Projet COMPLEX
Problème du VERTEX COVER

Esther CHOI (3800370)
Folco BERTINI
M1 DAC - Groupe 1

October 21, 2021

Contents

Abstract

Ce document constitue le rapport du projet de l'UE COMPLEX, suivie au premier semestre du M1 Informatique à Sorbonne Université.
Les tests de performance des différents algorithmes ont été réalisés avec un processeur Intel ©Core ™i7-8550U 1.80GHz.

1 Définition du problème

Une couverture d'un graphe est un ensemble de sommets qui couvre toutes les arêtes du graphe (une arête est couverte lorsqu'au moins une de ses extrémité se trouve dans la couverture).
Le problème VERTEX COVER est défini de la façon suivante :

- entrée : un graphe non orienté G
- sortie : une couverture de G de taille minimale

Le but de ce projet est d'implémenter des algorithmes approchés et exacts pour résoudre le problème VERTEX COVER.

2 Graphes

Pour l'implémentation de nos graphes, nous avons choisi d'utiliser la librairie networkx qui contient de nombreuses fonctions pratiques dont nous nous sommes servis pour coder les méthodes de base.

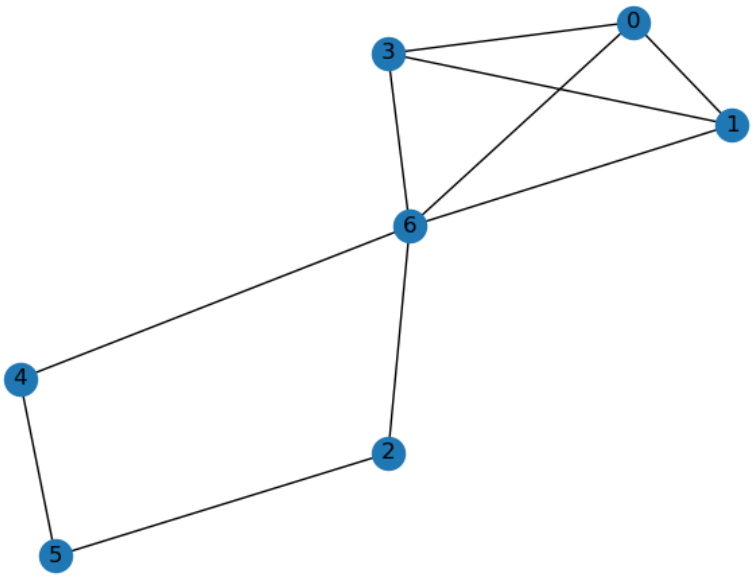
3 Méthodes approchées

3.1) Soit le graphe I suivant :

Une couverture optimale est $C_{opt} = \{1, 2, 4\}$. L'algorithme glouton renvoie la solution $C = \{0, 1, 2, 4\}$ qui a un sommet de plus.
En effet, voici l'exécution complète de algo_glouton pour ce graphe I :

- initialisation : arêtes $E = [\{0, 2\}, \{0, 1\}, \{0, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}]$
  couverture $C = \{\}$
- boucle while :
  - $C = \{0\}$
    $E = [\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}]$
  - $C = \{0, 1\}$
    $E = [\{2, 3\}, \{4, 5\}]$
  - $C = \{0, 1, 2\}$
    $E = [\{4, 5\}]$
  - $C = \{0, 1, 2, 4\}$
    $E = []$
- résultat final : $C = \{0, 1, 2, 4\}$

