

## Određivanje broja konfiguracija Rubikove kocke i magične sfere putem teorije grupa

---

*Primenom teorije grupa definisana je grupa operacija nad Rubikovom kockom i opisane neke njene osobine. Takođe je izračunat teorijski broj konfiguracija. Utvrđen je poseban način zapisivanja konfiguracije kocke, koristeći se permutacijama. Na kraju, dokazana je teorema o potrebnim uslovima da bi neka konfiguracija bila važeća i pokazano je da se tek deo ukupnog broja teoretski mogućih konfiguracija kocke može dobiti rotiranjem strana kocke. Sličan postupak primenjen je i na izračunavanje broja konfiguracija kod magične sfere.*

---

### Uvod

Rubikovu kocku izmislio je Erno Rubik 1974. godine, ali je 1980. godine kocka doživela najveći uspeh. Došlo je do otkrivanja raznih algoritama za njeno rešavanje, a mnogi i dalje pokušavaju da pronađu tzv. „algoritam snova“, koji bi za svaku poziciju davao rešenje u najmanjem broju poteza. Organizovana su i mnoga takmičenja u brzom rešavanju kocke. Kao igračka koja zahteva određeno logičko razmišljanje, kocka je pre svega doprinela većem interesovanju za matematiku i mogućnosti da se na zanimljiv način upoznemo sa matematičkim teorijama (tačnije teorijom grupa). Kasnije su izmišljene još mnoge slične logičke igračke, poput *magičnog valjka*, tetraedra, kocke  $4 \times 4 \times 4$ ,  $5 \times 5 \times 5$ , i nama posebno zanimljiva *magična sfera*.

U ovom radu je primenom teorije grupa definisana grupa operacija nad Rubikovom kockom, opisane neke njene osobine i izračunat teorijski broj konfiguracija uopštene Rubikove kocke. Sličnim postupkom izračunat je i broj konfiguracija magične sfere.

## Osnovni pojmovi teorije grupa

Definišimo najpre pojam grupe.

**Definicija 1.** Grupa je uređeni par  $(G, \circ)$  gde je  $G$  neprazan skup a  $\circ$  binarna operacija nad  $G$  takva da važi:

- Operacija  $\circ$  je asocijativna. To jest za svako  $a, b, c \in G$ ,  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ .
- U grupi  $(G, \circ)$  postoji neutralni element  $e \in G$  u odnosu na operaciju  $\circ$ , tj. element za koji važi  $g = e \circ g = g \circ e$ , za svako  $g \in G$ .
- Za svaki element  $g \in G$  postoji njegov inverz  $h \in G$ , tako da je  $g \circ h = h \circ g = e$ .

**Lema 1.** Ako je  $(G, \circ)$  grupa onda ona ima tačno jedan neutralni element i svako  $g \in G$  ima tačno jedan inverzni element.

Da bismo lakše proučili grupu možemo posmatrati njene delove takozvane podgrupe.

**Definicija 2.** Neka je  $(G, \circ)$  grupa, a  $H$  neprazni podskup skupa  $G$ . Ako je  $H$  zatvoren za operaciju  $\circ$ , odnosno ako je uređeni par  $(H, \circ)$  grupa, tada tu grupu nazivamo podgrupom  $(G, \circ)$ .

**Definicija 3.** Neka je  $(G, \circ)$  grupa i  $S \subseteq G$ . Kažemo da  $S$  generiše  $G$  ako svaki element iz  $G$  može da se predstavi kao proizvod elemenata iz  $S$ . To označavamo kao  $G = \langle S \rangle$ .

**Teorema 1.** Neka je  $G$  grupa sa konačnim brojem elemenata i  $S$  podgrupa od  $G$ . Pretpostavimo da su zadovoljena sledeća dva uslova:

1. Svaki element  $S$  zadovoljava neku osobinu  $P$ .
2. Ako  $g \in G$  i  $h \in G$  zadovoljavaju osobinu  $P$ , onda i  $g \circ h$  takođe zadovoljava osobinu  $P$ .

Tada svaki elemenat iz  $\langle S \rangle$  zadovoljava  $P$ .

**Definicija 4.** Simetrična grupa reda  $n$  je uređeni par  $(S_n, E)$ , gde je  $S_n$  skup svih svih permutacija

---

Ana Stanojević (1993), Niš, Ilije Birčanina 36, učenica 1. razreda Gimnazije „Svetožar Marković“ u Nišu

Petra Antić (1992), Niš, Generala Bože Jankovića 27/29, učenica 2. razreda Gimnazije „Bora Stanković“ u Nišu

nekeg skupa sa  $n$  elemenata, a  $E$  operacija kompozicije nad tim permutacijama.

**Definicija 5.** Ciklus  $\varphi = (i_1, i_2, \dots, i_k)$  je element  $S_n$  definisan kao  $\varphi(i_1) = i_2, \varphi(i_2) = i_3, \dots, \varphi(i_{k-1}) = i_k, \varphi(i_k) = i_1$  i  $\varphi(j) = j$  ako je  $j \neq i_r$  za svako  $r$ . Dužina ovog ciklusa je  $k$  ( $k$ -ciklus). Brojeve  $i_1, i_2, \dots, i_k$  nazivamo elementima ciklusa, dok skup brojeva  $i_1, i_2, \dots, i_k$  koji gradi ciklus označavamo kao  $\text{supp } \varphi$ .

**Definicija 6.** Ciklus sastavljen od dva elementa nazivamo transpozicijom.

**Definicija 7.** Dva ciklusa  $\sigma$  i  $\tau$  su disjunktna ako nemaju zajedničke elemente. Ovo označavamo sa  $\text{supp } \sigma \cap \text{supp } \tau = \emptyset$ .

Svako  $\rho \in S_n$  može biti napisano kao proizvod (kompozicija) disjunktnih ciklusa sa dva ili više elemenata.

## Grupa permutacija

**Definicija 8.** Grupa permutacija je grupa čiji su elementi permutacije elemenata datog skupa  $A$  i nad kojom je definisana operacija kompozicije permutacija.

Posmatrajmo skup  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  i neka se taj skup slika u samog sebe. Funkcija preslikavanja elemenata od  $a_1$  do  $a_k$ , koja je bijekcija čini permutaciju. Primetimo da je grupa svih permutacija skupa  $A$  simetrična grupa.

**Teorema 2.** Svaki ciklus dužine  $k$  se može napisati u obliku proizvoda  $k-1$  transpozicija:  $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k) = (a_1, a_2) \circ (a_1, a_3) \circ \dots \circ (a_1, a_{k-1}) \circ (a_1, a_k)$ .

**Definicija 9.** Parne permutacije su one dobijene kompozicijom parnog broja transpozicija; neparne permutacije su one dobijene kompozicijom neparnog broja transpozicija.

Znak permutacije označavamo sa  $\text{sgn}(\sigma) = \pm 1$ , tako da svaka parna ima znak  $+1$ , a neparna  $-1$ . Svaka transpozicija je neparna permutacija. Za svaku permutaciju važi da je broj transpozicija ili paran ili neparan. Permutacija ne može biti i parna i neparna u isto vreme.

**Teorema 3.** Ciklusi sa parnim brojem elemenata su neparne, a ciklusi sa neparnim brojem elemenata su parne permutacije.

Dokaz: Znamo da je  $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k) = (a_1, a_2) \circ (a_1, a_3) \circ \dots \circ (a_1, a_{k-1}) \circ (a_1, a_k)$ .

Znak ciklusa  $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k)$  je jednak proizvodu znakova  $2$ -ciklusa koji ga čine. Kako svaka transpozicija ima znak  $-1$ , a njih je ukupno

$k-1$ , znači da je znak ciklusa jednak  $(-1)^{k-1}$ . Sledi da, ako je  $k$  (broj elemenata ciklusa) parno, ciklus ima znak  $-1$ , tj. neparan je. Ako je  $k$  neparno znak je  $+1$  i ciklus je paran. QED.

## Svojstva Rubikove kocke

### Notacija Rubikove kocke

Rubikovu kocku čine tri vrste kockica: osam ugaonih (sa tri vidljive strane različitih boja), dvanaest ivičnih (sa dve vidljive strane različitih boja) i šest centralnih (sa jednom vidljivom stranom). Fiksirajmo datu kocku u određeni položaj i označimo sa  $r$  (right),  $l$  (left),  $u$  (up),  $d$  (down),  $f$  (front) i  $b$  (back) desnu, levu, gornju, donju, prednju i zadnju stranu Rubikove kocke u odnosu na lice posmatrača. Ugaonu kockicu obeležavamo na osnovu mesta gde se nalazi, koristeći notaciju triju strana kocke kojima pripada. Svaka od njih na svom mestu može biti orijentisana na tri načina. Označimo strane kockice sa  $1, 2$  i  $3$ . Moguće orijentacije onda su  $123, 231$  i  $312$ . Na kraju definišimo i osnovne pokrete Rubikove kocke. Rotaciju neke strane za  $90^\circ$  u smeru kazaljke na satu označavaćemo slovima  $R, L, U, D, F$  i  $B$  za desnu, levu, gornju, donju, prednju i zadnju stranu.

### Grupa Rubikove kocke

**Definicija 10.** Pokret  $M$  na Rubikovoj kocki predstavlja jednu od kompozicija elementarnih pokreta  $\{F, D, B, U, R, L\}$ .

Pokret koji sadrži četiri uzastopna ista slova jednak je pokretu koji u sebi ima ista slova kao niz dobijen od pomenutog izbacivanjem ta četiri slova. Uvedimo strukturu  $(G, *)$ , gde je  $G$  skup svih nizova slova  $\{F, R, D, \dots\} = M$  uključujući i prazan niz (koji označavamo sa  $\Omega$ ), a operacija  $*$  nadovezuje dva niza (poteza) jedan na drugi. Za nju važi da je  $FFFF = RRRR = DDDD = \dots = \Omega$ . Ako su  $M_1$  i  $M_2$  dva pokreta, onda nadovezivanje ova dva pokreta označavamo kao  $M_1 * M_2$ .

