

Modeliranje, simulacija i implementacija samobalansirajućeg robota

Cilj ovog rada je modeliranje, simulacija i izrada samobalansirajućeg robota. Samobalansirajući robot je mehanički sistem za kretanje po ravnim površinama sa kojima je u kontaktu preko para točkova na jednoj osovini. Osnovna funkcionalnost ovakvog robota je samostalno održavanje centra mase iznad ose rotacije. Problem stabilizacije posmatran je kao problem stabilizacije inverznog fizičkog klatna, dok je kao pogonski motor korišćen DC motor. U simulaciji, ugao otklona robota od pravca gravitacije, meren je na četiri različita načina: pomoću žiroskopa, pomoću akcelerometra, pomoću žiroskopa i akcelerometra zajedno u kombinaciji sa komplementarnim filterom i pomoću žiroskopa i akcelerometra zajedno u kombinaciji sa Kalmanovim filterom. U hardverskoj implementaciji korišćeni su žiroskop i akcelerometar u kombinaciji sa komplementarnim filterom. U simulaciji su korišćene dve vrste stabilizatora: PID i LQR, dok je u hardveru implementiran samo PID regulator. Upoređene su performanse stabilizacije sa ovim stabilizatorima u odnosu na način estimacije ugla. U simulaciji je dobijeno da je stabilizacija nemoguća ukoliko se koristi samo žiroskop, dok je stabilizacija u ostalim slučajevima moguća. Najbolje performanse su dobijene ako se ugao otklona meri pomoću žiroskopa i akcelerometra zajedno u kombinaciji sa Kalmanovim filterom. U hardveru nije bilo moguće izvršiti potpunu stabilizaciju sistema zbog velikog slobodnog hoda motora, jer bi se robot stalno izvodio iz ravnotežnog položaja.

Uvod

Samobalansirajući robot je primer stabilizacije dinamičkog sistema. Ovaj sistem se često naziva i problem stabilizacije inverznog klatna. Ovakvi roboti već su pravljani za komercijalnu upotrebu, a neki od njih su: Segway, Emiew i nBot. Takođe, neki od njih, kao što je Segway, mogu se koristiti i za prevoz čoveka. Cilj ovog rada je da se modelira, simulira i implementira samobalansirajući robot.

Modeliranje i simulacija služe kako bi se evaluirale performanse i osobine regulatora i filtera merenja sa senzora. Simulacija robota zahteva postojanje dinamičkog modela ovog robota, odnosno model koji predstavlja fizičke osobine robota. Na levoj strani slike 1 je predstavljen metod izrade simulacije. Kako bi robot mogao da se stabilizuje, potrebno je prvo izmeriti ugao pod kojim je otklonjen, a nakon toga primeniti silu u vidu okretanja točkova koja se opire daljem naginjanju u stranu.

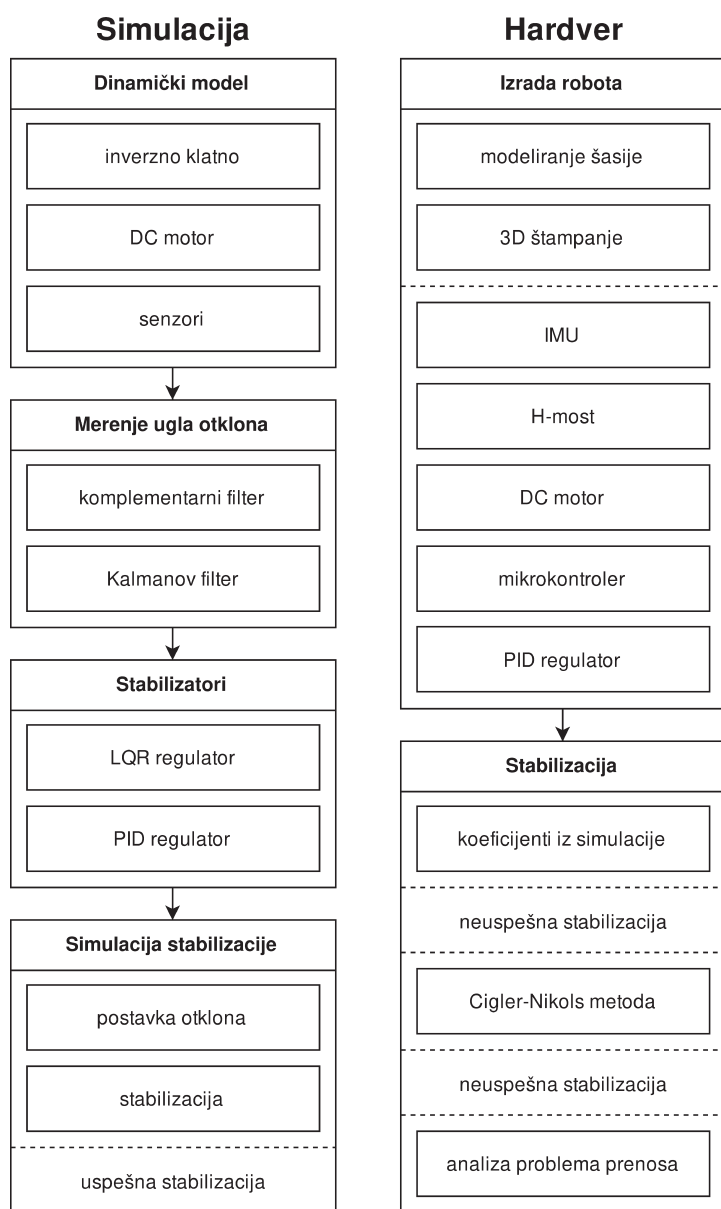
U ovom radu, za dobijanje ugla korišćeni su akcelerometar i žiroskop samostalno, kao i u kombinaciji upotrebom komplementarnog i Kalmanovog filtra. Pred početak simulacije, robot se postavlja da stoji pod određenim uglom, a nakon toga se simulacija pokreće. Tokom simulacije, jedan od dva poređena regulatora – PID i LQR, je korišćen da se robot stabilizuje.

Za izradu hardverskog robota modelirani su delovi šasije, koji se zatim štampaju na 3D štampaču. Nakon toga se sastavlja robot i implementira se PID kontroler na mikrokontroleru (desna strana slike 1). Koeficijenti PID stabilizatora se dobijaju na dva načina – iz simulacije i Cigler-Nikols metodom.

Filip Parag (1999), Subotica, Eugena Kumičića 20/2, učenik 3. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu

Milomir Stefanović (1999), Kragujevac, Obilićeva 4, učenik 3. razreda Prve kragujevačke gimnazije

MENTOR: Vuk Vukomanović, student Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu



Slika 1. Blok šema sistema za stabilizaciju robota

Figure 1. Block diagram of the robot stabilization system

Da bi se dobio ugao otklona pomoću žiroskopa mora se integraliti ugaona brzina koja se očitava u svakom trenutku, a sa tom ugaonom brzinom integrali se i njena greška, što će za posledicu veoma brzo imati netačnu vrednost te se izvodi prva hipoteza da stabilizacija samo pomoću žiroskopa nije moguća. Koristeći samo akcelerometar stabilizacija je moguća, što predstavlja drugu hipotezu. Pošto se očekuje da se

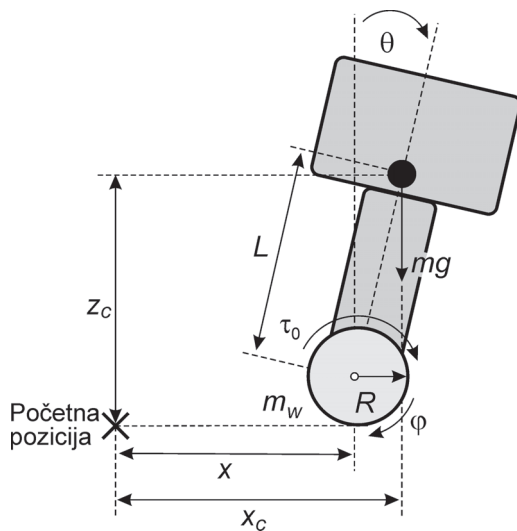
korišćenjem akcelerometra i žiroskopa zajedno pomoću komplemetarnog filtera, kao i Kalmanovog filtera, dobija još precizniji podatak o uglu (Krsmanović i Polovina 2010), komplemetarni filter i Kalmanov filter bi trebali da daju manja odstupanja od realne vrednosti u odnosu samo na akcelerometar, što je treća hipoteza. Pošto je Kalmanov filter matematički definisan kao optimalni filter po datom kriterijumu, četvrta

hipoteza se odnosi na to da će odstupanja kod Kalmanovog filtera biti manja nego kod komplementarnog filtera. Što se tiče samih stabilizatora, LQR je takođe, kao i Kalmanov filter, definisan kao optimalni stabilizator te se očekuje da će preskok kao i period stabilizacije sa ovim stabilizatorom biti manji nego sa PID regulatorom. U hardveru bi trebalo da se dođe do identičnih zaključaka kao i u simulaciji, što je šesta hipoteza.