Figure 1: Graphe I



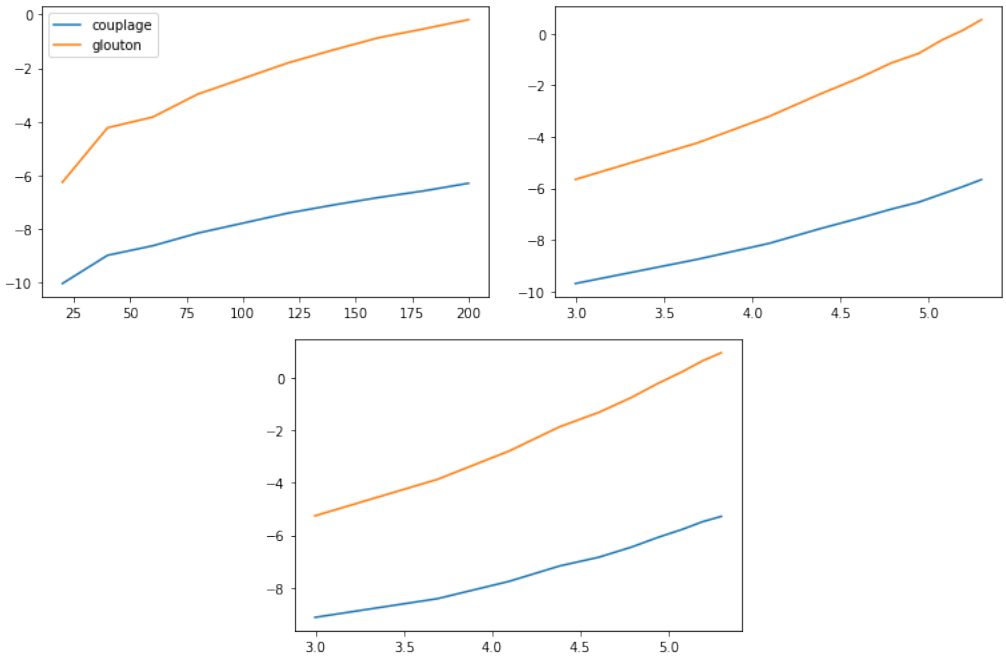
Ceci montre que algo_glouton n'est pas optimal et qu'il n'est pas 1.2-approché.
En effet, s'il l'était, alors pour toute instance de VERTEX COVER, le rapport d'approximation entre la solution retournée et une solution optimale serait inférieur ou égal à 1.2.
Or pour l'instance I précédente, ce rapport vaut $r = \frac{|C|}{|C_{opt}|} = \frac{4}{3} \approx 1.33 > 1.2$.
Donc algo_glouton n'est pas 1.2-approché.

3.2) Comparons les deux algorithmes algo_couplage et algo_glouton.
Pour cela, nous avons commencé par calculer N_{max} comme suggéré dans l'énoncé. Nous avons pris $p = 1$ et nous nous sommes limités à un temps d'éxécution de quelques secondes. Nous avons ainsi trouvé $N_{max} = 200$.

1. *Comparaison du point de vue du temps de calcul* :
   Les graphiques suivants montrent les temps de calcul pris par les deux algorithmes en fonction de n le nombre de sommets et p la probabilité d'apparition d'une arête (nous avons passé les ordonnées au log).
   Nous avons pris comme ensemble valeur pour n l'ensemble $\{N_{max}/10, 2N_{max}/10, ..., N_{max}\}$.
   Pour chaque n, nous avons généré aléatoirement 10 graphes sur lesquels nous avons appliqué les fonctions algo_couplage et algo_glouton. Nous avons pris la moyenne des temps d'exécution.

   Dans ces graphiques, nous pouvons observer que pour les deux algorithmes, le temps de calcul augmente de façon linéaire avec n et p, et que algo_couplage est nettement meilleur que algo_glouton.

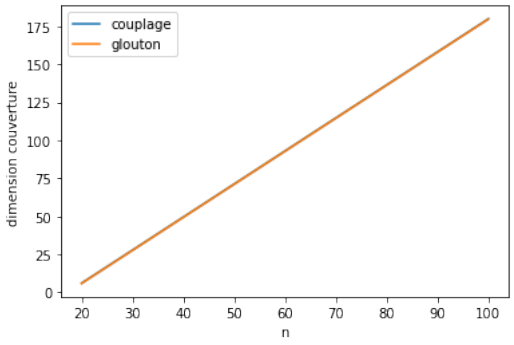
Figure 2: gauche : $p = 0.25$, droite : $p = 0.5$, bas : $p = 0.75$



2. *Comparaison du point de vue de la qualité de la solution* :

   Le facteur principal pour évaluer la qualité des solutions est la longueur de la couverture.
   Nous allons donc comparer les longueurs des solutions retournées par les deux algorithmes.
   Nous avons pris la moyenne sur 3 essais sur 30 N différents jusqu'à 100.

