LU3IN003 - PROJET
Un problème de tomographie discrète

Esther CHOI (3800370) et Vinh-Son PHO (3802052)

December 4, 2020

Sommaire

Abstract

Dans le cadre de l'UE d'Algorithmique II LU3IN003, nous devons réaliser un projet de solveur de problèmes de tomographie discrète.
Nous avons choisi d'utiliser le langage Python.
Les tests de temps de résolution ont été réalisés sur un processeur Intel©Core™i7-8550U 1.80GHz.

1 Méthode incomplète de résolution

1.1 Première étape

Q1 Il suffit de regarder s'il existe $j \in \{1, ..., M-1\}$ tel que $T(j,k) =$ vrai. En effet cela signifierait qu'il existe un coloriage possible des $j+1$ premières cases avec la séquence complète $(s_1, ..., s_k)$, qui est bien ce que l'on cherche à faire.

Q2 Commençons par remarquer que $\forall j \in \{0, ..., M-1\}$ et $\forall l \in \{1, ..., k\}$, pour que $T(j,l)$ soit vrai, il faut que les $j+1$ premières cases contiennent au moins les l premiers blocs noirs en entier en plus des $l-1$ cases blanches pour séparer chaque bloc noir, c'est-à-dire qu'il faut :

$$j+1 \geq l-1+\sum_{i=1}^{l} s_i = l-1+s_l+\sum_{i=1}^{l-1} s_i \implies \boxed{j \geq l-1+s_l-1+\sum_{i=1}^{l-1} s_i}$$

- cas de base 1 : si $l=0$, cela signifie qu'il n'y a pas de blocs à placer. Donc il existe un coloriage possible pour les $j+$ premières cases : il suffit qu'elles soient toutes blanches.
- cas de base 2a : supposons $j < s_l - 1$
  - si $l = 1$: alors $l-1+s_l-1+\sum_{i=1}^{l-1} s_i = s_1 - 1$
    D'après la remarque que l'on a faite, pour avoir $T(j,l) =$ vrai, il faudrait avoir $j \geq s_1 - 1$.
    Or, on a supposé $j < s_l - 1 = s_1 - 1$
    Donc pour $l = 1$, $T(j,l) =$ faux
  - si $l \geq 2$: alors $l-1+s_l-1+\sum_{i=1}^{l-1} s_i > s_l - 1$
    Pour avoir $T(j,l) =$ vrai, il faudrait avoir $j > s_l - 1$
    Or, on a supposé $j < s_l - 1$
    Donc pour $l \geq 2$, $T(j,l) =$ faux

  Conclusion : $\boxed{\forall l \geq 1, \text{ si } j < s_l - 1, \text{ alors } T(j,l) = \text{faux}}$
- cas de base 2b : supposons $j = s_l - 1$
  - si $l = 1$: alors de même, $l-1+s_l-1+\sum_{i=1}^{l-1} s_i = s_1 - 1$
    D'après la remarque que l'on a faite, pour avoir $T(j,l) =$ vrai, il faudrait avoir $j \geq s_1 - 1$.
    Donc, en particulier pour $j = s_l - 1$, $T(j,l) =$ vrai
  - si $l \geq 2$: alors de même, $l-1+s_l-1+\sum_{i=1}^{l-1} s_i > s_l - 1$
    Pour avoir $T(j,l) =$ vrai, il faudrait avoir $j > s_l - 1$

Or, on a supposé $j = s_l - 1$
Donc pour $l \geq 2$, $T(j,l) = \text{faux}$

Conclusion : $\boxed{\text{si } j = s_l - 1, \text{ alors } T(j,l) = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si } l = 1 \\ \text{faux} & \text{si } l \geq 2 \end{cases}}$

Q3 On a la relation de récurrence suivante : $\boxed{T(j,l) = T(j-1,l) \vee T(j - s_l - 1, l-1)}$
Avec comme cas de base : $\forall j \in \{0, ..., M-1\}, T(j,0) = \text{vrai}$, et $T(s_1 - 1, 1) = \text{vrai}$.
En effet :

- si on arrive à faire rentrer les l premiers blocs dans les j premières cases (c'est-à-dire si $T(j-1,l) = \text{vrai}$), alors on arrivera à les faire rentrer dans les $j+1$ premières cases (c'est-à-dire $T(j,l) = \text{vrai}$) en coloriant la j-ème case en blanc.

