

Merenje brzine zvuka uz pomoć Doplerovog efekta

Brzina zvuka određena je jednostavnom, nestandardnom metodom, uz pomoć klatna sa mikrofonom koji detektuje promene frekvencije zvuka, odnosno Doplerovog efekta koji se javlja u ovom sistemu. Cilj rada je bilo ispitivanje efikasnosti i testiranje metode, kao i ispitivanje uslova pod kojima aparatura daje najbolje rezultate. Klatno sa malim mikrofonom na slobodnom kraju se ljuljalo iznad malog zvučnika, koji je emitovao ton određene frekvencije. Usled kretanja (mikrofona u odnosu na zvučnik) dolazi do pojave Doplerovog efekta. Tada frekvencija tona koju registrujemo preko mikrofona takođe harmonijski osciluje. Da bi utvrdili na koji se način frekvencija tona menja sa vremenom neophodno je izračunati brzinu mikrofona, odnosno projekciju te brzine na pravac nepokretni zvučnik – pokretni mikrofoni na osnovu te brzine uz pomoć Doplerovog efekta izračunati promenu frekvencije. Ovaj jednostavan model nam omogućava da simuliramo ceo eksperiment i da onda tako dobijeni signal uporedimo sa onim koji smo snimili, što nam onda omogućava da izračunamo jedinu nepoznatu veličinu – brzinu zvuka. Glavna prednost ove metode je jeftin i lako izvodljiv eksperiment koji sa standardnom školskom računarskom opremom daje vrednost brzine zvuka sa tačnošću od 15 m/s, tj. približno 5%.

Uvod

Brzina zvuka u vazduhu se danas može odrediti vrlo precizno. Međutim, metode za njeno merenje koriste uglavnom dva svojstva talasa: eho i rezonanciju. Ideja ovog rada je pokušati odrediti brzinu zvuka uz pomoć jedne druge pojave vezane

za talase, Doplerovog efekta. Osnovni cilj metode je bio ispitivanje njene pouzdanosti i tačnosti.

Doplerov efekat

Pojava promene frekvencije koju registruje prijemnik pri relativnom kretanju prijemnika i izvora talasa naziva se Doplerov efekat. Frekvencija koju registruje prijemnik menja se po sledećoj zavisnosti:

$$\nu = \frac{c \pm \nu_p}{c \mp \nu_i} \cdot \nu_0 \quad (1)$$

gde je ν_0 frekvencija koju emituje izvor, ν frekvencija koju registruje prijemnik, ν_0 , ν_p brzine izvora odnosno prijemnika (tj. komponenta u pravcu prijemnik-izvor) i c brzina zvuka. Znak plus u gornjoj formuli se odnosi na slučaj kada se prijemnik i izvor približavaju, a minus na slučaj kada se oni međusobno udaljavaju.

Kada pretpostavimo da izvor miruje, a prijemnik iznad njega harmonijski osciluje levo-desno možemo dati jednostavan matematički model onoga što se dešava u eksperimentu (slika 1).

Kretanje matematičkog klatna opisuju sledeće jednačine (Kadelburg, Rapajić 2004):

$$x = x_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha) \quad (2)$$

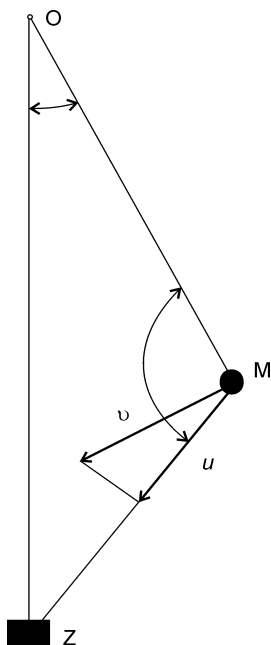
$$\nu = \nu_0 \cdot \sin(\omega t + \alpha) \quad (3)$$

gde su x , x_0 udaljenost, odnosno maksimalna udaljenost od ravnotežnog položaja, ν , ν_0 , brzina, odnosno maksimalna brzina, ω ugaona brzina i α početna faza oscilovanja.

