
Vladimir Gligorijević

Simulacija haosa u RLD kolu

Proučavana je pojava haosa u RLD (otpornik-zavojnica-dioda) kolu naizmenične struje. Pojava predhaotičnog i haotičnog stanja električnog kola, dokazana je kvalitativnim i kvantitativnim pokazateljima determinističkog haosa. Na osnovu njih, objašnjena su stanja električnog kola i određeni karakteristični fenomeni vezani za pojavu haosa u RLD kolu. Ovim radom pokazano je da i prosti električni sistemi mogu ispoljavati haotična svojstva, a korišćene metode mogu se koristiti i za proučavanje haosa u složenijim električnim sistemima.

Uvod

Deterministički haos označava neregularno, nepredvidivo ponašanje nekog sistema izazavano determinističkim (unapred određenim, tačno definisanim) procedurama, odnosno jednačinama (Belić 1990). Da bi se u nekom sistemu pojavili pokazatelji haosa, neophodno je da se taj sistem opisuje diferencijalnim jednačinama, najmanje drugog stepena, koje su obavezno nelinearne. Linearni sistemi nikada ne ispoljavaju haotična svojstva.

Rešenja ovakvih jednačina ne postoje u analitičkom obliku, već se one rešavaju određenim numeričkim metodama. To je ujedno i jedan od razloga zasto se teorija haosa nije razvila ranije, odnosno pojava ove teorije direktno je povezana i sa pojavom prvih računara koji su se koristili za numeričko rešavanje ovakvih jednačina (Gleick 2001).

Haos se može javiti u sistemima koji se opisuju autonomnim ili neautonomnim diferencijalnim jednačinama, a takođe se može javiti i kod iterativnih preslikavanja. U fizičkim sistemima haos se može javiti kod disipativnih sistema kod kojih obavezno mora da deluje neka spoljašnja pobuda i kod konzervativnih (hamiltonijanskih) sistema. Konkretno u ovom radu posmatrana je pojava haosa kod disipativnog (otpornik) sistema sa spoljašnjom pobudom (naponski generator).

Vladimir Gligorijević
(1988), Mihajlovac
(kod Smedereva),
Svetozara Markovića
50/A, učenik 3. razreda
Gimnazije u Smederevu

Prvu simulaciju haosa na računaru izvršio je meteorolog i matematičar Edvard Lorenc 1963.godine. Ispitujući jednačine dinamike fluida, a u cilju boljeg razumevanja procesa u atmosferi, on je redukovao Navije-Stoksove jednačine na tri obične diferencijalne jednačine prvog reda, koje je povezao u sistem i rešavao numerički. Lorenc je otkrio niz interesantnih osobina ovog sistema kao što su osetljivost na početne uslove, pojava čudnog atraktora..., koje će biti pokazane i u ovom projektu. Treba napomenuti da su radovi ovog meteorologa prvi radovi iz teorije haosa, a da se godina 1963. uzima kao godina nastanka teorije haosa. Inače fizika haosa spada u novije grane fizike.

Prva nelinearna električna kola kod kojih je proučavana pojava haosa su: kolo Leona Čue, kod koga je pojava haosa ne samo simulirana na računaru, već i pokazana eksperimentalno i dokazana matematički, zatim Van der Polov oscilator, koji predstavlja rednu vezu kondenzatora, zavojnice i nelinearnog otpornika priključenih na izvor sinusoidnog naponskog generatora, i na kraju RLD kolo čije će karakteristike biti prikazane u ovom radu.

Pri proučavanju haosa u električnim kolima treba voditi računa o dva uslova. Prvi je da u kolu mora postojati element sa nelinearnom U-I karakteristikom, a drugi je dat u obliku Poenkare-Bediksonove teoreme koja kaže da je za opisivanje haotičnog električnog kola potrebna najmanje jedna diferencijalna jednačina drugog reda sa spoljašnjom pobudom, ili sistem od tri autonomne difencijalne jednačine prvog reda (Belić 1990).

Cilj ovog rada je bio da se sa sto većom numeričkom tačnoscu odredi sto veći broj kvalitativnih i kvantitativnih pokazatelja haosa u RLD kolu i da se odrede kritični parametri pri kojima kolo sa ovakvom konfiguracijom može ispoljavati haotična svojstva.

Opis RLD kola

Šema električnog kola korišćenog u simulaciji prikazana je na slici 1. U ovom kolu dioda (D1N4002) ima ulogu elementa sa nelinearnom U-I karakteristikom. Dioda je poluprovodnički element koji se sastoji iz jednog dela koji je p-tipa i dela koji je n-tipa. Nelinearnost ovog kola potiče od same nelinearnosti p-n spoja. Simulacija datog električnog kola vršena je u programu PSpice.

Opšti oblik jednačine koja opisuje ovo kolo može se izvesti na sledeći način:

$$\begin{aligned} U_L + U_R + U_D &= U_0 \sin \omega t \\ L \frac{dI}{dt} + IR + U_D &= U_0 \sin \omega t \\ L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + U_D &= U_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

gde je $U_D(I)$ – nelinearna funkcija (eksponencijalna), odnosno inverzna funkcija funkcije naponsko-strujne karakteristike diode koja se analitički može predstaviti sledećom formulom:

$$I = I_z \left(e^{\frac{q U}{k T}} - 1 \right)$$

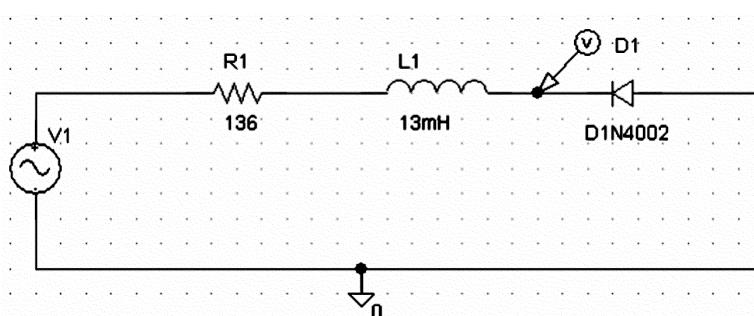
gde je I_z – inverzna struja zasićenja, q – nanelektrisanje elektrona, k – Boltzmanova konstanta, T – apsolutna temperatura.

Iako jednačina koja opisuje dato električno kolo zadovoljava gore pomenute uslove za haotičan sistem (jednačina drugog reda, ima nelinearni član, ima spoljašnju pobudu), kolo i dalje ne mora pokazivati haotične karakteristike. Odnosno električno kolo je u haotičnom režimu samo pri određenim vrednostima parametara date jednačine (Salom 1999). Za proučavanje pojave haosa dovoljno je da se samo jedan parametar menja a da ostali budu fiksirani. Konkretno u ovom slučaju, fiksirani parametri su: $R = 136 \Omega$, $L = 13 \text{ mH}$ i $\omega = 90 \text{ kHz}$, a kontrolisani parametar čija je vrednost menjana tokom simulacija, jeste amplitudni napon na generatoru (U_0).

