Tartalomjegyzék

Előszó

Informatikus hallgatók számára megkerülhetetlen a matematikai logika tanulmányozása. A felsőoktatási intézmények tantervei tartalmazzák is mindenütt a matematikai logika informatikában fontos fejezeteinek oktatását. Már az alapképzés során tanítani kell (a logika nyelvészeti tárgyalásmódja keretei között) a logikai nyelvek szintaxisát, klasszikus szemantikáját, a logikai kalkulusok és a logikai programozás alapjait. Matematikai logika könyvek és tankönyvek sora segíti a tanulást, mégsincs könnyű dolga a hallgatónak. A tanulási folyamat során zavaró lehet a különböző könyvek szóhasználatában és jelölésrendszerében való lényeges eltérés, és a gyakorló feladatok hiánya.

Jelen munkánk kísérletet tesz a logika említett területeinek tömör összefoglalására és feladatsorokban való kifejtésére. A könyv anyaga a kolozsvári Babes-Bolyai Tudományegyetem és a Debreceni Egyetem informatikus szakjain folyó képzés során alakult ki. A gyökereket Dragálin Albert professzor matematikai logikából és mesterséges intelligenciából az 1990-es években tartott debreceni előadásai jelentik. Természetesen felhasználunk több más, az irodalomban felsorolt forrást is.

Könyvünk 13 fejezetből áll. Az egyes fejezetekben tárgyalt témákkal kapcsolatban (ott, ahol ennek értelme van) először az ítéletlogikával, majd az elsőrendű logikával foglalkozunk. Minden rész elején definiáljuk a témához kötődő alapvető fogalmakat, és megadjuk a legfontosabb tételeket magyarázat és bizonyítás nélkül. Az elméleti összefoglalás után következnek a gyakorló feladatok. Fontos feladattípusok esetén egy-egy feladatot mintaképpen megoldunk, a megoldást bekeretezve kiemeljük. A bevezetett fogalmakat később mindenütt hivatkozás nélkül használjuk, az Olvasó a tágymutató segítségével tájékozódhat.

Saját feladataink mellé az irodalomból ismert legjobb feladatok közül is válogatunk. Hogy az informatikus hallgatók számára közelebb hozzuk a tárgyalt logikai anyagot, megfogalmazunk néhány tanulságos programozási feladatot.

Az Olvasótól csak a szokásos középiskolai ismereteket várjuk el. Az utolsó fejezet kivételével a programozási feladatok megoldásához természetesen szükség van némi programozás tudásra. A tárgyalt témákat az Olvasó tanulmányozhatja kizárólag ebből a könyvből, ugyanakkor erősen ajánljuk logika előadások hallgatását, vagy az irodalomban felsorolt könyvek olvasását, hisz könyvünk nagyon tömör.

A példatárban a következő, széles körben használt jelöléseket használjuk:

$\leftrightharpoons$	definíció szerint
$\{h_1, h_2, \ldots\}$	a $h_1, h_2, \ldots$ elemekből álló halmaz
$\varnothing$	az üres halmaz
$H_1 \times H_2$	a H_1 és H_2 halmazok Descartes-szorzata
$\mathbb{N}_0$	természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	egész számok halmaza
$\mathbb{R}$	valós számok halmaza
$\mathrm{Min}\{a, b\}$	az a és b számok minimuma
$\mathrm{Max}\{a, b\}$	az a és b számok maximuma
$a \pmod n$	az a egész szám n-nel való osztási maradéka
$a \doteq b \pmod n$	az a és b n-nel való osztási maradéka egyenlő

Bevezethettünk volna a $\leftrightharpoons$ jelhez hasonló további – ún. metanyelvi – jelöléseket is, amelyeket arra lehetne használni, hogy a logika tudományáról, s ezen belül a tárgyalt témákról szabatosan, de rövidebben beszélhessünk. A tételeink megfogalmazásánál például alkalmazhattuk volna az alábbi jelöléseket:

$\Rightarrow$	ha ..., akkor ...
$\Leftrightarrow$	akkor, és csak akkor, ha ...

Ezeket a jelöléseket az Olvasó természetesen használhatja, de ne keverje össze a természetes nyelven hasonlóan olvasandó logikai jelekkel.

Megjegyezzük, hogy az irodalomban a logikai jelekre néha más szimbólumokat használnak, mint amelyeket a példatárban megadtunk:

megnevezés	jelölés	más jelölések
negációjel	$\neg$	$\tilde{}$, $\bar{}$, $-$, NOT, !
konjunkciójel	$\wedge$	&, $\cdot$, AND, &&
diszjunkciójel	$\vee$	$+$, OR, $\|\|$
implikációjel	$\supset$	$\rightarrow$, $\Rightarrow$
ekvivalenciajel	$\equiv$	$\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\sim$

A példatárral kapcsolatos bármilyen észrevételt a robu@cs.ubbcluj.ro e-mail címen szívesen fogadunk.

Végül szeretnénk köszönetet mondani a könyv kiadását támogató Szülőföld Alapnak és a Kolozsvári Magyar Egyetemi Intézetnek.

Kolozsvár – Debrecen, 2010. március 15.