Iz (2) možemo odrediti položaj, a iz (3) brzinu tela koje osciluje u svakom trenutku. Potrebno je još odrediti projekciju brzine mikrofona (tj. brzinu u odnosu na zvučnik) jer ona figuriše u jednačini (1).

Petra Stojsavljević (1986), Sombor, Slaviše Vajnera Čiče E-3 I/21, učenica 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

MENTOR: Srđan Verbić, ISP



Slika 1. Model klatna korišćenog u eksperimentu
M – mikrofoni, Z – zvučnik

Figure 1. Pendulum model used in experiment
M – microphone, Z – speaker

Imajući u vidu (slika 1):

$$OZ = h; OM = l$$

$$\theta = \angle OMZ$$

$$\varphi = \angle MOZ$$

$$\sin \varphi = x / l$$

Možemo primetiti:

$$u = v \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

Ako primenimo sinusnu i kosinusnu teoremu na ΔMOZ imamo:

$$MZ = \sqrt{l^2 + h^2 - 2lh \cos \varphi}$$

$$h : MZ = \sin \theta : \sin \varphi$$

pa je:

$$u = \frac{v h \sin \varphi}{MZ}$$

a kako je:

$$\sin \varphi = x / l = x_0 \cos (\omega t + \alpha) / l$$

možemo odrediti u u svakom trenutku.

Ukoliko u (1) zamenimo $v_i = 0$ i $v_p = u$, dobijamo:

$$v = \left(\frac{u}{c} + 1 \right) \cdot v_0$$

Dakle frekvencija koju će registrovati mikrofoni menjaće se po sledećoj zavisnosti:

$$v = \frac{[1 + x_0 \omega \sin(\omega t + \alpha)] \cdot h \sin \varphi}{(l^2 + h^2 - 2lh \cos \varphi)^{1/2}} \cdot v_0 \quad (4)$$

gde je:

$$\sin \varphi = x_0 \cos (\omega t + \alpha) / l$$

$$\omega = \sqrt{g / l}$$

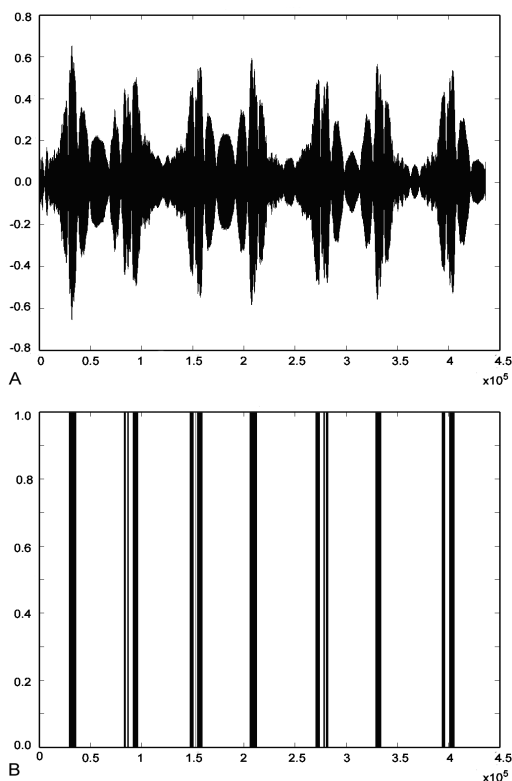
g je gravitaciono ubrzanje, a l dužina klatna (OM).

Eksperiment

Aparaturu čine računar, funkcijski generator, piezo zvučnik i klatno sa kondenzatorskim mikrofonom. Ton je sniman u Windows programu Sound Recorder. Obrada snimaka vršena je u programskom okruženju MATLAB.

