Dimitrije Radojević

Segregacija mase u dvokomponentnim zbijenim zvezdanim jatima

Analizom podataka dobijenih iz numeričkih n-body simulacija sa implementiranim Barns-Hat algoritmom stabla ispitan je efekat segregacije mase u dvokomponentnim zbijenim zvezdanim jatima. Rezultati pokazuju očekivano grupisanje težih pratioca u oblasti jezgra, odnoso migraciju lakših ka halou jata. Zaključeno je da efekti segregacije mase utiču na dinamičku evoluciju jata i ukupnu ravnotežu sistema, ali i da simulirani vremenski period nije dovoljno veliki da bi se oni u potpunosti ispoljili.

Uvod

Segregacija mase je fenomen koji se manifestuje tokom dinamičke evolucije globularnih jata i predstavlja sistematsku grupaciju masivnijih tela bliže jezgru jata, usled čega dolazi do povećanja njihove koncentracije u jezgru tokom vremena. Ovaj efekat se objašnjava bliskim susretima objekata različite mase, u kojima masivnija tela predaju deo svoje kinetičke energije manje masivnom telu, koje dobija na brzini. Zbog gubitka energije masivnije zvezde postepeno migriraju ka jezgru, dok se manje masivne zvezde udaljavaju od njega, ponekad dovoljno brzo da napuste potencijalnu jamu jata. Ovakvi susreti su relativno česti u zbijenim jatima usled velike koncentracije zvezda, te stoga segregacija mase ima velikog uticaja na dinamičku evoluciju jata i ukupnu stabilnost sistema (Fregeau *et al.* 2002).

U ovom radu se, na osnovu rezultata računarskih n-body simulacija, proučava efekat segregacije mase na zbijena zvezdana jata sa dve komponente (populacije) zvezda. Cilj je da se dokaže postojanje segregacije i da se odredi u kojoj meri ona utiče na evoluciju jata.

Dimitrije Radojević (1989), Užice, Toplička 15/20, učenik 2. razreda Užičke gimnazije

MENTOR: Marko Simonović, student Fizičkog fakulteta u Beogradu

Metod

Integracioni metod

N-body sistem je sistem od *n* tela koja međusobno interaguju. Ponašanje tela u takvom sistemu opisano je jednačinama kretanja, koje su zapravo diferencijalne jednačine drugog reda i direktna su primena drugog Njutnovog zakona i Njutnovog zakona gravitacije:

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \gamma \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}$$
 (1)

gde su m_i i m_j odgovarajuće mase, \mathbf{r}_i i \mathbf{r}_j odgovarajući vektori položaja dva tela, a $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Problem rešavanja ovih jednačina se naziva n-body ili many-body problem i on je analitički nerešiv za $n \ge 3$, te se stoga mora pristupiti numeričkom rešavanju. Jednačina (1) se može razložiti na sistem diferencijalnih jednačina prvog reda:

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}_i \tag{2}$$

$$\mathbf{a}_{i} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_{i}}{\mathrm{d}t} = \gamma \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n} \frac{m_{j}}{r_{ij}^{3}} \mathbf{r}_{ij}$$
(3)

Ove jednačine sadrže 6n promenljivih, po tri komponente za brzinu i položaj svakog tela. Za integraciju sistema diferencijalnih jednačina prvog reda je korišćen *leapfrog* metod preciznosti drugog reda. Po ovom metodu integracije, da bi se izračunala pozicija nekog tela u proizvoljnom vremenskom trenutku t_1 , ukoliko su dati položaj \mathbf{r}_0 i brzina tela \mathbf{V}_0 u početnom trenutku t_0 i ako se zna da je ubrzanje (3) funkcija koja zavisi samo od položaja tela, tj. $\mathbf{a}_i = f(\mathbf{r}_i, t)$, koriste se sledeće jednačine:

$$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} = \mathbf{V}_{o} + f(\mathbf{r}_{o}, t_{o}) \frac{\Delta t}{2}$$
(4a)