Modeliranje sistema

Dinamika robota

Kako bismo ispitali dinamiku sistema moramo definisati koordinate delova robota koje ćemo posmatrati kao relevantne (slika 2). To su koordinate centra mase (x_c, z_c) i centra točka x , zatim ugaon između horizontale i prave koja spaja centar mase i centar točka (θ) i ugaoni pomeraj točka (φ). Parametri koje ćemo koristiti za opisivanje gore pomenutih parametara su: masa tela robota m , masa točka m_w , poluprečnik točka R , rastojanje između centra mase i centra točka L , ugaoni moment τ , moment inercije tela I i moment inercije točka I_w .



Slika 2. Fizički model samobalansirajućeg robota

Figure 2. Physical model of a self-balancing robot with starting position marked

Koristeći Lagranžov metod za opisivanje dinamike sistema možemo izraziti $x, x_c, z_c, \dot{x}, \dot{x}_c$ i \dot{z}_c kao:

$$\begin{aligned} x &= R\varphi, \\ x_c &= R\varphi + L\sin\theta, \\ z_c &= R + L\cos\theta, \\ \dot{x} &= R\dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{x}_c = R\dot{\varphi} + L\dot{\theta}\cos\theta, \quad (2)$$

$$\dot{z}_c = -L\dot{\theta}\sin\theta. \quad (3)$$

Dalje, možemo definisati potencijalnu energiju (čija je vrednost 0 u vertikalnom položaju) i kinetičku energiju kao:

$$\begin{aligned} E_p &= mg(R + L\cos\theta) - mg(R + L) = \\ &= mgL(\cos\theta - 1), \end{aligned}$$

$$E_k = \frac{m_w\dot{x}^2}{2} + \frac{I_w\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m\dot{x}_c^2}{2} + \frac{m\dot{z}_c^2}{2} + \frac{I\dot{\theta}^2}{2}. \quad (4)$$

Ubacivši jednačine (1), (2) i (3) u jednačinu (4) dobija se:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \left(\dot{\varphi}^2 (I_w + m_w R^2 + m R^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2mRL\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \dot{\theta}^2 (I + mL^2) \right). \end{aligned}$$

Suma kinetičke i potencijalne energije predstavlja ukupnu energiju, tj. mehaničku energiju dok razlika ove dve fizičke veličine daje Lagranžovu energiju koja se definiše kao razlika kinetičke i potencijalne energije, te je Lagranževa energija Λ :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{2} \left(\dot{\varphi}^2 (I_w + m_w R^2 + m R^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2mRL\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \dot{\theta}^2 (I + mL^2) \right) - mgL(\cos\theta - 1). \end{aligned}$$

Sada možemo izvesti jednačine dinamike za φ i θ .

1. φ :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\varphi}} = (I_w + m_w R^2 + m R^2) \dot{\varphi} + mRL\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} = (I_w + m_w R^2 + m R^2) \ddot{\varphi} +$$

$$mRL\ddot{\theta}\cos\theta = mRL\sin\theta\dot{\theta}^2 = \mu.$$

2. θ :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} = mRL \cos \theta \dot{\phi} + (I + mL^2) \dot{\theta},$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\theta}} = -mRL \sin \theta \dot{\phi} + mgL \sin \theta,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} = (I + mL^2) \ddot{\theta} +$$

$$+ mRL \cos \theta \ddot{\phi} - mRL \sin \theta = \eta.$$

Veličine μ i η su ukupni ugaoni momenti koji utiču na ϕ i θ .

Ovo se u matricnom obliku može zapisati kao:

$$\begin{bmatrix} I_w + (m_w + m)R^2 & mRL \cos \theta \\ mRL \cos \theta & 1 + mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -mRL \sin \theta \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mgL \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Sada je potrebno da ukupne momente izrazimo preko poznatih parametara. Ukupni momenat dobijamo superpozicijom obrtnog momenta i momenata statičkog i dinamičkog trenja:

$$\mu = M_0 - M_s - M_d = M_0 - \beta_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) - \beta_d \dot{\phi},$$

$$\eta = -M_0 + M_s = M_0 + \beta_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}),$$

gde je β_s koeficijent statičkog trenja, a β_d - dinamičkog.

Ove relacije se mogu zapisati i matricno i to kao:

$$\begin{bmatrix} \mu \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} M_0 - \begin{bmatrix} \beta_s + \beta_d & -\beta_s \\ -\beta_s & \beta_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}.$$

Linearizacija. Kako bi mogli dalje da rešavamo ovaj sistem moramo da uvedemo neke aproksimacije koje će da važe za ovaj sistem u opsegu za koji kreiramo kontroler pa ćemo reći da je θ jako mali ugao pa će da važi da je $\theta = 0$, $\dot{\phi} = 0$, $\cos \theta = 1$ a $\sin \theta = \theta$. Pa onda važi sledeće:

$$\begin{bmatrix} I_w + (m_w + m)R^2 & mRL \\ mRL & 1 + mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_s + \beta_d & -\beta_s \\ -\beta_s & \beta_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mgL \end{bmatrix} \theta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} M_0.$$

Neka matrice sa koeficijentima se redom zovu A , B , C i D , tada je:

$$A \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + C \theta = D M_0.$$

Ovo je matricna jednačina koja opisuje ceo sistem.

Računanje centra mase. Ako celog robota predstavimo kao sistem od dva tela: šipke dužine L_1 i mase m_1 - telo robota i cilindra dužine L_2 i mase m_2 glava robota, onda se centar mase nalazi na rastojanju:

$$L = \frac{L_2}{3} + \frac{L_1 + L_2}{2} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

te je ukupan moment inercije robota:

$$I = m_1 \left(\frac{L_1}{2} + L_2 \right)^2 + \frac{1}{12} m_2 L_2^2.$$

State-space model sistema. Neka je:

$$P = -A^{-1}C, Q = -A^{-1}B \text{ i } R = -A^{-1}D,$$

tada važi da je:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ P(1,1) & P(1,2) & Q(1,1) & Q(1,2) \\ P(2,1) & P(2,2) & Q(2,1) & Q(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R(1,1) \\ R(2,1) \end{bmatrix} M_0,$$

$$y = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}.$$

U skraćenom obliku ovo možemo zapisati kao:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = E \mathbf{x} + F \cdot M_0,$$

$$y = G \mathbf{x}.$$

Dinamika motora

Kako vidimo iz opisa dinamike robota, kao ulaz u sistem potrebno je dati ugaoni momenat

(M_0) kako bi se izračunao nagibni ugao robota u tom trenutku. Pošto nije moguće da mikrokontroleru „kažemo“ da motor pravi toliki moment, moramo da izračunamo kako ugaoni momenat zavisi od napona koji možemo da saopštimo mikrokontroleru, pa zato moramo da izračunamo zavisnost ugaone brzine motora (ugaona brzina je direktno srazmerna ugaonom momentu ($M_0 = \omega I_w$) od napona koji se dovodi na motor.