A szerzők

1. Logikai nyelvek, szintaxis

1.I. Ítéletlogika

1.I.1. Definíció. Az *ítéletlogika* (nulladrendű logikai nyelv) *ábécéjének* szimbólumai

- a *propozícionális betűk* (állításokat jelölő szimbólumok; ítéletváltozók):
$$\mathcal{P}r \leftrightharpoons \{X, Y, Z, \ldots\};$$
- a *logikai összekötő jelek*: $\neg$ (*negációjel*), $\wedge$ (*konjunkciójel*), $\vee$ (*diszjunkciójel*), $\supset$ (*implikációjel*);
- az *elválasztó jelek*: ( ) (nyitó és záró zárójel).

1.I.2. Definíció. Egy $\mathcal{L}_0$ *ítéletlogikai nyelv formulái* a következő, induktív definícióval megadott szimbólumsorozatok (a fenti ábécé feletti szavak):

- Minden propozícionális betű egyúttal formula is. Ezeket a formulákat *atomi formuláknak* nevezzük.
- Ha A és B a nyelv formulái, akkor
$$(A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B) \text{ és } \neg A$$
szintén formulák.
- $\mathcal{L}_0$ minden formulája vagy atomi formula, vagy az előző generáló lépés véges sokszori alkalmazásával atomi formulákból nyerhető.

1.I.3. Definíció. [Közvetlen részformula.] Egy ítéletlogikai nyelvben

- egyetlen atomi formulának sincs *közvetlen részformulája*,
- a $\neg A$ egyetlen közvetlen részformulája az A formula,
- az $(A \vartriangle B)$ formula közvetlen részformulái (ahol $\vartriangle \in \{\wedge, \vee, \supset\}$) az A és a B formulák. Az A formula az $(A \vartriangle B)$ formula bal oldali, B a jobb oldali közvetlen részformulája.

1.I.4. Definíció. Egy ítéletlogikai *formula részformuláinak halmaza* a legszűkebb olyan halmaz, melynek

- a formula eleme, és
- ha egy formula eleme, akkor eleme a formula összes közvetlen részformulája is.

1.I.5. Definíció. [Szerkezeti fa.]

- Atomi *formula szerkezeti fája* egyetlen, az atomi formulát tartalmazó csúcsból áll. Ez a csúcs a fa gyökere.
- $\neg A$ szerkezeti fájának gyökere $\neg A$. A gyökérnek egyetlen gyermeke van, ami éppen az A szerkezeti fájának gyökere.
- $(A \triangle B)$ szerkezeti fájának gyökere $(A \triangle B)$. A gyökérnek két gyermeke van, bal oldali gyermeke az A szerkezeti fájának gyökere, jobb oldali gyermeke a B szerkezeti fájának gyökere.

1.I.6. Definíció. Definiáljuk az $\ell : \mathcal{L}_0 \to \mathbb{N}_0$ (ahol $\mathbb{N}_0 \leftrightharpoons \{0, 1, 2, \ldots\}$) függvényt rekurzív módon a következőképpen:

- ha A atomi formula, $\ell(A) \leftrightharpoons 0$,
- $\ell(\neg A) \leftrightharpoons \ell(A) + 1$,
- $\ell(A \triangle B) \leftrightharpoons \ell(A) + \ell(B) + 1$.

Az $\ell(A)$ függvényértéket az A *formula logikai összetettségének* nevezzük.

1.I.7. Definíció. Egy formulában egy *logikai összekötő jel hatásköre* a formulának azon részformulái közül a legkisebb logikai összetettségű, amelyekben az adott logikai összekötő jel is előfordul.

1.I.8. Definíció. Egy *formula fő logikai összekötő jele* az az összekötő jel, melynek hatásköre maga a formula.

1.I.9. Megjegyzés. A formulák leírásakor szokásos rövidítések:

- Formula-kombinációk helyett speciális jelöléseket vezethetünk be. Például az $\equiv$ (*ekvivalenciajel*) bevezetése:

$$(A \equiv B) \leftrightharpoons ((A \supset B) \wedge (B \supset A))$$

- A külső zárójelpárt el lehet hagyni.
- A logikai összekötő jelekhez és a bevezetett jelekhez *erősorrendet* (*prioritást*) rendelhetünk. Ennek megfelelően, a jelek értelmezését a formulában az alábbi – az erősebbtől a gyengébb felé haladó – sorrendnek megfelelően végezzük el:

  1. negációjel ($\neg$),
  2. konjunkciójel ($\wedge$) és diszjunkciójel ($\vee$),
  3. implikációjel ($\supset$),
  4. bevezetett jelek (például: $\equiv$).

  Azokat a zárójeleket, melyek az erősorrendnek megfelelő értelmezési sorrendet jelölnék ki, elhagyhatjuk.

FELADATOK

1.I.1. Legyenek X és Y propozícionális betűk. Igazoljuk a definíció segítségével, hogy az alábbi szimbólumsorozat (teljesen zárójelezett) ítéletlogikai formula!

$$((X \wedge \neg Y) \supset \neg\neg X)$$

Megoldás

Mivel X és Y propozícionális betűk, ezért X és Y az ítéletlogikai nyelv atomi formulái, tehát ítéletlogikai formulák.

Ebből következően a generáló szabály egyszeri alkalmazásával a $\neg X$ és a $\neg Y$ ítéletlogikai formulákat kapjuk.

Ismét a generáló szabályokat alkalmazva láthatjuk, hogy a $\neg\neg X$ és az $(X \wedge \neg Y)$ szintén ítéletlogikai formulák.