U ovom projektu je uz pomoć raznih pokazatelja haosa pokazano za koje se vrednosti kontrolnog parametra kolo ponaša regularno, za koje vrednosti ono osciluje sa više perioda (kvaziperiodično stanje), a za koje vrednosti kontrolnog parametra se kolo nalazi u haotičnom stanju.

Metod

U programu PSpice sastavljena je šema električnog kola prikazana na slici 1. PSpice u sebi poseduje specijalne biblioteke za rešavanje nelinearnih električnih kola koristeći Newton-Raphsonovu metodu. Ova metoda se koristi za rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina koje opisuju data kola. Velika numerička tačnost simulacija, iskorišćena je i za izračunavanje određenih kvantitativnih pokazatelja determinističkog haosa.



Slika 1.
Šema RLD kola (u
PSpice-u) korišćena u
simulaciji

Figure 1.
Scheme of the RLD
circuit (made in
Pspice) used in the
simulation

Podešene su brojne vrednosti fiksiranih parametara. Vreme rada električnog kola iznosilo je 2 ms, ali su rezultati simulacije (naponi na diodi, otporniku, zavojnici, generatoru i struja kroz kolo) zapisivani u fajl nakon 1ms relaksacije električnog kola. Ovo vreme je potrebno da bi se ustalile oscilacije električnog kola, odnosno da bi u kolu nastupila rezonancija. Numeričke vrednost iz datog fajla učitavane su u Matlab i grafički obradivane. Pored grafičke obrade, Matlab je korišćen i za druge vrste numeričkih proračuna u ovom projektu.

Rezultati

Za različite vrednosti kontrolnog parametra prikazani su numerički rezultati u vidu dijagrama. Na osnovu njih i određenih kvantitativnih pokazatela haosa, izvršena je klasifikacija stanja u kojima se kolo nalazilo. Odnosno, određene su vrednosti kontrolnog parametra za koje se kolo nalazi u regularnom, predhaotičnom i haotičnom stanju.

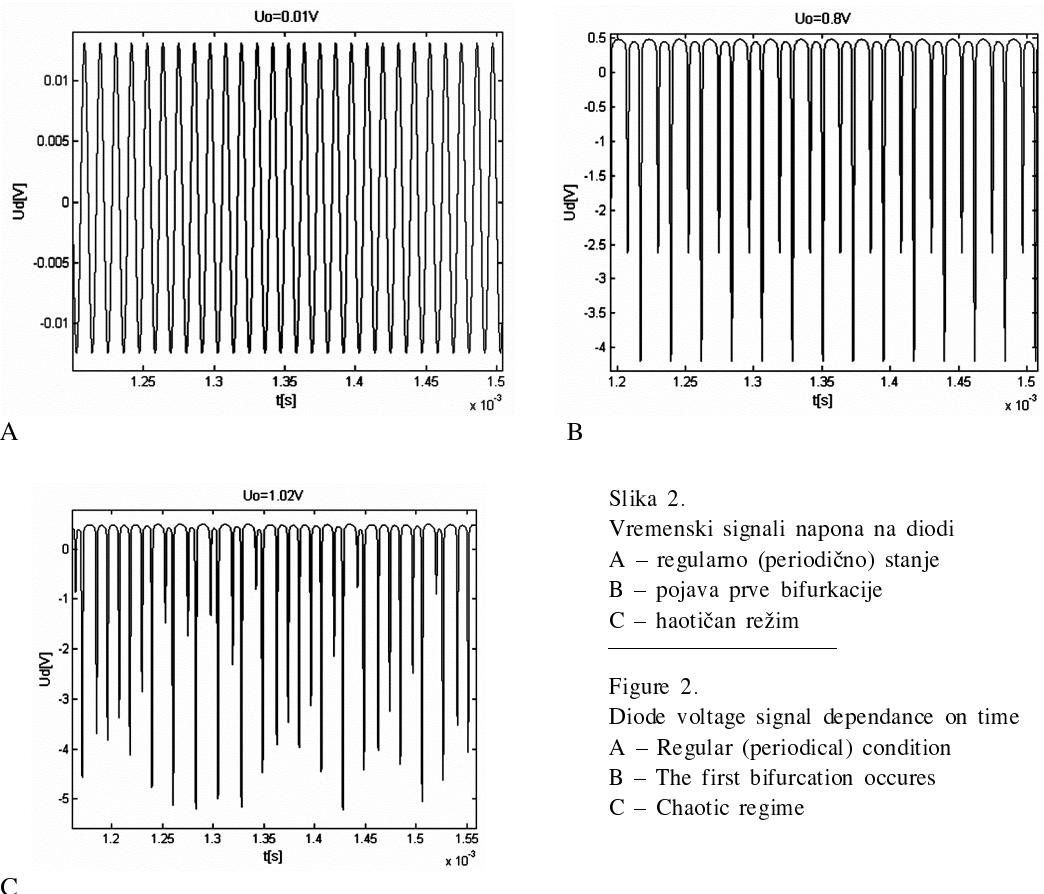
Fazni dijagrami i vremenski signali

Dato kolo je simulirano za vrednosti kontrolnog parametra u intervalu $U_0 \in [0.01, 3.3]$ V. Uočene su tri vrste stanja RLD kola koja se međusobno smenuju pri promeni kontrolnog parametra (tabela 1).

Tabela 1. Stanja u kojima se sistem nalazi u zavisnosti od kontrolnog parametra

rb	U_0 [V]	Stanje u kojem se sistem nalazi
1	0.01-0.08	Regуларно (jedna perioda)
2	0.08-0.28	bifurkacija (dve periode)
3	0.28-0.36	kvaziperiodično stanje (vise perioda)
4	0.36-0.74	regуларно (jedna perioda)
5	0.74-0.92	bifurkacija (dve periode)
6	0.92-1.00	kvaziperiodično stanje (vise perioda)
7	1.00-1.02	HAOS
8	1.02-1.24	kvaziperiodično stanje (vise perioda)
9	1.24-1.53	HAOS
10	1.53-2.22	regуларно (jedna perioda)
11	2.22-2.85	kvaziperiodično stanje (vise perioda)
12	2.85-3.22	HAOS

Vremenski signali i fazni dijagrami se koriste za opisivanje evolucije sistema u vremenu. Vremenski signali grafički predstavljaju vrednosti napona na pojedinim elementima datog kola (ili jačina struje kroz kolo) u