Dokažimo da je ovakva struktura grupa, treba pokazati četiri osnovna uslova grupe:

- Skup  $G$  je zatvoren za operaciju  $*$  jer, ako su  $M_1$  i  $M_2$  pokreti,  $M_1 * M_2$  je takođe pokret.
- Nadovezivanje je asocijativna operacije jer krajnji rezultat zavisi samo od redosleda

primenjivanja pokreta, nevezano za to koja su dva udružena.

- Ako bi  $\Omega$  bio „prazan“ pokret (tj. onaj koji ne menja konfiguraciju Rubikove kocke), onda bi vaţilo  $\Omega * M = M * \Omega$ , pa grupa ima neutralni element.
- Ako je  $M = X_1 X_2 \dots X_n$  pokret, onda moţemo napraviti njemu inverzan pokret  $M' = X_n X_{n-1} \dots X_1$ , jer tako dobijamo niz u kome postoje grupe sa po četiri uzastopna ista slova, koja, zbog asocijativnosti, moţemo zameniti sa  $\Omega$ , odnosno dobijamo niz praznih pokreta, pa se kocka nalazi u nepromenjenom stanju. To zapisujemo kao  $M * M' = M' * M = \Omega$ , gde je  $M'$  inverzni element od  $M$ .

Iz ovog sledi da je skup pokreta Rubikove kocke grupa  $(G, *)$ . Dva niza smatraćemo istim ukoliko se izvršavanjem odgovarajućih poteza dobija ista konfiguracija.

## Zapis konfiguracije Rubikove kocke

Da bismo znali kako izgleda kocka, potrebno je da znamo koja ugaona kockica je u kom uglu, koja ivična na kojoj ivici, i njihove orijentacije. Sve to opisujemo četvorkom  $(\sigma, \tau, x, y)$ .

Oznaćimo simetričnu grupu ugaonih kockica kocke sa  $S_8$  koja je skup permutacija  $\sigma_i$  od po 8 elemenata, čiji su domen sve ugaone kockice, a kodomen sva moguća mesta na koja one mogu da stoje. Dakle prvi član četvorke predstavlja jedno preslikavanje kockica na 8 ponudjenih mesta, odnosno predstavlja jedan od mogućih položaja ivičnih kockica.

Oznaćimo sada i simetričnu grupu položaja ivičnih kockica kocke sa  $S_{12}$  koja je skup permutacija  $\tau_i$  od po 12 elemenata čiji su domen sve ivične kockice kocke, a kodomen sva moguća mesta na koja one mogu da stoje. Dakle, drugi član četvorke predstavlja jedan od mogućih položaja ivičnih kockica.

**Definicija 11.**  $\sigma^{-1}$  perdstavlja permutaciju inverznu permutaciji  $\sigma$ .

$X$  predstavlja uredjenu osmorku iz skupa  $\{0, 1, 2\}$  koji oznaćavaju orijentaciju određene ugaone kockice. Zamislmo kocku u početnoj (sloţenoj) konfiguraciji. Oznaćimo brojevima po jednu stranu mesta kockica na sledeći naćin.

- 1 na  $u$  strani  $ufl$  mesta
- 2 na  $u$  strani  $urf$  mesta
- 3 na  $u$  strani  $ubr$  mesta
- 4 na  $u$  strani  $ulb$  mesta
- 5 na  $d$  strani  $dbl$  mesta
- 6 na  $d$  strani  $dlf$  mesta
- 7 na  $d$  strani  $dfr$  mesta
- 8 na  $d$  strani  $drb$  mesta

Sada svako ugaono mesto ima po jednu oznaćenu stranu. Svaka ugaona kockica samim tim ima po jednu stranu koja odgovara numerisanoj strani mesta kockice. Oznaćimo tu stranu kockice sa 0. U smeru sata oznaćimo preostale dve strane kockice sa 1 i 2. Dakle, jedna od oznaćenih strana kocke izgledaće u početnoj konfiguraciji (sloţenoj kocki):

	6		7	
	5		8	

Odnosno kada upotrebimo odgovarajuću notaciju:

	2		1	
1	0		0	2
2	0		0	1
	1		2	

Svaka strana svake ugaone kockice je numerisana. Ukoliko opisujemo kocku u bilo kojoj konfiguraciji, opisujemo konfiguraciju kocke na sledeći naćin: za bilo koje  $i$  između 1 i 8 pronadjemo stranu mesta kockice obeleţenu ovim brojem; neka je  $x_i$  broj kojim je obeleţena strana kockice koja odgovara toj strani mesta. Te promenljive su brojevi koje oznaćavaju broj rotacija u smeru kazaljke na satu potrebnih da bi se ugaona kockica vratila u poloţaj u kome se nalazi kada je kocka rešena, tj. da bi se njena strana obeleţena sa 0 poklopila sa numerisanom stranom mesta. Pritom, treba primetiti da je ona koja je udaljena 3 rotacije, zapravo na traţenom mestu, pa su zato  $x_i$  elementi skupa ostataka pri deljenju sa 3, tj.  $x \in \{0, 1, 2\}$  (taj skup oznaćimo sa  $Z_3$ ). Dakle, ako je Rubikova kocka sloţena svako  $x_i = 0$ , ili kraće  $x = 0$ .

**Primer 1.** Uočimo šta bi bili  $x_i$  ako su obeležene gornja i donja strana, a mi primenimo pokret R. Na slici posmatramo desnu stranu:

	2		3	
	7		8	

a označavanje bi bilo sledeće:

	0		0	
2	1		2	1
1	2		1	2
	0		0	

Kada rotiramo stranu za  $90^\circ$  dolazimo do ovog stanja:

	1		2	
0	2		1	0
0	1		2	0
	2		1	

Tako ne utičemo na kockice na levoj strani, pa je  $x_1 = 0$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_{15} = 0$  i  $x_6 = 0$ , a sa slike se vidi da je  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_7 = 2$  i  $x_8 = 1$ , tj.  $x = (0, 1, 2, 0, 0, 0, 2, 1)$ .

Slično se pokazuje i za rotaciju ostalih strana.  $y$  predstavlja uređenu dvanaestorku brojeva iz skupa  $\{0, 1\}$ . Analogno prethodnom primeru, označimo ivične kockice. I sada su promenljive od  $y_1$  do  $y_{12}$  brojevi koji označavaju broj rotacija (0,1) potrebnih da bi se ivična kockica vratila u položaj u kome se nalazi kada je kocka rešena, tj. da se strana kockice obeležena sa 0 poklopi sa numerisanom stranom mesta. Dakle,  $y \in \{0, 1\}$  (taj skup označimo sa  $Z_2$ ). Sledi da za početnu konfiguraciju važi:  $(\sigma, \tau, x, y) = (1, 1, 0, 0)$ .

## Važeće konfiguracije Rubikove kocke

### Kombinatorno moguć broj konfiguracija

Neka je  $S = \{F, D, B, U, R, L\} \subset G$ . Tada po definiciji pokreta svako  $M \in S$  zadovoljava svojstvo da sve centralne kockice zadržava zadržava nepokretnim. Svaki od šest osnovnih pokreta zadržava sve centralne kockice nepokretne, pa i kompozicija bilo koja dva pokreta zadržava sve centralne kockice nepokretne. Kako važi  $G = \langle S \rangle$ , to svaki element  $G$  zadovoljava ovo svojstvo, tj. centralne kockice nikada ne menjaju svoj položaj. Ivična kockica može se naći na mestu druge ivične kockice i ugaona na mestu druge ugaone, ali je nemoguće da ivična i ugaona zamene mesta.

Koristeći ove zaključke izračunajmo koliko mogućih konfiguracija ima Rubikova kocka. Posmatrajmo jedno mesto ugaone kockice, na njemu se teoretski može nalaziti bilo koja od njih osam, time ostaje njih sedam za sledeći ugao, njih šest za treći, itd. Sledi da postoje  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 8!$  Mogućih rasporeda ugaonih kockica. Ali, svaka od njih može biti smeštena na tri načina, dakle, postoji  $3^8$  načina kako sve one mogu biti orijentisane. Dakle ukupan broj mogućih konfiguracija ugaonih kockica je  $8! \cdot 3^8$ . Analogno tome, kako je ivičnih kockica dvanaest, postoji  $12!$  mogućih rasporeda i pri tome svaka od njih može biti orijentisana na dva načina što daje ukupno  $2^{12}$  mogućih konfiguracija. Dakle postoji  $12! \cdot 2^{12}$  mogućih konfiguracija ivičnih kockica. Konačno dolazimo do broja od  $8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}$  teoretski mogućih konfiguracija Rubikove kocke, a to iznosi oko  $5.19 \times 10^{20}$ .

Pre nego što pokažemo da je samo deo ovih konfiguracija validan, odnosno, može se zaista dobiti rotacijama kocke u početnom, rešenom stanju, definišimo još nekoliko pojmova na primeru Rubikove kocke.

**Definicija 12.** Neka su  $(G, *)$  i  $(H, \bullet)$  dve grupe. Homomorfizam iz  $G$  u  $H$  je definisan kao funkcija  $\phi: G \rightarrow H$  takva da važi:  $\phi(a * b) = \phi(a) \bullet \phi(b)$  za svako  $a, b \in G$ .

Kod kocke definišemo preslikavanje  $\phi_{\text{ugao}}: G \rightarrow S_8$ . Dakle to je permutacija koja u kompoziciji sa trenutnom permutacijom iz  $G$ , daje određenu permutaciju samo ugaonih kockica  $(\sigma)$ . Svaki pokret iz  $G$  menja raspored ugaonih kockica, tj. određuje novu

permutaciju osam neorijentisanih ugaonih kockica. Tu permutaciju označavamo sa  $\sigma \in S_8$ . Tada je  $\phi_{\text{ugao}}(M)$  element  $S_8$  koji nam pokazuje kako su kockice međusobno promenile mesta, što možemo prikazati kompozicijom disjunktih ciklusa. Na isti način definišemo i homomorfizam  $\phi_{\text{vica}} : G \rightarrow S_{12}$  koji opisuje permutacije dvanaest neorijentisanih ivičnih kockica, kao i  $\phi_{\text{kocka}} : G \rightarrow S_{20}$ , što opisuje permutacije 20 ivičnih i ugaonih kockica.