   $p = 1$ Avec des graphes complets, nous retrouvons des résultats très proches entre les deux méthodes, en effet le rapport est : $\dfrac{dim_{glouton}}{dim_{couplage}} = 0.993$

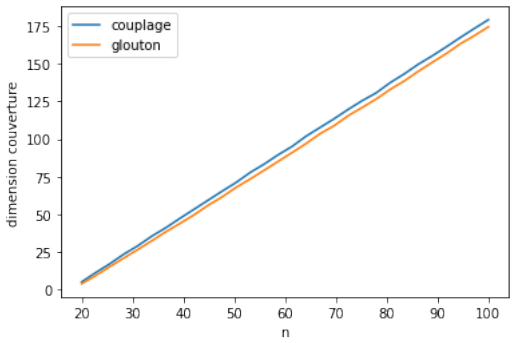


   Nous pouvons en effet remarquer que algo_couplage renvoie toujours comme couverture

l'ensemble de tous les sommets (donc de taille n), puisque l'on ajoute les sommets deux par deux ; et algo_glouton renvoie toujours une couverture de taille $n-1$ (qui est bien sûr une solution optimale).

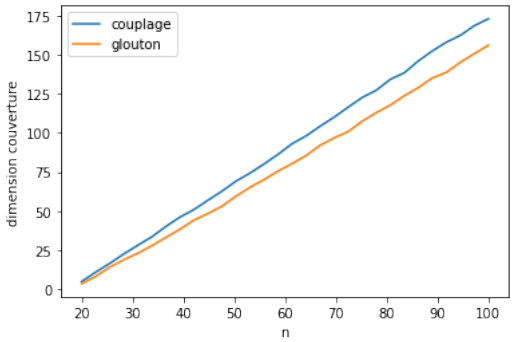
$p = 0.25$ Nous observons que même en réduisant p jusqu'à 0.25, les résultats ne varient beaucoup non plus (nous avons effectué les tests pour les autres p, mais nous les excluons de ce document car ils n'apportent pas d'informations particulières).

En effet, $\frac{dim_{glouton}}{dim_{couplage}} = 0.938$, la différence entre les deux algorithmes est donc petite.



$p = 1/\sqrt{n}$ Ce n'est qu'avec des graphes particulièrement vides que l'on commence à observer une différence de qualité remarquable.

En effet, $\frac{dim_{glouton}}{dim_{couplage}} = 0.858$. La méthode glouton prend le dessus ici, ce qui nous indique qu'avec des graphes de plus en plus vides, on s'approche des cas limites de l'algorithme de couplage.



Avec p qui varie de 0 à 1, on obtient le tableau suivant pour $\frac{dim_{glouton}}{dim_{couplage}}$:

0.65384615	0.6875	0.70945946	0.71604938	0.74712644
0.78888889	0.80337079	0.79891304	0.81914894	0.84375
0.84210526	0.87894737	0.8814433	0.84848485	0.89175258
0.88383838	0.91752577	0.90909091	0.915	0.95

Nous concluons en affirmant que l'algorithme glouton se révele meilleur en terme de qualité malgré un temps d'exécution plus long. Lorsqu'il y a beaucoup d'arêtes, la différence peut être considérée négligeable, mais avec des graphes "vides", l'algorithme glouton prend un avantage plutôt fort.

4 Méthodes exactes : algorithme de branch-and-bound

4.1.2) La méthode décrite dans cette question correspond à notre fonction branch.
La pile contient les noœuds de l'arbre à explorer. Chaque noœud est un couple (G, C) où G est le graphe réduit au fur et à mesure et C la couverture en construction.
Voici une exécution complète de branch sur le graphe suivant :

4.2.1) Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, où V est l'ensemble des sommets de et E l'ensemble des arêtes. On note $n = |V|$ et $m = |E|$.
Soit M un couplage et C une couverture de G.
Posons $b_1 = \lceil \frac{m}{\Delta} \rceil$, $b_2 = |M|$ et $b_3 = \frac{2n-1-\sqrt{(2n-1)^2-8m}}{2}$.
Montrons que $|C| \geq b_1, b_2, b_3$.

- Soit Δ le degré maximum des sommets de G. Comme chaque sommet de C est une extrémité d'au plus Δ arêtes, on a : $|C| \times \Delta \geq m \implies |C| \geq \frac{m}{\Delta}$.
  $|C|$ étant un entier, on peut prendre $b_2 = \lceil \frac{m}{\Delta} \rceil$ comme borne inférieure (???).