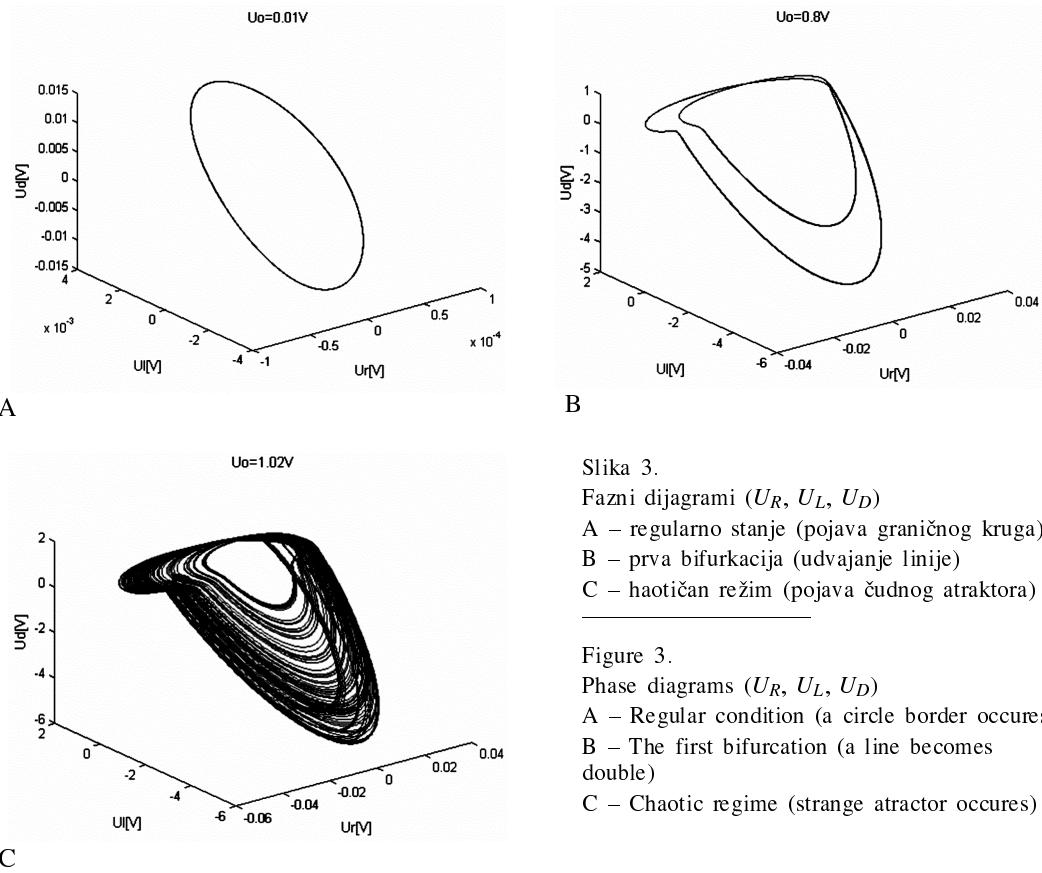


Slika 2.
Vremenski signali napona na diodi
A – regularno (periodično) stanje
B – pojava prve bifurkacije
C – haotičan režim

Figure 2.
Diode voltage signal dependance on time
A – Regular (periodical) condition
B – The first bifurcation occurs
C – Chaotic regime

zavisnosti od vremena. U ovom radu, za opisivanje datog električnog kola crtani su vremenski signali napona na diodi (slika 2) za karakteristične vrednosti kontrolnog parametra.

Fazni dijagrami (fazni portreti) predstavljaju skupove tačaka (ili samo jednu tačku) koje nam daju celokupnu informaciju stanja u kojem se sistem nalazi u jednom trenutku vremena. Za opisivanje nekog sistema mogu se koristiti 2D ili 3D fazni dijagrami, pri čemu trodimenzionalni fazni dijagrami prenose više informacija o stanju u kojem se sistem nalazi. Za opisivanje električnih kola, koordinate faznog dijagrama mogu biti jačina struje, naielktrisanje, napon...konkretno u ovom radu za crtanje faznih dijagrama korišćene su vrednosti napona na otporniku, zavojnici i diodi (U_R , U_L , U_D). Na slici 3 prikazani su fazni dijagrami za karakteristične vrednosti kontrolnog parametra. Na slici 3A prikazana je pojava graničnog ciklusa (kruga), odnosno sistem osciluje ustaljenom putanjom u faznom prostoru. Za takvo kretanje kaže se da je regularno. Izgled faznog prostora prikazanog na slici 3C odgovara haotičnom kretanju, odnosno to



Slika 3.

Fazni dijagrami (U_R , U_L , U_D)

A – regularno stanje (pojava graničnog kruga)

B – prva bifurkacija (udvajanje linije)

C – haotičan režim (pojava čudnog atraktora)

Figure 3.

Phase diagrams (U_R , U_L , U_D)

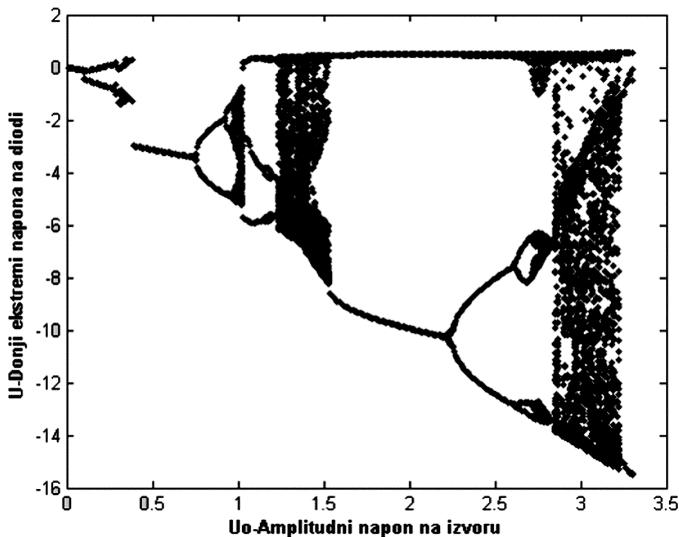
A – Regular condition (a circle border occurs)
B – The first bifurcation (a line becomes double)

C – Chaotic regime (strange attractor occurs)

je skup putanja koje su međusobno različite ali se grupišu, tj. konvergiraju ka određenom obliku i nikada se ne sekut. Takav oblik, zove se čudni atraktor i jedna od njegovih osnovnih i najzanimljivijih osobina je da je njegova geometrijska dimenzija necelobrojna (ovo će biti kasnije pokazano).