**Definicija 13.** Jezgro homomorfizma  $\psi: G \rightarrow H$  je definisano kao  $g \in G \mid \psi(g) = 1_H$  i označava se kao  $\ker \psi$ .

Kod kocke jezgro homeomorfizma  $\psi_{\text{kocka}} : G \rightarrow S_{20}$  čine svi pokreti koji ne dovode do promene pozicija nijedne od kockica, već utiče samo na njihove orijentacije.

**Definicija 14.** Dejstvo grupe  $(G, *)$  na neprazan skup  $A$  je preslikavanje  $A \times G \rightarrow A$ , (gde za dato  $a \in A$  i  $g \in G$  dobijamo element  $a * g \in A$ ) koje zadovoljava sledeća dva svojstva:

- $(a * g_1) * g_2 = a * (g_1 * g_2)$ , za svako  $a \in A$  i  $g_1, g_2 \in G$
- $a * \Omega = a$ ,  $a \in A$  ( $\Omega$  je neutralni element grupe  $G$ ).

**Definicija 15.** Ako  $G$  deluje na skup konfiguracija  $A$ , orbita elementa  $a \in A$  je skup  $a \circ g : g \in G$ .

Kod kocke jednu orbitu čine sve moguće konfiguracije koje možemo dobiti delovanjem elemenata  $(G, *)$  na neku početnu konfiguraciju. Ukoliko je početna konfiguracija rešena kocka, njena orbita je skup svih validnih konfiguracija. S druge strane, ako bismo izvukli jednu kockicu iz složene kocke i zamenili joj orijentaciju, daljim rotacijama dobili bismo ponovo novu orbitu. Zbir konfiguracija iz svih mogućih orbita je zapravo broj kombinatorno mogućih konfiguracija.

**Teorema 4.** Pretpostavimo da grupa  $(G, *)$  deluje na skup  $A$  i neka je skup  $S$  generišući za  $G$ . Neka je  $P$  osobina tako da važi sledeće: kad god  $a \in A$  zadovoljava  $P$  i  $s \in S$ , onda i  $a * s$  zadovoljava  $P$ . Tada ako  $a_0 \in A$  zadovoljava  $P$ , onda svaki element orbite  $a_0$  zadovoljava  $P$ .

Sada ćemo upotrebiti sve prethodne definicije, teoreme i zaključke da bismo izračunali mogući broj konfiguracija Rubikove kocke. Dokažimo teoremu koja će nam dati direktan put ka rešenju.

**Teorema 5.** Konfiguracija Rubikove kocke  $(\sigma, \tau, x, y)$  je validna ako i samo ako važe sledeća tri uslova:

$$\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\tau)$$

$$\sum x_i \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\sum y_i \equiv 0 \pmod{2}$$

Kako u teoremi važi ekvivalencija to je moramo dokazati u oba smera. Prvo pretpostavimo da je konfiguracija  $(\sigma, \tau, x, y)$  validna i dokažimo da važi  $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\tau)$ ,  $\sum x_i \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $\sum y_i \equiv 0 \pmod{2}$ .

**Lema 2.** Ako su konfiguracije  $(\sigma, \tau, x, y)$  i  $(\sigma', \tau', x', y')$  u istoj orbiti onda važi da je  $\text{sgn}(\sigma) * \text{sgn}(\tau) = \text{sgn}(\sigma') * \text{sgn}(\tau')$ .

Uzmimo za konfiguraciju  $(\sigma', \tau', x', y')$  rešenu konfiguraciju  $(1, 1, 0, 0)$ . Kako je  $\sigma' = 1$  to je  $\sigma'$  jedinična permutacija. Odavde sledi da se permutacija sastoji od 8 ciklusa sa jednim elementom, pa je broj transpozicija jednak 0, tj. permutacija je parna i  $\text{sgn}(\sigma) = 1$ . Slično sledi da je  $\text{sgn}(\tau) = 1$ . A odavde prema prethodnoj lemi  $\text{sgn}(\sigma) * \text{sgn}(\tau) = 1$ , tj.  $\text{sgn}(\tau) = \text{sgn}(\sigma)$ .

**Lema 3.** Ako su konfiguracije  $(\sigma, \tau, x, y)$  i  $(\sigma', \tau', x', y')$  u istoj orbiti onda važi  $\sum x_i = \sum x'_i \pmod{3}$  i  $\sum y_i = \sum y'_i \pmod{2}$ .

Dokaz: Iz Teoreme 4 sledi da važi da je dovoljno dokazati da ako važi  $(\sigma', \tau', x', y') = (\sigma, \tau, x, y) * M$ , gde je  $M$  jedan od šest osnovnih pokreta na kocki. Onda je  $\sum x_i = \sum x'_i \pmod{3}$  i  $\sum y_i = \sum y'_i \pmod{2}$ . Pokažimo to na primeru gde je  $M = R$ . Neka je na početku desna strana kocke obeležena:

	$X_2$		$X_3$	
$X_{2+2}$	$X_{2+1}$		$X_{3+2}$	$X_{3+1}$
$X_{7+1}$	$X_{7+2}$		$X_{8+1}$	$X_{8+2}$
	$X_7$		$X_8$	

Ako zarotiramo ovu stranu za  $90^\circ$ , dobijamo:

	$X_{7+1}$		$X_{2+2}$	
$X_7$	$X_{7+2}$		$X_{2+1}$	$X_2$
$X_8$	$X_{8+1}$		$X_{3+2}$	$X_3$
	$X_{8+2}$		$X_{3+1}$	

Kako je  $x' = (x_1, x_7 + 1, x_2 + 2, x_4, x_5, x_6, x_8 + 2, x_3 + 1)$ . Tako da je  $\sum x'_i = \sum x_i + 6 = \sum x_i \pmod{3}$ . Analogno dokazujemo za  $y$ . Analogno dokazujemo za  $M \in \{F, D, B, U, R, L\}$ . QED.

Za rešenu konfiguraciju  $(1, 1, 0, 0)$  važi ( $\sum x_i \equiv 0$  i  $\sum y_i \equiv 0$ ). Ako su  $(\sigma, \tau, x, y)$  i  $(\sigma', \tau', x', y')$  validne konfiguracije onda su one u istoj orbiti sa rešenom konfiguracijom, pa prema prethodnoj lemi važi da je  $(\sum x_i \equiv 0$  i  $\sum y_i \equiv 0)$  i  $(\sum x'_i \equiv 0$  i  $\sum y'_i \equiv 0)$ .

Ovim smo dokazali jedan smer Teoreme 5. Dokažimo sada i drugi. Dakle, pretpostavimo da važi  $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\tau)$ ,  $\sum x_i \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $\sum y_i \equiv 0 \pmod{2}$  i dokažimo da je konfiguracija  $(\sigma, \tau, x, y)$  validna. Da bismo to dokazali, ideja je da nađemo niz koraka koji bi tu konfiguraciju vratili u početnu rešenu.

Dokaz ćemo izvesti pomoću četiri tvrđenja:

1. Ako je konfiguracija  $(\sigma, \tau, x, y)$  takva da važi  $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\tau)$ ,  $\sum x_i \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $\sum y_i \equiv 0 \pmod{2}$ , onda orbita konfiguracije  $(\sigma, \tau, x, y)$  sadrži konfiguraciju oblika  $(1, \tau', x', y')$  gde je  $\sigma' = 1$ . Ovim tvrđenjem postavljamo sve ugaone kockice na svoja mesta.

2. Ako je konfiguracija  $(1, \tau, x, y)$  takva da važi  $1 = \text{sgn}(\tau)$ ,  $\sum x_i \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $\sum y_i \equiv 0 \pmod{2}$ , onda orbita konfiguracije  $(1, \tau, x, y)$  sadrži konfiguraciju oblika  $(1, \tau', 0, y')$  gde je  $\sum x_i \equiv 0 \pmod{3}$ . Ovim tvrđenjem pravilno orijentišemo sve ugaone kockice.

3. Ako je konfiguracija  $(1, \tau, 0, y)$  takva da važi  $1 = \text{sgn}(\tau)$ ,  $\sum y_i \equiv 0 \pmod{2}$ , onda orbita konfiguracije  $(1, \tau, 0, y)$  sadrži konfiguraciju oblika  $(1, 1, 0, y')$ , gde je  $\tau' = 1$ . Ovim tvrđenjem postavljamo sve ivične kockice na svoja mesta.

4. Ako je konfiguracija  $(1, 1, 0, y)$  takva da važi  $1 = \text{sgn}(\tau)$ ,  $\sum y_i \equiv 0 \pmod{2}$ , onda orbita konfiguracije  $(1, 1, 0, y)$  sadrži konfiguraciju oblika  $(1, 1, 0, 0)$  gde je  $\sum y'_i \equiv 0 \pmod{2}$ . Ovim tvrđenjem pravilno orijentišemo sve ivične kockice.

**Lema 4.** Homeomorfizam  $\phi_{\text{ugao}} : G \rightarrow S_8$  je funkcija na.

Ovu lemu nećemo dokazivati, ali će nam koristiti u izvođenju dokaza za ova četiri tvrđenja.

Dokaz [Tvrđenje 1]: Iz prethodne leme sledi da postoji pokret  $M \in G$  tako da važi  $\phi_{\text{ugao}}(M) = \sigma^{-1}$ . Odavde sledi  $(\sigma, \tau, x, y) * M = (1, \tau', x', y')$  za neko  $\tau' \in S_{12}$ ,  $x' \in Z_3^8$  i  $y' \in Z_2^{12}$ . Iz Leme 3 sledi da će važiti  $\sum x_i = \sum x'_i \pmod{3}$  i  $\sum y_i = \sum y'_i \pmod{2}$ .

Sada ćemo dokazati da važi Tvrđenje 2. Osnovna ideja za orijentisanje ugaonih kockica jeste da koristimo pokrete koji će samo zameniti orijentaciju dve ugaone kockice. Prvo ćemo pokazati da potezi zaista postoje.