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{V}_2 \Delta t \tag{4b}$$

$$\mathbf{V}_{3/2} = \mathbf{V}_{1/2} + f(\mathbf{r}_1, t_1) \,\Delta t \tag{4c}$$

gde je Δt diskretni vremenski interval (vremenski korak). Za razliku od Ojlerovog metoda, kod *leapfrog*-a se koriste brzine tela na polovini vremenskog koraka da bi se procenili položaji tela za jedan ceo vremenski korak unapred, a zatim, na osnovu novih položaja, pomerile brzine takođe za jedan korak unapred. Na ovaj način su brzine uvek za pola koraka ispred položaja. Naravno, što je Δt manje, to je greška ovakvih aproksimacija manja, i ona je kod integratora drugog reda proporcionalna sa Δt^2 .

Glavni problem predstavlja izrčunavanje potencijala, odnosno sile na neku česticu.

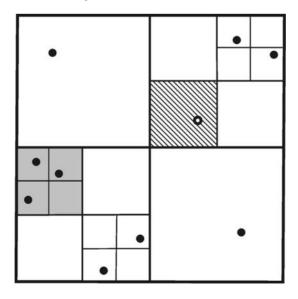
Gravitaciono ubrzanje u tački $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$, zapravo je negativan gradijent potencijala:

$$\mathbf{a} = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) \tag{5}$$

Računanje potencijala

Kod računarskih n-body simulacija najveći deo procesorskog vremena koristi se za izračunavanje sile (odnosno ubrzanja). Najprostiji način za računanje ubrzanja koriste simulacije particle-particle (PP) tipa. Kod ovakvih simulacija sila se računa kao zbir interakcija sa svakom česticom, pa to zahteva n-1 operacija za svako telo, usled čega se tzv. računarska zahtevnost (computational complexity) ponaša kao $O(n^2)$.

Postoji dosta alternativnih načina za računanje sila koji na razne načine smanjuju računarsku zahtevnost. U ovom radu je korišćen Barns-Hat (BH) algoritam koji koristi posebnu strukturu kako bi se kompleksnost izračunavanja smanjila na $O(n \log n)$ (Barnes i Hut 1986). Algoritam deli prostor u prostorne celine (tzv. nodove) u kojima su smeštena tela. Na početku je ceo prostor sa svim česticama smešten u jednu kocku, koja se potom deli na osam jednakih kocki. Ovaj proces je rekurzivan, tako da se i ove kocke dele na manje sve dok svaka čestica ne bude smeštena u jednu kocku. Tako dobijena kocka (koja sadrži samo jednu česticu) naziva se list, dok se ostale nazivaju nodovi. Slika 1 prikazuje uprošćenu strukturu BH stabla u dve dimenzije.



Slika 1. Hijerarhijska struktura 2D BH stabla. Šrafirani deo predstavlja list, a osenčeni nod.

Figure 1..
Simplified hierarchial structure of the BH tree in two dimensions.
Dashed segment — leaf, shadowed segment — node.

Koristeći se činjenicom da bliža tela više doprinose ukupnom ubrzanju, potencijal najbližih tela računa se direktno, a udaljeni delovi sistema se aproksimiraju jednim telom, što zahteva razvoj potencijala na članove (momente). Potencijal Φ može se razviti multipolnom ekspanzijom na:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{M}{r} - \frac{Q_{ij} r_i r_j}{2 r_3} + O(\Delta \frac{x}{r})^4$$
 (6)

U gornjoj jednačini je $r = |\mathbf{r}|$, M, Q_{ij} redom monopolni, odnosno kvadrupolni momenat, a indeksi i i j uzimaju vrednosti od 1 do 3. $O(\Delta \frac{x}{r})^4$ predstavlja članove višeg reda, od oktupolnog pa nadalje.