Motor proizvodi momenat M_0 ako se na njega dovodi napon V_0 , taj momenat je direktno srazmieran struji i koja prolazi kroz motor pa važi:

$$M_0 = k \cdot i. \quad (5)$$

Pošto se rotor motora okreće u magnetnom polju koji stvaraju kalemovi, u motoru jednosmerne struje nastaje kontra elektromotorna sila, koja je direktno srazmerna ugaonoj brzini okretanja rotora motora i koeficijenta samoindukcije, pa važi:

$$V_i = k_i \cdot \omega. \quad (6)$$

Motor ćemo modelirati kao rednu vezu otpornika i induktora, te se može napisati II Krihofov zakon za to kolo kao:

$$\varepsilon - Ri - L \frac{di}{dt} = 0. \quad (7)$$

U jednačini kretanja motora trenje osovine motora se aproksimira kao linearna funkcija ugaone brzine motora. Njutnov zakon kretanja govori da je suma svih momenata koji deluju na osovinu motora direktno srazmerna inercijalnom opterećenju namotaja motora I_r što se može predstaviti kao:

$$\sum M = M_0 - \mu\omega - I_m = I_r \cdot \omega, \quad (8)$$

gde je M_0 moment koji motor a I_m moment inercije motora.

Ubacivanjem jednačina 6 i 5 u jednačine 7 i 8 dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{R}{L} i + \frac{k_i}{L} \omega + \frac{\varepsilon}{L}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{k}{I_r} i - \frac{k_e}{I_r} \omega + \frac{I_m}{I_r}. \end{aligned}$$

Za potrebe modeliranja motora u ovom slučaju moguće je induktivnost, kao i silu trenja, zanemariti, te je onda jednačina koja opisuje rad ovog motora:

$$\dot{\omega} = \frac{k k_i}{I_r R} \omega + \frac{k \varepsilon - I_m R}{I_r R}. \quad (9)$$

U jednačini 9 ulaz u sistem predstavlja napon ε , a izlaz ugaona brzina ω .

Senzor

Inicijalni problem pri konstruisanju robota je da se odredi ugao pod kojim je on nagnut; to se može uraditi pomoću akcelometra, žiroskopa ili oba senzora zajedno.

Akcelometar. Akcelometar je elektromehanički senzor koji se koristi za merenje ubrzanja. On meri ubrzanje u zavisnosti od sila koje deluju na njega. Te sile mogu biti statičke i dinamičke. Primer statičke sile je gravitaciona sila, a dinamičke mogu biti prouzrokovane kretanjem robota ili samim vibracijama akcelometra. Prostim trigonometrijskim transformacijama od ubrzanja koje akcelometar meri dobija se ugao pod kojim se nalazi robot. Problem kod ovog senzora je sto će male vibracije akcelometra prouzrokovati grešku merenja ovakvog ugla ali se ova greška može otkloniti primenom filtera niskih učestalosti kod implementacije sa komplemetarnim filterom ili pomoću Kalmanovog filtera. Ovaj filter propušta samo niske frekvencije dok one više frekvencije odstranjuje. Na ovaj način se smanjuje uticaj vibracija akcelometra i samim tim su preciznija očitavanja.

Žiroskop. Žiroskop je senzor koji se koristi za merenje ugaone brzine. Ugao za koji je robot otklonjen dobija se numeričkom integracijom izmerene ugaone brzine. Zbog same integracije kod žiroskopa javlja se problem akumuliranja greške i offseta. Na primer, dešava se da žiroskop za nultu vrednost ugaone brzine pokazuje neku nenultu vrednost, jer senzor ima offset, a ovaj problem utiče na akumulaciju greške numeričkom integracijom. Ovaj problem može se delimično rešiti primenom filtera visokih učestalosti kod implemetacije sa komplemetarnim filterom ili Kalmanovim filterom. Ovaj filter radi suprotnom logikom od prethodno pomenutog filtera, tj. on propušta samo visoke frekvencije dok one niske odstranjuje. Na ovaj način postižu se preciznija merenja sa žiroskopa.

Modeliranje senzora

Kako mikroelektromehanički senzori (MEMS) korišćenju ovom projektu nisu idealni,

za verodostojnu simulaciju je potrebno modelirati senzore sa njihovim fizičkim osobinama.

Karakteristike greške

Stalna greška. Stalna greška je greška koja je prisutna sve vreme i raste linearno. Ova greška se može izračunati merenjem prosečne vrednosti merenja u dužem vremenskom intervalu kada na senzor ne deluju spoljašnje sile. Gravitacionu silu je nemoguće izbeći, pa je zato tačna orijentacija senzora veoma važna za njeno oduzimanje od signala.

Termo-mehanički šum. Termo-mehanička interferencija se javlja kao nuspojava termo-električnog šuma koji osciluje na mnogo većoj frekvenciji od frekvencije odabiranja senzora; posledica je da se u merenju javlja šum koji se javlja u vidu slučajne šetnje.

Treptajni šum. Zbog treperenje u električnim delovima, treptajni šum se javlja na niskim frekvencijama spektra izmerenog signala u vidu belog šuma.

Temperaturni efekti. Ukoliko se temperatura menja tokom rada senzora, dolazi do širenja i skupljanja komponenti, što direktno utiče na fluktuacije greške senzora. zavisnost greške od temperature se razlikuje kod senzora i uglavnom nije linearna.

Ova vrsta greške je zanemarena u simulaciji jer sistem nije predviđen da se kreće u prostoru promenljive temperature.

Projektovanje upravljanja

Filtiri

U praksi se radi dobijanja preciznijih rezultata koriste različite vrste filtera za kombinaciju izmerenih vrednosti u cilju dobijanja što preciznijeg željenog podatka – u našem slučaju ugla otklona.

Komplementarni filter. Komplementarni filter (Krsmanović i Polovina 2010) je vrsta filtra koja kombinuje merenja više senzora u unapred određenim proporcijama. Prvo se računaju uglovi koji daju samo akcelerometar i žiroskop. Trenutni ugao akcelerometra je:

$$\theta_{\text{accel}} = \arccos \frac{\text{merenje}_{\text{accel}}}{mg}$$

Dok je trenutni ugao žiroskopa:

$$\theta_{\text{gyro}}(t) = (\theta_{\text{gyro}}(t-1) + \text{merenje}_{\text{gyro}}(t)) dt.$$

Kada se izračuna potrebno je podatke sa akcelerometra filtrirati filterom niskih učestalosti, odnosno podatke sa žiroskopa filterom visokih učestalosti.

Niskofrekventni filter. Upotreba ovog filtra ima za cilj da propusti samo niskofrekventne promene signala sa senzora na izlaz filtera, a da one visokofrekventne ukloni. Na primer, ukoliko je ugao koji očitava akcelerometar nula i naglo skoči na deset, filter bi trebao da reaguje na sledeći način: izlaz filtra ne pokazuje odmah ugao od deset stepeni, već se taj ugao postepeno povećava, a ako se objekat duže vremena zadrži u tom položaju, na izlazu filtra će posle nekog vremena biti deset stepeni. Samo dugotrajne promene signala se propagiraju na izlaz filtra. Nedostatak ovog filtra je kašnjenje koje se javlja zbog postepene, a ne skokovite promene izlaza.

Jednačina niskofrekventnog filtera je:

$$\varphi(t+1) = k\varphi(1-k)\theta(t+1),$$

gde je φ ugao, koji se dobija na izlazu niskofrekventnog filtra, θ ugao koji se dobija sa akcelerometra i koji se dovodi na ulaz niskofrekventnog filtra i k konstanta niskofrekventnog filtra.

Visokofrekventni filter. Ovaj filter radi potpuno suprotno od niskofrekventnog. Propušta visokofrekventne promene na izlaz, dok one niskofrekventne eliminiše. Uloga visokofrekventnog filtra je da otkloni proces akumulacije greške usled integracije, odnosno da minimizuje ovaj efekat. Jednačina ovog filtera je:

$$\varphi(t+1) = k(\varphi_{\text{gyro}}(t-1) + \text{merenje}_{\text{gyro}}(t)) dt,$$

gde je k koeficijent visokofrekventnog filtra, φ izlaz visokofrekventnog filtera a sa „merenje” je označeno očitavanje ugla sa žiroskopa.

