

シンクロトロン振動のほへと

吉本伸一

2019 年 4 月 19 日

目次

1	Synchrotron motion	2
1.1	Transition	2
1.2	Phase slip factor	3
1.3	シンクロトロン振動の方程式	4
2	Longitudinal Dynamics	5
2.1	6-D Phase Space	5
2.2	Energy Equation	5

1 Synchrotron motion

偏向電磁石によって分散 (dispersion) が発生する為、シンクロトロン蓄積リングでは、粒子の横方向と縦方向の運動が結合する。リングを周回する粒子による縦方向の振動 (シンクロトロン振動) において、横方向と縦方向の運動のカップリングが重要な役割を演じる。シンクロトロン振動は基準粒子 (設計軌道を設計速度で運動する粒子) に対する、到着時間と運動量偏差の振動である。

1. 粒子の速度の違い
2. 軌道の長さの違い

1.1 Transition

運動量偏差 (momentum deviation)

$$\delta_p = \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} \quad (1)$$

momentum compaction factor

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0} = \alpha_p \delta_p \quad (2)$$

phase slip factor

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \eta_p \frac{\Delta p}{p_0} \quad (3)$$

周長を C 、粒子の速度を v とすると回転周期 T は

$$T = \frac{C}{v} \quad (4)$$

となるので、両辺を v で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dv} &= \frac{1}{v} \frac{dC}{dv} - \frac{C}{v^2} \\ &= \frac{T}{C} \frac{dC}{dv} - \frac{T}{v} \end{aligned} \quad (5)$$

したがって、

$$\frac{dT}{T} = \frac{dC}{C} - \frac{dv}{v} \quad (6)$$

これより

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta C}{C_0} - \frac{\Delta v}{v_0} \quad (7)$$

この式より、到着時間の変動 ($\Delta T/T_0$) をもたらす要因が、軌道の長さの違い ($\Delta C/C_0$) と粒子の速度の違い ($\Delta v/v_0$) である事が分かる。

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (8)$$

したがって、

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \left(\alpha_p - \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \frac{\Delta p}{p_0} \quad (9)$$

相対論のおさらい

$$E_0 = m_0 c^2, \quad E = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} \quad (\text{A.1})$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{A.2})$$

$$p = mv = \gamma m_0 v = \gamma m_0 \beta c \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{p}{E} = \frac{\gamma m_0 \beta c}{\gamma m_0 c^2} = \frac{\beta}{c} \quad (\text{A.4})$$

式 (8) の導出

$$\frac{dp}{dv} = m_0 \frac{d}{dv}(\gamma v) = m_0 \left(\gamma + v \frac{d\gamma}{dv} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dv} &= \frac{1}{c} \frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \\ &= \frac{1}{c} \underbrace{\beta(1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}}}_{\gamma^{-2}} = \frac{\beta \gamma^3}{c} \\ &= \frac{1}{c} \underbrace{\beta(1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}}}_{\gamma^{-2}} = \frac{\beta \gamma^3}{c} \end{aligned}$$

これより、

$$\frac{dp}{dv} = m_0 \left(\gamma + v \frac{\beta \gamma^3}{c} \right) = m_0 \gamma \underbrace{(1 + \beta^2 \gamma^2)}_{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 p}{v}$$

$$\therefore \frac{dv}{v} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p} \quad (\text{B.1})$$

$$\alpha_p = \frac{1}{C_0} \left. \frac{dC}{d\delta_p} \right|_{\delta_p=0} \quad (10)$$

1.2 Phase slip factor

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \eta \frac{\Delta p}{p_0} \quad (11)$$

$$\eta_p = \frac{1}{T_0} \left. \frac{dT}{d\delta_p} \right|_{\delta_p=0} \quad (12)$$

$$\eta_p = \alpha_p - \frac{1}{\gamma_0^2} \quad (13)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (14)$$

正の運動量圧縮率 $\alpha_p > 0$ を持つ電磁石の配列を考えます。このような磁石の配列では、粒子のエネルギーを増加させると経路長が増加する。しかしながら、粒子が光の速度よりも十分低い速度を有するようにビームが低エネルギーである場合、粒子のエネルギーを増加させることはその速度の増加をもたらす、それは経路長の増加を補償する以上のことがあり得る。その結果、粒子は単位時間あたりの回転数が多くなります。

しかしながら、超相対論的粒子の場合、粒子はすでに光速に非常に近いところを移動しているので、エネルギーの増加はごくわずかな速度の増加をもたらす。この場合、光路長の増加は速度の増加よりも優先され、粒子は単位時間あたりの回転数が少なくなります。

これら 2 つの体制の間にあるエネルギーでは、回転数はエネルギーに依存しません。このエネルギーは遷移エネルギーとして知られています。

1.3 シンクロトロン振動の方程式

$$\Delta\phi = \omega_{RF}\Delta T = \omega_{RF}T_0\eta_p \frac{\Delta p}{p_0} \quad (15)$$

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{\beta_0^2} \frac{\Delta E}{E_0} \quad (16)$$

$$\Delta\phi = \frac{\omega_{RF}T_0\eta_p}{\beta_0^2 E_0} \Delta E \quad (17)$$

$$\frac{d\phi}{dt} \simeq \frac{\Delta\phi}{T_0} = \frac{\omega_{RF}\eta_p}{\beta_0^2 E_0} \Delta E \quad (18)$$

$$\Delta E = eV_c(\sin\phi - \sin\phi_s) \quad (19)$$

$$\frac{d\Delta E}{dt} \simeq \frac{\Delta E}{T_0} = \frac{eV_c(\sin\phi - \sin\phi_s)}{T_0} \quad (20)$$

