Time-domain and Frequency-domain Signals

吉本伸一

2021 年 6 月 10 日

目次

1 Fourier 級数展開 2
2 Fourier 変換 2
3 デルタ関数 2
4 デルタ関数の Fourier 変換 2
5 ポアソン和公式 3
6 Single-bunch Spectrum 3
7 Multi-bunch Spectrum 5
8 Synchrotron oscillation 6

1 Fourier 級数展開

周期が T_0 の周期関数 $f(t)$ を Fourier 級数展開すると

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{1}$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \tag{2}$$

ただし、$\omega_0 = 2\pi/T_0$ とおいた。

2 Fourier 変換

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{3}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{4}$$

3 デルタ関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a) \tag{7}$$

4 デルタ関数の Fourier 変換

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \tag{8}$$

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \tag{9}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi} \tag{10}$$

したがって、

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega) \tag{11}$$

5　ポアソン和公式

$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ とした時、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{\alpha}\right) \tag{12}$$

が成り立つ。これをポアソン和公式 (Poisson summation formula) という。

証明　(9) より

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\alpha n)dt \tag{13}$$

$\sum\delta(t-\alpha n)$ は、周期 α の周期関数なのでフーリエ級数展開でき、区間 $[-\alpha/2, \alpha/2]$ において $\delta(t-\alpha n)$ は $\delta(t)$ とみなせるので、$\omega_0 = 2\pi/\alpha$ とおくと (1), (2) より

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-\alpha n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\left[\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right]e^{jn\omega_0 t} \tag{14}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega_0 t} \tag{15}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) &= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

□

6　Single-bunch Spectrum

リングに 1 個のバンチが周期が T_0 で周回している時、ビームの信号は、

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0) \tag{16}$$

のように表すことができる。ここで、$i(t)$ をフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} i(t)e^{-j\omega t}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)e^{-j\omega t}dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega nT_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n\frac{\omega}{\omega_0}} \end{aligned} \tag{17}$$

ただし、$T_0 = 2\pi/\omega_0$ とした。ここで、$f(t) = e^{-j\omega t}, \alpha = 2\pi/\omega_0$ として、ポワソン和公式を使うと、

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n\frac{\omega}{\omega_0}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) \\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{\alpha}\right) = \frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+n\omega_0)t}dt \\ &= \omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+n\omega_0) \qquad (\because (11)) \\ &= \omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0) \end{aligned} \tag{18}$$

これより、周期 T_0 で周回するバンチのスペクトルをスペアナなどで観測すると、周回周波数 ω_0 毎にピークを持つ信号が観測されることがわかる。

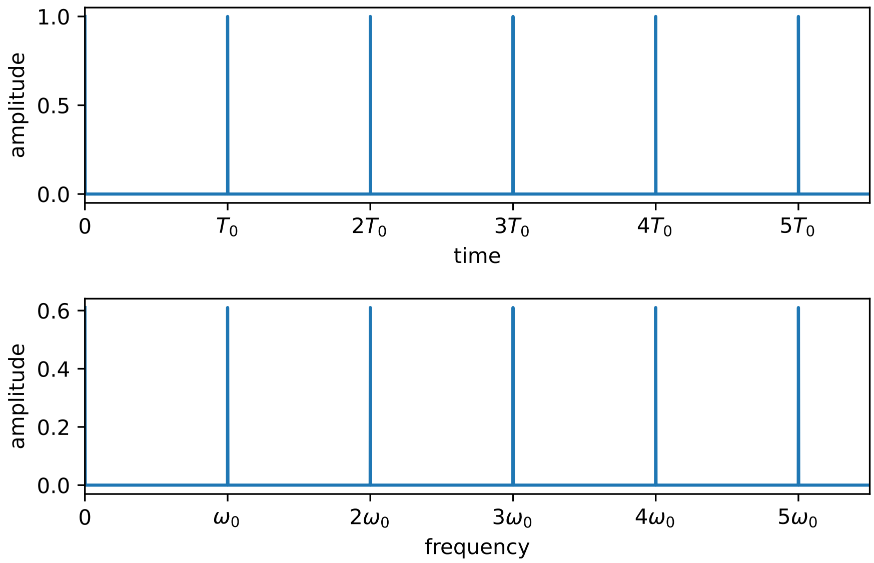

Fig. 1　単バンチのビーム信号のスペクトル.