Nakon što se dobiju uglovi koji daju akcelerometar (θ_{accel}) i žiroskop (θ_{gyro}) ponaosob, dobijene vrednosti se sabere i podele sa 2 i tako dobijeni broj (θ) je izlaz komplementarnog filtera:

$$\theta = \frac{\theta_{\text{accel}} + \theta_{\text{gyro}}}{2}.$$

Kalmanov filter. Za razliku od komplementarnog filtera, Kalmanov filter za estimaciju ugla otklona koristi i dinamički model sistema.

Kalmanov filter ili linearno-kvadratni estimator ima veoma široku primenu u industriji vozila zbog mogućnosti da daje veoma precizne

estimacije ukoliko je dinamički model verodostojan fizičkom sistemu.

Algoritam filtesra je podeljen u dva povezana procesa. U procesu predviđanja se procenjuje trenutno stanje na osnovu dinamičkog modela predstavljenog matricom promene stanja A , kontrolnom matricom koja predstavlja promene stanja unete pokretanjem aktuatora i kontrolnim vektorom \vec{u}_n koji predstavlja trenutni signal aktuatora. Predviđeno trenutno stanje \vec{x}_p je:

$$\vec{x}_p = A\vec{x}_{n-1} + B\vec{u}_n,$$

gde je \vec{x}_{n-1} stanje sistema dobijeno u prethodnoj iteraciji algoritma. Početno stanje sistema, odnosno \vec{x}_0 u prvoj iteraciji, je očekivano stanje sistema pre pokretanja.

Pored estimacije stanja, u prvom procesu se procenjuje i kovarijansa predviđanja, odnosno mera greške predviđenog stanja. Kovarijansa predviđanja P_p je:

$$P_p = AP_{n-1}A^T + Q,$$

gde je P_{n-1} kovarijansa iz prethodne iteracije, a Q je procenjena greška kovarijanse procesa, odnosno greška u korelaciji između zadatog signala i pokretanja aktuatora. Ova greška predstavlja proklizavanje točkova ili prazan hod u prenosu momenta impulsa od motora do točkova.

Drugi proces algoritma uvodi merenja sa senzora. U prvom koraku se računa inovacija \tilde{y} koja predstavlja razliku predviđenog stanja i stanja dobijenog očitavanjem senzora. Izmerene vrednosti sa senzora predstavljaju vektor merenja \vec{z}_n , a opservaciona matrica H preslikava vektor stanja u vektor merenja. Inovacija je predstavljena kao:

$$\tilde{y} = \vec{z}_n - H\vec{x}_p.$$

Slično prvom procesu, računa se kovarijansa inovacije S koja predstavlja stvarnu grešku u odnosu na predviđanje:

$$S = HP_pH^T + R,$$

gde je R procenjena greška kovarijanse merenja.

Kalmanovo pojačanje je relativno pojačanje merenja i predviđenog trenutnog stanja i može se podešavati za dobijanje željenog učinka. Sa visokim pojačanjem, filter dodeljuje veću pouzdanost skorašnjim merenjima, a nisko pojačanje prvenstvo daje dinamičkom modelu. U ekstremnim slučajevima, pojačanje koje je blizu jedinice će imati veoma nagle promene u stanjima,

dok će pojačanje blizu nule imati mali šum, ali će stanje biti veoma inertno. Kalmanovo pojačanje se računa kao:

$$K = P_pH^TS^{-1}.$$

U poslednjem koraku se računa krajnja procena trenutnog stanja x_n :

$$\vec{x}_n = \vec{x}_p + K\tilde{y}$$

i ažurira se kovarijansa predviđanja:

$$P_n = (I - KH)P_p,$$

gde je I matrica identiteta.

U ovom projektu su korišćena dva senzora, akcelerometar i žiroskop, pa je vektor merenja:

$$\vec{z}_n = \begin{bmatrix} \theta_{\text{accel}} \\ \dot{\theta}_{\text{accel}} \\ \theta_{\text{gyro}} \\ \dot{\theta}_{\text{gyro}} \end{bmatrix}.$$

Kontrolni vektor je $\vec{u}_n = V_{\text{motor}}$ i predstavlja napon signala motora.

Opservaciona matrica je:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Procenjena greška kovarijanse procesa i procenjena greška kovarijanse merenja su:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

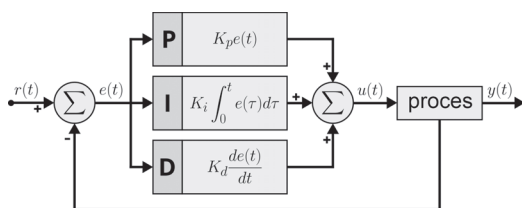
$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Početna vrednost matrice kovarijanse predviđanja je:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stabilizatori

PID. U trenutku kada robota izvedemo iz ravnotežnog položaja, on će pasti na stranu na koju je otklonjen, osim ako neka sila ne počne da deluje na robota u suprotnom smeru kako bi smanjila ugao otklona. Sila koja robota vraća u ravnotežni položaj je inercijalna sila izazvana radom motora, tj njegovim okretanjem točkova. Zatim je potrebno da se na neki način izračuna kako brzina koja treba da se preda motoru zavisi od ugla otkolna. Jedan od načina je da se koristi PID kontroler. PID kontroler se sastoji od tri posebna kontrolera: P (proporcijalni), I (integracioni) i D (derivacioni, odnosno izvodni) kontroler. Svaki od kontrolera prima grešku, tj. odstupanje trenutne vrednosti od željene vrednosti, a na izlazu daje napon koji se šalje na motor kako bi se zatvorila povratna sprega. Šema rada PID kontrolera prikazana je na slici 3.



Slika 3. Zatvoreni sistem upravljanja sa PID kontrolerom

Figure 3. Closed-loop control system with PID controller

Jednačina P kontrolera je: $V = K_p \cdot \text{error}$

Jednačina D kontrolera je: $V = K_d \cdot \frac{d \text{error}}{dt}$

Jednačina I kontrolera je: $V = K_I \cdot \sum \text{error}$

Samim tim jednačina PID kontrolera je:

$$V = K_p \cdot \text{error} + K_d \cdot \frac{d \text{error}}{dt} + K_I \cdot \sum \text{error}$$

Koeficijenti K_p , K_d i K_I mogu da se dobiju na više načina. Dva najpoznatija načina jesu posmatranje root locusa sistema i Cigler-Niklsonov metod. U ovom radu posmatran je root locusa sistema i dobijeno je da je $K_p = 15.3$, $K_I = 0.7$ i $K_D = 13$.

LQR. Teorija optimalne kontrole bavi se modeliranjem kontrolera tako da oni matematički

ispunjavaju idealne uslove za stabilizaciju jednog dinamičkog modela po datim instrukcijama. Sistem koji je opisan diferencijalnim jednačinama prvog reda i kod koga je funkcija greške kvadratna funkcija naziva se LQ problemom. Jedno od najpoznatijih rešenja ovog problema predstavlja LQR regulatorom, koji zatvara povratnu spregu po stanjima. Podešavanje regulatora koji reguliše neku mašinu ili proces zarad postizanja željene vrednosti vrši se tako da se minimizuje funkcija greške. Ona se može različito računati od slučaja do slučaja. Ako pokušavamo da dostignemo temperaturu od 100 K, a temperatura je 90 K, greška će biti 10 K, a ako pokušavamo da vidimo kako jedna prava fituje skup nekih tačaka, grešku ćemo računati kao sumu kvadrata odstupanja tačke od fitovane prave. U našem slučaju greška će biti ugao pod kojim je robot nagnut. Prednost LQR je to što se podešavaju parametri kontrolera, a ne sam kontroler, kao što je slučaju sa PIDom. Parametri LQR kontrolera su matrice Q i R na osnovu kojih se računa gain koji se naziva još i vektor K i onda se povratna sprega zatvara po formuli:

$$u = -Kx$$

gde je x vektor stanja sistema.

