Discrete-time Dynamical System

Shin-ichi YOSHIMOTO

2021/6/28

Contents

1 Kicked rotator

$$\mathcal{H}(\theta, p, t) = \frac{1}{2}p^2 + K\cos\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{1}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = K\sin\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \tag{3}$$

2 Standard Map

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + K\sin\theta_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1} \end{cases} \tag{4}$$

演算子 $\tilde{h}$ を

$$\tilde{h}\theta_n \equiv K\sin\theta_n \tag{5}$$

と定義すると、式 (4) は

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{h} \\ 1 & 1+\tilde{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ \theta_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

と書ける。

変換 $(p_n, \theta_n) \mapsto (p_{n+1}, \theta_{n+1})$ に対する Jacobian は、

3 Linearization of a map at a fixed point

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases} \tag{7}$$

固定点 (x^*, y^*) に対して

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = x^* \\ g(x^*, y^*) = y^* \end{cases} \tag{8}$$

$f(x,y)$ と $g(x,y)$ を (x^*,y^*) の周りでテーラー展開すると

$$\begin{cases} f(x,y) = f(x^*,y^*) + f_x(x^*,y^*)(x-x^*) + f_y(x^*,y^*)(y-y^*) + ... \\ g(x,y) = g(x^*,y^*) + g_x(x^*,y^*)(x-x^*) + g_y(x^*,y^*)(y-y^*) + ... \end{cases} \tag{9}$$

$\delta x_n = x_n - x^*,\ \delta y_n = y_n - y^*$ と置くと、$x_{n+1} = \delta x_{n+1} + x^*,\ y_{n+1} = \delta y_{n+1} + y^*$ だから

$$\begin{cases} \delta x_{n+1} + x^* = f(x^*,y^*) + f_x(x^*,y^*)\delta x_n + f_y(x^*,y^*)\delta y_n \\ \delta y_{n+1} + y^* = g(x^*,y^*) + g_x(x^*,y^*)\delta x_n + g_y(x^*,y^*)\delta y_n \end{cases} \tag{10}$$

式 (8) より、

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x^*,y^*) & f_y(x^*,y^*) \\ g_x(x^*,y^*) & g_y(x^*,y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix} \tag{11}$$

4 離散時間力学系

4.1 線形化方程式

次の離散時間系を考える。

$$x_i(k+1) = f_i(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{12}$$

これはベクトル表記を用いて

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k)) \tag{13}$$

と表すことにする。いま、$\boldsymbol{f}(x)$ の固定点を $\boldsymbol{x}_0$ とすると、

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{14}$$

固定点からの微小な変動 $\delta\boldsymbol{x}(k)$ を考えると

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}_0 + \delta\boldsymbol{x}(k) \tag{15}$$

これを式 (13) に代入して

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{x}_0 + \delta\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \delta\boldsymbol{x}(k)) \tag{16}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \delta\boldsymbol{x}(k)) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})\delta\boldsymbol{x}(k) + \dots \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{x}(k+1) &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})\delta\boldsymbol{x}(k) && (18) \\ &= D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})\delta\boldsymbol{x}(k) && (19) \end{aligned}$$

4.1.1 例: 2 次元離散時間系

References

[1] アーノルド, 古典力学の数学的方法

[2] 市川芳彦, プラズマにおける非線形現象の諸問題 (3), 核融合研究, 1988, 59 巻, 5 号, p. 362-391.

[3] 川上博, 非線形現象入門 定性的接近法, 2005

[4] 伊藤大輔, 非線形力学系における分岐理論の解析・応用 I, システム/制御/情報, Vol. 64, No. 2, pp. 70-75, 2020