**Lema 5.** Ako su  $C_1$  i  $C_2$  bilo koje dve ugaone kockice, postoji pokret  $M \in G$  koji utiče na orijentacije (ali ne i pozicije)  $C_1$  i  $C_2$  i ne utiče na ostale ugaone kockice. Šta više, postoji takav pokret  $M$  da  $C_1$  rotira u smeru kazaljke na satu, a  $C_2$  u suprotnom.

Dokaz: Najpre pronadimo pokret  $M_0$ , takav da menja orijentacije dve proizvoljne ugaone kockice (npr.  $drb$  i  $drf$ ), a zatim ga nadogradimo drugim pokretima da bismo dobili pokrete koji menjaju i orijentacije ostalih kockica. Jedan od takvih je:

$$(DR^{-1})^3(D^{-1}1R)^3$$

koji možemo prikazati i ciklusima

$$(dfr\ rdf\ frd)(dbr\ rdb\ bdr)(df\ dr\ fr\ ur\ dr\ ub\ dl)$$

Tako je  $\phi_{\text{ugao}}(M_0) = 1$  i  $\psi_{\text{ugao}}(M_0) = (dbr\ rdb\ brd)(drf\ rfd\ fdr)$ . Dakle, ako je  $C_1 = dbr$  i  $C_2 = drf$ , lema je tačna. Spojimo ga sada sa drugim pokretima. Na osnovu leme 4. znamo da postoji  $M \in G$  koji premešta  $dbr$  na poziciju  $C_1$  a  $drf$  na poziciju  $C_2$ . Sada je  $M' = M^{-1}M_0M$  takav da utiče na orijentacije ugaonih kockica ali ne utiče na ostale ugaone kockice. Analogno se dokazuje za proizvoljne ugaone kockice  $C_1$  i  $C_2$ . QED.

Dokaz [Tvrđenje 2]: Pretpostavimo da je konfiguracija Rubikove kocke takva da najmanje dve ugaone kockice  $C_1$  i  $C_2$  nemaju odgovarajuću orijentaciju. Po prethodnoj lemi postoji pokret koji rotira  $C_1$  u smeru kazaljke na satu, a  $C_2$  u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu a ne utiče na ostale kockice. Primenjujući ovaj pokret jednom ili dva puta, možemo da budemo sigurni da  $C_1$  ima ispravnu orijentaciju. Kako nismo uticali na ostale kockice, sada imamo jednu kockicu manje sa neispravnom orijentacijom. Ponavljajući ovaj postupak dolazimo do konfiguracije  $(1, \tau', x', y')$  gde je najviše jedana kockica sa neispravnom orijentacijom, tj. najmanje sedam  $x_i$  vrede 0. Kako po lemi važi  $\sum x_i = \sum x'_i \pmod{3}$  sledi da je i poslednje  $x_i = 0$ , tj. konfiguracija kocke je  $(1, \tau', 0, y')$ . Iz Leme 2 sledi da ovim transformacijama permutacija  $\tau'$  ne menja svoje znak, a iz Leme 3 sledi da se  $\sum y'_i$  ne menja. QED.

Sada dokažimo Tvrđenje 3. tj. želimo da popravimo pozicije ivičnih kockica. U ovom slučaju koristimo pokrete kojima nećemo poremetiti već složene ugaone kockice.

**Lema 6.** Slika funkcije  $\phi_{\text{vica}} |_{\ker \psi_{\text{ugao}}} : \ker \psi_{\text{ugao}} \rightarrow S_{12}$  sadrži  $A_{12}$ . ( $\phi' = \phi | G'$  naziva se restri-



cijom funkcije  $\phi$  sa  $G$  na  $G'$ , gde je  $G'$  podskup od  $G$  i definisana je kao  $\phi: G' \rightarrow H$ , gde je  $\phi'(g) = \phi(g)$ .

Dokaz [Tvrdjenje 3]: Postoji pokret

$$M_0 = LR^{-1}U^2L^{-1}RB^2$$

gde  $M_0 \in \ker \psi_{\text{ugao}}$  i  $\phi_{\text{vica}} = (ub \ uf \ db)$ . Ako su  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  bilo koje tri ivične kockice, tada na osnovu Leme 6 postoji pokret  $M$  koji šalje  $ub$  na poziciju  $C_1$ ,  $uf$  na poziciju  $C_2$  i  $db$  na poziciju  $C_3$ , tako da ne utiče na promenu ostalih ivičnih kockica (ni na položaj ni na orijentaciju). Neka je  $M' = M^{-1}M_0M$  tada  $M' \in \ker \psi_{\text{ugao}}$  i  $\phi_{\text{vica}}(M') = (C_1 \ C_2 \ C_3)$ . Ova procedura se se poovi najviše 4 puta i onda se dolazi do identičke permutacije. QED.

**Lema 7.** Ako su  $C_1$  i  $C_2$  ma koje dve ivične kockice, postoji pokret  $M \in G$  koji menja orijentacije (ali ne i pozicije)  $C_1$  i  $C_2$  a nikako ne utiče na ostale kockice.

Dokaz: Poznato je da postoji bar jedan takav pokret:  $LR^{-1}FLR^{-1}DLR^{-1}BLR^{-1}ULR^{-1}F^{-1}LR^{-1}D^{-1}LR^{-1}B^{-1}LR^{-1}U^{-1}$ . Nazovimo ovaj pokret  $M_0$ . Njegova kompozicija disjunktih ciklusa je  $(fu \ uf) (bu \ ub)$ . Tada, ako su  $C_1$  i  $C_2$  bilo koje dve različite ivične kockice postoji  $M \in G$  koje šalje  $uf$  na poziciju  $C_1$  a  $ub$  na poziciju  $C_2$ . Tada pokret  $M' = MM_0M^{-1}$  menja orijentaciju  $C_1$  i  $C_2$ , tako da pri tome ne utiče na ostale kockice.

Dokaz [Tvrdjenje 4]: Za dokaz ovog tvrdjenja uzimamo argument korišćen u dokazu Tvrdjenja 2, tačnije pretpostavimo da je konfiguracija kocke takva da su najmanje dve ivične kockice pogrešno orijentisane. Primenujući pokret iz prethodne leme, menjamo odjednom orijentaciju dveju ivičnih kockica. Ponavljajući ovaj postupak možemo preorijentisati svih dvanaest ivičnih kockica, i samim tim dobijemo krajnju konfiguraciju gde je  $y' = 0$ . QED.

Zaključak: Iako smo ranije zaključili da je broj svih mogućih konfiguracija  $8!3^812!2^{12}$ , Teorema 5 kaže da od njih samo  $\frac{1}{2}$  zadovoljava prvi uslov,  $\frac{1}{3}$  zadovoljava drugi uslov, a  $\frac{1}{2}$  zadovoljava treći uslov. Sledi da je broj važećih konfiguracija  $\frac{1}{12}$  od kombinatornog broja, a to iznosi  $8!3^712!2^{10}$ .

## Uopštavanje broja konfiguracija za kocku oblika

$$(2k + 1) \times (2k + 1) \times (2k + 1)$$

### Kombinatorno moguć broj konfiguracija

Probajmo da izračunamo broj konfiguracija u opštem slučaju za neparan broj kockica na jednoj ivici, tj. Za kocku  $(2k + 1) \times (2k + 1) \times (2k + 1)$ , gde je  $k \in \mathbb{N}$ . Kod ovakvih kocki postoje ugaone i centralno-ivične kockice koje imaju ista svojstva kao i kod Rubikove kocke. Uz to, postoje i specijalni tipovi centralnih i ostalih ivičnih, necentralnih kockica. Slično kao i za kocku  $3 \times 3 \times 3$  možemo zaključiti da pokretima stranica i venaca ne možemo pomeriti centralnu kockicu, tj. da je ona nepokrena.

**Teorema 6.** Pokretanjem strana i venaca kocke svaku kockicu možemo premestiti samo na mesto kockice istog tipa.

Dokaz: Zaključimo prvo da ugaone kockice, s obzirom da su u jedini tip kockica sa tri vidljive strane mogu naći samo na mestima drugih ugaonih kockica. Posmatrajmo jednu proizvoljnu stranu oblika  $(2k + 1) \times (2k + 1) \times (2k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Na toj strani uočimo takođe proizvoljnu centralno-ivičnu kockicu. Nju možemo premestiti na drugu poziciju na tri načina. Rotiranjem strane i rotiranjem venaca u čijem preseku se ona nalazi. Kako se svim ovim pomeranjima (za bilo koji ugao) ona ponovo dovodi na mesto druge centralno-ivične kockice i kako je izabrana potpuno proizvoljno, sledi da se kockice ovog tipa mogu permutovati samo na pozicije kockica tog istog tipa. Posmatrajmo sada sve necentralne ivične kockice koje su na proizvoljnoj strani kocke i gde je svaka od njih na proizvoljno jednakom rastojanju od temena kocke. Ovakvih kockica ima ukupno osam na jednoj strani. Uočimo jednu od njih. Ona se takođe kao i centralno-ivična može jednim potezom pomeriti na tri načina. Svaki od ovih načina je dovodi na poziciju neke od drugih necentralno-ivičnih kockica koje su na nekom proizvoljnom rastojanju od temena. Kako je sve odabrano na proizvoljan način, to se ovakve kockice mogu permutovati samo na mestima drugih kockica sa istom osobinom, tj. sve one su istog tipa. Analogno posmatrajući centralne dolazimo do istih zaključaka. QED.

**Teorema 7.** Moguće su i parne i neparne permutacije necentralno – ivičnih i centralnih kockica pri

čemu ne postoji zavisnost parnosti njihovih permutacija i permutacija ostalih tipova.

**Teorema 8.** Dve uparene necentralno-ivične kockice se razlikuju, pa ne mogu da zamene mesta, a da pri tome ne promene i orijentaciju.

