LU3IN003 - PROJET
Un problème de tomographie discrète

Esther CHOI (3800370) et Vinh-Son PHO ()

November 12, 2020

Sommaire

1 Méthode incomplète de résolution

1.1 Première étape

Q1 Il suffit de regarder s'il existe $j \in \{1, ..., M-1\}$ tel que $T(j,k) =$ vrai. En effet cela signifierait qu'il existe un coloriage possible des $j+1$ premières cases avec la séquence complète $(s_1, ..., s_k)$.

Q2 Commençons par remarquer que $\forall j \in \{0, ..., M-1\}$ et $\forall l \in \{1, ..., k\}$, pour que $T(j,l)$ soit vrai, il faut que les $j+1$ premières cases contiennent au moins les l premiers blocs noirs en entier en plus des $l-1$ cases blanches pour séparer chaque bloc noir, c'est-à-dire qu'il faut :

$$j+1 \geq l-1+\sum_{i=1}^{l} s_i = l-1+s_l+\sum_{i=1}^{l-1} s_i \implies \boxed{j \geq l-1+s_l-1+\sum_{i=1}^{l-1} s_i}$$

- cas de base 1 : si $l=0$, cela signifie qu'il n'y a pas de blocs à placer. Donc il existe un coloriage possible pour les $j+$ premières cases : il suffit qu'elles soient toutes blanches.
- cas de base 2a : supposons $j < s_l - 1$
  - si $l=1$: alors $l-1+s_l-1+\sum_{i=1}^{l-1} s_i = s_1 - 1$
    D'après la remarque que l'on a faite, pour avoir $T(j,l) =$ vrai, il faudrait avoir $j \geq s_1 - 1$.
    Or, on a supposé $j < s_l - 1 = s_1 - 1$
    Donc pour $l=1$, $T(j,l) =$ faux
  - si $l \geq 2$: alors $l-1+s_l-1+\sum_{i=1}^{l-1} s_i > s_l - 1$ car $l-1>0$
    Pour avoir $T(j,l) =$ vrai, il faudrait avoir $j > s_l - 1$
    Or, on a supposé $j < s_l - 1$
    Donc pour $l \geq 2$, $T(j,l) =$ faux

  Conclusion : $\boxed{\forall l \geq 1, \text{ si } j < s_l - 1, \text{ alors } T(j,l) = \text{faux}}$
- cas de base 2b : supposons $j = s_l - 1$
  - si $l=1$: alors de même, $l-1+s_l-1+\sum_{i=1}^{l-1} s_i = s_1 - 1$
    D'après la remarque que l'on a faite, pour avoir $T(j,l) =$ vrai, il faudrait avoir $j \geq s_1 - 1$.
    Donc, en particulier pour $j = s_l - 1$, $T(j,l) =$ vrai
  - si $l \geq 2$: alors de même, $l-1+s_l-1+\sum_{i=1}^{l-1} s_i > s_l - 1$ car $l-1>0$
    Pour avoir $T(j,l) =$ vrai, il faudrait avoir $j > s_l - 1$

Or, on a supposé $j = s_l - 1$
Donc pour $l \geq 2$, $T(j, l) = \text{faux}$

Conclusion : $\boxed{\text{si } j = s_l - 1, \text{ alors } T(j,l) = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si } l = 1 \\ \text{faux} & \text{si } l \geq 2 \end{cases}}$

Q3 On a la relation de récurrence suivante : $\boxed{T(j,l) = T(j-1,l) \vee T(j - s_l - 1, l-1)}$
Avec comme cas de base : $\forall j \in \{0, ..., M-1\}, T(j, 0) = \text{vrai}$, et $T(s_1 - 1, 1) = \text{vrai}$ En effet :

- si on arrive à faire rentrer les l premiers blocs dans les j premières cases (c'est-à-dire si $T(j-1, l) = \text{vrai}$), alors on arrivera à les faire rentrer dans les $j+1$ premières cases (c'est-à-dire $T(j,l) = \text{vrai}$) en coloriant la j-ème case en blanc.
- si on arrive à faire rentrer les $l-1$ premiers blocs sur un certain nombre de cases j' (c'est-à-dire si $T(j', l-1) = \text{vrai}$), alors on pourra faire rentrer le bloc l si et seulement si $j \geq j' + s_l + 1$ (le $+1$ venant de la case blanche séparant le bloc $l-1$ du bloc l), donc en particulier si $j = j' + s_l + 1$, c'est-à-dire si $j' = j - s_l - 1$. Ainsi, on a $T(j,l) = \text{vrai}$, et la j-ème case est noire et correspond à la dernière case du bloc l.
- il suffit que l'une des deux conditions précédentes soit vraie pour que $T(j,l)$ soit égale à vrai, d'où le $\vee$.
- les cas de base sont les cas de base 1 et 2b pour $l = 1$ de la question précédente.

Q4 *Commentaire : j'ai pas testé, mais ça doit être quelque chose comme ça :*

Algorithme 1 ColorierLigne

Entrée : $T, s = (s_1, ..., s_k), j, l$
Sortie : Retourne $T(j,l)$
  Si $l = 0$ **alors**
    Retourner vrai
  Sinon si $j = s[1] - 1$ et $l = 1$ **alors**
    Retourner vrai
  Sinon
    Retourner ColorierLigne$(T, s, j-1, l)$ ou ColorierLigne$(T, s, j - s_l - 1, l - 1)$
  Fin Si

1.2 Généralisation

Q5

Q6

Q7

1.3 Propagation

Q8

Q9

1.4 Tests

Q10

Q11