- si on arrive à faire rentrer les $l-1$ premiers blocs sur un certain nombre de cases j' (c'est-à-dire si $T(j', l-1) = \text{vrai}$), alors on pourra faire rentrer le bloc l si et seulement si $j \geq j' + s_l + 1$ (le $+1$ venant de la case blanche séparant le bloc $l-1$ du bloc l), donc en particulier si $j = j' + s_l + 1$, c'est-à-dire si $j' = j - s_l - 1$. Ainsi, on a $T(j,l) = \text{vrai}$, et la j-ème case est noire et correspond à la dernière case du bloc l.

- il suffit que l'une des deux conditions précédentes soit vraie pour que $T(j,l)$ soit égale à vrai, d'où le $\vee$.

- les cas de base sont les cas de base 1 et 2b pour $l = 1$ de la question précédente.

Q4 Il s'agit de la fonction *ColoriagePossibleRec* dans le fichier *src/partie1*. L'algorithme utilise le principe de la programmation dynamique puisque pour calculer une valeur, on se sert des valeurs que l'on a déjà calculé. Le pseudo-code est le suivant :

Algorithme 1 ColoriagePossibleRec

Entrée : T matrice vide de taille $M \times k$, $s = (s_1, ..., s_k), j, l$

Sortie : Retourne la matrice T telle que $T[j][l] = T(j, l)$. On suppose que pour le premier appel, $j = M - 1$ et $l = k$

1: **Si** $T[j][l] \neq$ VIDE **alors**
2:     **Retourner** $T[j][l]$
3: **Sinon si** $l = 0$ **alors**
4:     $T[j][l] \leftarrow$ vrai
5:     **Retourner** vrai
6: **Sinon si** $l = 1$ et $j = s_1 - 1$ **alors**
7:     $T[j][l] \leftarrow$ vrai
8:     **Retourner** vrai
9: **Sinon si** $j < s_l - 1$ **alors**
10:     $T[j][l] \leftarrow$ faux
11:     **Retourner** faux
12: **Sinon si** $j = s_l - 1$ **alors**
13:     **Si** $l = 1$ **alors**
14:         $T[j][l] \leftarrow$ vrai
15:         **Retourner** vrai
16:     **Sinon**
17:         $T[j][l] \leftarrow$ faux
18:         **Retourner** faux
19:     **Fin Si**
20: **Sinon**
21:     $T[j][l] \leftarrow ColoriagePossibleRec(T, s, j-1, l)$ ou $ColoriagePossibleRec(T, s, j - s_l - 1, l-1)$
22:     **Retourner** $T[j][l]$
23: **Fin Si**

- lignes 1-2 : si l'on a déjà calculé la valeur recherchée, on la retourne directement
- lignes 3-5 : cas 1
- lignes 6-8 : cas de base du cas 2b
- lignes 9-11 : cas 2a
- lignes 12-19 : cas 2b
- lignes 20-23 : cas 2c