Signal-generator emituje ton određene frekvencije preko malog zvučnika i mikrofonom ga snimamo na računaru. Zvučnik je fiksiran ispod kabla sa mikrofonom koji se nalazi nekoliko centimetara iznad njega. Ukoliko mikrofoni miruje računar beleži jednu istu vrednost tokom vremena (slika 2a). Međutim, ukoliko mikrofoni izvedemo iz ravnotežnog položaja i pustimo da osciluje iznad zvučnika javlja se Doplerov efekat, jer se sada mikrofoni (prijemnik) kreće u odnosu na zvučnik (izvor). Tada frekvencija snimljenog signala pravilno osciluje oko odabrane vrednosti (slika 2b).

Pošto kabl mikrofona nije neistegljiva nit zanemarljive mase, kako to zahteva model matematičkog klatna, kabl sa mikrofonom je dodatno opterećen malim tegom da bi sopstvene oscilacije "niti" bile što manje izražene. Upoređivan je period ovako konstruisanog klatna sa vrednošću koju daje model. Za klatno dužine 1–2 m (koje su korišćene u ovom eksperimentu) odstupanje se javlja tek na drugoj decimali ($\Delta T = 0.02$ s), što je sasvim zadovoljavajuće.



Slika 2. A – Intenzitet signala u zavisnosti od vremena; B – Kvadrat intenziteta signala (većeg od 0.4) u zavisnosti od vremena.

Figure 2. A – Signal intensity depending on time; B – Square of signal intensity (larger than 0.4) depending on time.

Pre početka eksperimenta bilo je potrebno odrediti uslove (frekvenciju) u kojima je uopšte moguće izdvojiti zvuk mikrofona od ostalih šumova u laboratoriji, zatim i dužinu i amplitudu oscilovanja “mikrofonskog klatna” koje ne odstupaju (previše) od teorijskog modela, kao i optimalnu dužinu trajanja snimka koji bi pružio dovoljno informacija, a opet ne bi “uočio” prigušenost oscilovanja. Kontrolnim snimcima sa različitim početnim uslovima našli smo najpovoljnije uslove.

Prvo je snimljen ton, tj. signal generatora kada mikrofona miruje (slika 2a) da bismo proverili frekvenciju koju emituje zvučnik i na taj način kalibrisali aparaturu. Zatim je sniman signal sa mikrofonom koji osciluje pod uslovima koje kontrolišemo (slika 2b).

Sva merenja su vršena u laboratoriji gde je temperatura iznosila manje-više konstantnih 27°C. Vrednost brzine zvuka (Kadelburg, Rapajić 2004) u datim uslovima je 348 m/s.

Obrada podataka na računaru

Programi za učitavanje podataka, simulaciju i fitovanje pisani su u programskom okruženju MATLAB. Ovde je dat samo kratak opis.

Očitavanje snimljene frekvencije sa spektrograma

Eksperiment se završava snimanjem zvuka, tj. oscilacija generisanog tona u .wav formatu. Signal koji se registruje preko mikrofona u MATLAB je prikazan kao numerički niz uređenih dvojki. Nama je potreban samo intenzitet zvuka koji prima mikrofona. Taj niz intenziteta posmatramo u frekventnom domenu i tako vidimo karakteristične frekvencije i njihove oscilacije. Efekat oscilacija se najbolje vidi iz promene Furijeovog transformisa u zavisnosti od vremena, spektrograma.

Specgram je jedna od Matlabovih ugrađenih funkcija alata za obradu signala i predstavlja (MATLAB User's Guide; Mathworks) Furijeov transform (eng. *time-dependent Fourier transform*) signala s u zavisnosti od vremena. Na ovaj način signal delimo na kratke vremenske intervale (reda 0.1 s) i nalazimo amplitude njihovih Furijeovih transformisa, a za svaki od ovih intervala izdajamo frekvenciju najvećeg intenziteta, tj. frekvenciju koja odgovara tonu koji potiče od zvučnika.