Bifurkacioni dijagram

Bifurkacije predstavljaju kvalitativne ili kvantitativne, topološke promene na atraktorima dinamičkih sistema koje se dešavaju tokom promene kontrolnog parametra. One se dešavaju pri prolasku kontrolnog parametra kroz određene (bifurkacione) vrednosti. Za određene vrednosti kontrolnog parametra sistem se nalazi u stabilnom stanju. Povećanjem energije sistema (povećanjem vrednosti kontrolnog parametra), pojavljuju se dva moguća (meta-stabilna) stanja datog sistema, kako energija sistema raste (povećanjem kontrolnog parametra) raste i broj meta-stabilnih stanja u kojima se sistem može naći (odnosno dolazi do bifurkacije tj. udvajanja stanja sistema), trenutak kada sistem dobija bezbroj (konačno mnogo, zbog



Slika 4.
Bifurkacioni dijagram
(grafik zavisnosti
donjih ekstrema
napona na diodi u
zavisnosti od
amplitudnog napona
na generatoru)

Figure 4.
Bifurcation diagram
(low extreme values
of the diode voltage
dependance on
amplitude of the
generator voltage)

numeričke simulacije) meta-stabilnih stanja, označava trenutak prelaska u haos. Konkretno, u RLD kolu ovaj proces se ponavlja, odnosno smenjuju se regularna, predhaotična i haotična stanja više puta (tabela 1).

Grafički prikaz udvajanja (bifurkacije) perioda zove se bifurkacioni dijagram i prikazan je na slici 4. Dijagram je dobijen tako što su vršene simulacije za vrednost kontrolnog parametra u intervalu $U_0 \in [0.01, 3.3]$ V, sa korakom od 0.01 V. Za svaku simulaciju određivani su donji ekstremi napona na diodi. Za jednu vrednost kontrolnog parametra na grafik su nanošene vrednosti donjih ekstremata napona na diodi.

Ova vrsta bifurkacije zove se viljuškasta bifurkacija. Treba napomenuti da su do sada u teoriji haosa objašnjene četiri vrste bifurkacija. Za ovu vrstu bifurkacije karakterističan je takozvani Fajgenbaumov scenario prelaska u haos (Belić 1990). Međutim, samo postojanje periodičnih prozora prikazanih na bifurkacionom dijagramu (slika 4) nije karakteristično za datu vrstu prelaska u haos. Odnosno, ovakve vrste bifurkacija nisu u potpunosti objašnjene (Belić 1990). Interesantno je napomenuti da u sistemu proučavanom u ovom projektu pored osnovnih prozora (kod kojih dolazi do udvostručavanja broja perioda), postoje i prozori kod kojih dolazi do utrostručavanja broja perioda, konkretno ovo se može videti uvećanjem dela bifurkacionog dijagrama u intervalu kontrolnog parametra $U_0 \in [1.02, 1.24]$ V.

Autokorelaciona funkcija

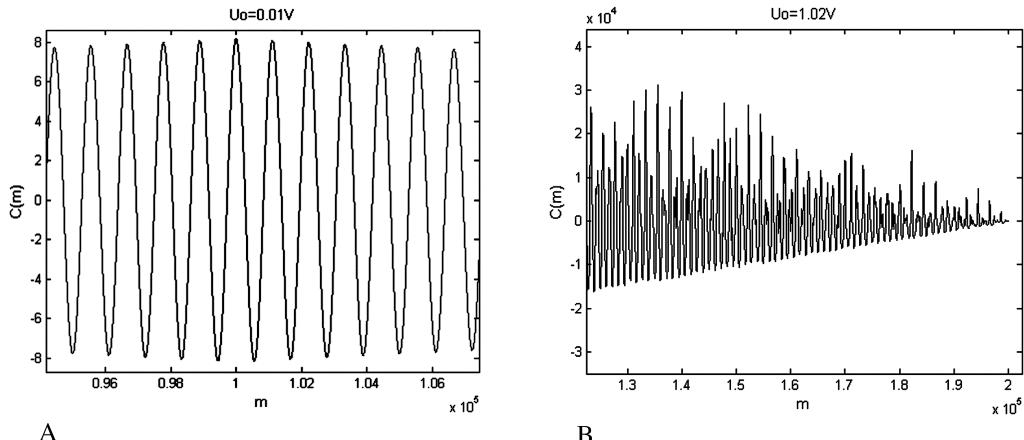
Jedan od kvalitativnih pokazatelja haotičnog stanja je autokorelaciona funkcija, definisana sledećom formulom:

$$C(m) = \int_0^{\infty} \bar{x}(t) \bar{x}(t+m) dt$$

$$\bar{x}(t) = x(t) - \bar{x}(0)$$

gde poslednji izraz predstavlja odstupanje od srednje vrednosti. Autokorelaciona funkcija meri korelaciju (sličnost) signala sa samim sobom u različitim vremenskim intervalima koji se međusobno razlikuju za parametar m . Pokazuje se da je autokorelacija oscilirajuća za regularna kretanja, dok za haotična kretanja (pri velikim vrednostima parametra m) ona brzo opada na nulu.

Obradom vremenskog signala napona na diodi (dobijenog simulacijom za karakteristične vrednosti kontrolnog parametra) dobijeni su graficki prikazani na slici 5.



