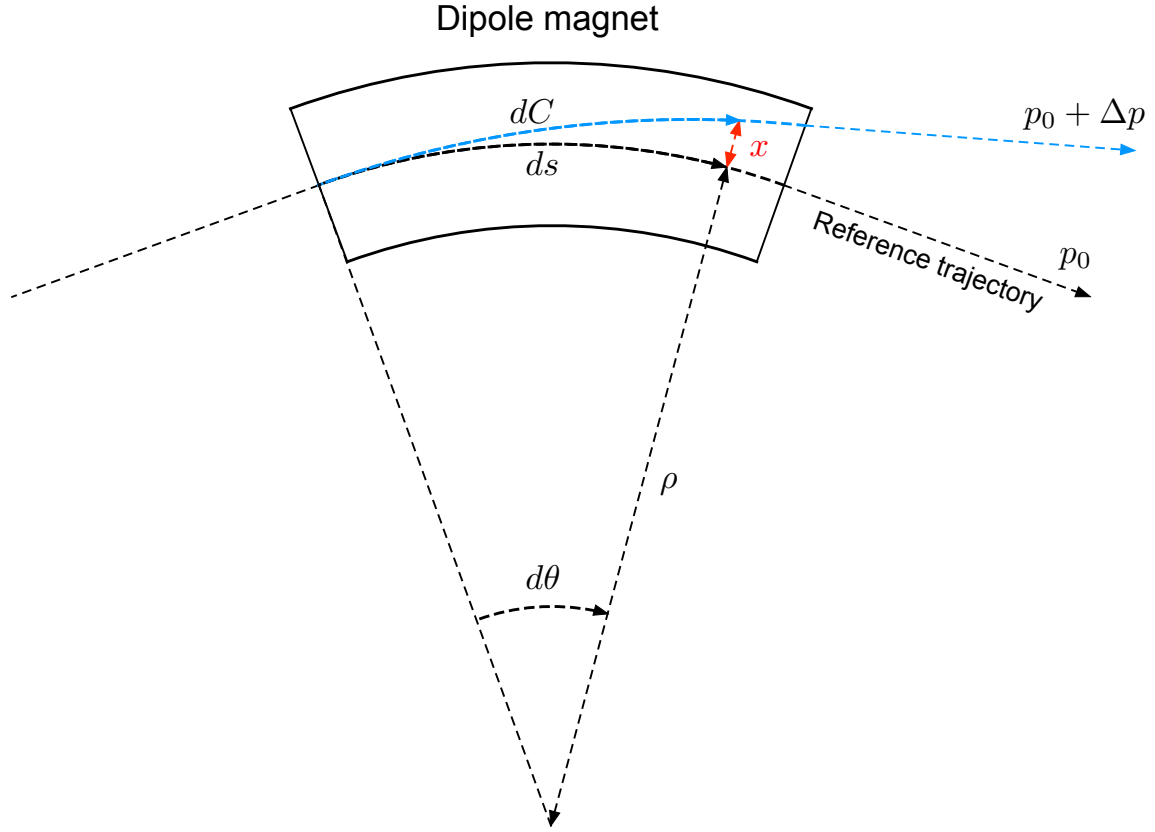


図 2: Dispersion

今、同期粒子が基準軌道 C_0 を速度 v_0 で周回する時、回転周期は $T_0 = C_0/v_0$ となるので、運動量の変化から速度、回転周期がそれぞれ $v = v_0 + \Delta v$, $T = T_0 + \Delta T$ と変化した時、

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta C}{C_0} - \frac{\Delta v}{v_0} \quad (10)$$

この式より、回転周期の変化 ($\Delta T/T_0$) をもたらす要因として、軌道長の変化 ($\Delta C/C_0$) と粒子の速度の変化 ($\Delta v/v_0$) である事が分かる。(A.5) より

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (11)$$

(10) に (8) と (11) を代入すると、

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \left(\alpha_p - \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \frac{\Delta p}{p_0} = \eta_p \delta_p \quad (12)$$

ただし、

$$\eta_p = \alpha_p - \frac{1}{\gamma_0^2} \quad (13)$$

正の運動量圧縮率 $\alpha_p > 0$ を持つ電磁石の配列を考えます。このような磁石の配列では、粒子のエネルギーを増加させると経路長が増加する。しかしながら、粒子が光の速度よりも十分低い速度を有す