Početna faza. Na grafiku A (slika 2) je prikazan intenzitet signala u zavisnosti od vremena $s = f(t)$. Maksimalni intenzitet signala odgovara trenucima kada je mikrofona najbliže zvučniku, odnosno kada je klatno u najnižem položaju.

Da bismo precizno izdvojili maksimume posmatraćemo vrhove ($s > 0.4$), odnosno njihove kvadrate ($s > 0.4$)² = $f(t)$ (da bismo ih razdvojili od ostalih lokalnih maksimuma).

Na grafiku B (slika 2) uočava se da je vremenski trenutak Δt od početka merenja do prvog maksimuma drugačiji od razmaka između ostalih maksimuma (koji iznosi $T/2$; T – period oscilovanja klatna). Početna faza određena je kao $\alpha = \omega \cdot \left(\frac{T}{4} - \Delta t \right)$

Simulacija eksperimenta

Matematički model ovog eksperimenta opisan je u uvodu. Parametri koji određuju funkciju (4) x_0 , l i h očitavaju se direktno, a α i v_0 uz pomoć prethodno opisanog algoritma.

Za svaki zvuk koji registruje mikrofonski beleži se u približno 440 000 vrednosti intenziteta zvuka (brzina uzorkovanja, odnosno broj uzoraka u jednoj sekundi koji u ovom slučaju iznosi 44.1 kHz, puta 10 s koliko otprilike traje snimak).

Obrada rezultata upoređivanjem simulacije i eksperimenta

Imamo eksperimentalnu frekvenciju i frekvenciju koju daje simulacija za iste početne uslove, u određenim trenucima (kratkim vremenskim intervalima). Nas interesuje suma kvadrata razlika ovih dveju frekvencija za sve intervale vremena, S . Vrednost simulirane frekvencije, funkcije (4), zavisi od parametra c (pretpostavljene brzine zvuka). Variranjem ovog parametra dobijaju se različite vrednosti S . Posmatrajmo grafik $S=f(c)$. Za c iz pretpostavljenog intervala vrednosti za brzinu zvuka u vazduhu (300-400 m/s) grafik ima oblik parabole, koja dostiže minimum na tom intervalu. Minimum funkcije odgovara brzini zvuka u našem eksperimentu. Taj minimum možemo odrediti fitovanjem dobijenih vrednosti na kvadratnu funkciju.

Greška metode

Kako bismo procenili ukupnu grešku ovako izmerene vrednosti za brzinu zvuka, greška merenja je procenjena na više načina:

- (1) Kao ukupni efekat pojedinačnih grešaka merenja veličina koje opisuju početne uslove (l , d , x_0 , v_0 i α) – greška Δc_1 . Ona nam pokazuje koliko greška merenja nekog od početnih uslova doprinosi konačnoj grešci rezultata.
- (2) Kao greška određivanja minimuma funkcije $S = f(c)$ – greška Δc_2 .
- (3) Kao prosečna vrednost odstupanja frekvencije očitane sa spektrograma od one koja je zadata generatorom signala – Δc_3 . Ovo nam govori koliko grešimo pri samom očitavanju frekvencije tona sa spektrograma. Pokazalo se da se određeni početni uslovi (pre svega niska frekvencija, a zatim i suviše kratko klatno) znatno uvećavaju.

Rezultati i diskusija

Eksperiment je (u optimalnim uslovima, koje smo prethodno utvrdili) ponovljen više puta. Za ilustraciju je izdvojen samo jedan (S4) snimak i svi rezultati odnose se na njega. Podaci o ostalim snimcima nalaze se u tabeli 1.