Ezekből pedig már egyetlen lépésben megkapható az $((X \wedge \neg Y) \supset \neg\neg X)$ ítéletlogikai formula.

1.I.2. Legyenek X és Y propozícionális betűk. Igazoljuk a definíció segítségével, hogy az alábbi szimbólumsorozat nem ítéletlogikai formula!

$$(X \neg \wedge Y)$$

Megoldás

Vegyük sorra a definícióban szereplő generáló szabályokat, melyek segítségével formula képezhető:

- a szimbólumsorozat nem atomi formula, mivel nem propozícionális betű,
- a szimbólumsorozat nem állhatott elő $\neg A$, $(A \vee B)$ vagy $(A \supset B)$ generáló szabály alkalmazásával, mivel nem szerepel benne sem $\vee$, sem $\supset$ logikai összekötő jel, illetve nem $\neg$ szimbólummal kezdődik,
- a szimbólumsorozat nem állhatott elő az $(A \wedge B)$ generáló szabály alkalmazásával, mivel ekkor az $X\neg$ szimbólumsorozat ítéletlogikai formula kellene legyen. Ugyanakkor az $X\neg$ nem atomi formula, és egyetlen generáló szabály segítségével sem képezhető.

Mivel minden formula vagy atomi, vagy generáló szabály segítségével előállítható, így beláttuk, hogy $(X\neg \wedge Y)$ nem ítéletlogikai formula.

1.I.3. Legyenek X, Y, Z propozícionális betűk. Döntsük el, hogy az alábbi szimbólumsorozatok (teljesen zárójelezett) formulák-e!

(a) $(X \wedge Y)\neg Z$

(b) $((X \wedge Y) \supset Z)$

(c) $(Z \vee X \wedge \neg Y)$

(d) $(((\neg X) \supset Y) \supset \neg(X \vee Z))$

(e) $\neg(X \vee Y \supset \neg\neg Z)$

(f) $\neg(X \vee Y \wedge \neg Z$

1.I.4. Adjuk meg az alábbi formula zárójel-elhagyási szabályokkal tovább már nem egyszerűsíthető alakját!

$$((\neg(X \wedge \neg Y) \supset (Y \wedge \neg Z)) \supset \neg X)$$

Megoldás

A szemléltetés kedvéért jelöljük meg a formulában található zárójelpárokat, és vegyük sorra őket:

$$\overset{a}{(}\overset{b}{(}\ \neg\ \overset{c}{(}\ X \wedge \neg Y\ \overset{c}{)}\supset\overset{d}{(}\ Y \wedge \neg Z\ \overset{d}{)}\overset{b}{)}\supset \neg X\ \overset{a}{)}$$

(a) a külső zárójelpár mindig elhagyható,

(b) a zárójelben lévő és a zárójelen kívüli összekötő egyaránt $\supset$, ezért a zárójelpár nem hagyható el,

(c) a zárójelben lévő $\wedge$ összekötő gyengébb, mint a külső $\neg$, így nincs lehetőség egyszerűsítésre,

(d) a zárójelben lévő $\wedge$ összekötő erősebb, mint a külső $\supset$, ezért a zárójelpár elhagyható.

Az eredmény: $(\neg(X \wedge \neg Y) \supset Y \wedge \neg Z) \supset \neg X$

1.I.5. Hagyjuk el a lehető legtöbb zárójelpárt a formulákból!

(a) $((X \vee Y) \supset Z)$

(b) $(\neg(X \vee Y) \supset Z)$

(c) $\neg((X \vee Y) \supset Z)$

(d) $((\neg(\neg X \vee Y) \wedge Z) \supset (X \vee Z))$

(e) $(((X \supset Y) \wedge (Y \supset Z)) \supset (\neg X \vee Z))$

(f) $\neg(((X \supset Y) \supset (Y \vee Z)) \supset (\neg X \vee Z))$

(g) $((X \supset Y) \equiv (\neg X \vee Y))$

(h) $(((X \vee Y) \supset \neg Z) \equiv (X \wedge \neg Z))$

(i) $\neg((\neg(X \vee Y) \supset \neg Z) \equiv \neg(X \wedge \neg Z))$

1.I.6. Adjuk meg az alábbi formula teljesen zárójelezett alakját!

$$\neg X \vee Y \supset \neg Z$$

Megoldás

A formulában szereplő logikai összekötő jelek közül az $\supset$ implikációjel a leggyengébb, így a formula közvetlen részformulái $\neg X \vee Y$ és $\neg Z$. Az előbbi a $(\neg X \vee Y)$ formulát rövidíti.

Ezt visszahelyettesítve a $(\neg X \vee Y) \supset \neg Z$ alakzatot kapjuk, mely szintén rövidítés. A külső zárójelek visszaírásával ekkor a

$$((\neg X \vee Y) \supset \neg Z)$$

teljesen zárójelezett formulát kapjuk.

1.I.7. Adjuk meg az alábbi formulák teljesen zárójelezett alakját!

(a) $X \wedge \neg Y \supset Z$

(b) $X \supset Y \vee \neg Z$

(c) $\neg X \supset \neg Y \wedge Z$

(d) $\neg X \vee Y \supset \neg Y \wedge Z$

(e) $X \vee Y \supset \neg Z \equiv X \wedge \neg Z$

1.I.8. Legyenek X, Y, Z propozícionális betűk. Hányféleképpen lehet zárójelekkel ellátni az alábbi szimbólumsorozatokat úgy, hogy (teljesen zárójelezett) formulákat kapjunk?