Momenti razvoja potencijala se izračunavaju pri izgradnji strukture stabla. U ovom radu je od članova višeg reda korišćen samo kvadrupolni, jer se pokazalo da se uvođenjem oktupolnog i viših članova vrši tek neznatna korekcija greške dok se uveliko gubi na efikasnosti. Monopolni i kvadrupolni momenat noda koji sadrži *n* tela su redom sledeći:

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{8}$$

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k (3 x_{ik} x_{jk} - |x_k| \delta_{ij})$$
(9)

gde su m_k i x_k redom položaji i mase tela u nodu, indeksi i i j takođe uzimaju vrednosti od 1 do 3, a δ_{ij} je Kronekerova delta. Kada se ovo ubaci u jednačinu za potencijal, a potom se odrede parcijalni izvodi potencijala po tri ose (odnosno $\nabla \Phi$), dobijaju se jednačine za ubrzanje:

$$A - 2|r|^2 (Q_{11} x + Q_{12} y + Q_{13} z)]$$
 (10a)

$$A - 2|r|^2 (Q_{12} x + Q_{22} y + Q_{23} z)]$$
 (10b)

$$A - 2|r|^2 (Q_{13} x + Q_{23} y + Q_{33} z)]$$
 (10c)

gde je

$$A = \frac{\gamma M}{|r|^3} x - \frac{\gamma}{2|r|^7} \cdot 5(Q_{11} x^2 + Q_{22} y^2 + Q_{33} z^2 + 2Q_{12} xy + 2Q_{13} xz + 2Q_{33} yz),$$

Bliski prolazi i aproksimacija noda

Aproksimacija noda podrazumeva da se ceo nod, sa svim telima u njemu, posmatra kao jedna materijalna tačka smeštena u centar mase. Uslov da neki nod P bude aproksimiran pri računanju ubrzanja na telo i je:

$$R_{P_i} > K d_P \tag{7}$$

gde je R_{P_i} rastojanje od telado centra mase noda P, d_P neka jedinica veličine noda (npr. dijagonala ili stranica noda) a K je parametar koji se može menjati. Ovaj parametar zapravo predstavlja ugao R_{P_i}/d_P pod kojim se nod vidi iz perspektive tela i (Salmon i Warren 1993). Što je K manje, više se nodova aproksimira, i tako se dobija na brzini, ali i na grešci. Može se pokazati da je apsolutna greška izračunavanja sile proporcionalna sa K^{-3} . Sa druge strane, veliko K smanjuje efikasnost, te se pri dovoljno velikim vrednostima ovog parametra dovodi u pitanje i samo korišćenje ovog algoritma. Lako je zaključiti da su preciznost i efikasnost kod ovakvih slučajeva obrnuto srazmerni, te je stoga od izuzetnog značaja odrediti optmalnu vrednost K.

Pri računanju direktnog ubrzanja (izazvanog listovima), budući da funkcija $a=-\gamma M/r^2$ divergira ka $-\infty$ za $r\to 0$, to se u obzir moraju uzeti i slučajevi kada se dva tela nađu izuzetno blizu jedno drugome. Tada je ubrzanje koje jedno telo prouzrokuje na drugo ekstremno veliko, tako da brzine koje integrator računa preko ubrzanja postaju ogromne. Ovo najčešće dovodi do izbacivanja jednog tela velikom brzinom iz sistema i može se detektovati velikom greškom ukupne energije.

Jedno rešenje za ovakav problem je uvođenje promenljivih vremenskih koraka. Ovo zahteva stalno praćenje međusobnih udaljenosti tela da bi se vremenski korak pravovremeno smanjio, sprečavajući tako nasilne reakcije bliskih objekata. Drugo rešenje je uvođenje parametra ublažavanja ε koji se ubacuje u jednačinu za ubrzanje:

$$\mathbf{a} = -\gamma \frac{M}{r^3 + \varepsilon} \mathbf{r} \tag{11}$$

Na ovaj način se očigledno eliminiše opasnost od preteranog približavanja tela, ali se i umanjuje ukupno ubrzanje, tako da se i ovde mora paziti da se odredi optimalna vrednost parametra. Kako uvođenje promenljivih vremenskih koraka zahteva nešto opširniju modifikaciju koda, u ovom radu je upotrebljeno drugo rešenje u vidu parametra ε i konstantnog vremenskog koraka.