7 Multi-bunch Spectrum

リングに M 個のバンチが均等に配置されている場合、ビームの信号は

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{M-1} \delta(t - kT_0 - nT_0/M) \tag{19}$$

と表すことができる。先程と同様にフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0 - nT_0/M) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(kT_0 + nT_0/M)} \qquad (20) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n \frac{\omega}{\omega_0}} \qquad (21) \end{aligned}$$

ただし、$T_0 = 2\pi/\omega_0$ とした。ここで、$f(t) = e^{-j\omega t}, \alpha = 2\pi/\omega_0$ として、ポワソン和公式を使うと、

くし型関数と同様に考えると、$f(t)$ は周期 T_0/M の周期関数で、区間 $[-T_0/2M, T_0/2M]$ においては $f(t)$ は $\delta(t)$ とみなせるから

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{M}{T_0} \left[\int_{-T_0/2M}^{T_0/2M} \delta(t) e^{-jnM\omega_0 t} dt \right] e^{jnM\omega_0 t} \qquad (22) \\ &= \frac{M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnM\omega_0 t} \qquad (23) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= \mathcal{F}\left[\frac{M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnM\omega_0 t} \right] \qquad (24) \\ &= \frac{M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - nM\omega_0)]] \qquad (25) \\ &= \frac{2\pi M}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - nM\omega_0) \qquad (26) \\ &= M\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - nM\omega_0) \qquad (27) \end{aligned}$$

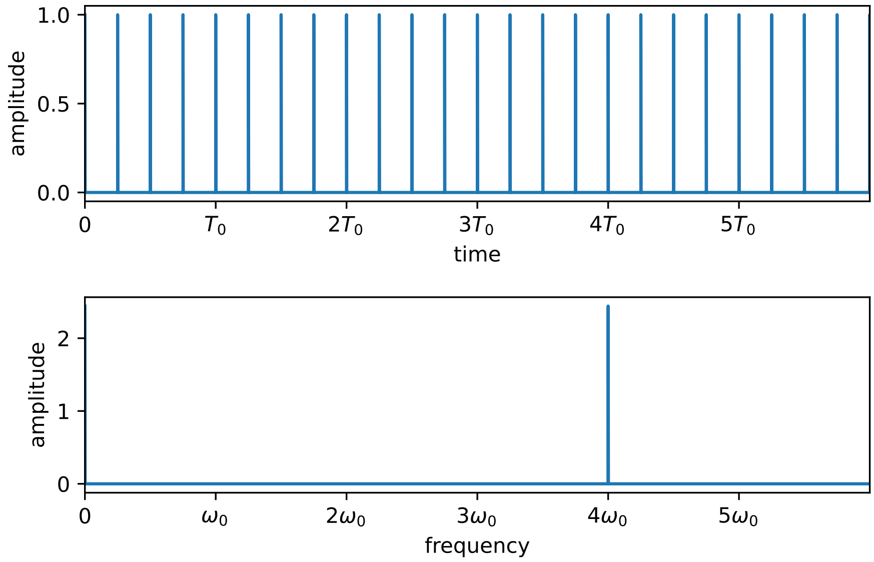

Fig. 2　多バンチのビーム信号のスペクトル.

8　Synchrotron oscillation

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - nT_0 - \tau_a \cos(\omega_s nT_0 + \phi)] \tag{28}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt \quad &(29) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\{nT_0 + \tau_a \cos(\omega_s nT_0 + \phi)\}} \quad &(30) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-j\omega nT_0} + e^{-j\omega\tau_a \cos(\omega_s nT_0 + \phi)} \right] \quad &(31) \end{aligned}$$

ここで、

$$e^{jz\cos\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k(z) e^{jk\theta} \tag{32}$$

という関係を使うと（ただし、J_n はベッセル関数）

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-j)^k J_k(\omega\tau_a) e^{jk\phi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + k\omega_s)nT_0} \quad &(33) \\ &= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-j)^k J_k(\omega\tau_a) e^{jk\phi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + k\omega_s - n\omega_0) \quad &(34) \end{aligned}$$

参考文献

[1] 平松成範, 加速器のビームモニター (Beam Instrumentaion for Accelerrators), KEK Internal 2004-4 A.