U ovom radu je:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hardverska konfiguracija robota

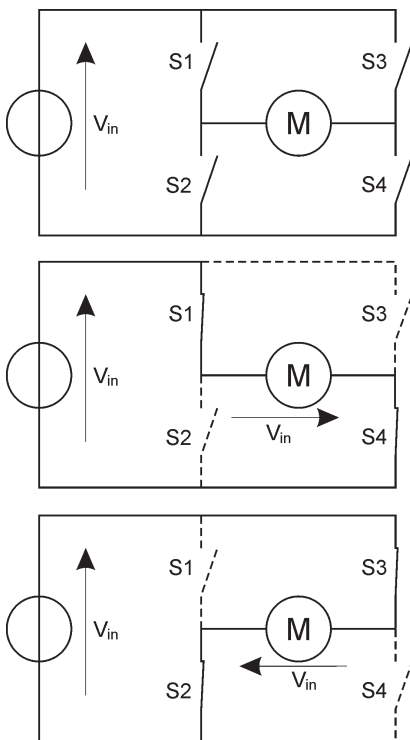
Sa slike 2 jasno se vidi da centar mase mora biti na većoj visini od motora, ali ne većoj od 10 cm, da masa robota bude manja od 0.5 kg i da otklonjeni ugao ne bude preveliki da bi važila aproksimacija (ne veći od 6 deg) (Ding *et al.* 2012) jer je onda moment sile zemljine teže toliko veliki da ga inercijalna sila, koju motori izazivaju ubrzanim kretanjem u smeru u kom je robot otklonjen, ne može stabilizovati. Ako sa označimo minimalni moment sile koji motori moraju „savladati” onda važi:

$$M = mg \cdot L \cdot \sin \theta = 0.05 \text{ Nm}.$$

Motori. Pošto imamo jedan motor, on treba da stvori moment sile od najmanje 0.05 Nm a takođe je potrebno je da ugaona brzina motora bude najmanje 400 obrtaja po minutu.

H most. H most je elektronsko kolo koje omogućuje kontrolu smera struje kroz elektromotor ili kroz neki drugi potrošač. Promenom smera struje kroz armaturu jednosmernog motora menja se smer rotacije njegove osovine. H most šematski možemo predstaviti kao na slici 4. Zatvaranjem dijagonalnog para 1-4 a otvaranjem digitalnog para 2-3 izaziva kretanje motora suprotno od smera kazaljke na satu, a otvaranjem digitalnog para 1-4 a zatvaranjem para 2-3 smer kretanja motora je u smeru kazaljke na satu.

IMU. Kako bismo imali podatak o ugaonom položaju robota ovaj ugao je potrebno izmeriti, u ovom slučaju pomoću inercijalno-meganičke jedinice (IMU). IMU na sebi ima 2 senzora: akcelerometar i žiroskop. Akcelerometar meri težinu, a žiroskop ugaonu brzinu po 3 ose. Fizičkim transformacijama ovih fizičkih veličina



Slika 4. H-most

Figure 4. H-bridge

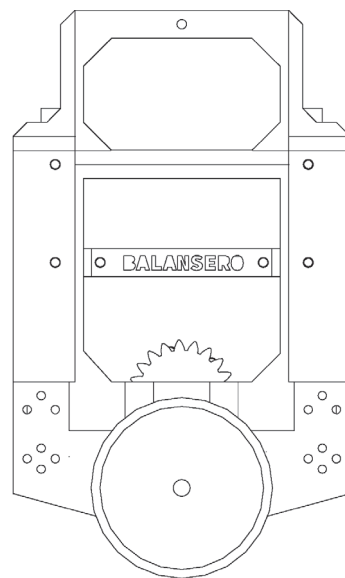
dobija se podatak o uglu otklona, što će biti objašnjeno kasnije. Komunikacija sa mikrokontrolerom vrši se preko UART protokola. IMU se nalazi na vrhu robota kako bi se postigla najbolja rezolucija za merenje nagibnog ugla robota.

Mikrokontroler. Za očitavanje podataka sa senzora i kontrole brzine motora potrebno je koristiti mikrokontroler, mali programabilni računar. Mikrokontroler koji je korišćen u ovom slučaju je Arduino Mega. Takođe za ovaj mikrokontroler mogu biti vezani i još neki LCD ekrani, prekidači, LED diode kao indikatori promene, a sve u zavisnosti od trenutne potrebe. U ovom slučaju postavljene su 3 potencijometra kako bi se podešavali koeficijenti PID stabilizatora.

3D model robota

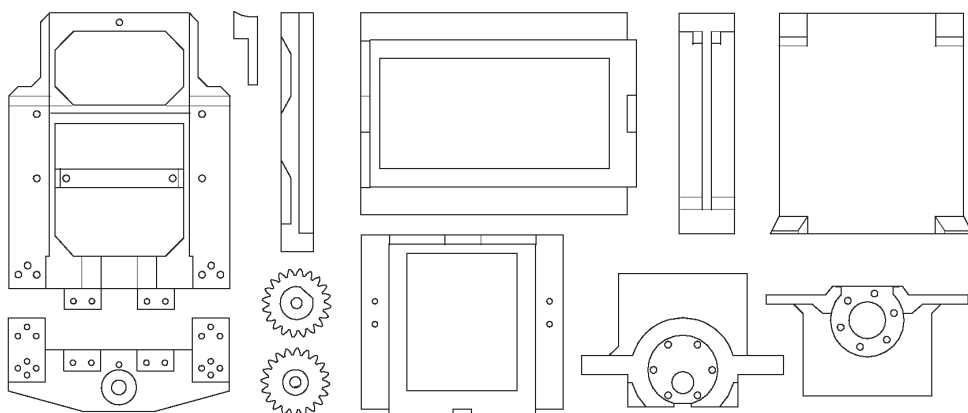
Šasija robota je modelirana na računaru, u programu SektchUp Pro, kako bi robot bio što više simetričan. Svaka nesimetričnost po osi normalnoj na osu otklona dovodi do dodatnih odstupanja od inverznog klatna, što znači da robot teži ka padanju u jednu stranu. Sve komponente, uključujući i DC motor, se svojim centrima mase nalaze u osi osovine točkova (slika 5).

Fizička ograničenja štampača. Kako je korišćeni 3D štampač ograničen po horizontalnim



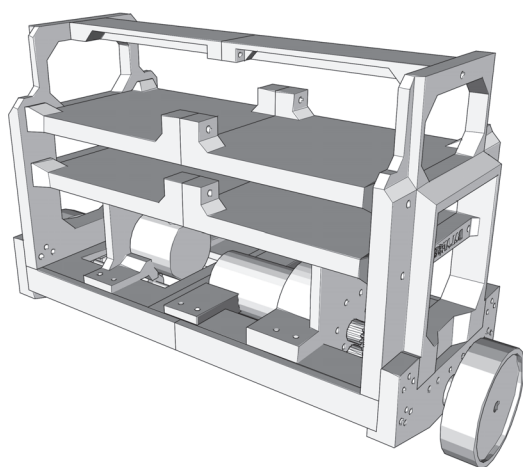
Slika 5. Bočni prikaz robota

Slika 5. Side view of the robot



Slika 6. Gornji prikaz štampanih delova šasije

Figure 6. Top view of all chassis parts



Slika 7. 3D prikaz sklopljenog robota

Figure 7. 3D render of the assembled robot

osama na 20 cm i po vertikalnoj osi na 18 cm, potrebno je bilo izraditi sve horizontalne potporne ploče iz dva dela. Vrsta materijala korišćena za izradu šasije je polilaktična kiselina, poznatija kao PLA. Svi delovi šasije su napravljeni tako da se međusobno pričvrste pomoću M3 šrafova čiji je prečnih oko 2.9 mm.

Delovi šasije. Na slici 6 se mogu videti modeli svih delova šasije. Ispunjenost PLA filamentom je kod držača bila 15%, a kod potpornih ploča 10%. Spoljašnjost je sadržala tri sloja filameta. Nakon sklapanja, šasija teži oko pola kilograma i može se videti na slici 7.