- Pour toute arête de M, une de ses extrémités est dans C (sinon elle ne serait pas couverte et C ne serait pas une couverture). De plus, ces extrémités sont toutes distinctes par définition d'un couplage. Ainsi on a bien $\boxed{|C| \geq b_2}$

- On souhaite déterminer le nombre maximal d'arêtes d'un graphe à n sommets et de couverture C. Posons $|C| = x$.
  Dans le graphe, il y a deux types d'arêtes :

  – celles dont les deux extrémités sont dans C : il y a en a au plus $\frac{x(x-1)}{2}$ (c'est le nombre d'arêtes dans un graphe complet à x sommets) car chaque sommet de C est relié aux $x-1$ autres sommets de C, et on divise par 2 pour ne pas compter deux fois la même arêtes

  – celles dont seule une extrémité est dans C : il y en a au plus $x(n-x)$ car chaque sommet de C est relié aux $n-x$ autres sommets qui n'appartiennent pas à C.

Il n'y en a pas d'autres car sinon elle ne serait pas couverte par C, ce qui serait contradictoire avec le fait que C est une couverture. Ainsi, nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
& m \leq \frac{x(x-1)}{2} + x(n-x) \\
\iff & m \leq \frac{x^2 - x + 2nx - 2x^2}{2} \\
\iff & m \leq \frac{-x^2 + (2n-1)x}{2} \\
\iff & 0 \leq \frac{-x^2 + (2n-1)x - 2m}{2} \\
\iff & 0 \geq x^2 - (2n-1)x + 2m \\
\iff & x \geq \frac{2n - 1 + \sqrt{(2n-1)^2 - 8m}}{2} = b_3 (\text{racine du polynôme de second degré})
\end{aligned}$$

Nous avons donc bien $\boxed{|C| \geq b_3}$

4.2.2) Il s'agit de notre fonction branch2.
A chaque noœud, on calcule les bornes inférieures du graphe considéré et on explore les noœuds fils uniquement si la couverture en construction la borne inférieure est plus petite que la borne supérieure.
Lorsqu'il n'y a plus d'arête dans le graphe, on compare la couverture que l'on a construite avec celle que l'on possède déjà, et on garde la meilleure des deux.

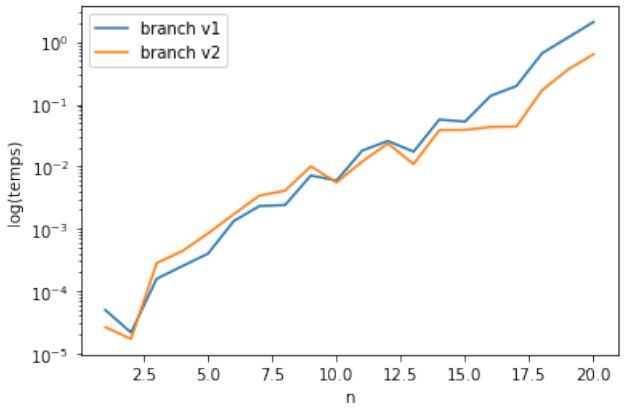
4.3.1) Il s'agit de la fonction branch3.

4.3.2) Il s'agit de la fonction branch32.

Comparaison des algorithmes de branch-and-bound) branch v1 est l'algorithme où nous explorons l'arbre d'énumération intégralement, branch v2 est celui où nous ajoutons le calcul des bornes inférieures et branch v3 correspond à notre fonction branch3.

- *Comparaison de branch v1 et branch v2*
  Ici, nous nous sommes limité à $N_{max} = 20$ ou 30, et nous avons calculé les temps d'exécution pour $p = 1/\sqrt{n}$.
  . Nous avons passé les temps au log.

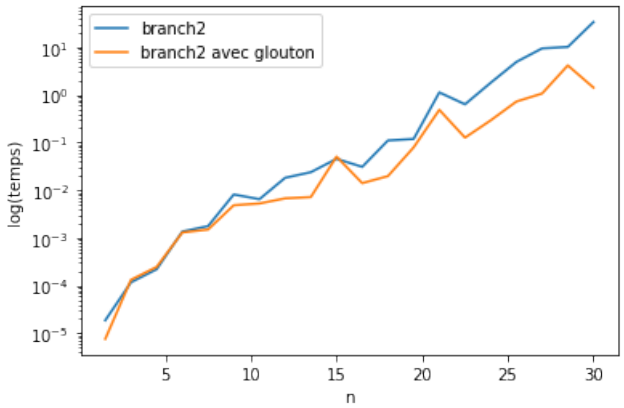
Figure 3: Comparaison de branch v1 et branch v2



Nous pouvons voir que quand n est petit, branch v1 est meilleur, mais que pour des n plus grands, branch v2 devient meilleur.
Ceci peut s'expliquer par le fait que quand il y a peu de sommets et que p est faible, parcourir l'arbre en entier ne prends pas autant de temps que de faire appel à la fonction algo_couplage. En ravenche, plus n est grand, plus l'arbre devient grand, et plus le calcul des bornes inférieures devient pertinent pour élaguer des noœuds.