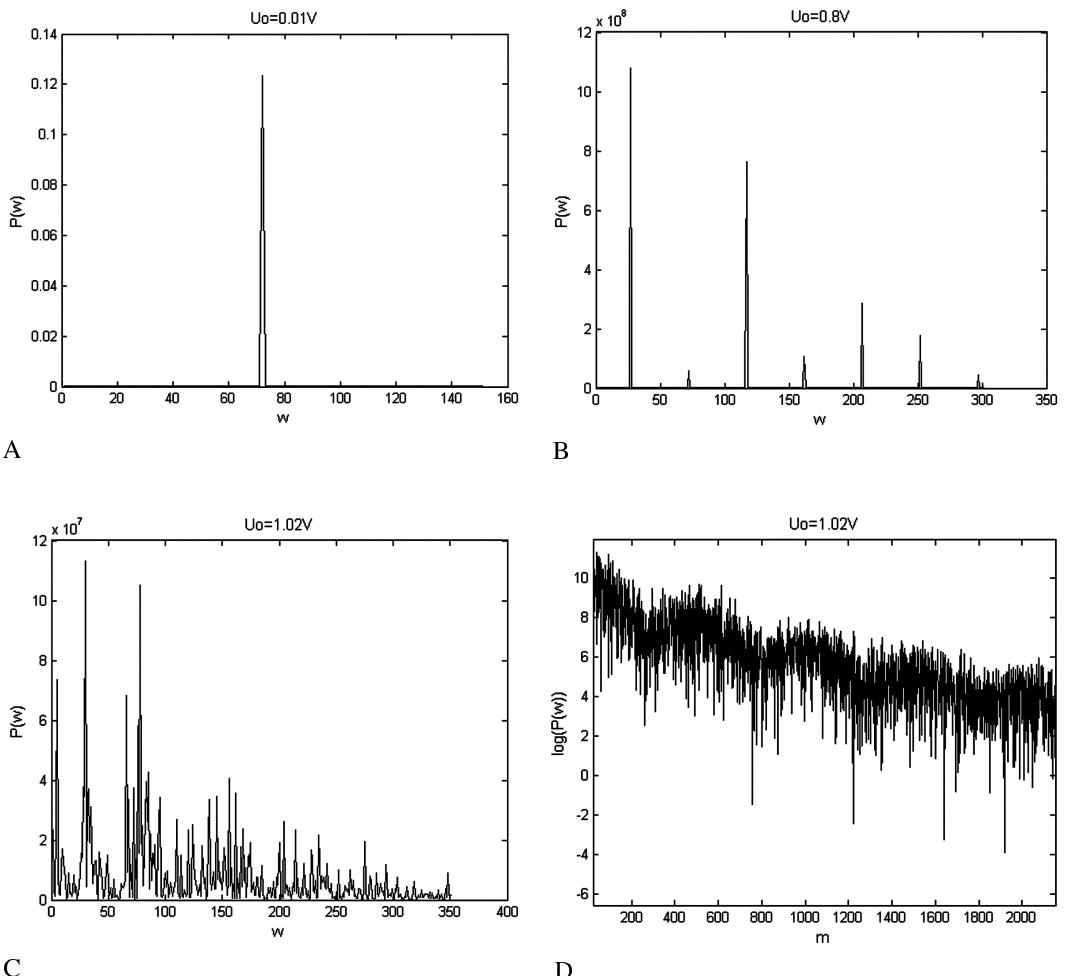
Spektar snage

Formalna definicija spektra snage je sledeća: spektar snage predstavlja kvadrat modula Furijeovog transforma duž trajektorije (vremenskog signala) (Belić 1990). Odnosno, matematički:

Na osnovu izgleda spektra može se videti u kom stanju se sistem nalazi. U spektru periodičnog kretanja (oscilovanja) uočava se samo jedna frekvencija (slika 6A). Kod pojave bifurkacije uočavaju se dve nesamerljive frekvencije (slika 6B) dok se kod kvaziperiodičnog stanja može uočiti više različitih frekvencija na kojima sistem osciluje. U haotičnom stanju u sistemu se javlja konačno mnogo frekvencija (zbog konačnog vremena simulacije) na kojima sistem osciluje (slika 6C), odnosno preovladava širok ravan kontinuum. Obradom vremenskog signala napona na diodi, dobijeni su grafici prikazani na slikama 6 (A, B, C). Na graficima se može uočiti da povećanjem kontrolnog parametra dolazi i do povećavanja šuma.

Slika 5.
Izgled autokorelacione funkcije
A – regularno stanje
(f-ja je oscilirajuća)
B – haotičan režim
(f-ja opada na nulu)

Figure 5.
The function of autocorrelation
A – regular condition
(the oscillating function)
B – chaotic regime
(the function descends to zero)



Slika 6. Spektri snage

- A – regularno stanje (pojava jedne frekvencije)
- B – prva bifurkacija (pojava dve nesamerljive frekvencije)
- C – haotičan režim (pojava kontinualnog spektra)
- D – zavisnost logaritma spektra snage od frekvencije (opadanje vrednosti $\log P(w)$ na nulu)

Figure 6. Power spectra

- A – Regular condition (one frequency occurs)
- B – The first bifurcation occurs (two non-comparable functions occur)
- C – Chaotic regime (continuous spectrum occurs)
- D – Logarithm of the power spectra dependency on frequency (descension of the $\log P(w)$ to zero)

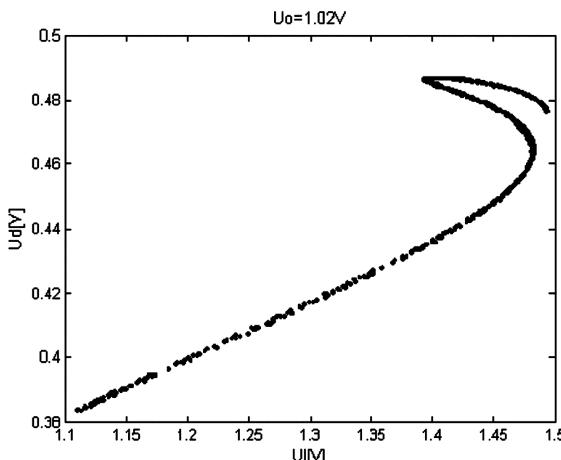
Interesantan je i grafik prikazan na slici 6D, koji se češće koristi za predstavljanje spektra haotičnog režima (Belić 1990). Odnosno na njemu se vidi kako vrednost logaritma spektra snage postepeno opada na nulu, što je još jedan od kvalitativnih pokazatelja determinističkog haosa.

Poenkareovi preseci

Još jedno sredstvo koje se koristi za kvalitativnu procenu haosa i uopšte u analizi dinamičkih sistema je Poenkareov presek. Objasnjenje Poenkareovog preseka dato je sledećom definicijom:

Posmatrajmo neku trajektoriju u m -dimenzionalnom faznom prostoru i presecimo je nekom ($m - 1$)-dimenzionalnom hiperpovrši koja je transverzalna na tok. Skup tačaka u preseku, pri čemu se u obzir uzimaju samo ulazne tačke trajektorije sa jedne strane površi, zove se Poenkareov presek (Belić 1990).

U našem slučaju, Poenkareov presek se dobija tako što se fazni dijagram preseče po proizvoljnoj osi u proizvoljnoj tački ravni koja je paralelna ravni koju obrazuju preostale dve ose i pri tome se beleže tačke na mestima u kojima trajektorija uvire u datu ravan.



Slika 7.
Izgled Poenkareovog
preseka za atraktor
prikazan na slici 3C

Figure 7.
Poincare intersection
for the attractor
shown in Figure 3C

Na osnovu izgleda Poenkareovog preseka možemo da uočimo u kom stanju se sistem nalazi. Ako posmatramo fazni dijagram prikazan na slici 3A, uočićemo da bi presek datog faznog dijagrama bila jedna tačka, odnosno granični ciklus generiše samo jednu tačku u Poenkareovom preseku. Ciklus udvojene periode (slika 3B) generiše dve tačke, a kvaziperiodično stanje generisće više tačaka.

U haotičnom režimu Poenkareov presek čini beskonačno mnogo tačaka (ovo je numerički neizvodljivo, zato što su simulacije vršene u konačnom vremenskom intervalu) koje se grupišu i obrazuju oblike koji se zovu fraktali. Najinteresantnija osobina fraktala je da oni imaju necelobrojnu dimenziju.