1.2 Généralisation

Q5

- cas de base 1 : si $l = 0$, $T(j, l) =$ vrai s'il y a pas de case noire parmi toutes les cases précédentes
- cas de base 2a : on a toujours $T(j, l) =$ faux
- cas de base 2b :
  - si $l = 1$ et donc $j = s_1 - 1$, alors $T(j, l) =$ vrai s'il n'y a pas de case blanche parmi les case précédentes, puisque les j+1 premières cases contiennent le bloc 1
  - si $l > 1$, on a toujours $T(j, l) =$ faux
- cas de base 2c : il y a deux cas possibles.
  - la case (i, j) est blanche : il faut regarder si les l premiers blocs rentrent dans les j premières cases, c'est-à-dire qu'il faut faire un appel récursif sur la fonction pour calculer $T(j - 1, l)$
  - la case (i, j) est noire : on est sur la dernière case du bloc l donc $T(j, l) =$ vrai s'il n'y a pas de case blanche parmi les cases que constituent le bloc l et si la case d'indice $j - s_l$ n'est pas noire (car si elle l'était, la case $(i, j - 1)$ contiendrait la dernière case du bloc l et (i, j) ne pourrait être noire). Si l'on a les deux conditions, alors il faut regarder s'il est possible de faire rentrer les $l - 1$ premiers blocs dans les $j - s_l - 1$ premières cases

Q6 La matrice qui contient les valeurs des $T(j, l)$ est de taille $M \times k$. Or $k \leq \lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor$: au maximum, sur une ligne de taille M, on peut faire rentrer $\lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor$ blocs noirs (ils sont alors tous de longueur 1). Donc il y a au plus $M \times \lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor$ valeurs à calculer.
Pour calculer une valeur de $T(j, l)$, on fait appel à la fonction *TestVal* qui est de complexité $O(M)$ (dans le pire cas, on cherche une occurrence d'une valeur dans la ligne entière).
Conclusion : l'algorithme est de complexité $O(M \times M \times \lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor) = \boxed{O(M^3)}$

En réalité, l'algorithme ne calcule pas nécessairement toutes les cases du tableau T. Il ne calcule que les valeurs utiles : si le résultat voulu a déjà été calculé, on le retourne ; sinon, on stocke progressivement uniquement les valeurs qui permettent de le calculer. C'est le principe de la programmation dynamique.

Q7 Il s'agit de la fonction *ColoriagePossibleRec2* dans le fichier *src/partie1.py*.

1.3 Propagation

Q8 La fonction *ColoreLig* comporte une boucle *for* de M itérations, et chaque itération fait appel à la fonction *ColoriagePossibleRec2* de complexité $O(M^3)$, donc elle est de complexité $O(M^4)$. De même, *ColoreCol* est de complexité $O(N^4)$.

La fonction *Coloration* comporte deux boucles *for*, l'une sur *lignesAVoir* et l'autre sur *colonnesAVoir* de tailles au plus N et M respectivement, qui sont exécutées tant que *lignesAVoir* et *colonnesAVoir* ne sont pas vides, c'est-à-dire tant que l'on peut colorier des nouvelles cases. La boucle *while* fait donc au plus MN itérations, et les boucles *for* au plus N et M itérations.
Pour la boucle sur *lignesAVoir*, on fait appel à la fonction *ColoreLig* qui est de complexité $O(M^4)$.
Pour la boucle sur *colonnesAVoir*, on fait appel à la fonction *ColoreCol* qui est de complexité $O(N^4)$.
Conclusion : la fonction *Coloration* est de complexité $O(MN(N \times M^4 + M \times N^4)) = \boxed{O(N^2 \times M^5 + M^2 \times N^5)}$. On a donc bien une complexité polynomiale en N et M.