- *Comparaison de branch v2 et branch v2 avec l'algo glouton*
  Nous observons que l'utilisation de l'algorthme glouton permet d'aller plus vite :

Figure 4: Comparaison de branch v2 et branch v2 glouton

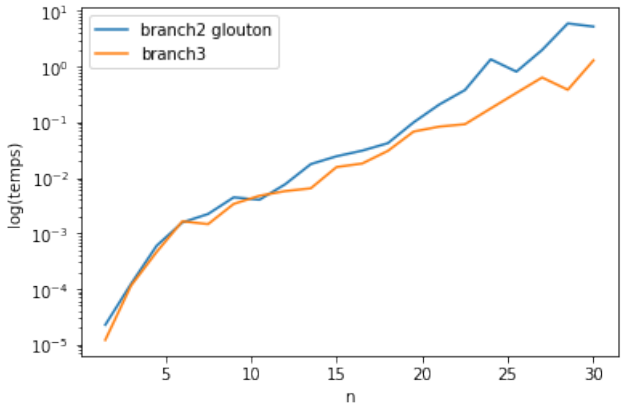


comme il est de meilleure qualité, on peut élaguer plus de noœuds.

- *Comparaison de branch v2 glouton et branch v3*
  Le branchement ayant été amélioré, branch v3 est plus rapide que branch v2 glouton.

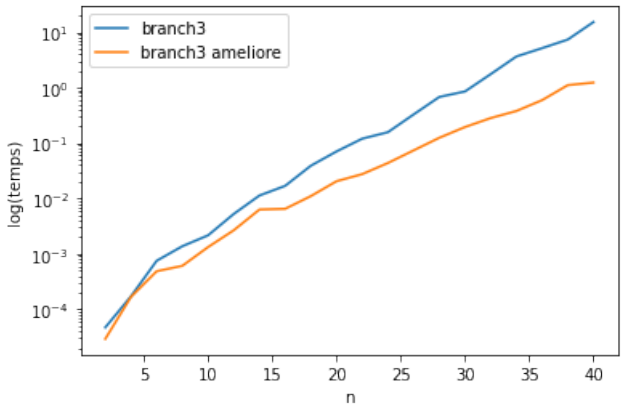
- *Comparaison de branch v3 et branch v3-2*
  branch v3-2 correspond à l'amélioration de branch v3 donnée dans la question 4.3.2

Figure 5: Comparaison de branch v2 glouton et branch v3



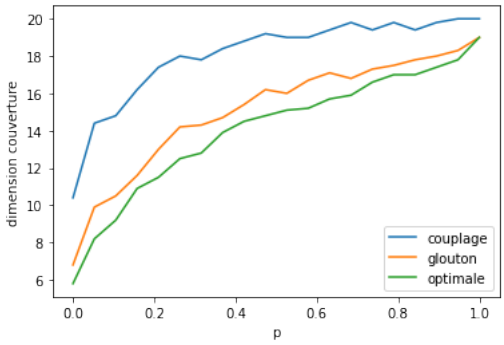
(dans notre code, il s'agit de la fonction branch32).
De même, comme le branchement a été amélioré, le temps d'exécution de branch v3-2

Figure 6: Comparaison de branch v3 et branch v3-2



est meilleur que le branch v3.

4.4.1) Le graphique suivant montre l'évolution de la longueur de la couverture pour un graphe à $n = 20$ sommets, en fonction de p.



On observe que plus il y a d'arêtes, plus la couverture est longue (ce qui est normal) et surtout que la longueur de la solution retournée par algo_glouton est plus proche que celle d'algo_couplage de la longueur de la solution optimale.

On a en moyenne $\frac{dim_{glouton}}{dim_{optimale}} = 1.083$ contre $\frac{dim_{couplage}}{dim_{optimale}} = 1.334$.
Ceci confirme que l'algorithme glouton donne une meilleure solution que l'algorithme de couplage puique son rapport d'approximation est plus petit.

5 Conclusion générale

L'algorithme de branch-and-bound est plutôt efficace pour résoudre de manière exacte le problème du VERTEX COVER et il peut toujours être amélioré grâces à des bonnes bornes inférieures et des bonnes heuristiques de branchement.