Poenkareov presek faznog dijagrama u haotičnom režimu (slika 3C) prikazan je na slici 7. Dobijen je tako što su iz niza tačaka, koje mogu

biti predstavljene na sledeći način T_n (U_{Rn} , U_{Ln} , U_{Dn}), uzimane druge dve koordinate tačke čija prva koordinata približno zadovoljava uslov $U_{Rn} \approx 0$. Odnosno, u ovom slučaju, Poenkareov presek se dobija u preseku trajektorije i ravni koja seče x -osu u tački nula i pri tome je paralelna sa druge dve ose. Treba napomenuti da je uslov $U_R = 0$ numerički neizvodljiv, odnosno napon na otporniku, u toku simulacije, nikada nije tačno jednak nuli iz razloga zato što je zapisivan na svaku 10^{-8} sekundu. Zato su u ovom slučaju uzimane tačke koje su najpribližnije ravni preseka, a ne na samoj ravni preseka. Međutim zbog malog odstupanja (reda 10^{-6}) ovo se čak i ne primećuje na Poenkareovom preseku.

Interesantno je napomenuti da dati Poenkareov presek ima vrlo finu slojevitu strukturu koja dokazuje njegovu geometrijsku složenost.

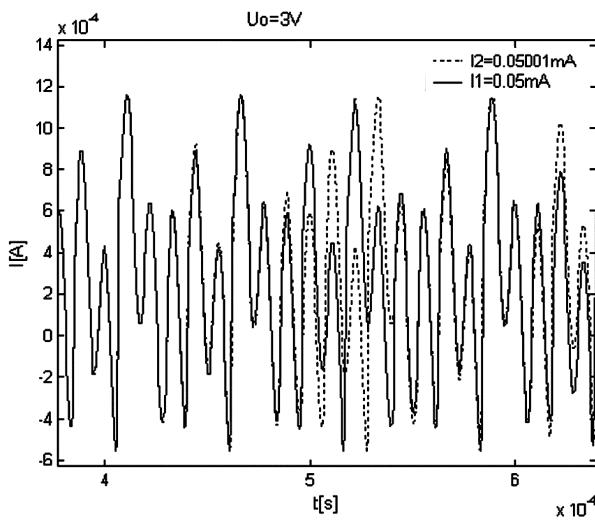
Ljapunovljevi eksponenti i 'efekat leptira'

Jedna od osnovnih karakteristika haotičnih sistema je izuzetna osetljivost na početne uslove. Meteorolog Edvard Lorenc je ovu pojavu nazvao "efekat leptira". Odnosno, ako se posmatraju dve bliske tačke (ili trajektorije) u faznom prostoru haotičnog sistema, uočiće se da početno rastojanje između njih tokom evolucije eksponencijalno raste da bi posle određenog vremena to rastojanje imalo proizvoljne vrednosti. Za disipativne sisteme situacija je obrnuta. Početno rastojanje između trajektorija u faznom prostoru, eksponencijalno će se smanjivati, odnosno trajektorije će se tokom evolucije približavati jedna drugoj.

Da bi se ispitala ova karakteristika haotičnog sistema vršene su simulacije za različite početne vrednosti jačine struje u RLD kolu. Razlika između početnih vrednosti bila je veoma mala. Pre pokretanja simulacije, kolo je podešeno tako da početna vrednost struje kroz zavojnicu iznosi $I_1 = 0.05$ mA, a u drugom slučaju $I_2 = 0.05001$ mA. Sa ovim početnim uslovima kolo je pušteno da osciluje. Posmatrana je promena početne razlike jačine struja (koja u početku iznosi: $\Delta I = I_2 - I_1 = 10^{-8}$ A) u zavisnosti od vremena za različite vrednosti kontrolnog parametra RLD kola. Na osnovu tih rezultata, kvalitativno je utvrđeno u kom se stanju kolo nalazi, odnosno da li je u regularnom ili haotičnom stanju.

Interesantno je pokazati izglede vremenskih signala jačina struja kroz kolo (za istu vrednost kontrolnog parametra) sa početnim uslovima koji se veoma malo razlikuju ($\Delta I = 10^{-8}$ A). Ti vremenski signali prikazani su na slici 8. Može se uočiti da se zbog male početne razlike ove dve linije u početku poklapaju, da bi se posle 0.5 ms uočila razlika u oscilovanju električnog kola.

Promena te razlike se može bolje uočiti na dijagramima prikazanim na slici 9. Kada je kolo u regularnom stanju može se uočiti da se ta razlika sa vremenom smanjuje i da kasnije ima veoma male ustaljene vrednosti.



Slika 8.

Vremenski signal jačine struje kroz kolo koje je u haotičnom režimu za različite početne vrednosti (početne vrednosti se razlikuju za $\Delta I = 10^{-8}$ A).

Figure 8

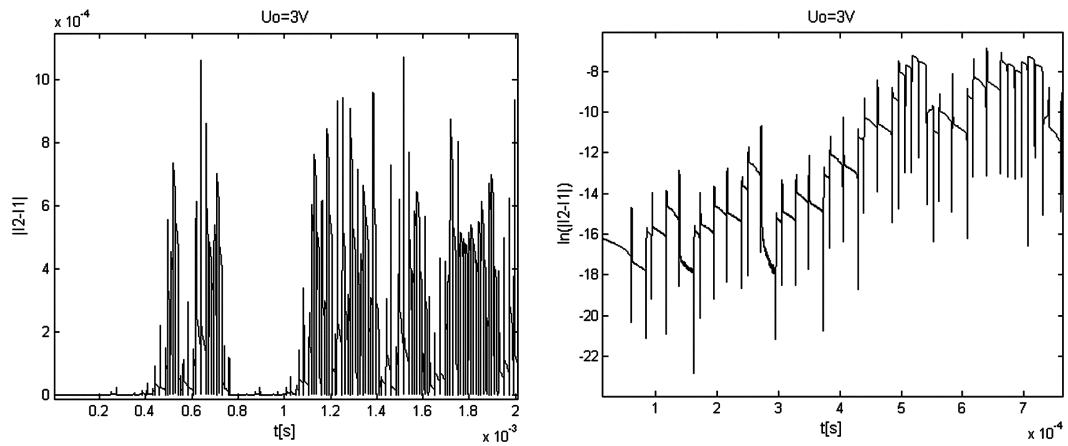
Time dependance of the current intensity in the circuit which is in chaotic regime, for different starting values (starting values differ for $\Delta I = 10^{-8}$ A)

Pokazuje se da je ta razlika srazmerna sa $\exp(tL)$, gde je t vreme, a L Ljapunovljev eksponent. U ovom slučaju usled smanjenja razlike, Ljapunovljev eksponent ima negativnu vrednost ($L < 0$).