るようにビームが低エネルギーである場合、粒子のエネルギーを増加させることはその速度の増加をもたらす、それは経路長の増加を補償する以上のことがあり得る。その結果、粒子は単位時間あたりの回転数が多くなります。

しかしながら、超相対論的粒子の場合、粒子はすでに光速に非常に近いところを移動しているので、エネルギーの増加はごくわずかな速度の増加をもたらす。この場合、光路長の増加は速度の増加よりも優先され、粒子は単位時間あたりの回転数が少なくなります。

これら2つの体制の間にあるエネルギーでは、回転数はエネルギーに依存しません。このエネルギーは遷移エネルギーとして知られています。

式(10)の導出

$v = v_0 + \Delta v, C = C_0 + \Delta C, T = T_0 + \Delta T$ とすると $T = C/v$ より、

$$T_0 + \Delta T = \frac{C_0 + \Delta C}{v_0 + \Delta v}$$

分母を払って整理すると、(二次の微小量は無視する)

$$\begin{aligned} (T_0 + \Delta T)(v_0 + \Delta v) &= C_0 + \Delta C \\ \Leftrightarrow \underbrace{v_0 T_0}_{C_0} + \Delta v T_0 + v_0 \Delta T + \underbrace{\Delta v \Delta T}_0 &= \cancel{C_0} + \Delta C \\ \Leftrightarrow v_0 \Delta T &= \Delta C - \Delta v T_0 \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta T}{T_0} &= \frac{\Delta C_0}{\underbrace{v_0 T_0}_{C_0}} - \frac{\Delta v}{v_0} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta T}{T_0} &= \frac{\Delta C_0}{C_0} - \frac{\Delta v}{v_0} \end{aligned}$$

2 Phase stability

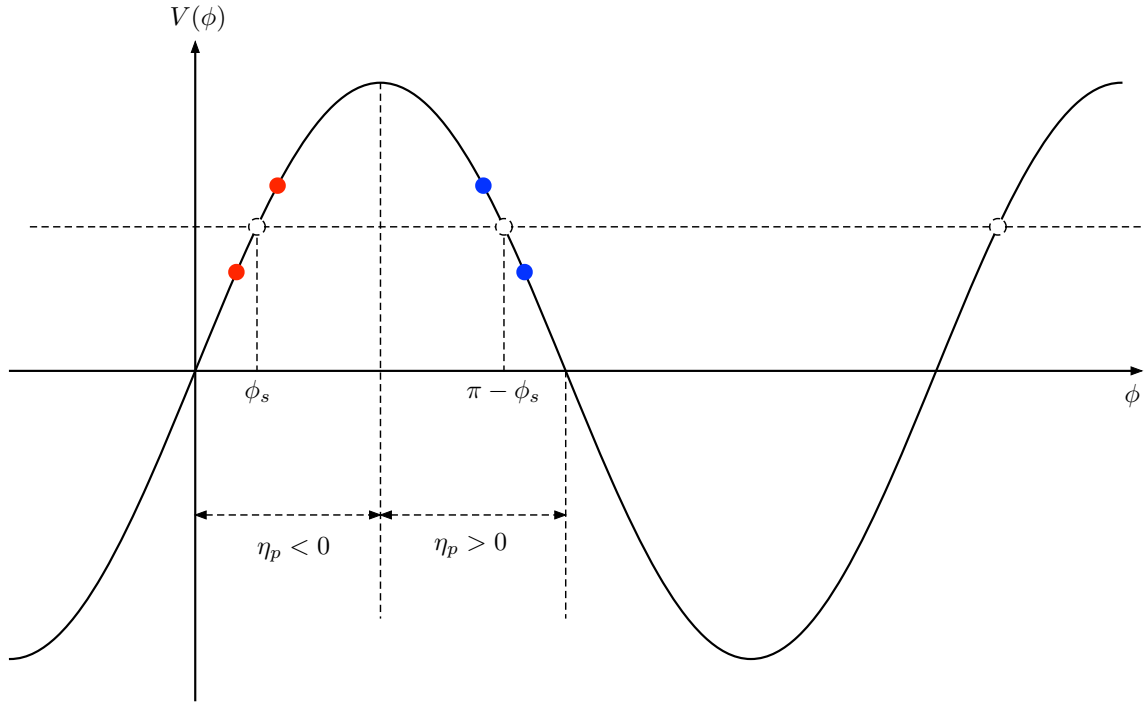


図 3: phase stability

2.1 Energy Equation

The energy of a particle at the $(n+1)$ -th turn E_{n+1} is expressed by the energy E_n and RF phase ϕ_n at the n -th turn as