Model i jedinice

Početni parametri jata (položaji i brzine tela) su nasumice generisani prema Plamerovom modelu. Plamerov model je izuzetno prost i koristi se kao analitički model u simulacijama globularnih jata ili galaksija. Sastoji se iz profila gustine i potencijala i oni, u zavisnosti od radijusa r, redom iznose:

$$\rho_P(r) = \frac{3M}{4\pi a^3} \cdot \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{12}$$

$$\Phi(r) = \frac{\gamma M}{\sqrt{r^2 + a^2}} \tag{13}$$

gde je *M* ukupna masa jata, a *a* je Plamerov radijus, parametar od koje zavisi gustina jata (Aarseth *et al.* 1974). Prostim skaliranjem ovako dobijenog jata moguće je fitovati parametre strukture i sastava jata tako da se poklapaju sa realnim parametrima, a ujedno se mogu i pretvoriti u proizvoljne jedinice dužine, mase, odnosno vremena. Za generisanje pseudonasumičnih brojeva korišćen je *ran2* algoritam.

Jedinica mase je izabrana intuitivno, i ona iznosi jednu Sunčevu masu. Jedinica dužine iznosi 0.7 pc, a ova vrednost predstavlja polovinu prosečnog radijusa unutar koga se nalazi pola mase jata za globulare sa relativno malim brojem tela, reda veličine 10⁴ (tabela 1, Gnedin i Ostriker 1997).

Jedinica vremena je proporcionalna vremenu potrebnom da probno telo koje orbitira oko drugog tela, jedinične mase M_0 na jediničnoj udaljenosti R_0 , izvrši jednu revoluciju:

$$T_{\rm o} = \left(\frac{R_{\rm o}^2}{\gamma M_{\rm o}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

Za jedinice korišćene u ovom radu, vremenska jedinica u SI jedinicama iznosi $8.734 \cdot 10^6$ godina.

Pri generisanju jata, tela se odvajaju u dve populacije (komponente). Prva populacija zvezda je malobrojnija, i nju čine pratioci, tj. objekti čija se masa uveliko razlikuje od mase pripadnika druge, glavne populacije. Ovakav način raspodele objekata omogućava lakše praćenje kretanja pratilaca, preko kojih se i prati efekat segregacije upravo zato što se toliko razlikuju od ostalih zvezda, to jest svi efekti tokom dinamičke evolucije jata se prvo ispoljavaju i najlakše uočavaju upravo na njima (Fregeau *et al.* 2002).

Kod simulacije je pisan u programskom jeziku C.

Rezultati i diskusija

Do sada su izvršene tri simulacije sa 5000, 4096 i 10 000 tela. Druga simulacija nije koristila Barns-Hat tree kod algoritam i nije imala odvojene populacije zvezda, već su mase svih zvezda nasumično generisane.

Usled vremenskog ograničenja i nedostatka kompjuterskih resursa, rezultati prve dve simulacije su jako oskudni, pre svega zbog nerealno malog broja tela i jako kratkog simuliranog perioda vremena. Kod treće simulacije su ovi nedostaci delimično ispravljeni.