Dijagram prikazan na slici 9A pokazuje promenu razlike struja u zavisnosti od vremena za kolo koje je u haotičnom režimu ($U_0 = 3$ V, tabela 1). Uočava se eksponencijalni rast razlike struja, pri čemu je Ljapunovljev eksponent u ovom slučaju pozitivan ($L > 0$). Zbog eksponencijalnog rasta razlike struja, razlike struja će u skorom vremenu postići velike vrednosti.

Slika 9. A – Zavisnost razlike vrednosti jačine struja od vremena (haotičan režim)
B – Zavisnost logaritma razlike vrednosti jačine struja od vremena (rast funkcije)

Figure 9. A – Difference of the current intensity values dependance on time (chaotic regime)
B – Logarithmic difference of the current intensity values dependance on time



A

B

nencijalne prirode povećanja razlike vrednosti jačina struja, često se za kvalitativno izučavanje haotičnih sistema koristi dijagram prikazan na slici 9B. Na njemu se može uočiti da kada je kolo u haotičnom režimu vrednost logaritma razlike struja raste.

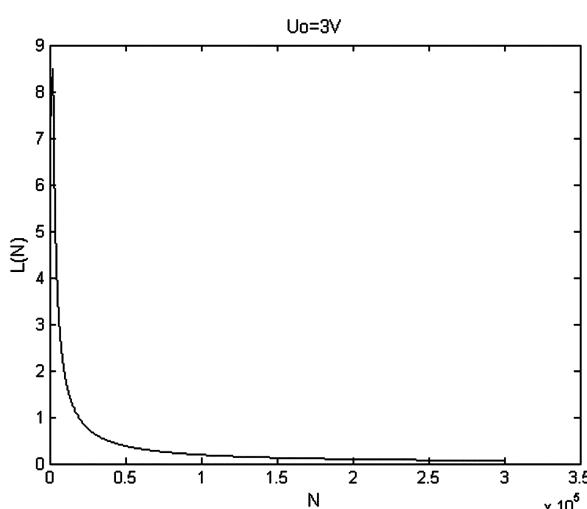
Na osnovu znaka Ljapunovljevog eksponenta može se uočiti da li sistem u haotičnom ili nehaotičnom stanju, a na osnovu kvantitativne vrednosti tog eksponenta, može se odrediti haotičnost sistema. Odnosno, Ljapunovljev eksponent je mera haotičnosti nekog sistema (što je eksponent veći to je sistem haotičniji, tj. brzina gubljenja predvidljivosti sistema je veća). Prava definicija Ljapunovljevog eksponenta (primenjena za naš slučaj) može se objasniti na sledeći način:

Ljapunovljev eksponent (L -eksponent) meri razdvajanje dveju bliskih početnih tačaka tokom vremena (iteracija). Ukoliko se početno rastojanje menja po zakonu $\Delta I \exp(NL)$, gde je N broj primenjenih iteracija (u našem slučaju to je ukupno vreme rada simulacije podjeljeno sa korakom simulacije), a ΔI početna razlika između tačaka (u našem slučaju razlika između početnih vrednosti jačina el. struje), onda je po definiciji Ljapunovljev eksponent dat formulama:

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \frac{\Delta I_i}{\Delta I}$$

$$L = \lim_{N \rightarrow \infty} L_N$$

gde je L_N – vrednost Ljapunovljevog eksponenta u zavisnosti od broja iteracija, a ΔI_i – pojedinačna vrednost razlike el. struja tokom vremena rada



Slika 10.
Zavisnost
Ljapunovljevog
eksponenta od broja
iteracija N . Kada N
postane dovoljno
veliko vrednost
eksponenta se
ustaljuje na određenu
vrednost

Figure 10.
Value of the
Lyapunov exponent
dependance on
number of iterations
 N . When N becomes
big enough, the value
of the exponent is
stabilized on a
certain value.

simulacije (tokom iteracija). Na osnovu ove definicije računati su Ljapunovljevi eksponenti za haotični i nehaotični rezim RLD kola. Na slici 10 je prikazan grafik zavisnosti $L_N(N)$.

Za vrednost kontrolnog parametra $U_0 = 0.8$ V vrednost L-eksponenta je negativna i iznosi $L = -0.1949$, dok je za vrednost $U_0 = 3$ V $L = 0.06388$ (pored gore navedene formule, ova vrednost se može očitati i sa grafika na slici 10).

U tabeli 1 može se uočiti da postoje tri intervala kontrolnog parametra za čije vrednosti se pojavljuje haos u oscilovanju električnog kola. Za proizvoljne vrednosti kontrolnih parametara iz datih intervala izračunati su L – eksponenti i oni iznose: $L_1 = 0.06813$ ($U_0 = 1.02$ V); $L_2 = 0.05851$ ($U_0 = 1.4$ V); $L_3 = 0.06388$ ($U_0 = 3$ V).

Interesantno je još napomenuti da ukoliko se posmatra dugovremensko ponašanje sistema u haotičnom režimu za bliske početne uslove može se uočiti naizmenično razdvajanje i skupljanje trajektorija vremenskog signala. Takođe treba napomenuti da je ovo najizražajnije u intervalu kontrolnog prametra $U_0 \in [1.00, 1.02]$ V, odnosno kod prve pojave haosa, a može se uočiti i za vrednost napona $U_0 = 3$ V. Ova pojava pokazana je na dijagramu prikazanom na slici 9A. Dijagram pokazuje razliku struja u zavisnosti od vremena za duži vremenski period. Na njemu se uočavaju naizmenične smene rasta razlike jačina struje. Povećanjem vremena ove smene su sve češće. Za ovu pojavu nije pronađeno objašnjenje.

Necelobrojne dimenzije atraktora

Za kvantitativno dokazivanje pojave haosa pored L-eksponenata koriste se i necelobrojne dimenzije. One predstavljaju jedan vid kvantitativne mere čudnih atraktora. Necelobrojne dimenzije računate su za čudne atraktore prikazan na slici 8. Ovde će biti definisane i odredene tri vrste dimenzija koje karakterišu čudne atraktore i to su:

1. D_f – geometrijska (metrička, fraktalna, Hausdorfova) dimenzija
2. D_i – informaciona dimenzija
3. D_c – korelaciona dimenzija

Posmatrajmo neki atraktor uronjen u m-dimenzionalni fazni prostor. Neka je $\{x_i | i = 1, 2, \dots, N\}$ niz tačaka duž neke trajektorije na atraktoru (N – jako veliko). Izdelimo prostor u m-dimenzionalne ćelije veličine l^m (l – rezolucija). Neka je $M(l)$ ukupan broj ćelija koje sadrže neku tačku iz niza $\{x_i\}$, i neka je $p_k = N_k/N$, gde je N_k broj tačaka koje su upale u ćeliju k tokom vremena posmatranja (p_k – prirodna mera ćelije). Geometrijska dimenzija definiše se formulom:

$$D_f = - \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln M(l)}{\ln l},$$

a informaciona dimenzija:

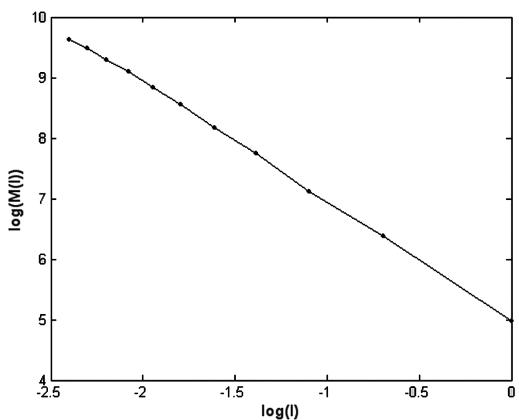
$$D_i = - \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I(l)}{\ln l},$$

$$M(l)$$

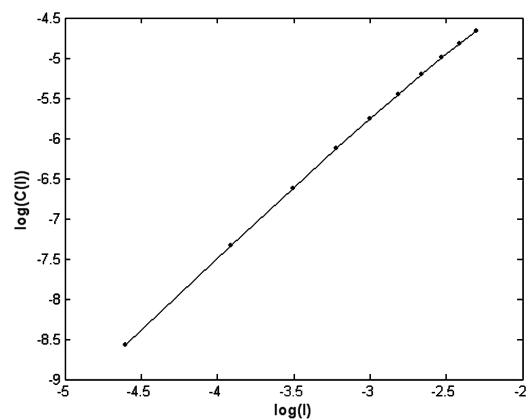
gde je $I(l) = - \sum_{i=1}^M p_i \ln p_i$ – informacioni kapacitet. A korelaciona dimenzija:

$$D_f = - \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln C(l)}{\ln l}$$

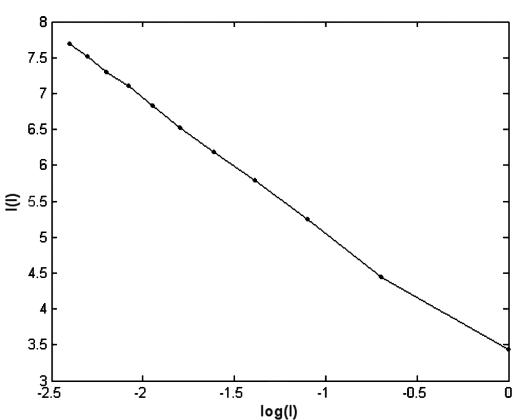
gde $C(l)$ predstavlja korelacioni integral, koji broji koliko je parova tačaka na atraktoru na međusobnim rastojanjima $|x_i - x_j|$ manjim od l :



A



B



C

Slika 11.

- A – određivanje fraktalne dimenzije
- B – određivanje korelacione dimenzije
- C – određivanje informacione dimenzije

Figure 11.

- Finding the dimension of the attractor
- A – Finding the fractal dimension
- B – Finding the correlation dimension
- C – Finding of the information dimension

$$C(l) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \theta(l - |x_i - x_j|)$$

gde je θ Hevisajdova jedinična funkcija (Belić 1990).

Na osnovu numeričkih vrednosti koordinata tačaka čudnog atraktora prikazanog na slici 3C za različite vrednosti rezolucije l crtani su grafici zavisnosti: $\ln M(l)$ u funkciji od $\ln l$, $I(l)$ u funkciji od $\ln l$ i $\ln C(l)$ u funkciji od $\ln l$. Na osnovu njih redom su određene fraktalna, informaciona i korelaciona dimenzija. Ti grafici su prikazani na slici 11. Određivanjem odgovarajućih koeficijenata sa priloženih grafika dobijaju se sledeće vrednosti: $D_f = 1.9567$, $D_i = 1.8145$, $D_c = 1.6999$.

Korisnost različitih dimenzija ogleda se u tome što su one invarijante dinamičkih sistema i njihovih atraktora, koje se ne menjaju tokom bilo kakvih glatkih transformacija u faznom prostoru. To su nepromenljive kvantitativne karakteristike haotičnih sistema.

Treba još napomenuti da je fraktalna dimenzija manja od dva što znači da se čudni atraktor prikazan na slici 3C može smestiti i u dvodimenzionalnom prostoru. Odnosno za opisivanje stanja električnog kola mogu se koristiti npr. samo struja kroz kolo i napon na jednom elementu.

Zaključak

Na osnovu dobijenih rezultata potvrđena je pojava haosa u RLD kolu. Dobijeni rezultati se slažu sa već do sada objašnjеним pojавама u RLD kolu (Belić 1990). Nije pronađeno objašnjenje pojave naizmeničnog razmicanja i približavanja trajektorija vremenskog signala u haotičnom režimu za dugovremensko posmatranje. Ovaj fenomen može biti tema nekog drugog naučnog rada. Takođe se može raditi i na objašnjenju vrste bifurkacija koje se javljaju kod RLD kola. Ovaj projekat zbog svoje opširnosti i nekih neobjašnjivih rezultata otvara prostor za druga dalja istraživanja. Prednost ovog rada ogleda se u velikoj numeričkoj tačnosti PSpice-a koji je omogućavao i izračunavanje određenih kvantitativnih pokazatelja determinističkog haosa, koji se veoma teško dobijaju.

Literatura

Belić M. 1990. *Deterministički haos*. Beograd: Institut za fiziku, Sveske fizičkih nauka

Gleick J. 2001. *Haos*. Beograd: Narodna knjiga

Etinski M., Šarkić T. 1999. Istraživanje haosa u električnom kolu.
Petničke sveske, 49: 116.

Salom S. 1999 Haos pri pobuđenom i prigušenom kretanju fizičkog klatna. *Petničke sveske*, 49: 55.

- Zvičer Đ. 1999. Farktali i haos. Nepublikovani diplomski rad. Prirodnomatematički fakultet u Novom Sadu
- Michael B., Stephen D. 1986. *Chaotic Dynamics and fractals*. Academic press.
- Brad A., Stephan L. 2006. *Chaotic circuit and encryption*. Neurophysics Lab
- Mican R., Diane W. 2003. *Chaotic dynamics of RLD oscillator*. Biophysical Measurment Lab

Vladimir Gligorijević

Simulation of Chaos in RLD Circuit

The chaos in RLD electronic AC circuit was explored. The pre-chaotic and chaotic state of the electronic circuit was proven by qualitative and quantitative indicators of deterministic chaos. Based on these results, different states of RLD circuit are explained and phenomena characteristic for the presence of chaos in it are determined. We proved that even the simple electronic systems may indicate chaotic behaviour, and methods used in this project are yet to be used in more complicated electronic circuits.