(a) $X \supset \neg Y \supset Z$

(b) $\neg X \vee Y \wedge Z$

(c) $X \supset \neg Y \vee Y \wedge Z$

(d) $X \supset Y \supset Z \supset \neg X \supset \neg Y$

1.I.9. Bizonyítsuk be az ítéletlogikai formula szerkezetére vonatkozó indukcióval, hogy minden formulában a nyitó és a záró zárójelek száma megegyezik!

1.I.10. Adjuk meg annak a függvénynek a rekurzív definícióját, amely megadja az X propozícionális betű előfordulásának számát egy tetszőleges ítéletlogikai formulában!

Megoldás

Definiáljuk az $f_X : \mathcal{L}_0 \to \mathbb{N}_0$ függvényt a következőképpen:

- ha a formula atomi és éppen az X propozícionális betű, akkor $f_X(X) \leftrightharpoons 1$,
- ha a formula atomi, mégpedig tetszőleges $P \in \mathcal{P}r \setminus \{X\}$ (X-től különböző) propozícionális betű, akkor $f_X(P) \leftrightharpoons 0$,
- $f_X(\neg A) \leftrightharpoons f_X(A)$,
- $f_X(A \triangle B) \leftrightharpoons f_X(A) + f_X(B)$.

1.I.11. Adjuk meg annak a függvénynek a rekurzív definícióját, amelyik megadja egy teljesen zárójelezett formula (nyitó-záró) zárójelpárjainak a számát!

1.I.12. Mely formula részformulája az alábbi formuláknak?

(a) $X \vee Y \supset \neg Z \equiv X \wedge \neg Z$

(1) $\neg Z \equiv X$ (2) $\neg Z \equiv X \wedge \neg Z$
(3) $Y \supset \neg Z$ (4) $X \vee Y$

(b) $X \supset \neg Y \wedge Z \equiv Y \vee \neg X$

(1) $\neg Y \wedge Z$ (2) $Z \equiv Y$
(3) $X \supset \neg Y$ (4) $\neg Y \wedge Z \equiv Y$

(c) $X \supset Y \wedge \neg Z \equiv \neg X \supset \neg Y \wedge Z$

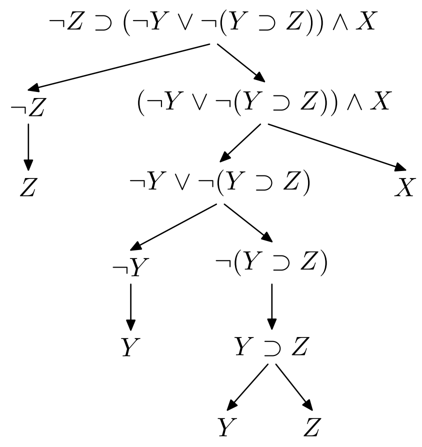
(1) $X \supset Y$ (2) $\neg Z \equiv \neg X \supset \neg Y$
(3) $Y \wedge \neg Z$ (4) $Y \wedge Z$

1.I.13. Készítsük el az alábbi formula szerkezeti fáját! Adjuk meg a diszjunkciójel hatáskörét és olvassuk le a formula közvetlen részformuláit!

$$\neg Z \supset (\neg Y \vee \neg(Y \supset Z)) \wedge X$$

Megoldás

A formula szerkezeti fája a következő:



A szerkezeti fában a formula összes részformulája megtalálható. A kérdéses diszjunkciójelet három részformula tartalmazza. Ezek közül a legkisebb (4) logikai összetettséggel a $\neg Y \vee \neg(Y \supset Z)$ formula rendelkezik, így ez lesz a diszjunkciójel hatásköre.

A közvetlen részformulák a szerkezeti fa első szintjén jelennek meg:
$\neg Z$ és $(\neg Y \vee \neg(Y \supset Z)) \wedge X$.

1.I.14. Adjuk meg az alábbi formulák közvetlen részformuláit, részformuláik halmazait és állapítsuk meg a logikai összetettségüket!

(a) $\neg X \vee Y \supset \neg Z$

(b) $\neg((X \supset Y) \supset ((X \supset \neg Y) \supset \neg Y))$

(c) $X \vee Y \supset \neg Z \wedge \neg\neg(X \supset \neg Z)$

(d) $\neg(X \supset Y) \wedge \neg(Y \supset Z) \supset \neg X \vee Z$

(e) $\neg((X \supset Y \wedge \neg Z) \supset (\neg X \supset \neg Y \wedge Z))$

(f) $\neg(X \vee Z \supset \neg Y) \supset \neg\neg X \vee \neg(\neg Y \wedge Z)$

1.I.15. Rajzoljuk fel az alábbi formulák szerkezeti fáját!

(a) $\neg\neg\neg(X \supset Y)$

(b) $(X \supset Y) \vee (X \supset Y \wedge Z)$

(c) $X \vee Y \supset \neg Z \wedge \neg(X \supset \neg Z)$

(d) $(X \supset Y) \wedge (Y \supset Z) \supset \neg X \vee Z$

(e) $(X \supset Y \wedge \neg Z) \supset (\neg X \supset \neg Y \wedge Z)$

(f) $\neg(X \vee Z \supset \neg Y) \supset \neg X \vee (\neg Y \wedge Z)$

1.I.16. Legyen egy formulában n helyen logikai összekötő jel. Maximum hány részformulája lehet a formulának?