Tabela 1. Podaci o snimcima u optimalnim uslovima

No	v_0 [Hz]	l [cm]	α [rad]	c [m/s]	Δc_1 [m/s]	Δc_2 [m/s]	Δc_3 [m/s]	r
S1	10 133	17	0.40	349	13	10	1	0.98
S2	10 138	17	0.20	349	12	12	2	0.97
S3	10 138	19	0.35	348	9	9	2	0.98
S4	10 138	20	0.23	347	13	7	1	0.98
S5	10 025	22	0.95	345	12	8	2	0.95
S6	10 133	19	0.42	350	10	8	2	0.98
S7	10 133	23	0.28	346	3	10	2	0.98
S8	10 009	25	0.10	350	10	11	5	0.85
S9	10 021	23	1.25	352	5	12	2	0.97
S10	10 023	25	-0.5	354	10	11	3	0.98

No – redni broj snimka

v_0 – osnovna frekvencija

l – amplituda

α – početna faza

c – brzina zvuka

Δc_1 – ukupni efekat pojedinačnih grešaka

merenja veličina koje opisuju početne uslove

Δc_2 – greška dobijena fitovanjem

Δc_3 – prosečna vrednost standardne devijacije

r – koeficijent korelacije

Izmerena dužina klatna iznosi $l = (198 \pm 1)$ cm, a visina zvučnika u odnosu na najniži položaj mikrofona $d = (6.0 \pm 0.2)$ cm, a amplitude oscilovanja $x_0 = (20 \pm 1)$ cm. Osnovna frekvencija generatora $v_0 = 10\,138$ Hz i početna faza $\alpha = 0.23$ rad.

Za dati snimak smo dobili da brzina zvuka iznosi $c = 347$ m/s.

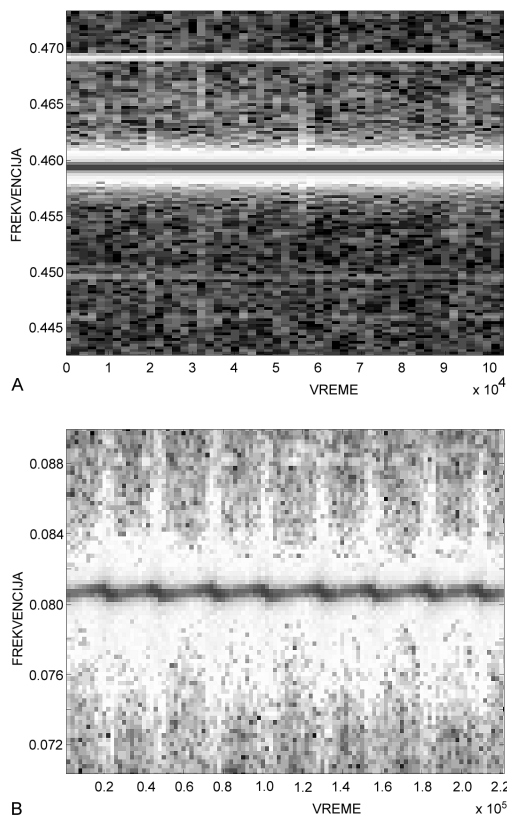
Greška je procenjena na više načina:

$$\Delta c_1 = 13 \text{ m/s}$$

$$\Delta c_2 = 7 \text{ m/s}$$

$$\Delta c_3 = 1 \text{ m/s}$$

Primenjena metoda daje vrednost brzine zvuka koja se sa tabličnim vrednostima slaže do na 5%.

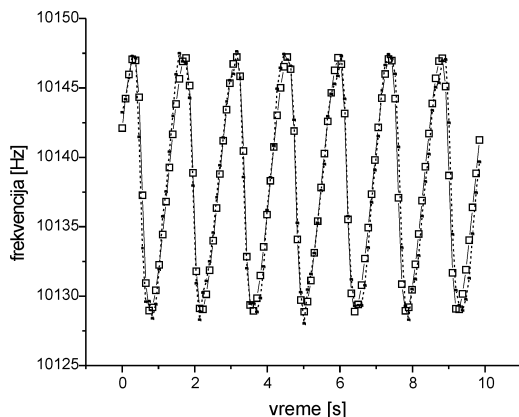


Slika 3. Spektrogrami snimljenog signala kada mikrofon miruje (A) i kada osciluje (B).