式 (16) の導出

$$p = mv = \gamma m_0 \beta c, \quad E = \gamma E_0 = \gamma m_0 c^2$$

$$\gamma \beta = \gamma \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dE} &= \frac{1}{c} \frac{d(\gamma \beta)}{d\gamma} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\gamma} \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ &= \frac{\gamma}{c} (\underbrace{\gamma^2 - 1}_{\gamma^2 \beta^2})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{c\beta} = \frac{p}{\beta^2 E} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dp}{p} = \frac{1}{\beta^2} \frac{dE}{E} \quad (\text{C.1})$$

2 Longitudinal Dynamics

2.1 6-D Phase Space

canonical variables: $(x, x', y, y', z, \delta_p)$ synchronous phase: $\phi_s = \omega_{RF} t_0$

$$\begin{aligned} z &= -v(t - t_0) \\ \delta_p &= \frac{p - p_0}{p_0} \end{aligned}$$

2.2 Energy Equation

The energy of a particle at the $(n+1)$ -th turn E_{n+1} is expressed by the energy E_n and RF phase ϕ_n at the n -th turn as

$$E_{n+1} = E_n + eV \sin \phi_n \quad (21)$$

For a synchronous particle with suffix 0,

$$(E_0)_{n+1} = (E_0)_n + eV \sin \phi_s \quad (22)$$

Thus, the energy error, $\Delta E = E - E_0$, is expressed as

$$\Delta E_{n+1} = \Delta E_n + eV (\sin \phi_n - \sin \phi_s) \quad (23)$$

ここで、

$$\delta = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{\beta_0^2} \frac{\Delta E}{E_0} \quad (24)$$

より、

$$\Delta E_{n+1} - \Delta E_n = \beta^2 E_0 (\delta_{n+1} - \delta_n) \quad (25)$$

したがって、

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{eV}{\beta_0^2 E_0} (\sin \phi_n - \sin \phi_s) \quad (26)$$

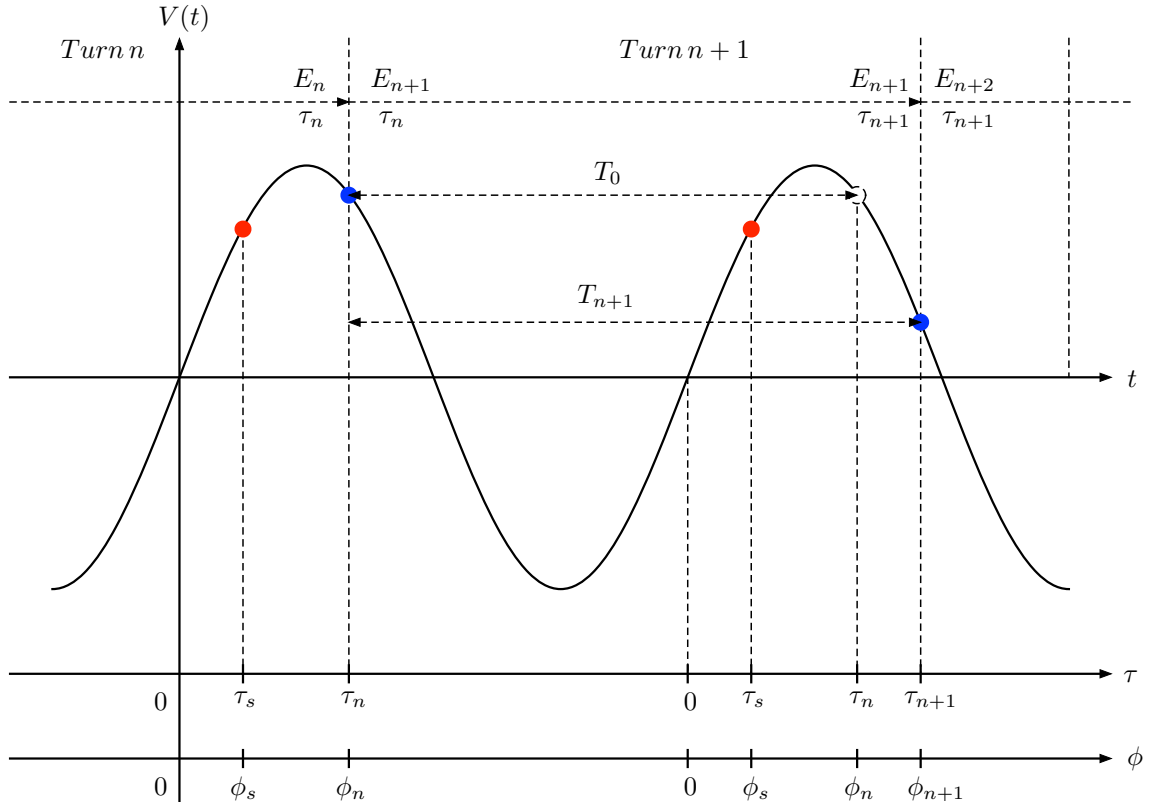


図 1: Relative and absolute coordinates. ($h = 1$)

粒子がエネルギー E_n でリングを n 周回し、加速空洞で加速されエネルギーが E_{n+1} 増えた時、 $n+1$ 周回し再び加速空洞で加速する時間 T_{n+1} は、

$$\Delta\tau_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n = T_{n+1} - T_0 \quad (27)$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \omega_{RF}\Delta\tau_{n+1} = \omega_{RF}(T_{n+1} - T_0) \quad (28)$$

参考文献

- [1] Andy Wolski, Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators, Imperial College Pr (2014).
- [2] S. Y. Lee, Accelerator physics, World Scientific (2004), ISBN 9789812562005.
- [3] D.A. Edwards, M.J. Syphers, 'An introduction to the physics of high energy accelerators', Wiley (1993).