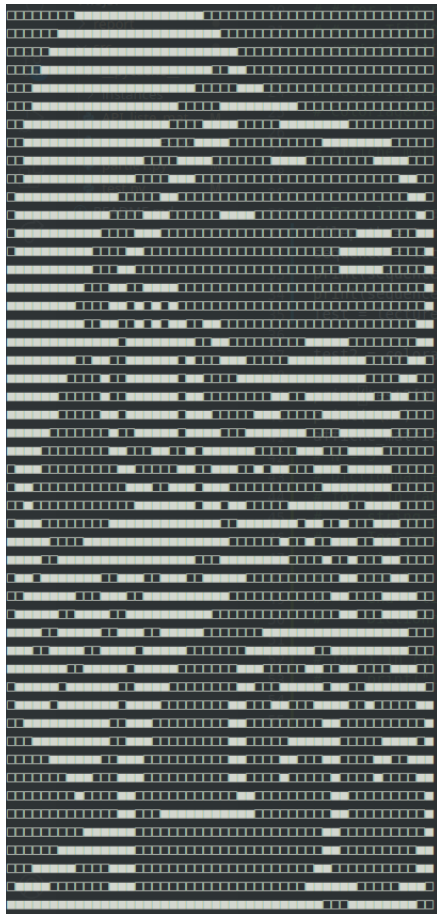
Q9 Il s'agit des fonctions *lecture, ColoreLig, ColoreCol, Coloration* dans le fichier *src/partie1.py*

1.4 Tests

Q10 Le tableau suivant donne les temps de résolution de chacune des instances 1 à 10 avec l'algorithme de la partie 1.

instance	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
temps de résolution (s)	0.00108	0.125	0.081	0.230	0.180	0.409	0.259	0.398	4.454	4.465

La grille obtenue pour l'instance 9.txt est la suivante :



Q11 L'algorithme implémenté dans cette partie ne sait pas résoudre l'instance 11.txt car pour chaque ligne et pour chaque colonnes, les fonctions *ColoreLig* et *ColoreCol* ne permettent pas de colorier des cases.

2 Méthode de résolution complète

Q12 La fonction *EnumRec* est de complexité $\boxed{O(2^{MN}(N^2 \times M^5 + M^2 \times N^5))}$. En effet, pour chaque case, on fait deux appels récursifs, une en coloriant la case en blanc, et l'autre en noir, et on fait appel à la fonction *ColorierEtPropager* qui est de même complexité que *Coloration* dans le pire cas. Il y a MN cases au total, d'où la complexité que nous venons d'énoncer.
Par conséquent, l'algorithme d'énumération a une complexité exponentielle.

2.1 Implantation et tests

Q13 Il s'agit des fonctions du fichier *src/partie2.py*

Q14 Le tableau suivant donne les temps de résolution de chacune des instances 1 à 16 avec l'algorithme de la partie 2.

instance	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
temps de résolution (s)	0.00102	0.144	0.073	0.196	0.168	0.384	0.224	0.342	3.703	3.820

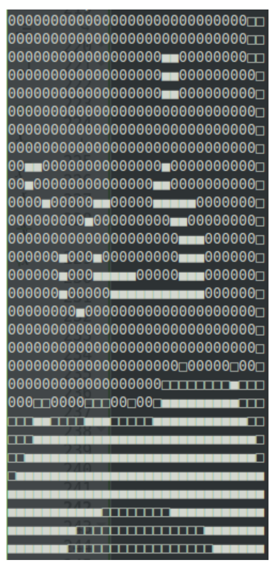
instance	11	12	13	14	15	16
temps de résolution (s)	0.00031	0.384	0.449	0.332	0.402	33.510

Le tableau suivant donne les temps de résolution de chacune des instances 11 à 16 avec l'algorithme de la partie 1.

instance	11	12	13	14	15	16
temps de résolution (s)	0.00023	0.389	0.507	0.318	0.225	0.844

On remarque que l'algorithme de coloration et celui d'énumération résolvent complètement les instances 1 à 10 avec un temps de même ordre de grandeur. Pour les instances 11 à 15, rapidement l'algorithme de coloration ne parvient pas à résoudre la grille de jeu tandis que l'algorithme d'énumération, avec un temps de résolution de même ordre de grandeur, y parvient. Pour l'instance 16, ce dernier prend beaucoup de temps, et c'est là que l'on voit la complexité exponentielle de l'algorithme.

La grille obtenue pour l'instance 15.txt avec l'algorithme de la partie 1 est la suivante :



La grille obtenue pour l'instance 15.txt avec l'algorithme de la partie 2 est la suivante :