Ugaone kockice se nalaze u temenima kocke pa njih ima osam i sve su istog tipa. Centralno-ivičnih kockica ima 12 (po jedna na svakoj ivici) i one takođe pripadaju istom tipu. Sada posmatrajmo ivične necentralne kockice na jednoj proizvoljnoj strani kocke. Krećući se od ugaonih kockica sa suprotnog temena jedne ivice, uparujemo po dve ivične kockice koje su jednako udaljene od temena. Svaki par čine kockice istog tipa. Skup svih parova na svim ivicama kocke koji su jednako udaljeni od ugaonih čine jedan tip ivičnih kockica. Za posmatranu kocku  $(2k+1) \times (2k+1) \times (2k+1)$ , na jednoj ivici kocke imamo  $\frac{(2k+1)-1-2}{2} = k-1$

tipova necentralnih ivičnih, gde od  $2k+1$  kockica koliko ih ukupno ima na jednoj ivici oduzimamamo dve ugaone i jednu centralno-ivičnu a onda podelimo sa 2, jer po jedan par čine tip. Na jednoj ivici imamo po dve ivične kockice istog tipa, odnosno na jednoj strani osam njih. Oдавde sledi da će ukupan broj kockica istog tipa biti  $(8 \cdot 6) / 2 = 24$ , gde delimo sa dva jer svaka ivična kockica pripada dvema stranama, pa je dva puta uračunata u ukupan broj. Kod kocke čiji je broj kockica na strani za dva veći od posmatrane  $(2k+3)$  one će sada postati centralne kockice, s obzirom da im je samo jedna strana vidljiva. Iz ovog tvrđenja sledi da je broj kockica u okviru jednog tipa centralnih kockica nastalih od ivičnih necentralnih jednak četiri. Po jedan tip čine i centralne nastale od ugaonih i centralno-ivičnih, kojih takođe ima po četiri. Dakle ako posmatramo kocku  $(2k+1) \times (2k+1) \times (2k+1)$  broj svih njenih centralnih kockica biće  $(2k-1)^2$ , a kako svakom tipu pripadaju po četiri sledi da je broj tipova centralnih kockica  $\frac{(2k-1)^2-1}{4} = k(k-1)$ . Dakle

ukupan broj tipova kod kocke  $(2k+1) \times (2k+1) \times (2k+1)$  računamo kao zbir broja tipova centralnih  $k(k-1)$ , ivičnih necentralnih  $k-1$  i još dva tipa koja odgovaraju ugaonim i centralno-ivičnim kockicama, odnosno, konačno dobijamo  $k(k-1) + k-1 + 2 = k(k-1) + k + 1$ .

Koristeći prethodna objašnjenja možemo izvesti kombinatorno moguć broj konfiguracija kocke  $(2k+1) \times (2k+1) \times (2k+1)$ .

Posmatrajmo jedno teme kocke. U njemu se može nalaziti bilo koja od osam ugaonih kockica. Na drugo mesto možemo staviti bilo koju od sedam preostalih kockica. Idući tako dalje, slično kao za Rubikovu kocku dobijamo da je broj različitih permutacija ugaonih kockica  $8!$ . Kako svaka od njih može biti orijentisana na tri načina, to slično Rubikovoj kocki dobijamo da je broj različitih kombinacija orijentacija ugaonih kockica  $3^8$ .

Uočimo sada centralno-ivične kockice. Njih ima ukupno 12. Na prvom od 12 centralno-ivičnih mesta može stajati bilo koja od 12 centralno-ivičnih kockica, na drugom bilo koja od 11 preostalih, i tako sve do poslednje, pa se one mogu rasporediti na  $12!$  načina. Slično ivičnim kockicama Rubikove kocke, svaka od njih se može orijentisati na dva načina, pa je ukupan broj kombinacija orijentacija centralno-ivičnih kockica  $2^{12}$ .

Ivičnih necentralnih kockica ima po 24 svakog tipa, a po teoremi imamo da se njihova orijentacija ne može menjati, pa se one međusobno mogu permutovati na  $24!$  načina. Ranije je rečeno da je broj tipova ovih kockica jednak  $k-1$ , što dalje znači da je ukupan broj permutacija necentralnih ivičnih kockica  $24!^{k-1}$ .

Centralnih kockica je takođe po 24 svakog tipa (po četiri na svakoj strani), pa bi broj permutacija za jedan tip bio  $24!$ . Ali, usled postojanja identičnih centralnih pločica ista konfiguracija strane javljaće se  $4!$  puta, tj.  $4!^6$  puta za celu kocku, pa je broj različitih permutacija centralnih ivica jednak  $24!/4!^6$ . Kako imamo  $k(k-1)$  različitih tipova, ukupan broj svih permutacija centralnih ivica kocke biće  $\left(\frac{24!}{4!^6}\right)^{k(k-1)}$ .

Konačno, broj kombinatorno mogućih konfiguracija kocke  $(2k+1) \times (2k+1) \times (2k+1)$  iznosi  $8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \cdot 24!^{k-1} \cdot 24!^{k(k-1)} / (4!^6)^{k(k-1)}$ .

Za kocku  $(2k+1) \times (2k+1) \times (2k+1)$  važe uslovi Teoreme 5:

- $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\tau)$
- $\sum x_i \equiv 0 \pmod{3}$
- $\sum y_i \equiv 0 \pmod{2}$

gde bi  $\sigma$  predstavljala permutaciju ugaonih, a  $\tau$  permutaciju centralno-ivičnih kockica, a  $x$  i  $y$  njihove orijentacije. Iz teorema 7 i 8 sledi da je kombinatorno moguć broj konfiguracija necentralno-ivičnih i centralnih kockica jednak broju validnih konfiguracija

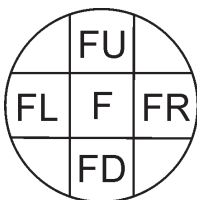


cija ovih tipova. Zaključujemo da je, kao i kod Rubikove kocke broj validnih jednak dvanaestini ukupnog broja kombinatorno mogućeg broja konfiguracija odnosno:

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \cdot 24!^{k-1} \cdot 24!^{k(k-1)}}{(4!^6)^{k(k-1)}}.$$

## Magična sfera

Magična sfera poput kocke ima šest strana, ali u ovom slučaju oblika kruga, sastavljenih od devet pločica iste boje. Njihov ukupan broj je  $9 \cdot 6 = 54$ . Primenimo Teoremu 1 na sferu. Neka je skup  $S = \{F, D, B, U, R, L\} \in G$ . Tada svaki pokret  $M$  zadovoljava osobinu da zadržava sve ugaone pločice iste boje u ugaonicima (mestima na kojima se nalaze ugaone pločice) koji odgovaraju istoj boji. Ako su pokreti  $M_1$  i  $M_2$  takvi da važi  $M_1, M_2 \in G$  i ova osobina, onda će ona važiti i za pokret  $M_1 * M_2$ . Kako važi  $G = \langle S \rangle$ , važiće i da svaka permutacija skupa  $G$  čuva ugaone pločice u njihovim ugaonicima. Notaciju strana ćemo preuzeti od kocke dakle:  $r$  (right),  $l$  (left),  $u$  (up),  $d$  (down),  $f$  (front) i  $b$  (back) desnu, levu, gornju, donju, prednju i zadnju stranu magične sfere. Centralne pločice na svakoj strani označavamo slovom strane na kojoj se nalazi. Ostale će imati dvoslovnu oznaku – prvo i dalje za stranu na kojoj se nalazi, a drugo za stranu sa kojom se dodiruje:



Za postojeca tri venca koristićemo obeležavanje  $urw$  (up-right wreath),  $ufw$  (up-front wreath) i  $r fw$  (right-front wreath) za gornji desni, gornji prednji i desni prednji venac.

Sada ćemo definisati i rotacije pomoću kojih se menja položaj pločica sfere. Što se tiče strana notacija je ista kao i za Rubikovu kocku: slovima  $R, L, U, D, F, B$  označavamo rotacije određenih strana za  $90^\circ$  u smeru kazaljke na satu. Pri tome, rotacija u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu ( $R', L', U', D', F', B'$ ) bila bi isto što i triput okretanje u smeru kazaljke na satu ( $R^3, L^3, U^3, D^3, F^3, B^3$ ). Središnje vence možemo posmatrati kao vence koji

spajaju gornju i desnu, gornju i prednju, odnosno desnu i prednju stranu. Njih, za razliku od strana možemo okretati za  $30^\circ, 60^\circ, \dots, 360^\circ$  (jer se svakom rotacijom venac može okretati za po jednu pločicu).  $WUR^k, WUF^k$  i  $WRF^k$  biće oznake za rotaciju venaca za  $30^\circ$ , gde  $k$  predstavlja broj rotacija. Definiramo pozitivne smerove rotacije venaca u smeru kazaljke na satu. Ukoliko je  $k = 12$  venac se vraća u početnu poziciju.

Iz toga sledi da kod sfere postoji 9 osnovnih generatora  $G = \langle S \rangle$ , gde je  $S = \{F, D, B, U, R, L, WUR, WUF, WRF\}$ .

Želimo da utvrdimo šta se dešava sa pločicama pri pokretima strana i venaca, tj. želimo da opišemo gde se svaka pločica nakon određenog pokreta premešta, koristeći cikluse. Pokažimo to sada na primeru jedne strane ( $f$ ) i jednog venca ( $frw$ ). Pokretom  $F$  vršimo permutaciju prikazanu ciklusom ( $fu fr fd fl$ ), a pokretom  $FRW$  permutaciju ( $fr f fl fl f lb bl b br rb r rf$ ).

Dokaz da je sfera zaista grupa, analogan je dokazu za Rubikovu kocku.

Primetimo sada par osobina sfere koje se ne razlikuju od kocke:

1. Neka su  $M_1$  i  $M_2$  takvi da važi  $M_1, M_2 \in (G, *)$  tada ne važi  $M_1 * M_2 = M_2 * M_1$ , tj. operacija  $*$  grupe  $G$  nije komutativna.