Tabela 1. Vrednosti ulaznih i izlaznih parametara za izvršene simulacije

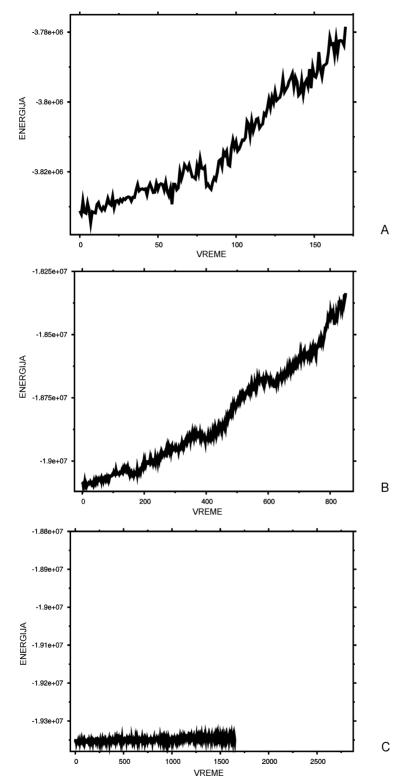
Simul.	n	$\frac{M}{\left[10^3\mathrm{M}_\mathrm{o}\right]}$	K	$\frac{m_t}{m_m}$	$\frac{n_t}{n_m}$	r_{q_0} [R _o]	r_{q_1} [R _o]	T_0 [10^3 god]	$N_{ m o}$	$\frac{\Delta E}{E_0}$
1	5000	~7.4	1.2	6	0.15	0.891	0.756	3.96	17000	1.38%
2	4096	~12	_	_	_	0.893	0.660	1.82	85000	3.95%
3	10000	~12	0.8	6	0.05	0.889	0.811	0.37	279200	2.76%

U tabeli 1 dati su ulazni i neki izlazni parametri tri izvršene n-body simulacije. U drugoj simulaciji nije korišćen BH algoritam, niti su zvezde odvojene u dve populacije. Kolone sa leva na desno sadrže sledeće podatke: n je broj tela, M je ukupna masa jata u hiljadama jedinica mase, K je parametar koji određuje kriterijum aproksimacije, m_t/m_m je odnos masa dveju populacija, n_t/n_m je odnos broja pripadnika dveju populacija, r_{q_0} je radijus sa četvrtinom mase na početku simulacije u jedinicama udaljenosti, r_{q_1} je radijus sa četvrtinom mase na kraju simulacije u jedinicama udaljenosti, T_0 je vremenski korak u godinama, N_0 je ukupan broj vremenskih koraka i $\Delta E/E_0$ je relativna greška ukupne energije na kraju simulacije u odnosu na početnu energiju, izražena u procentima.

Na graficima na slici 2 zapaža se predviđeno ponašanje radijusa, i to u relativno ranoj fazi evolucije. Može se uočiti konstantan pad radijusa sa četvrtinom mase (što sugeriše grupisanje teških pratioca blizu jezgra u prvoj simulaciji), i relativno stalan prečnik sa polovinom mase i očekivani porast radijusa sa tri četvrtine mase tokom vremena, usled evaporacije lakših tela. Na grafiku C (slika 2) radius se posle određenog vremena počeo širiti sa polovinom mase, što je verovatno povezano sa velikim brojem bliskih susreta usled velikog broja tela na malom prostoru u jezgru jata.

Sa grafika na slici 3 može se uočiti porast ukupne energije tokom vremena, što se ne bi trebalo dešavati u ovako izolovanom sistemu poput zbijenih zvezdanih jata, i posledica je nedostataka samog integratora i, kod prve dve simulacije, velikog vremenskog koraka. Međutim, iako izgleda drastično, ovakav konstantan, mali rast je zapravo prihvatljiv. To se može zaključiti iz relativne greške ukupne energije na kraju prve dve simulacije od svega nekoliko procenata, što ide u prilog korišćenom metodu integracije.