1.I.17. Igazoljuk, hogy egy formula valamelyik részformuláját egy másik formulával helyettesítve ismét formulát kapunk!

1.I.18. Írjunk programot, amely alprogramokat használva

(a) eldönti, hogy egy beolvasott szimbólumsorozat lehet-e ítéletlogikai formula;

(b) megfelelő adatszerkezet segítségével tárolja a beolvasott formula szerkezeti fáját;

(c) kiírja a tárolt formula teljesen zárójelezett alakját;

(d) kiírja a tárolt formulát a lehető legtöbb zárójelpárt elhagyva belőle;

(e) meghatározza a tárolt formula logikai összetettségét;

(f) megkeresi a tárolt formula összes részformuláját!

1.P. Elsőrendű logika

1.P.1. Definíció. Egy *elsőrendű logikai nyelv ábécéje* tartalmaz

- logikán kívüli betűket: ezeket az
$$\langle Srt, Cnst, Fn, Pr\rangle$$
négy halmazból álló rendszerrel adjuk meg, ahol
  - $Srt \neq \emptyset$ halmaz, elemei a *típusok*. Minden $\pi \in Srt$ típushoz szimbólumoknak egy
  $$v_1^\pi, v_2^\pi, \ldots$$
  rendszere tartozik, ezeket a szimbólumokat π típusú *változóknak* nevezzük.
  - $Cnst$ a nyelv *konstansszimbólumainak* a halmaza. Minden konstans valamilyen $\pi \in Srt$ típusú.
  - Fn halmaz elemei a nyelv *függvényszimbólumai*. Mindegyik $f \in Fn$ függvényszimbólumhoz tartozik egy
  $$(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k \to \pi)$$
  ($k > 0$ és $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi \in Srt$) kifejezés, az adott *függvényszimbólum alakja.*
  - $Pr \neq \emptyset$ halmaz, elemei a nyelv *predikátumszimbólumai*. Minden $P \in Pr$ predikátumszimbólumhoz rendelünk egy
  $$(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$$
  ($k \geq 0$ és $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k \in Srt$) kifejezést, az adott *predikátumszimbólum alakját.* $k = 0$ esetben a predikátumszimbólum egy propozícionális betű.
- logikai jeleket:
  - a $\neg, \wedge, \vee, \supset$ logikai összekötő jeleket;
  - a $\forall$ *univerzális* és $\exists$ *egzisztenciális kvantorokat.*

  (A továbbiakban jelölje $\triangle$ mindig a $\wedge, \vee$ és a $\supset$ logikai összekötő jelek valamelyikét, Q pedig valamelyik kvantort.)
- elválasztó jeleket: ( ) , (zárójelek és vessző).

1.P.2. Definíció. A nem logikai szimbólumok $\langle Srt, Cnst, Fn, Pr\rangle$ halmaznégyese feletti elsőrendű logikai nyelvet jelölje $\mathcal{L}_1$. A nyelv szavai (a *logikai kifejezések*) *termek* vagy *formulák.*

- $\mathcal{L}_1$ *termjei* a következő, induktív definícióval megadott szimbólumsorozatok (szavak):
  - Ha c π típusú konstans, akkor c egyúttal π típusú term.
  - Ha x π típusú változó, akkor x szintén π típusú term.
  - Ha f egy $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k \to \pi)$ alakú függvényszimbólum és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ típusú termek, akkor az
    $$f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$$
    szimbólumsorozat (szó) is π típusú term.
  - $\mathcal{L}_1$ minden termje vagy a nyelv konstansszimbóluma, vagy változója, vagy az előző lépés véges sokszori alkalmazásával belőlük nyerhető. A termek halmazát jelölje $\mathcal{L}_t$.
- Ha P egy $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ alakú predikátumszimbólum és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ típusú termek, akkor a $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ szót *atomi formulának* nevezzük.
- $\mathcal{L}_1$ *formulái* a következő, induktív definícióval megadott szimbólumsorozatok:
  - Minden atomi formula egyúttal formula is.
  - Ha A és B a nyelv formulái, akkor
    $$(A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \supset B) \text{ és } \neg A$$
    szintén formulák.
  - Ha A formula és x tetszőleges változó, akkor
    $$\forall x A \text{ és } \exists x A$$
    szintén formulák.
  - $\mathcal{L}_1$ minden formulája vagy atomi formula, vagy az előző két generáló lépés véges sokszori alkalmazásával atomi formulákból megkapható. A formulák halmazát jelölje $\mathcal{L}_f$.

1.P.3. Megjegyzés. Amennyiben nem adjuk meg másképp az elsőrendű logikai nyelv nem logikai szimbólumait, akkor jelöljenek

- π – és indexelt változatai – típusokat,
- $x, y, z, \dots$ változókat,
- $a, b, c, \dots$ konstansszimbólumokat,
- $f, g, h, \dots$ függvényszimbólumokat,
- $P, Q, R, \dots$ predikátumszimbólumokat, továbbá
- $A, B, C, \dots$ formulákat.