$$E_{n+1} = E_n + eV \sin \phi_n \quad (14)$$

For a synchronous particle with suffix s ,

$$E_{0,n+1} = E_{0,n} + eV \sin \phi_s \quad (15)$$

Thus, the energy error, $\Delta E = E - E_0$, is expressed as

$$\Delta E_{n+1} = \Delta E_n + eV(\sin \phi_n - \sin \phi_s) \quad (16)$$

ここで、

$$\delta = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{\beta_0^2} \frac{\Delta E}{E_0} \quad (17)$$

より、

$$\Delta E_{n+1} - \Delta E_n = \beta^2 E_0 (\delta_{n+1} - \delta_n) \quad (18)$$

したがって、

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{eV}{\beta_0^2 E_0} (\sin \phi_n - \sin \phi_s) \quad (19)$$

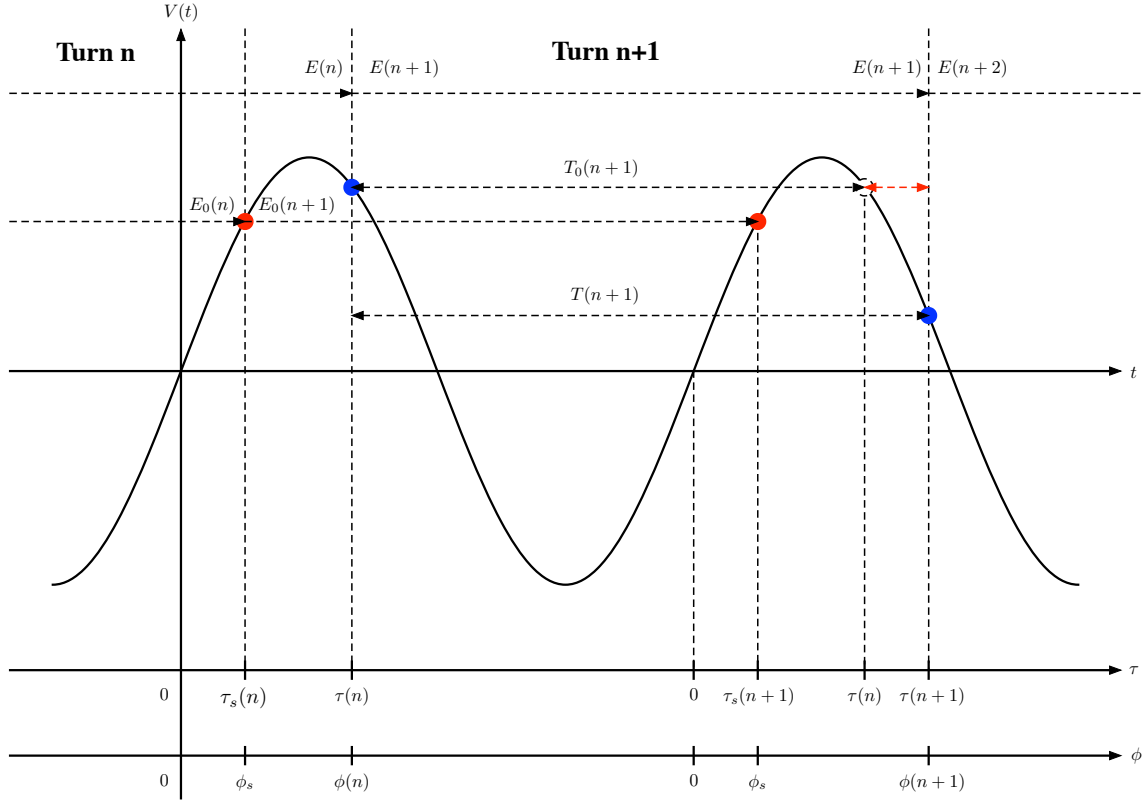


図 4: Relative and absolute coordinates. ($h = 1$)