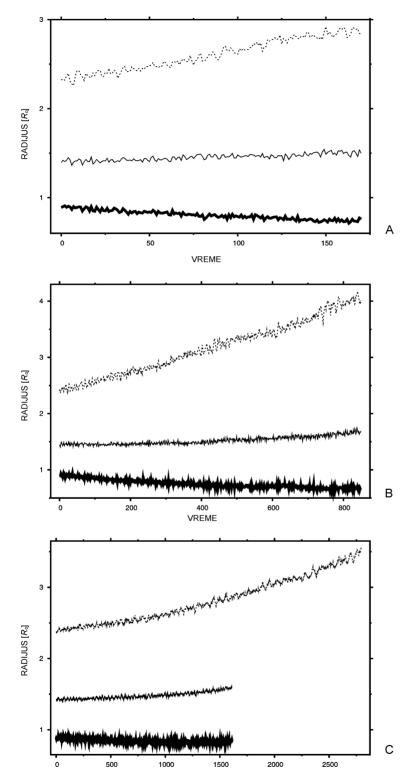
Sa druge strane, u trećoj simulaciji može se primetiti jako veliki skok ukupne energije u kasnijoj fazi evolucije (slika 3 C). Ovo je najverovatnije povezano sa ogromnim brojem bliskih susreta koji se odigravaju u isto vreme. Kako se jezgro jata skuplja dok se broj pratilaca u njemu povećava, povećava se i verovatnoća bliskih prolaza. Interesantan podatak je da je na početku simulacije u radijusu sa polovinom mase bilo svega 245 pratilaca



Slika 2. Ukupna energija sistema tokom simuliranog vremenskog perioda. Grafik A predstavlja podatke iz prve, grafik B iz druge, a grafik C iz treće simulacije.

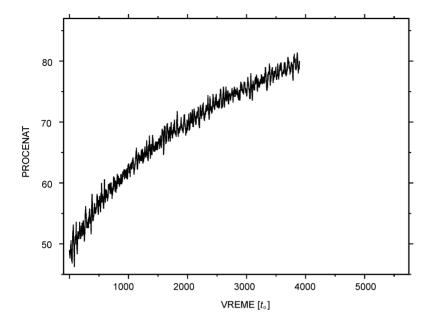
Figure 2. Total energy of the system plotted versus simulated time in the first (A), the second (B) and the third (C) run.

ZBORNIK RADOVA 2007 ASTRONOMIJA • 21



Slika 3. Vrednosti prečnika unutar kojih se, redom, odozdo na gore, nalazi četvrtina, polovina i tri četvrtine ukupne mase jata tokom simuliranog vremenskog perioda. Grafik A predstavlja rezultate prve, grafik B rezultate druge, a grafik C rezultate treće simulacije.

Figure 3.
Radii containing one quarter, one half and three quarters of total cluste mass, respectively, plotted versus time in the first (A), the second (B) and the third (C) run.



Slika 4. Broj pratilaca unutar prečnika sa polovinom mase tokom simuliranog vremenskog perioda u trećoj simulaciji

Figure 4.
The number of tracers within the half-mass radius plotted versus simulated time in the third run

(49% ukupnog broja pratilaca), dok se na kraju simulacije taj broj popeo na 416 (83%) (slika 4). Ovo potvrđuje hipotezu da se teži objektu grupišu u jezgru jata, dok lakši objekti, usled interakcije sa pratiocima, ubrzano napuštaju oblast oko jezgra i time šire radijus sa polovinom mase. Kako bi se skok u ukupnoj energiji, a samim time i apsolutna greška ukupne energije smanjili, autor predlaže uvođenje bolje implementacije rešavanja problema bliskih susreta, kao što je adaptivni vremenski korak.

Zanimljivo je da je odnos $\Delta E/E_0$, vremenskog koraka i ukupnog simuliranog vremena jako sličan kod prve dve simulacije, što jasno potvrđuje ispravnost BH algoritma korišćenog u prvoj simulaciji. Ovo potvrđuje i da je parametar K u prvoj simulaciji optimalan, kako je odnos efikasnosti i preciznosti povoljan.