Figure 3. Spectrograms of signal recorded while the microphone was idle (A) and during oscillations (B).

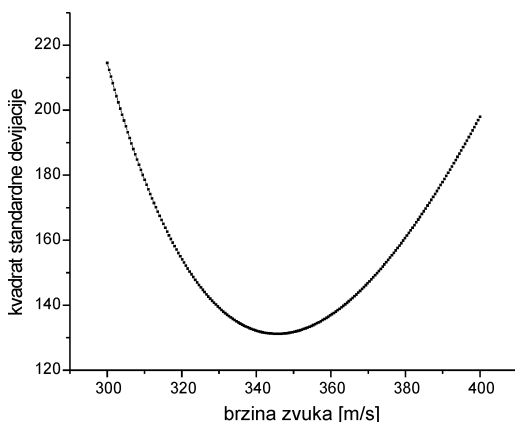
Na greške su u najvećoj meri uticali greška aproksimacije, odnosno odstupanje realnog od teorijskog modela (masa kabla nije zanemarljiva u odnosu na masu tegova; takođe, oscilacije klatna nisu male kako to aproksimacija zahteva), otpor vazduha (kod nešto dužih snimaka jasno se uočava smanjenje amplitude tokom vremena) i propratne oscilacije klatna (one u horizontalnoj ravni), kao šumi usled nesavršenosti instrumenata i rezonancije.

Simulacijom eksperimenta na računaru testirana je osetljivost rezultata na tačnost sa kojom smo određivali pojedinačne parametre. Pokazalo se da na grešku u najvećoj meri utiču visina mikrofona (u odnosu na zvučnik u najnižem položaju) i amplitude, pa je njih potrebno meriti sa što većom tačnošću.



Slika 4. Snimljena i očekivana frekvencija.

Figure 4. Recorded and expected frequency.



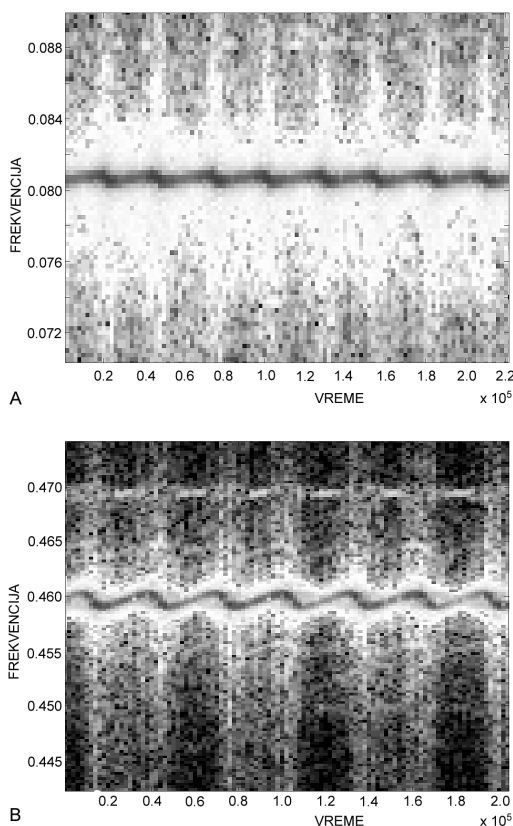
Slika 5. Zavisnost kvadrata standardne devijacije S od brzine zvuka.

Figure 5. Dependence of the square of standard deviation S from the speed of sound.

Optimalni uslovi takođe su testirani na računaru. Može se zaključiti sledeće:

Klatno veće dužine "razvlači" funkciju (4) po x-osi, a veća frekvencija i amplituda oscilovanja klatna po y-osi i samim tim omogućavaju bolje rezultate.