Točkovi i aktuatori. Jednosmerni motor, koji se koristi kao aktuator, je povezan na točkove preko menjačke kutije. Na ovaj način gubi se na trenutačnosti i brzine prenosa, ali se dobija na slabijim trzajima osovine i manjoj potrebnoj snazi motora. Točkovi su čvrsto povezani metalnom osovinom, a šasija motora je povezana sa osovinom pomoću dva kuglična ležaja.

Napajanje. Na robotu se nalaze dve baterije: jedna baterija na 15 V sa mogućnošću dostavljanja visokih struja i druga baterija tipa PP3 na 9 V. Aktuator je indirektno povezan na mikrokontroler preko h-mosta i koristi bateriju od 15 V za napajanje. Mikrokontroler je preko DC-DC konvertora povezan na bateriju od 9 V na ulazni naponski pin.

Rezultati

U ovom radu ispitivano je kako preskok i peiod stabilizacije zavise od primenjenog regulatora, kao i kako vrsta senzora utiče na stabilizaciju. Za svaki od regulatora prikazano je po četiri odskočna odziva i to:

1. Odskočni odziv kada se za podatak o uglu koristi samo žiroskop

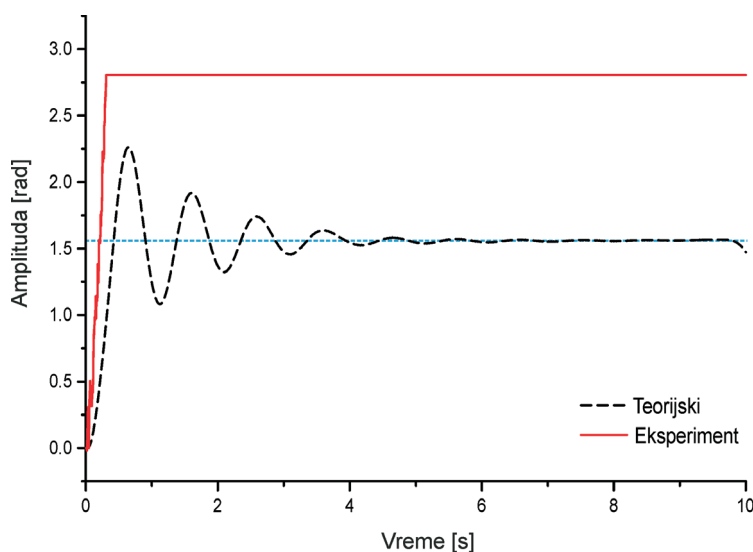
2. Odskočni odziv kada se za podatak o uglu koristi samo akcelerometar
3. Odskočni odziv kada se za podatak o uglu koriste žiroskop i akcelerometar zajedno sa komplementarnim filterom
4. Odskočni odziv kada se za podatak o uglu koriste žiroskop i akcelerometar zajedno sa Kalmanovim filterom

Simulacija

Na slikama 8 i 9 prikazani su odskočni odzivi sistema kada se koristi samo žiroskop. Može se

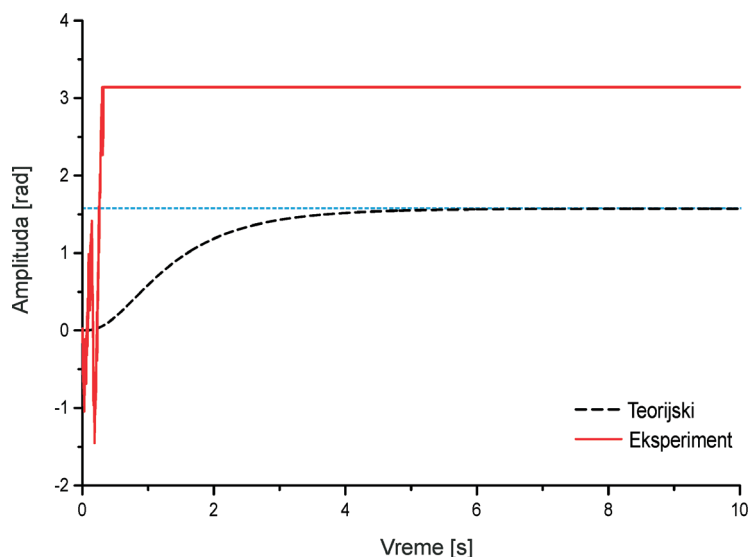
primetiti da žiroskop jako brzo integriše grešku merenja što za rezultat ima da će žiroskop posle jedne sekunde pokazivati vrednosti preko π te samim tim stabilizacija sistema u ovom slučaju nije moguća bez obzira na vrstu regulatora.

Na slikama 10 i 11 prikazani su odskočni odzivi sistema kada se koristi samo akcelerometar. Može se primetiti da u ovom slučaju signal ima neku konstantnu grešku u odnosu na tačnu vrednost, kao i da je tačna vrednost zašumljena više nego u slučajevima kada se koristi neki od filtera, što je u skladu sa hipotezom. Konstantna greška se može ukloniti kalibrisanjem akcelerometra pa



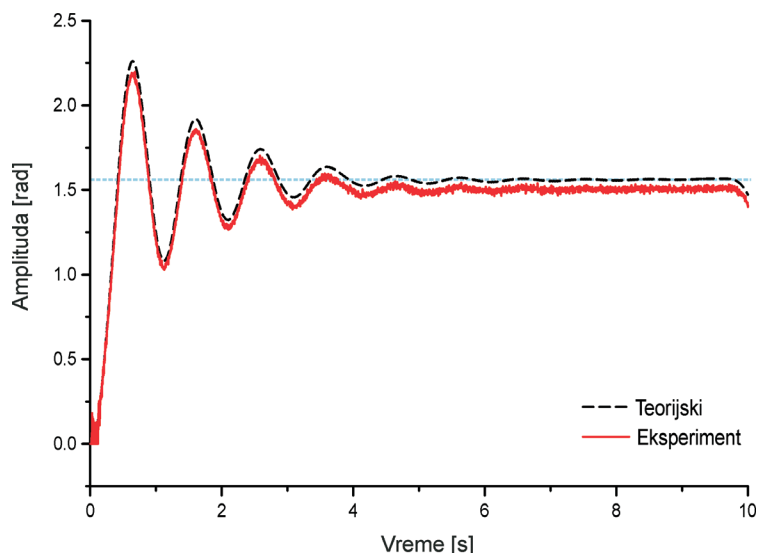
Slika 8. Zavisnost nagiba robota od vremena sa PID regulatorom i žiroskopom u simulaciji

Figure 8. Robot deflection as a function of time using PID controller and gyroscope inside the simulation
Dashed line – theoretical
Full line – experimental



Slika 9. Zavisnost nagiba robota od vremena sa LQR regulatorom i žiroskopom u simulaciji

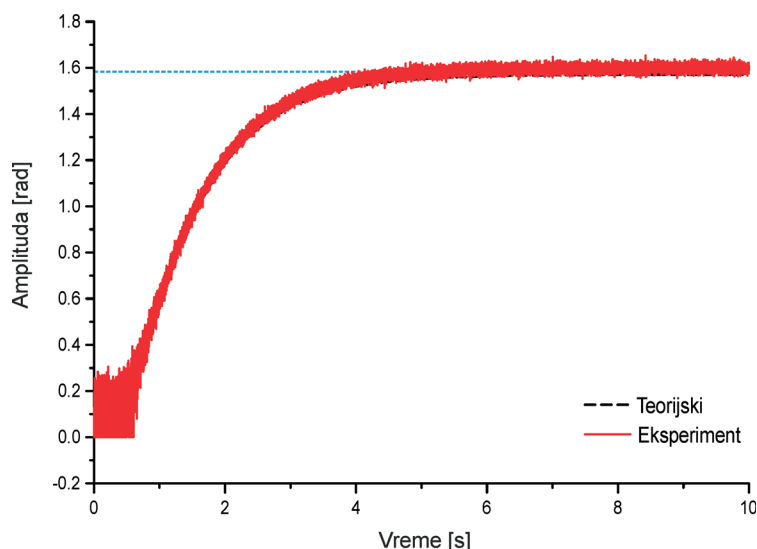
Figure 9. Robot deflection as a function of time using LQR controller and gyroscope inside the simulation
Dashed line – theoretical
Full line – experimental