Autor će se potruditi da ovaj rad dopuni opširnijim rezultatima n-body simulacija jata sa drugačijim odnosima m_t/m_m i n_t/n_m , na primer jata sa lakšim pratiocima.

Zaključak

Kako je simulirani vremenski period, kao i ukupan broj tela, u sve tri simulacije za ceo red veličine manji od prosečne starosti današnjih jata i od ukupnog broja tela u njima, pa čak i od prosečnog vremena relaksacije globulara (oko 10⁹ godina), iz prikazanih rezultata se ne može izvući kompletan zaključak. Stoga je zaključeno da simulirani vremenski period i ukupan broj simuliranih tela nije dovoljan da bi se efekti segregacije mase u potpunosti ispoljili.

Sa druge strane, može se reći da segregacija mase počinje da uzima maha u relativno ranoj fazi dinamičke evolucije i da ima velikog uticaja na strukturu i dalju evoluciju zbijenih zvezdanih jata, na šta jasno ukazuju rane promene u strukturi jata, kao i lako uočljivo grupisanje težih komponenti jata bliže jezgra u kasnijoj fazi.

BH algoritam je postigao odlične rezultate, uveliko smanjujući vreme integracije uz veoma dobru preciznost. Korišćena integraciona šema se takođe pokazala jako dobrom, kako je greška koju pravi izuzetno mala i, za duže vremenske intervale, sa minornom stopom priraštaja. Ipak, pokazalo se da implementacija rešenja bliskih prolaza nije dovoljno dobra da se nosi sa velikom gustinom tela blizu jezgra u poznoj fazi evolucije jata, te autor preporučuje uvođenje adaptivnih vremenskih koraka kao alternative.

Zahvalnost. Zahvaljujem se sledećim osobama bez čije pomoći ovaj projekat ne bi bio relizovan i koje su uveliko doprinele razvoju i ostvarenju cilja ovog projekta: pre svega mentoru ovog rada Marku Simonoviću, saradniku na programu astronomije, Mihailu Čubroviću, saradniku na programu astronomije, Vladisavu Jelisavčiću, mlađem saradniku, kao i Nikoli Božiću, rukovodiocu Programa astronomije u ISP.

Literatura

- Aarseth S. J., Henon M., Wielen R. 1974. A comparison of numerical methods for the study of star cluster dynamics. Astronomy and Astrophysics, 37: 183.
- Fregeau J. M., Joshi K. J., Portegies Zwart S. F., Rasio F. A. 2002. Mass segregation in globular clusters. *The Astrophysical Journal*, 570: 171.
- Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. 2007.

 Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, Third Edition.

 Cambridge University Press
- Barnes J., Hut P. 1986. A Hierarchical O(NlogN) Force-Calculation Algorithm. *Nature*, 324: 446.
- Benacquista M. J., 2006. Relativistic Binaries in Globular Clusters, *Living Reviews in Relativity*, 9 (2):
- Gnedin O. Y., Ostriker J. P. 1997. Destruction of the Galactic Globular Cluster System. The Astrophysical Journal, 474: 223.
- Salmon J. K., Warren M. S. 1993. Skeletons from the Treecode Closet. Journal of Computational Physics, 111 (1): 136

Dimitrije Radojević

Mass Segregation in Two-component Globular Clusters

The effects of mass segregation in two-component globular clusters were investigated by analyzing the data obtained from n-body simulations. Clusters consisted of two distinct populations of stars: background stars and tracers. The latter were extremely massive. The Barnes-hut treecode algorhitm was used in order to reduce integration time. Three simulation runs with different initial parameter sets were performed. The results show an expected grouping of heavier tracers around the core, as well as a migration of light objects towards the halo, which can be noticed easily in figures 3 and 4. It is conduced that the effects of mass segregation govern the dynamical evolution and the total stability of the cluster to a great extent, but also that the simulated time interval was not sufficient for those effects to be completely exhibited.



ZBORNIK RADOVA 2007