Uz to, viša frekvencija omogućuje preciznije izdvajanje bitnih tonova sa spektrograma (na slici 6 upoređeni su snimci signala od 1 kHz i 10 kHz). Uz najveću brzinu uzorkovanja od 44100 uzoraka u se-



Slika 6. Spektrogrami snimaka sa različitim frekvencijom: A – 1 kHz, B – 10 kHz.

Figure 6. Spectrograms of recordings with different frequencies: A – 1 kHz, B – 10 kHz.

kundi nije bilo moguće precizno obraditi snimke frekvencije veće od 11 kHz.

Vremenski intervali koje koristimo za pravljenje spektrograma bi trebalo da budu što kraći jer tako imamo bolju vremensku rezoluciju. Nažalost, kratki intevali imaju kratak niz intenziteta koje bi trebalo pretvoriti u Furijeov transform, pa tako dobijamo lošu frekventnu rezoluciju. Ovde bi trebalo naći kompromis za rezoluciju po vremenskoj i frekventnoj osi.

Veličina d (visina mikrofona) samo “iskosi” funkciju; smanjenjem ove veličine moglo bi se dobiti na preciznosti, ali tada dolaze do izražaja horizontalne oscilacije klatna.

Produžavanjem trajanja snimaka dolazi do izražaja prigušenje koje u simulaciji nismo uzeli u obzir.

Kontrolni snimci sa dužinama klatna od 1–2 m, frekvencijama 300–12000 Hz, visinama mikrofona 4–10 cm i snimcima 7–20 s potvrđuju ove pretpostavke.

Zaključak

Glavna prednost ove metode je što ne zahteva skup i komplikovan eksperiment. Iako nešto složenija analiza, može se uraditi na bilo kom PC računaru.

Kako je eksperimentalni deo ovog metoda vrlo jednostavan, bilo bi interesantno ispitati koliko bi se povećanjem dužine klatna, amplitude, frekvencije, a smanjenjem trajanja snimka mogla poboljšati njegova efikasnost.

Zahvalnost. Želela bih da se zahvalim mentoru Srđanu Verbiću na ideji i korisnim predlozima, kao i Istraživačkoj stanici Petnica. Zahvalnost dugujem i Draganu Aćimoviću i Branimiru Ackoviću bez kojih bi eksperimentalni deo ovog rada bio neizvodljiv.

Literatura

Kadelburg N., Rapajić V. 2004. *Fizika 3*. Beograd: Krug

Kojić M., Mićunović M. 1988. *Teorija oscilacija*. Beograd: Naučna knjiga

MATLAB User's Guide

Mathworks. Dostupno na:
http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/signal/signal_tb.pdf

Petra Stojšavljević

A Method for Measuring the Speed of Sound

The speed of sound was measured by using a simple, but nonstandard method. All methods for measuring the speed of sound are based either on echo or resonance; this method uses another characteristic of acoustic waves, the Doppler effect. The advantage of this method is a very simple and cheap

experiment that can be performed in every school laboratory. The data analysis is more complex, but requires only a modern PC. The aim of this paper is to find optimal conditions for the experiment and to test this method.

The paper consists of two parts: finding optimal conditions for the experiment and the experiment itself and 'computer work', that is reading data from spectrograms and numerical simulation.

A pendulum with a microphone on its free end was oscillating above a small speaker, while the speaker emitted sounds of certain frequency. Because of the relative moving between speaker and microphone, the Doppler effect occurred. Thus the frequency that was registered by the microphone also oscillated.

We made a numerical simulation of the experiment. The pendulum in the experiment was approximated to the mathematical one. The oscillations of frequency, registered by the microphone, are a function of pendulum length, period and the amplitude of oscillations, the distance between microphone and pendulum, sound frequency by speaker and, of course, the speed of sound. For different speeds of sound in the simulation, we compared the experimental oscillations with the ones in the simulation. The minimal deviation between those two is obtained when the supposed speed is closest to the real speed of sound in the laboratory.

The accuracy of 5% was achieved.