粒子がエネルギー E_n でリングを n 周回し、加速空洞で加速されエネルギーが E_{n+1} 増えた時、 $n+1$ 周回し再び加速空洞で加速する時間 T_{n+1} は、

$$\Delta\tau_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n = T_{n+1} - T_{0,n+1} \quad (20)$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \omega_{RF} \Delta\tau_{n+1} = \omega_{RF} (T_{n+1} - T_{0,n+1}) \quad (21)$$

$$\frac{T_{n+1} - T_{0,n+1}}{T_{0,n+1}} = \eta \delta_{n+1} \quad (22)$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \omega_{RF} T_{0,n+1} \eta \delta_{n+1} \quad (23)$$

以上より、

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{eV}{\beta_0^2 E_0} (\sin \phi_n - \sin \phi_s) \quad (24)$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \omega_{RF} T_{0,n+1} \eta \delta_{n+1} \quad (25)$$

3 Transverse – Longitudinal Coupling

3.1 Dispersion

運動量偏差 (momentum deviation)

$$\delta_p = \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} \quad (26)$$

分散 (dispersion)

$$x(\delta_p) = x|_{\delta_p=0} + \eta_x \delta_p + \eta_x^{(2)} \delta_p^2 + \dots \quad (27)$$

3.2 Momentum compaction factor

momentum compaction factor

$$\alpha_p = \frac{1}{C_0} \left. \frac{dC}{d\delta_p} \right|_{\delta_p=0} \quad (28)$$

3.3 δ and δ_p

Note that the momentum deviation δ_p is not the same as the energy deviation δ . To proceed, it is useful to have a relationship between the derivative with respect to δ_p and the derivative with respect to δ .

3.3.1 energy deviation

$$\delta \equiv \frac{E}{P_0 c} - \frac{1}{\beta_0} \quad (29)$$

$E = \gamma mc^2$, $P_0 = \beta_0 \gamma_0 mc$ より

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\gamma mc^2}{c(\beta_0 \gamma_0 mc)} - \frac{1}{\beta_0} \\ &= \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{E}{E_0} - 1 \right) \end{aligned} \quad (30)$$

3.3.2 momentum deviation

$$\delta_p = \frac{P}{P_0} - 1 \quad (31)$$

Since $\delta_p = 0$ when $\delta = 0$, we can write:

4 Difference Equations for Longitudinal Motion in a Synchrotron

The relative time τ and the relative phase ϕ are measured with respect to the zero crossing of the gap voltage.

$$\tau(n+1) - \tau(n) = T(n+1) - T_0(n+1) \quad (32)$$

$\phi(n) = \omega_{RF}(n)\tau(n)$ と置くと

$$\begin{aligned} \phi(n+1) &= \omega_{RF}(n+1)\tau(n+1) \\ &= \omega_{RF}(n+1)\{\tau(n) + T(n+1) - T_0(n+1)\} \\ &= \frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) + \omega_{RF}(n+1)\{T(n+1) - T_0(n+1)\} \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{T(n+1) - T_0(n+1)}{T_0(n+1)} = \eta\delta_p(n+1) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \phi(n+1) &= \frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) + \omega_{RF}(n+1)T_0(n+1)\eta\delta_p(n+1) \\ &= \frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) + 2\pi h\eta\delta_p(n+1) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\frac{\omega_{RF}(n+1)}{\omega_{RF}(n)}\phi(n) \approx 1 \quad (35)$$

$$\phi(n+1) = \phi(n) + 2\pi h\eta\delta_p(n+1) \quad (36)$$

The energy of a particle at the (n+1)-th turn $E(n+1)$ is expressed by the energy $E(n)$ and RF phase $\phi(n)$ at the n-th turn as

$$E(n+1) = E(n) + eV \sin \phi(n) \quad (37)$$

For a synchronous particle with suffix 0,

$$E_0(n+1) = E_0(n) + eV \sin \phi_s \quad (38)$$

Thus, the energy error, $\Delta E = E - E_0$, is expressed as

$$\Delta E(n+1) = \Delta E(n) + eV(\sin \phi(n) - \sin \phi_s) \quad (39)$$

ここで、

$$\delta_p = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{\beta_0^2} \frac{\Delta E}{E_0} \quad (40)$$

より、

$$\Delta E(n+1) - \Delta E(n) = \beta^2 E_0 \{\delta_p(n+1) - \delta_p(n)\} \quad (41)$$

したがって、

$$\delta_p(n+1) - \delta_p(n) = \frac{eV}{\beta_0^2 E_0} (\sin \phi(n) - \sin \phi_s) \quad (42)$$

the symplectic mapping equation:

$$\begin{aligned} \delta_p(n+1) - \delta_p(n) &= \frac{eV}{\beta_0^2 E_0} (\sin \phi(n) - \sin \phi_s) \\ \phi(n+1) &= \phi(n) + 2\pi h\eta\delta_p(n+1) \end{aligned} \quad (43)$$