Slika 10. Zavisnost nagiba robota od vremena sa PID regulatorom i akcelerometrom u simulaciji

Figure 10. Robot deflection as a function of time using PID controller and accelerometer inside the simulation

Dashed line – theoretical
Full line – experimental



Slika 11. Zavisnost nagiba robota od vremena sa LQR regulatorom i akcelerometrom u simulaciji

Figure 11. Robot deflection as a function of time using LQR controller and accelerometer inside the simulation

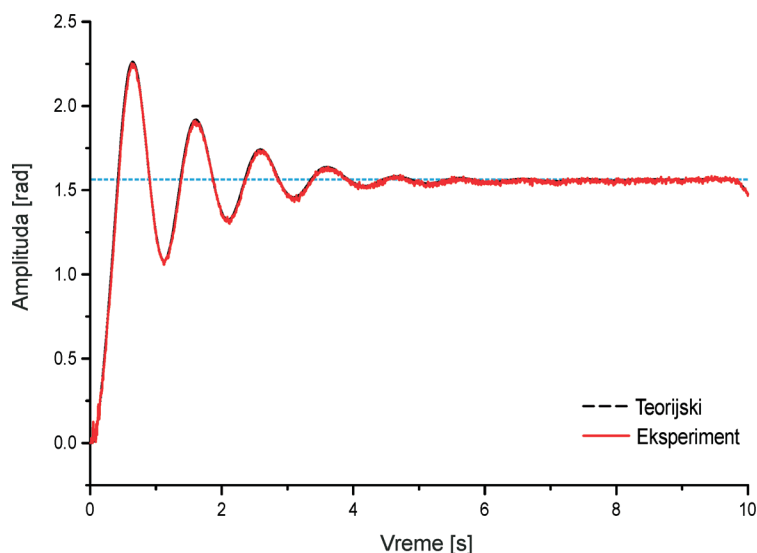
Dashed line – theoretical
Full line – experimental

se ovaj efekat može zanemariti. Takođe, primećuje se da do stabilizacije dolazi, tako da je i tu potvrđena hipoteza. Takođe, primećuje se da je šum dosta veći koristeći LQR nego PID, što je logično jer se trenutni ugao mnogo brže menja kada se koristi PID nego LQR (treptajni šum), ali zato kada se koristi PID preskok postoji, dok kod LQR preskok ne postoji.

Na slikama 12 i 13 prikazani su odskočni odzivi sistema kada se koriste i akcelerometar i žiroskop sa komplementarnim filterom. Primećuje se da se u odnosu na žiroskop greška ne

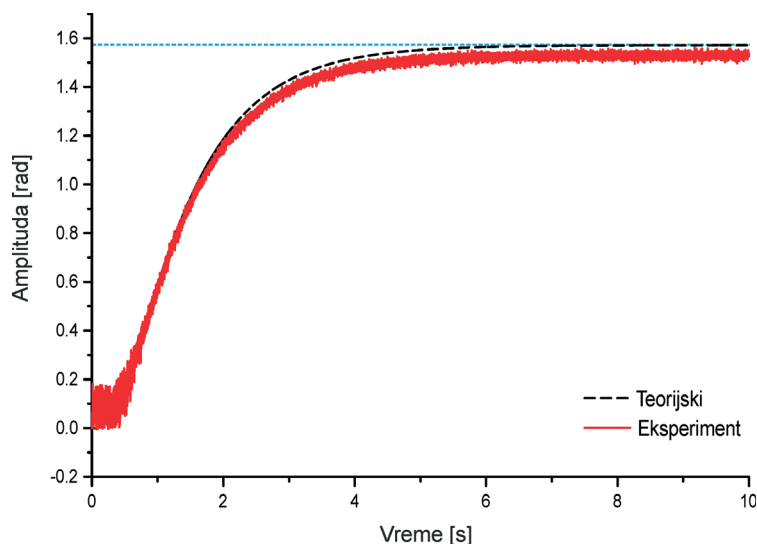
integriraju, a da je u odnosu na akcelerometar stalna greška manja, kao i šum. Takođe, kao i u slučaju sa akcelerometrom, šum je veći kada se koristi LQR nego PID zbog treptajnog šuma. Šum u ovom slučaju je manji nego kada se koristi samo akcelerometar. Takođe, do stabilizacije dolazi bez obzira na vrstu regulatora.

Na slikama 14 i 15 prikazani su odskočni odzivi sistema kada se koriste i akcelerometar i žiroskop sa Kalmanovim filterom. Primećuje se da se u odnosu na žiroskop greška ne integriraju a da je u odnosu na akcelerometar stalna greška



Slika 12. Zavisnost nagiba robota od vremena sa PID regulatorom i komplementarnim filtrom u simulaciji

Figure 12. Robot deflection as a function of time using PID controller and complementary filter inside the simulation
Dashed line – theoretical
Full line – experimental



Slika 13. Zavisnost nagiba robota od vremena sa LQR regulatorom i komplementarnim filtrom u simulaciji

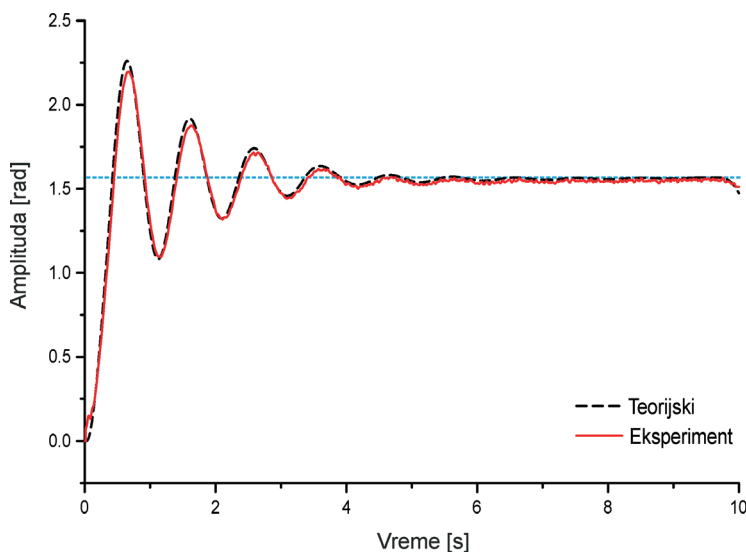
Figure 13. Robot deflection as a function of time using LQR controller and complementary filter inside the simulation
Dashed line – theoretical
Full line – experimental

manja, kao i šum što je bio slučaj i kod komplementarnog filtera, ali je kod Kalmanovog filtera ovaj šum još manje izražen. Do stabilizacije dolazi sa najmanjim šumom od posmatrana četiri slučaja bez obzira na vrstu regulatora, što je u skladu sa hipotezom. Takođe i u ovom slučaju zbog treptajnog šuma kod LQR regulatora je šum veći nego kod PID regulatora.

Što se tiče performansi regulatora međusobno, period stabilizacije je sličan kod oba, samo što preskok kod LQR ne postoji, dok kod PID regulatora preskok iznosi preko 10%, što znači da se LQR se pokazao kao bolji.