1.P.4. Definíció. [Közvetlen résztemr, közvetlen részformula.] Egy elsőrendű logikai nyelvben

- egyetlen konstansnak illetve változónak sincs *közvetlen résztermje*;
- az $f(t_1, t_2, \dots, t_k)$ term közvetlen résztermjei a $t_1, t_2, \dots, t_k$ termek;
- egy atomi formulának nincs *közvetlen részformulája*;
- a $\neg A$ egyetlen közvetlen részformulája az A formula;
- az $(A \triangle B)$ formula közvetlen részformulái az A és a B formulák;
- a QxA egyetlen közvetlen részformulája az A formula.

1.P.5. Definíció. Egy *term résztermjeinek halmaza* a legszűkebb olyan halmaz, melynek

- a term eleme és
- ha egy term eleme, akkor eleme lesz a term összes közvetlen résztermje is.

Egy *formula részformuláinak halmaza* az a legszűkebb halmaz, melynek

- a formula eleme és
- ha egy formula eleme, akkor eleme lesz a formula összes közvetlen részformulája is.

1.P.6. Definíció. [Szerkezeti fa.]

- Konstansszimbólum illetve változó *szerkezeti fája* egyetlen, a szimbólumot tartalmazó csúcsból áll. Ez a csúcs a fa gyökere.
- Az $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ term szerkezeti fájának gyökere $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$. A gyökér k darab gyermeke rendre a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek szerkezeti fáinak gyökere.
- Atomi formula szerkezeti fája egyetlen, az atomi formulát tartalmazó csúcsból áll. Ez a csúcs a fa gyökere.
- $\neg A$ szerkezeti fájának gyökere $\neg A$. A gyökér egyetlen gyermeke az A szerkezeti fájának gyökere.
- $(A \vartriangle B)$ szerkezeti fájának gyökere $(A \vartriangle B)$. A gyökér bal oldali gyermeke az A szerkezeti fájának gyökere, jobb oldali gyermeke a B szerkezeti fájának gyökere.
- QxA szerkezeti fájának gyökere QxA. A gyökér egyetlen gyermeke az A szerkezeti fájának gyökere.

1.P.7. Definíció. Definiáljuk az $\widetilde{\ell} \colon \mathcal{L}_t \to \mathbb{N}_0$ függvényt a következőképp:

- ha t változó vagy konstansszimbólum, $\widetilde{\ell}(t) \leftrightharpoons 0$,
- $\widetilde{\ell}(f(t_1, t_2, \ldots, t_k)) \leftrightharpoons \widetilde{\ell}(t_1) + \widetilde{\ell}(t_2) + \ldots + \widetilde{\ell}(t_k) + 1$.

A $t \in \mathcal{L}_t$ termhez rendelt $\widetilde{\ell}(t)$ függvényértéket a t *term funkcionális összetettségének* nevezzük.

1.P.8. Definíció. Definiáljuk az $\ell \colon \mathcal{L}_f \to \mathbb{N}_0$ függvényt a következőképp:

- ha A atomi formula, $\ell(A) \leftrightharpoons 0$,
- $\ell(\neg A) \leftrightharpoons \ell(A) + 1$,
- $\ell(A \vartriangle B) \leftrightharpoons \ell(A) + \ell(B) + 1$,
- $\ell(QxA) \leftrightharpoons \ell(A) + 1$.

Az $A \in \mathcal{L}_f$ formulához rendelt $\ell(A)$ függvényértéket az *A formula logikai összetettségének* nevezzük.

1.P.9. Definíció. Egy formulában egy *logikai jel hatásköre* a formulának azon részformulái közül a legkisebb logikai összetettségű, amelyekben az adott logikai jel is előfordul.

1.P.10. Definíció. Egy *formula fő logikai jele* az a logikai jel, melynek hatásköre maga a formula.

1.P.11. Megjegyzés. A formulák leírásakor szokásos rövidítéseket most is használhatjuk:

- Formula-kombinációk helyett speciális jelöléseket vezethetünk be.
- A külső zárójelpárt elhagyhatjuk.
- A logikai összekötő jelekhez, a kvantorokhoz és a bevezetett jelekhez erősorrendet rendelhetünk. Ennek megfelelően, a jelek értelmezését a formulában az alábbi – az erősebbtől a gyengébb felé haladó – sorrendnek megfelelően végezzük el:
  1. kvantorok ($\forall$, $\exists$),
  2. negációjel ($\neg$),
  3. konjunkciójel ($\wedge$) és diszjunkciójel ($\vee$),
  4. implikációjel ($\supset$),
  5. bevezetett jelek (például: $\equiv$).

FELADATOK

1.P.1. Legyenek x, y, z π típusú változók, c egy π típusú konstans-szimbólum, f egy $(\pi \to \pi)$ alakú, g egy $(\pi, \pi \to \pi)$ alakú és h pedig egy $(\pi, \pi, \pi \to \pi)$ alakú függvényszimbólum egy elsőrendű logikai nyelvben. Termek-e ebben a nyelvben a következő szimbólumsorozatok?

(a) $f(x)$

(b) f

(c) $f(g(x, y))$

(d) $g(f(z), h(x, x, x))$

(e) $f(g(c), h(x, y, z))$

(f) $f(x) \wedge g(x, y)$

(g) $f(g(\pi, \pi))$

1.P.2. Adjuk meg az olyan termek halmazát, amely

(a) egyetlen függvényszimbólumot, a $(\pi \to \pi)$ alakú f-et;

(b) egyetlen függvényszimbólumot, a $(\pi, \pi \to \pi)$ alakú g-t;

(c) két függvényszimbólumot, a $(\pi \to \pi)$ alakú f-et és a $(\pi \to \pi)$ alakú h-t

és egyetlen változót, a π típusú x-et tartalmazza!