5 Differential Equations for Longitudinal Motion in a Synchrotron

The difference equations (43) can be written as continuous differential equations, if the assumption is made that the change of the variables ϕ and δ_p during one turn in the ring is not too large. In this case, the difference quotient can be approximated by the differential quotient

$$\frac{\delta_p(n+1) - \delta_p(n)}{T_0(n+1)} \approx \frac{d\delta_p}{dt} = \dot{\delta}_p, \quad \frac{\phi(n+1) - \phi(n)}{T_0(n+1)} \approx \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \quad (44)$$

$$\dot{\delta}_p = \frac{eV\omega_0}{2\pi\beta_0^2 E_0} (\sin \phi - \sin \phi_s) \quad (45)$$

$$\dot{\phi} = h\omega_0 \eta \delta_p$$

$$\ddot{\phi} = \frac{eVh\eta\omega_0^2}{2\pi\beta_0^2 E_0} (\sin \phi - \sin \phi_s) \quad (46)$$

5.1 Small amplitude approximation

$\Delta\phi = \phi - \phi_s$ が非常に小さい時、

$$\sin \phi = \sin(\phi_s + \Delta\phi) \approx \sin \phi_s + \cos \phi_s \Delta\phi \quad (47)$$

より

$$\ddot{\Delta\phi} = \frac{eVh\eta\omega_0^2}{2\pi\beta_0^2 E_0} \cos \phi_s \Delta\phi = -\omega_s^2 \Delta\phi \quad (48)$$

ただし、

$$\omega_s = \sqrt{-\frac{eVh\eta\omega_0^2 \cos \phi_s}{2\pi\beta_0^2 E_0}} \quad (49)$$

付録 A 相対論のおさらい

$$E_0 = m_0 c^2, \quad E = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} \quad (\text{A.1})$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{A.2})$$

$$p = mv = \gamma m_0 v = \gamma m_0 \beta c \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{p}{E} = \frac{\gamma m_0 \beta c}{\gamma m_0 c^2} = \frac{\beta}{c} \quad (\text{A.4})$$

式 (11) の導出

$$\frac{dp}{dv} = m_0 \frac{d}{dv}(\gamma v) = m_0 \left(\gamma + v \frac{d\gamma}{dv} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dv} &= \frac{1}{c} \frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \\ &= \frac{1}{c} \beta \underbrace{(1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}}}_{\gamma^{-2}} = \frac{\beta \gamma^3}{c} \\ &= \frac{1}{c} \beta \underbrace{(1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}}}_{\gamma^{-2}} = \frac{\beta \gamma^3}{c} \end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dv} &= m_0 \left(\gamma + v \frac{\beta \gamma^3}{c} \right) = m_0 \gamma \underbrace{(1 + \beta^2 \gamma^2)}_{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 p}{v} \\ \therefore \quad \frac{dv}{v} &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$p = mv = \gamma m_0 \beta c, \quad E = \gamma E_0 = \gamma m_0 c^2$$

$$\gamma \beta = \gamma \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dE} &= \frac{1}{c} \frac{d(\gamma \beta)}{d\gamma} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\gamma} \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ &= \frac{\gamma}{c} \underbrace{(\gamma^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}}_{\gamma^2 \beta^2} = \frac{1}{c\beta} = \frac{p}{\beta^2 E} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{dp}{p} = \frac{1}{\beta^2} \frac{dE}{E} \quad (\text{A.6})$$

付録 B その他

参考文献

- [1] A. Chao, K. Mess, M. Tigner, and F. Zimmermann, Handbook of Accelerator Physics and Engineering (2nd Edition), World Scientific Publishing Company Incorporated, Singapore (2013)
- [2] A.W.Chao and M.Tigner, editors. Handbook of Accelerator Physics and Engineering. World Scientific Pub. Co., 3rd printing edition, 2009.
- [3] Andy Wolski, Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators, Imperial College Pr (2014).
- [4] S. Y. Lee, Accelerator physics, World Scientific (2004), ISBN 9789812562005.
- [5] D.A. Edwards, M.J. Syphers, ‘An introduction to the physics of high energy accelerators’, Wiley (1993).