2. Neka je sfera u početnoj „rešenoj” konfiguraciji i  $M_1$  i  $M_2$  takvi da važi  $M_1, M_2 \in (G, *)$ . Ponavljajmo na sferi kombinaciju  $M_1 * M_2$  nekih  $n$  puta. Nakon tih  $n$  puta sfera će se vratiti u početno stanje (konfiguraciju).

Kako su kod sfere po četiri ugaone pločice nepokretne, ukupno imamo  $54 - 24 = 30$  pokretnih pločica. Numerišimo ih brojevima od 1 do 30.

**Teorema 9.** Kod sfere postoji samo jedna orbita, odnosno kombinatorni broj konfiguracija je ujedno i važeći broj konfiguracija.

Dokaz: Ovo dokazujemo time što utvrdimo da se odgovarajućim algoritmom iz bilo koje pozicije može doći do rešene konfiguracije. Objasnimo koji je postupak rešavanja sfere.

- Najpre uredimo centralne pločice, tako da boja svake odgovara boji ugaonih pločica na strani na kojoj se nalazi. Algoritam za ovakav raspored pločica je vrlo jednostavan.
- Kada uredimo centralne, potrebno je urediti i ostale pokretne pločice. Osnovna ideja postupka je zamena pločica koje se nalaze jedna

do druge, a na susednim su stranama. To postizemo tako što prvo rotiramo jednu od strana za  $90^\circ$ . Zatim venac odredjen tim dvema stranama za  $30^\circ$  tako da pločica sa nerotirane strane pređe na rotiranu stranu. Nakon toga na rotiranoj strani izvršimo njoj inverznu rotaciju. A zatim izvršimo i inverznu rotaciju već pokretanog venca.

Kako se na mestu centralnih pločica može naći bilo koja od 30 numerisanih, a iz prethodne stavke sledi da bilo koje dve necentralne možemo zameniti, zaključujemo da se bilo koja pokretna pločica može naći na bilo kojoj poziciji, odnosno da se iz bilo koje pozicije može doći do rešene. Ovim smo dokazali da sfera ima samo jednu orbitu. QED.

Za razliku od kocke kod koje postoje orijentisane kockice, kod sfere je svaka pločica zasebna, pa samim tim se ne postavlja pitanje orijentisanosti. Ali postoji po 5 identičnih pločica od svake boje. Među permutacijama tih pločica javljaju se identične konfiguracije usled postojanja jednakih pločica. Izračunajmo prvo broj permutacija, smatrajući sve pločice različitim, a onda otkrijmo koliko puta se te identične konfiguracije ponavljaju.

Kako na prvu poziciju možemo da stavimo bilo koju od 30 pločica, na drugu bilo koju od preostalih 29..., na tridesetu poziciju samo jednu preostalu, ukupan broj konfiguracija kada bi sve pločice bile različite bi bio  $30 \cdot 29 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 30!$ . Ako posmatramo rešenu sferu, ona će se ponavljati isti broj puta kao i bilo koja druga konfiguracija. Kako su njene pločice numerisane, na prvu poziciju možemo postaviti bilo koju od 5 iste boje, na drugu bilo koju od preostale četiri...na petu preostalu jednu. Dakle ovakva struktura strane će se ponoviti 5! puta. Kako imamo šest strana to će se rešena konfiguracija sfere ponoviti  $5!^6$  puta. Zaključujemo da je broj različitih konfiguracija sfere  $(30!) / (5!^6)$ .

## Zaključak

Primenom teorije grupa izračunato je da je broj validnih konfiguracija manji od broja koji se dobije kombinatornim metodom. Ipak, taj broj je i dalje suviše veliki, pa bi nasumično slaganje kocke bilo gotovo nemoguće.

## Korišćena literatura

Chen J. Group theory and Rubik's Cube.  
Dostupno na:  
<http://www.math.harvard.edu/.../Group Theory and the Rubik's Cube.pdf>

Conrad K. 15-puzzle (and Rubik's Cube).  
Dostupno na:  
<http://www.math.uconn.edu/kconrad/blurbs/grouptheory/15puzzle.pdf>

Davis T. Group theory via Rubik's Cube.  
Dostupno na:  
<http://www.geometer.org/rubik/group.pdf>

Ristanović D. 1982. *Madarska kocka*. Beograd: Beogradski izdavačko grafički zavod, specijalno izdanje časopisa „Galaksija“

---

*Ana Spasojević and Petra Antić*

## Determination of Number of Configurations of Rubik's Cube and Magic Sphere Using Group Theory

In this paper a group of operations on Rubik's Cube is defined and some properties are described, by using the group theory. The theoretically possible number of configurations is calculated. There is also a special way of presenting the configuration of the cube using permutations. In the end, the theory about the necessary conditions of a configuration was proven. That led to the conclusion that only part of the theoretically possible configurations can be reached by applying moves on a solved Rubik's Cube. A similar procedure is applied for calculating the number of configurations on the Magic sphere.



## Uloga asimetričnih informacija u trgovanju hartijama od vrednosti

*Cilj ovog rada je da uvede čitaoca u osnove asimetričnih informacija u trgovanju hartijama od vrednosti. Pokazali smo šta se dešava u slučaju kada trguju agenti sa istim i različitim informacijama. Takođe smo pokazali kako se tada ponašaju nove cene i kako se one mogu predvideti. Egzaktano je izračunat broj akcija koje investitor tereba da kupi, kao i njihova najverovatnija cena. U radu su takođe posmatrani likvidnost tržišta i agresivnost agenata i izvedeni zaključci koji potvrđuju koliko jedan agent svojom odlukom utiče na novu cenu. Najznačajniji iskorak predstavlja uopštenje formule za likvidnost i agresivnost agenta za slučaj n agenata.*

### Uvod

Svesni smo sve većeg uticaja i međusobne interakcije između matematike i berze. Matematičari su tu da modelima opišu i predvide ponašanja berze. Međutim, svi matematički rezultati su verovatni, ali ne sigurni. U radu će biti reči o velikom problemu, trgovanju informacijama. Matematičari uspešno predviđaju mnoge ishode ovakvog trgovanja.

Na tržištima hartija od vrednosti postoje tri vrste ljudi. Prvi od njih su agenti sa informacijama o novoočekivanim cenama. Oni dobijaju informaciju sa određenom preciznošću, na osnovu koje odlučuju o koracima koje će preduzeti na dalje. Druga vrsta su agenti bez informacija o novoočekivanim cenama, poznati još kao i šumovi. Oni očekuju nove cene samo na osnovu prethodnih. Treći tip ljudi koji postoje na berzama su takozvani market mejkeri. Njihov posao je da postave novu cenu na osnovu ukupne porudžbine svih agenata. Međutim, oni ne znaju koji deo porudžbine su postavili ljudi sa dojavama. Zbog postojanja prve dve vrste ljudi, informacije koje oni poseduju nazivaju se asimetrične.

Smatramo da svaki ulagač može uložiti sredstva na dve različite hartije od vrednosti. Prve su rizične deonice, a druge obveznice bez rizika. U odnosu na to koliko je investitor spreman da rizikuje, on će odabrati odnos sredstava koji će uložiti u jednu odnosno drugu hartiju.

### Osnovni pojmovi

Za verovatnoću nekog događaja  $X$  ćemo koristiti oznaku  $p(X)$ . Ako se pre događaja  $X$  odigrao događaj  $Y$ , koji ima uticaja na ishod događaja  $X$ , za verovatnoću događaja  $X$  ćemo koristiti oznaku  $p(X|Y)$ . Odavde imamo da je:

$$p(X \wedge Y) = p(X) \cdot p(Y|X) = p(Y) \cdot p(X|Y)$$

Kako važi jednakost dobijamo da je

$$p(X|Y) = \frac{p(X) \cdot p(Y|X)}{p(Y)}$$

Očekivana vrednost slučajne promenljive  $X$ , u oznaci  $E(X)$  se računa kao aritmetička sredina svih dosadašnjih vrednosti  $X$ . Uvedimo još neke od oznaka koje ćemo nadalje koristiti. Kao što smo već naveli, smatramo da investitor ulaže sredstva u dve vrste investicija:

- obveznice, bez rizika i isplatom  $R_f$
- deonice, rizične, sa isplatom  $X$ , gde se  $X$  ponaša kao normalna varijabla, to jest,  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Oznaka  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  obeležava Gausovu krivu raspodele, gde je  $\mu$  najverovatnija vrednost, a  $\sigma^2$  varijansa. U radu ćemo se baviti isključivo Gausovim rasodelama, jer je rad kvalitativnog tipa, to jest samo objašnjava kako i zašto se određene stvari dešavaju. U realnosti se ovakva raspodela retko sreće, ali posmatranjem bilo koje druge raspodele, dobija se da stvari i dalje zavise od istih promenljivih, samo da su koeficijenti različiti, ali to kvalitativno ništa ne menja.

Pretpostavimo da u početnom trenutku investitor poseduje  $e_0$  obveznica i  $z$  deonica. Investitor planira

---

*Uroš Kovačević (1991), Beograd, Sarajevska 50/18, učenik 4. razreda Matematicke gimnazije u Beogradu*

*Dorđe Rakić (1992), Beograd, Dr Aleksandra Kostića 14, učenik 3. razreda Matematicke gimnazije u Beogradu*

da kupi  $\gamma$  obveznica i  $\vartheta$  deonica. Neka je, bez umanjenja opštosti, cena obveznice 1, a deonice  $P_x$ . Bogatstvo ulagača obeležavamo sa  $W$ , a njegovu funkciju korisnosti sa  $U$ . Zavisnost između  $U$  i  $W$  je definisana formulom:

$$U(W) = -e^{\tau W}$$

gde je  $\tau$  apsolutna averzija ulagača prema riziku, koju definišemo kao negativan količnik drugog i prvog izvoda funkcije  $U(W)$ . Sama funkcija korisnosti je rešenje linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima,

$$\frac{d^2 U}{dW^2} = -\tau \frac{dU}{dW}$$

U zavisnosti od apsolutne averzije prema riziku dobijamo različite grafike funkcije  $U(W)$ . Averzija prema riziku je broj koji pokazuje sklonost agenta prema riziku: što je koeficijent  $\tau$  veći, veća je spremnost agenta da rizikuje. Funkcija korisnosti je eksponencijalna funkcija po promenljivoj  $W$ , gde su za različite agente koeficijenti  $\tau$  različiti, ali za jednog agenta uvek isti.