1.P.3. Legyenek x, y, z π típusú változók, c egy π típusú konstansszimbólum, f egy $(\pi \to \pi)$ alakú, g egy $(\pi, \pi \to \pi)$ alakú és h pedig egy $(\pi, \pi, \pi \to \pi)$ alakú függvényszimbólum, továbbá P egy (π) alakú és Q egy (π, π, π) alakú predikátumszimbólum egy elsőrendű logikai nyelvben. Formulák lesznek-e ebben a nyelvben a következő szimbólumsorozatok?

(a) $Q(x, f(y), h(y, z, z))$

(b) $Q(P(x), f(y), f(z))$

(c) $f(h(x, y, z))$

(d) $(P(x) \supset \forall y(Q(x, y, z) \land P(g(x, y))))$

(e) $\forall c Q(c, x, c)$

(f) $\neg P(x \lor y)$

1.P.4. Adjuk meg, hogy mely egytípusos elsőrendű logikai nyelveknek lehetnek rendre formulái az alábbi formulák!

(a) $R(h(x), g(z, x), y)$

(b) $\exists z(\forall x P(x, z) \supset (\exists z \forall x P(x, z) \supset \exists z P(x, z)))$

(c) $(\forall x P(x, y) \supset \forall x(Q(x, y) \supset R(x)))$

(d) $\exists z(\forall x Q(x, z) \supset (\exists x Q(x, f(x, x)) \supset \exists z P(c, z)))$

1.P.5. Legyen $\langle\{\pi_1, \pi_2\}, \{c\}, \{f\}, \{P, Q, R\}\rangle$ egy elsőrendű logikai nyelv nem logikai szimbólumainak halmaznégyese. Legyen P alakja (π_1), Q alakja (π_1, π_2), R alakja (π_2, π_2), f alakja $(\pi_1, \pi_2 \to \pi_2)$, c típusa π_1. Legyenek $x, y, z, \ldots$ π_1 típusú és $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ pedig π_2 típusú változók. Soroljuk be az alábbi szavakat a következőképp: π_1 típusú termek, π_2 típusú termek, atomi formulák, nem atomi (összetett) formulák, nem nyelvbeli szó!

c, x, y, $(x \vee y)$, α, $f(c,\alpha)$, $f(P(x))$, $f(x, f(c,\alpha))$, $f(\beta,\beta)$, $P(x)$, $Q(y,\alpha)$, $Q(\beta,c)$, $R(f(c,\alpha), f(x, f(c,\alpha)))$, $\forall x \neg \exists \alpha Q(y,\alpha)$, $(\exists \alpha Q(y,\alpha) \supset \forall \alpha R(f(c,\tilde{x}), f(c,\tilde{x})))$, $\forall x P(x,x)$, $\exists c P(c)$, $\exists \alpha (Q(c,\alpha) \wedge Q(\alpha,c))$.

Megoldás

- π_1 típusú termek: c, x, y
- π_2 típusú termek: α, $f(c,\alpha)$, $f(x, f(c,\alpha))$
- atomi formulák: $P(x)$, $Q(y,\alpha)$, $R(f(c,\alpha), f(x, f(c,\alpha)))$
- (nem atomi) formulák:

  $\forall x \neg \exists \alpha Q(y,\alpha)$, $(\exists \alpha Q(y,\alpha) \supset \forall \alpha R(f(c,\tilde{x}), f(c,\tilde{x})))$
- nem a nyelv szavai:

  $f(P(x))$, $(x \vee y)$, $f(\beta,\beta)$, $Q(\beta,c)$, $\forall x P(x,x)$, $\exists c P(c)$, $\exists \alpha (Q(c,\alpha) \wedge Q(\alpha,c))$

1.P.6. Soroljuk fel a következő termek résztermjeit, és határozzuk meg a funkcionális összetettségüket!

(a) $g(x, f(y))$
(b) $h(g(x, f(y)), y, f(z))$
(c) $g(h(x,y,z), f(x))$
(d) $f(h(g(x, f(y)), y, f(y)))$

1.P.7. Soroljuk fel az alábbi formulák részformuláit, és állapítsuk meg a logikai összetettségüket!

(a) $(P(x) \wedge P(y))$
(b) $Q(f(x), g(y,x), y)$
(c) $\forall x \forall y \exists z Q(x,y,z)$
(d) $(\exists x Q(x,y,x) \supset \neg (P(g(x,y)) \wedge \forall z P(z)))$
(e) $(\exists x \neg (P(f(x)) \supset Q(x,y,f(y))) \supset \forall z Q(z,z,z))$
(f) $(\neg \exists x (\neg P(x) \supset Q(x,y,y)) \vee (\forall z Q(z,z,z) \wedge P(y)))$

1.P.8. Hagyjuk el az alábbi teljesen zárójelezett formulákból az elhagyható zárójelpárokat!

