

Discrete-time Dynamical System

Shin-ichi YOSHIMOTO

2021/6/25

Contents

1	Kicked rotator ·····	2
2	Standard Map ·····	2
3	Linearization of a map at a fixed point ·····	2
4	離散時間力学系 ·····	3
4.1	線形化方程式 ·····	3
4.1.1	例: 2次元離散時間系 ·····	4

1 Kicked rotator

$$\mathcal{H}(\theta, p, t) = \frac{1}{2}p^2 + K \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = K \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p \quad (3)$$

2 Standard Map

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + K \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1} \end{cases} \quad (4)$$

演算子 \tilde{h} を

$$\tilde{h}\theta_n \equiv K \sin \theta_n \quad (5)$$

と定義すると、式 (4) は

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{h} \\ 1 & 1 + \tilde{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ \theta_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

と書ける。

変換 $(p_n, \theta_n) \mapsto (p_{n+1}, \theta_{n+1})$ に対する Jacobian は、

3 Linearization of a map at a fixed point

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases} \quad (7)$$

固定点 (x^*, y^*) に対して

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = x^* \\ g(x^*, y^*) = y^* \end{cases} \quad (8)$$

$f(x, y)$ と $g(x, y)$ を (x^*, y^*) の周りでテーラー展開すると

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) + \dots \\ g(x, y) = g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) + \dots \end{cases} \quad (9)$$

$\delta x_n = x_n - x^*$, $\delta y_n = y_n - y^*$ と置くと、 $x_{n+1} = \delta x_{n+1} + x^*$, $y_{n+1} = \delta y_{n+1} + y^*$ だから

$$\begin{cases} \delta x_{n+1} + x^* = f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)\delta x_n + f_y(x^*, y^*)\delta y_n \\ \delta y_{n+1} + y^* = g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)\delta x_n + g_y(x^*, y^*)\delta y_n \end{cases} \quad (10)$$

式 (8) より、

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix} \quad (11)$$

4 離散時間力学系

4.1 線形化方程式

次の離散時間系を考える。

$$x_i(k+1) = f_i(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

これはベクトル表記を用いて

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) \quad (13)$$

と表すことにする。いま、 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ の固定点を \mathbf{x}_0 とすると、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \quad (14)$$

固定点からの微小な変動 $\delta \mathbf{x}(k)$ を考えると

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}(k) \quad (15)$$

これを式 (13) に代入して

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}(k)) \quad (16)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}(k)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \delta \mathbf{x}(k) + \dots \quad (17)$$

$$\delta \mathbf{x}(k+1) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \delta \mathbf{x}(k) \quad (18)$$

$$= D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \delta \mathbf{x}(k) \quad (19)$$

4.1.1 例: 2次元離散時間系

References

- [1] アーノルド, 古典力学の数学的方法
- [2] 市川芳彦, プラズマにおける非線形現象の諸問題 (3), 核融合研究, 1988, 59 巻, 5 号, p. 362-391.
- [3] 川上博, 非線形現象入門 定性的接近法, 2005
- [4] 伊藤大輔, 非線形力学系における分岐理論の解析・応用 I, システム/制御/情報, Vol. 64, No. 2, pp. 70-75, 2020