Iz navedenog vidimo da što je agent skloniji riziku, to jest, što mu je koeficijent  $\tau$  veći, to i njegova funkcija korisnosti  $U$  postiže veće vrednosti. Kako ukupno početno bogatstvo ostaje konstantno imamo da je

$$P_x \cdot \vartheta + \gamma = P_z \cdot z + e_0$$

odnosno važi da je

$$\gamma = e_0 + P_x(z - \vartheta) \quad (1)$$

Ukupna dobit se računa po formulama:

$$W = \gamma \cdot R_f + \vartheta \cdot X \quad (2)$$

$$W_0 = e_0 \cdot R_f + z \cdot X \quad (3)$$

Kombinacijom formula (1), (2) i (3) dobijamo:

$$W = R_f \cdot W_0 + \vartheta \cdot (X - R_f \cdot P_x)$$

Sada ćemo navesti još jednu formulu koja će nam biti od velike važnosti u daljem radu. Matematičko očekivanje funkcije  $e^x$  računamo po formuli:

$$E(e^x) = e^{\mu_x + \frac{1}{2}\sigma_x^2}$$

Cilj svakog ulagača je da maksimizuje očekivanu vrednost funkcije  $U(W)$ .

## Novoočekivana cena

Kao što je već napomenuto, ulagač treba da maksimizuje očekivanu vrednost funkcije  $U(W)$ , odnosno imamo:

$$\begin{aligned} \max E(U) &= E(e^{-\tau W}) \\ &= E\left(-e^{-\tau(W_0 + \vartheta(X - P_f R_f))}\right) \end{aligned}$$

$$= E\left(-e^{-\tau R_f W_0 - \tau \vartheta X + \tau \vartheta P_f R_f}\right)$$

U prethodnom izrazu vidimo da je jedino član  $e^{-\tau \vartheta X}$  zavisen od  $X$ , tako da se prethodna formula svodi na:

$$-e^{R_f \tau (P_f - W_0)} E(e^{-\tau \vartheta X})$$

Ako uvedemo smenu  $y = -\tau \vartheta X$ , dobijamo da je  $\mu_y = -\tau \vartheta \mu_x$  i  $\sigma_y^2 = \tau^2 \vartheta^2 \sigma_x^2$ . Uvrštavanjem dobijenog u formulu, dobijamo da važi:

$$\begin{aligned} \max \left( -e^{R_f \tau (P_f - W_0)} E(e^y) \right) &= \\ &= -e^{R_f \tau (P_f - W_0)} e^{\mu_y + \frac{1}{2}\sigma_y^2} = \\ &= -\exp \left( R_f \tau (P_f - W_0) + \mu_y + \frac{1}{2}\sigma_y^2 \right) = \\ &= -\exp \left( R_f \tau (P_f - W_0) + \tau \vartheta \mu_x + \frac{1}{2}\tau^2 \vartheta^2 \sigma_x^2 \right) \end{aligned}$$

Budući da funkcija  $-\exp(x)$  postiže maksimum u  $x = 0$ , mora biti zadovoljen sledeći uslov:

$$R_f \tau (P_f - W_0) + \tau \vartheta \mu_x + \frac{1}{2}\tau^2 \vartheta^2 \sigma_x^2 = 0$$

Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobijamo:

$$\vartheta = \frac{\mu_x - P_x R_f}{\tau \sigma_x^2}, \quad (4)$$

odnosno da ulagač treba da kupi  $\vartheta$  deonica, u zavisnosti od svoje averzije prema riziku  $\tau$ . Ova formula potvrđuje intuiciju, jer broj deonica koje kupuje ulagač se množi sa  $1/\tau$ , odnosno, što je veća averzija prema riziku, to će ulagač kupiti manje deonica, a više obveznica. Sada možemo izračunati i ukupnu potražnju. Kao što smo već primetili, za različite ulagače, formula za količinu akcija se razlikuje samo po averziji prema riziku. Zbog toga možemo da napišemo:

$$\text{Potražnja} = \sum_{i=1}^I \frac{\mu_x - P_x R_f}{\tau_i \sigma_x^2}$$

gde je  $I$  broj ulagača, a  $\tau_i$  averzija prema riziku svakog od ulagača. Ako uvrstimo da je količinska ponuda deonica po agentu  $Z$ , imamo da važi:

$$\text{Ponuda} = Z \cdot I$$

u slučaju ekvilibrijuma imamo da je ponuda jednaka potražnji, pa samim tim i da je:

$$M \cdot I = \sum_{i=1}^I \frac{\mu_x - P_x R_f}{\tau_i \sigma_x^2}$$

Daljim sređivanjem dobijamo da je novoočekivana cena, u slučaju ekvilibrijuma:

$$P_x = \frac{\mu_x - \frac{Z \sigma_x^2}{\eta}}{R_f} \quad (5)$$

gde je  $\eta = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{1}{\tau_i}$ .

## Jedinstvenost ekvilibrijuma

Posmatrajmo slučaj kada postoji  $\lambda \in [0, 1]$  informisanih ulagača i  $1 - \lambda$  neinformisanih. Informacijom ćemo smatrati funkciju oblika  $Y = X + \varepsilon$ , gde je  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Ovo možemo pretpostaviti, jer nulta srednja vrednost ne umanjuje opštost.  $Y$  predstavlja informaciju o novoj ceni. Bez umanjenja opštosti možemo uzeti da je  $R_f = 1$  i pošto je  $W_0$  nebitna za dalji razvoj (ni jedna izvedena formula ne zavisi od  $W_0$ ), možemo pisati  $W_0 = 0$ . Smatramo takođe da svi informisani agenti dobijaju istu informaciju. Takođe, na osnovu formule (5), bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je  $P_x$  linearna funkcija, oblika  $P_x = a + bY - dZ$ . Posmatraćemo odvojeno informisane i neinformisane agente.

### Informisani agenti

Svaki od informisanih agenata računa  $\vartheta_i$  (formula za  $\vartheta$  koja je već dobijena, samo modifikovana dodavanjem uslovne verovatnoće, jer agenti zasnivaju svoja očekivanja na informaciji koju poseduju), odnosno količinu deonica koje treba da kupi, na sledeći način:

$$\begin{aligned}\vartheta_i &= \frac{E(X|Y) - P_x}{\tau \cdot \text{var}(X|Y)} \\ E(X|Y) &= \frac{\sigma_x^2 \cdot Y}{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_x^2} \\ \text{var}(X|Y) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2 \cdot \sigma_x^2}{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_x^2}\end{aligned}$$

Sređivanjem dobijamo da za  $\vartheta_i$  važi:

$$\vartheta_i = \frac{\sigma_x^2 Y - P_x (\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2)}{\tau (\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2)}.$$

### Neinformisani agenti

Neinformisani agenti računaju  $\vartheta_n$  ( $\vartheta_{\text{neinformisani}}$ ) po sledećim formulama jer zasnivaju svoja verovanja na trenutnim cenama:

$$\begin{aligned}\vartheta_n &= \frac{E(X|P_x) - P_x}{\tau \cdot \text{var}(X|P_x)} \\ E(X|P_x) &= \frac{\beta \cdot \sigma_x^2}{\beta^2 (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_x^2) + d^2 \sigma_z^2} \\ \text{var}(X|P_x) &= \frac{b^2 \sigma_\varepsilon^2 \sigma_x^2 + d^2 \sigma_z^2}{b^2 (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_x^2) + d^2 \sigma_z^2}\end{aligned}$$

Sređivanjem dobijenih formula dobijamo traženu zavisnost:

$$\vartheta_n = \frac{b\sigma_x^2 - P_x(b^2(\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2) + d^2\sigma_z^2)}{\tau b^2(\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2) + d^2\sigma_z^2}$$

U slučaju ekvilibrijuma imamo da je ponuda jednaka potražnji. Ponuda je  $Z$ , a potražnja  $\lambda\vartheta_i + (1 - \lambda)\vartheta_n$ . Izjednačavanjem i sređivanjem ove jednakosti se dobija da je:

$$\begin{aligned}a &= 0 \\ \frac{b}{d} &= \frac{\lambda}{\tau\sigma_\varepsilon^2}\end{aligned}\quad (6)$$

Dobijanjem koeficijenata  $a$ ,  $b$  i  $d$  pokazali smo da postoji jedinstveni ekvilibrijum. Odnos koeficijenata  $b$  i  $d$  je jako bitan zaključak o kome će biti više reči u zaključku.

## Osnove kreiranja nove cene hartije od vrednosti

Do sada su razmatrane male investicije, koje slabo utiču na tržište, a poznato je da postoje slučajevi gde jedna investicija može da „pomeri“ celo tržište. Posmatrajmo slučaj u kome postoje dve vrste investitora. Smatramo da će informisani investitor kupiti  $\vartheta$  akcija, dok će šumovi kupiti  $Z$ . Market mekjer postavlja novu cenu na osnovu ukupne narudžbine  $\omega = Z + \vartheta$  odnosno postavlja  $P_x = E(X|\omega)$ .

Neka je  $P_x$ , zbog formule (5) i uspostavljanja ekvilibrijuma, linearna funkcija zadata formulom  $P_x = \gamma + \lambda \cdot \omega$ . Tada se problem investitora svodi na:  $\max E(\pi|X) = E(\vartheta(X - P_x)|X) = \vartheta(X - \gamma - \lambda\vartheta)$ , jer važi da je  $E(Z|X) = 0$ . Odatle dobijamo da investitor treba da kupi  $\vartheta = \frac{X - \gamma}{2\lambda}$  hartija od vrednosti.