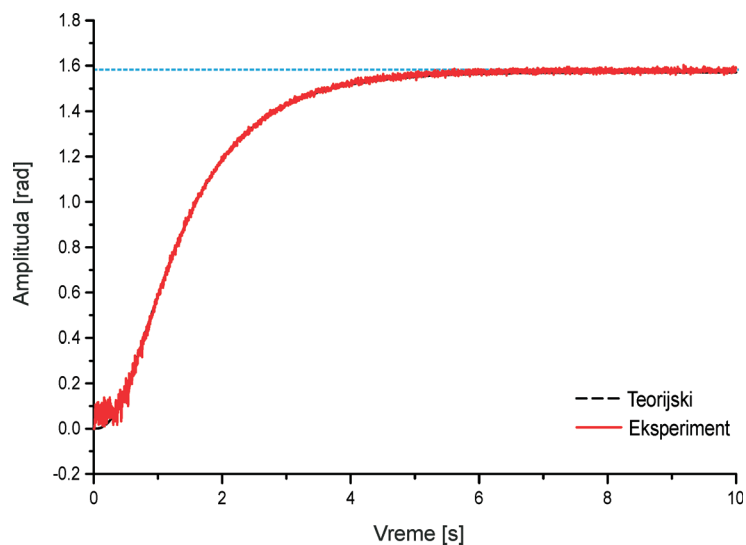
Hardver

Za razliku od imelementacije u simulaciji, u hardveru je implementiran samo sistem sa PID regulatorom gde se za podatak o uglu koriste oba senzora ukombinovana sa komplementarnim filterom. Kao problem u ovom sistemu pojavio se preveliki slobodan hod motora koji je korišćen, što za posledicu ima da će sam slobodan hod motora da izvede robota iz ravnotežnog položaja čime će stabilizaciju onemogućiti ili započeti ponovo proces stabilizacije, što se može



Slika 14. Zavisnost nagiba robota od vremena sa PID regulatorom i Kalmanovim filtrom u simulaciji

Figure 14. Robot deflection as a function of time using PID controller and Kalman filter inside the simulation
Dashed line – theoretical
Full line – experimental



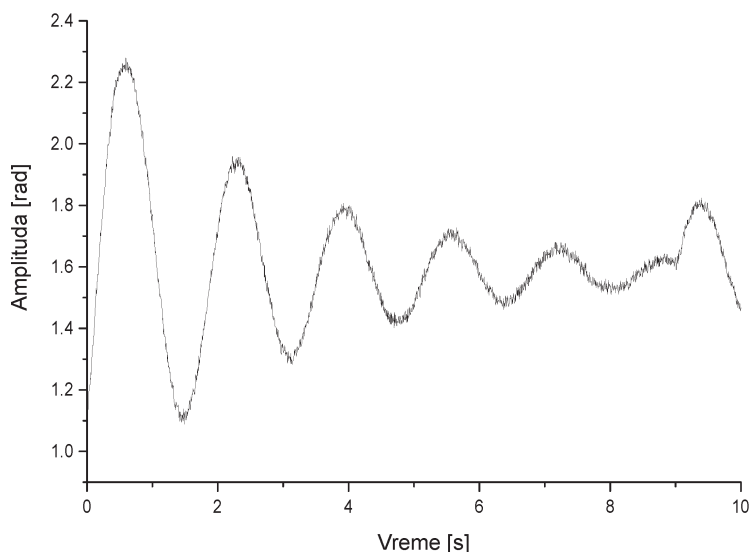
Slika 15. Zavisnost nagiba robota od vremena sa LQR regulatorom i Kalmanovim filtrom u simulaciji

Figure 15. Robot deflection as a function of time using LQR controller and Kalman filter inside the simulation
Dashed line – theoretical
Full line – experimental

primetiti na slici 16 gde se problem dešava u devetoj sekundi. Iz navedenog razloga dat je jedino tako dobijeni rezultat.

S obzirom na opisane rezultate zaključuje se da je stabilizacija pomoću žiroskopa nemoguća bez obzira na vrstu stabilizatora, čime je potvrđena prva hipoteza. Takođe primećeno je da je stabilizacija samo pomoću akcelerometra moguća, ali da su je odstupanje očitane od očekivane vrednosti veća nego kada se koriste komplementarni filter i Kalmanov filter, čime su potvrđene druga i treća hipoteza. Kalmanov filter je dao manja odstupanja izmerenih vrednosti ugla od realnih vrednosti u odnosu na komplemen-

tarni filter, čime je četvrta hipoteza potvrđena. Uporedivši performanse PID i LQR stabilizatora primećeno je da je preskok minimalan kod LQR, ali da se periodi stabilizacije ne razlikuju bitno, čime je peta hipoteza delimično potvrđena. Šesta hipoteza nije potvrđena jer nije sve opisano implementirano i na hardveru. Kako bi ona mogla da se razmatra dalji rad na projektu treba usredsrediti na to da se promeni DC motor koji je korišćen zbog velikog slobodnog hoda motora. Takođe, dalji rad može da ide i tom smeru da se posmartaju osobine stabilizatora kada se centar mase robota spušta, tj kada se robot opterećuje.



Slika 16. Zavisnost nagiba robota od vremena sa PID regulatorom i komplementarnim filtrom

Figure 16. Robot deflection as a function of time using PID controller and Kalman filter

Zahvalnost. Zahvaljujemo se Marku Skakunu i Nemanji Filipoviću za pomoć u izradi hardvera, kao i Danilu Đokiću za pomoć pri implementaciji Kalmanovog filtera.

Literatura

Ding Y., Gafford J., Kunio M. 2012. Modeling, simulation and fabrication of a balancing robot. *Advanced System Dynamics and Control*, **151**: 1.

Friedland B. 2005. *Control system design: an introduction to state-space methods*. Dover Publications

Huang S. 2010. Extended Kalman Filter. ARC Centre of Excellence for Autonomous Systems (CAS), Faculty of Engineering and Information Technology University of Technology Sydney, Australia 2010

Krsmanović S., Polovina V. 2011. Balansirajući robot. *Petničke sveske*, 69: 123.

Filip Parag and Milomir Stefanović

Modeling, Simulation and Hardware Implementation of a Self-balancing Robot

The aim of this paper is the modeling, simulation and implementation of a self-balancing robot. The problem of a self-balancing robot is considered as a problem of inverted pendulum stabilization, while a DC motor is used as the drive motor.

The deflection angle indicates the angle by which the robot is inclined to a side, in other words, by how many degrees the y-axis of the robot is rotated from the absolute y-axis, so that the center of wheels is exactly at the section of these axes.

In the simulation, the deflection angle is measured in four ways: using a gyroscope, an accelerometer, both gyroscope and accelerometer in combination using a complementary filter. and both gyroscope and accelerometer in combination using Kalman filter. These sensors are placed on the apex of the robot in order to maximize the amplitude of measured values. Two types of stabilization controllers are used: PID and LQR. Respective performances of these regulators are compared relative to the way that the angle is obtained.

Results of the simulation in which only a gyroscope is used indicate that this sensor accumulates measuring error exceptionally fast, which results in a value over π after just one second. Because of this, stabilization is not possible regardless of the regulator.

In the case of measuring using an accelerometer, a constant measuring error is observed and the presence of noise is more apparent than when a filter is used. Furthermore, the noise's amplitude is greater with the LQR regulator as a consequence of flickering noise, which is expected because the current deflection angle changes at a quicker rate using PID. Contrary to LQR, stabilization using PID regulator has overshoot.

When a complementary filter is used, the gyroscope error accumulation is not observed and both constant error and noise of the accelerometer are less pronounced. Similarly to the previous case, noise is more apparent with LQR, but overall noise is lower.

When the Kalman filter is used, properties of the error and noise are similar to those from the complementary filter, except that the noise is of a lesser amplitude. Regardless of the regulator type, stabilization is achieved with the lowest

noise of all four cases. Noise is again lower when LQR regulator is used due to the flickering noise.

All simulation hypotheses set during the initial problem analysis and modeling are confirmed: the robot can successfully stabilize regardless of regulator type, except when measurements are only acquired from a gyroscope.

Unlike in the simulation, the PID regulator is only implemented in hardware where the measurements represent output of a complementary filter of both the gyroscope and the accelerometer. A major setback in the hardware system emerged as significant free movement in transfer of the motor torque to the wheel axle; as a consequence, the robot can be displaced from balance and disable any further stabilization. The system is successfully put into stable oscillatory movement, but the stabilization is not possible and the hypothesis is not confirmed.

To review the plausibility of this hypothesis, further work should focus on removing the free movement in mechanical transfer. Also, stabilizer performance should be observed when the center of the robot's mass is shifted downwards, in other words, when additional weight is added to its base. 