Ovo je bila priča iz ugla investitora. Posmatrajmo sada ceo problem iz pozicije market mekjera. On smatra da se  $\vartheta$  računa po linearnoj formuli, odnosno da važi  $\vartheta = \alpha + \beta \cdot X$  zbog prethodne formule. Posle toga on postavlja novu cenu po formuli:

$$\begin{aligned}P_x &= E(X|\omega) = E(X|\alpha + \beta X + Z) = \\ &= \mu_x + \frac{\text{cov}(X, \omega)}{\text{var}(\omega)} (\omega - E(\omega)) = \\ &= \mu_x + \frac{\beta \sigma_x^2}{\beta^2 \sigma_x^2 + \sigma_z^2} (\omega - E(\omega))\end{aligned}$$

Postavljanjem ekvilibrijuma dobijamo da važi:

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_z}$$

$$\beta = \frac{\sigma_z}{\sigma_x}$$

Koeficijent  $\lambda$  predstavlja mogućnost jedne investicije da utiče na novu cenu. Što je  $\lambda$  manje, investicija će manje uticati na cenu, tj., tržište je likvidnije. Koeficijent  $\lambda^{-1}$  označava dubinu tržišta, to jest, njegovu likvidnost. Da ne postoje investitori bez informacija, tržište bi „presušilo“, odnosno, investitori sa informacijama bi imali jako veliku moć pomeranja cena.

Tvrđenje je potvrđeno formulom za  $\lambda$  jer se za male vrednosti  $\sigma_z$  dobijaju i male vrednosti  $\lambda^{-1}$ , odnosno tržište će „presušiti“. Koeficijent  $\beta$  predstavlja agresivnost poslovanja agenata koji poseduju informaciju, što veću „buku“ prave šumovi to agenti imaju više prostora za trgovanje, to jest igraju agresivnije, što je preciznija sama informacija, agenti igraju agresivnije, što je sasvim logično.

Posmatrajmo konačno i očekivanu dobit investitora. On očekivanu dobit računa po formuli:

$$E(\vartheta(X - P_x)) = \frac{1}{2} \sigma_x \sigma_z.$$

## Primeri

**Primer 1.** Posmatrajmo slučaj sa dva insajdera koji imaju perfektne dojave o novoočekivanoj ceni deonice, odnosno znaju egzaktanu cenu deonice.

U navedenom slučaju ukupna narudžbina iznosi  $\omega = \vartheta_1 + \vartheta_2 + Z$ . Zna se da je cena nove deonice linearno zavisna od  $\omega$ , odnosno oblika  $P_x = \gamma + \lambda\omega$ .

Posmatrajmo sada prvog insajdera. On očekuje da će narudžbina drugog insajdera biti zadata formulom  $\vartheta_2 = \beta_2 X$ . U tom slučaju je njegov cilj da maksimizuje funkciju dobiti, odnosno:

$$\max \vartheta_1(X - P_x) = \vartheta_1(X - \lambda(\vartheta_1 + \beta_2 X))$$

Odatle dobijamo da je:

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{X - \gamma}{\lambda} - \beta_2 X \right).$$

Kako isti uslovi vaze i za drugog insajdera, i on će količinu deonica računati po formuli:

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{X - \gamma}{\lambda} - \beta_1 X \right).$$

Zbog istih podataka kojima raspolažu oba insajdera, javlja se simetrija, odnosno  $\beta_1 = \beta_2$ :

$$\vartheta = \frac{1}{2} \left( \frac{X - \gamma}{\lambda} - \beta X \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{X - \gamma}{\lambda} - \vartheta \right),$$

pa odatle jasno dobijamo da je

$$\vartheta = \frac{X - \gamma}{3\lambda}.$$

Sada posmatrajmo market mejkera. On postavlja novoočekivanu cenu po formuli:

$$P_x = \mu_x + \frac{2 \cdot \beta \sigma_x^2}{4 \cdot \beta^2 \sigma_x^2 + \sigma_z^2} (\omega - E(\omega))$$

Sređivanjem dobijene jednačine dobijamo koeficijente  $\lambda$  i  $\beta$

$$\lambda^{-1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_x}$$

$$\beta = \frac{\sigma_z}{\sigma_x \sqrt{2}}.$$

**Primer 2.** Posmatrajmo slučaj sa  $n$  insajdera koji imaju perfektne dojave o novoočekivanoj ceni deonice, odnosno znaju egzaktanu cenu deonice.

Ukupna narudžbina je  $\omega = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n + Z$ . Pretpostavimo da je  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2)$ . Ova pretpostavka ne umanjuje opštost, jer i nulta srednja vrednost ne umanjuje opštost. Dobijamo da je cena nove deonice linearno zavisna od  $\omega$ , odnosno oblika  $P_x = \lambda\omega$ . Za svakog agenta važi da će računati količinu akcija koje će kupiti po linearnoj funkciji  $\vartheta_i = \beta_i X$ .

Treba naglasiti da agenti imaju linearnu funkciju korisnosti, odnosno funkciju  $U(\pi) = \vartheta(X - P_x)$ , gde je  $\pi$  profit koji oni treba da maksimizuju.

Za svakog agenta  $i$  važi:

$$\begin{aligned} \max E(\pi_i | X) &= E(\vartheta_i(X - P_x) | X) = E(\vartheta_i(X - \lambda\omega)) \\ &= E(\vartheta_i(X - \lambda(\vartheta_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \vartheta_j + Z))) \end{aligned}$$

Kako je  $E(Z|X) = 0$ , i zbog simetričnosti važi  $\beta_m = \beta_k$ , agent treba da maksimizuje sledeću funkciju:

$$\begin{aligned} &\vartheta(X - \lambda\vartheta_i - \lambda \sum_{j=1, j \neq i}^n \vartheta_j) = \\ &= \vartheta_i(X - \lambda\vartheta_i - \lambda(n-1)\beta X) \end{aligned}$$

Odatle dobijamo da je:

$$\vartheta = \frac{1 - (n-1)\lambda\beta}{2\lambda} X.$$

Kako je  $\vartheta = \beta X$  važi da je  $\beta = \frac{1 - (n-1)\lambda\beta}{2\lambda}$ ,

odnosno

$$\lambda = \frac{1}{\beta(n+1)}. \quad (9)$$

Sada posmatrajmo market mejkera. On postavlja novoočekivanu cenu po formuli:



$$P_x = \frac{\text{cov}(X, \omega)}{\text{var}(\omega)} (\omega - E(\omega)) =$$

$$= \frac{n\beta\sigma_x^2}{n^2\beta^2\sigma_x^2 + \sigma_z^2} (\omega - E(\omega)).$$

Kako je  $E(\omega) = 0$  i  $P_x = \lambda\omega$  dobijamo da je:

$$\lambda = \frac{n\beta\sigma_x^2}{n^2\beta^2\sigma_x^2 + \sigma_z^2} \quad (10)$$

Iz formula (9) i (10) dobijamo koeficijente  $\lambda$  i  $\beta$ :

$$\lambda^{-1} = \frac{\sigma_z(n+1)}{\sigma_x\sqrt{n}} \quad (11)$$

$$\beta = \frac{\sigma_z}{\sigma_x\sqrt{n}}. \quad (12)$$

## Zaključak

Prvi zaključak do koga smo došli u radu je količina akcija koje treba da kupi ulagač. Po formuli (4) se saznaje da količina kupljenih akcija ne zavisi od početne količine.

Drugi zaključak koji izvodimo je vezan za novo-čekivanu cenu. Po formuli (5) se vidi da cena zavisi samo od količine ponude i harmonijske sredine averzija prema riziku svih ulagača. Takođe možemo primetiti da i veća ponuda za sobom povlači više rizika, a i da cena opada ako je potražnja niža.

Količnik u formuli (6) nam pokazuje da što je više informisanih agenata, to je lakše dobiti informaciju o novoj ceni. što je informacija lošija to cena otkriva manje informacija. Isto važi za averziju prema riziku, to jest, što je veća averzija prema riziku ulagača, to cena otkriva manje informacija.

Takođe, treba napomenuti da smo došli do interesantnih zaključaka vezanih za likvidnost tržišta i agresivnost agenata. Ti zaključci su dati nakon formule (7).

Izvođenjem formule (8) smo dobili nestandardni način računanja očekivane dobiti. Koeficijent u formuli (9) prikazuje koliko jedan agent svojom odlukom utiče na cenu.

Šesto poglavlje nam skicira primenu celokupne teorije na dva primera. Posmatrajmo formule (11) i (12). Pored zaključaka koje smo izveli nakon formule (7), možemo doći do još par novih. Uviđamo da povećanjem broja perfektno informisanih agenata opada njihova agresivnost trgovanja. Takođe uviđamo da što je više agenata, svaki od njih pojedinačno mnogo slabije deluje na tržište, međutim zajedno

predstavljaju veću pretnju za tržište nego u slučaju jednog agenta.

Svi zaključci do kojih smo došli ovim radom su jasni i očekivani. Oni opisuju zašto i kako se dešavaju stvari iz realnog života berze.

**Zahvalnost.** Posebno bi želeli da se zahvalimo mentoru Aleksandru Cvetkoviću na velikoj pomoći. Osim Aleksandru, hteli bi da se zahvalimo Lazaru Krstiću i Slobodanu Jeliću na vremenu koje su nam posvetili.

## Literatura

Admati A. R., Peleiderer P. 1986. A monopolistic market for information. *Journal of Economic Theory*, **39**: 400.

Admati A. R. 1991. The informational role of prices. *Journal of Monetary Economics*, **28** (2): 347.

Admati A. R. 2007. A monopolistic market for information. *Econometrica*, **67**: 1506.

Easley D., O'Hara M. 2005. Price trade size and information in securities markets. *Journal of Financial Economics*, **19**: 69.

Kyle A. S. 1985. Continuous auctions and insider trading. *Econometrica*, **53**: 1315.

---

*Đorđe Rakić and Uroš Kovačević*

## Role of Asymmetric Information in Financial Markets

The main purpose of our work is to introduce the reader to the basics of asymmetric information in financial markets. We will show what happens when people with different information decide to trade, their effect on new prices of shares, and how they can anticipate new expected prices. It has been shown how one can exactly calculate the amount of shares to buy. We made new conclusions about the liquidity of the market. The biggest step forward was a result for the way  $n$  agents with information interact with one another. 