(a) $\neg(\forall x P(x) \supset (\exists x Q(x,y) \wedge R(x,x)))$

(b) $\exists z(\forall x P(x,z) \supset (\exists z \forall x P(x,z) \vee \exists x P(x,z)))$

(c) $(\forall x Q(x,y) \supset (\forall x(Q(x,y) \supset R(x)) \wedge Q(x,y)))$

(d) $(\exists z(\forall x P(x) \supset Q(z)) \equiv R(x))$

(e) $(\exists y \forall x(P(x) \vee Q(y)) \equiv (Q(y) \supset P(x)))$

1.P.9. Zárójelezzük a

$$\forall x P(x) \wedge Q(x) \supset \neg \exists y R(x,y) \vee Q(y)$$

formulát az összes lehetséges módon! Döntsük el, hogy közülük melyik a formula teljesen zárójelezett alakja!

1.P.10. Az alábbi formulák közül melyek részformulái a

$$\exists z(\forall x P(x,z) \supset \exists z \forall x P(x,z) \vee \exists z P(x,z))$$

formulának?

(a) $\forall x P(x,z)$

(b) $\forall x P(x,z) \supset \exists z \forall x P(x,z)$

(c) $\exists z \forall x P(x,z) \vee \exists z P(x,z)$

(d) $\exists z P(x,z)$

(e) $\forall x P(x,z) \supset \exists z P(x,z)$

(f) $P(x,z) \vee \exists z P(x,z)$

(g) $P(x,z) \supset \exists z \forall x P(x,z) \vee \exists z P(x,z)$

1.P.11. Legyen a következő szimbólumsorozat egy elsőrendű logika nyelv formulája.

$$\neg \forall x \exists y P(x,y) \supset \forall x Q(x, h(x,y)) \vee \exists x \neg R(h(f(x),y))$$

(a) Adjuk meg a formula szerkezeti fáját, és olvassuk le logikai összetettségét!

(b) Keressük meg a formulában szereplő legnagyobb funkcionális összetettségű termet, és adjuk meg ennek szerkezeti fáját!

Megoldás

(a) A formula összetettsége a szerkezeti fája alapján is leolvasható, megegyezik a nem levél csúcsok számával, ami az alábbi fában 8:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \neg\forall x\exists y P(x,y) \supset \forall x Q(x,h(x,y)) \vee \exists x\neg R(h(f(x),y)) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\neg\forall x\exists y P(x,y) \arrow[d] & & \forall x Q(x,h(x,y)) \vee \exists x\neg R(h(f(x),y)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\forall x\exists y P(x,y) \arrow[d] & \forall x Q(x,h(x,y)) \arrow[d] & & \exists x\neg R(h(f(x),y)) \arrow[d] \\
\exists y P(x,y) \arrow[d] & Q(x,h(x,y)) & & \neg R(h(f(x),y)) \arrow[d] \\
P(x,y) & & & R(h(f(x),y))
\end{tikzcd}
$$

(b) A formulában szereplő x és y változók funkcionális összetettsége 0, $\widetilde{\ell}(h(x,y)) = 1$, $\widetilde{\ell}(f(x)) = 1$ és $\widetilde{\ell}(h(f(x),y)) = 2$. Utóbbi szerkezeti fája a következő:

$$
\begin{tikzcd}
 & h(f(x),y) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
f(x) \arrow[d] & & y \\
x & &
\end{tikzcd}
$$

1.P.12. Rajzoljuk le az alábbi logikai kifejezések szerkezeti fáit!

(a) $\neg R(h(x))$

(b) $f(g(x,y),c,f(x,y,h(x)))$

(c) $P(f(x,f(c,c,x),x))$

(d) $\exists x\neg(P(f(x,x,x)) \supset Q(x,y)) \supset \forall z Q(z,z)$

1.P.13. Írjunk programot, amely egy beolvasott szimbólumsorozatról eldönti, hogy lehet-e egy egytípusos elsőrendű logikai nyelvben term, és ha igen, meghatározza funkcionális összetettségét!

1.P.14. Írjunk programot, amely egy beolvasott szimbólumsorozatról eldönti, hogy lehet-e egy egytípusos, függvényszimbólumok nélküli elsőrendű logikai nyelvben formula, és ha igen, meghatározza

(a) logikai összetettségét;

(b) összes részformuláját!

1.P.15. Írjunk programot, amely alprogramokat használva

(a) lehetőséget ad egy elsőrendű logikai nyelv definiálására;

(b) eldönti, hogy egy beolvasott szimbólumsorozat lehet-e az adott logikai nyelv kifejezése;

(b) megfelelő adatszerkezet segítségével tárolja a beolvasott logikai kifejezés szerkezeti fáját;

(c) kiírja egy tárolt formula teljesen zárójelezett alakját;

(d) kiírja a tárolt formulát a lehető legtöbb zárójelpárt elhagyva belőle!

2. Állítások formalizálása

2.I. Ítéletlogika

FELADATOK

2.I.1. Az alábbi idézetek[1] közül melyek fejeznek ki állítást? Miért, vagy éppen miért nem?

(a) *„Ez volt ám az ember, ha kellett, a gáton.”*

(b) *„Szép öcsém, miért állsz ott a nap tüzében?”*

(c) *„Hej! ha én is, én is köztetek mehetnék,*
Szép magyar vitézek, aranyos leventék!”

(d) *„Toldi György nagy úr volt.”*

(e) *„Add ki, bátya, tüstént, ami engem illet;*
Add ki a jussomat: pénzt, paripát, fegyvert.”

2.I.2. Az alábbi kijelentő mondatok közül melyek állítások?

(a) *A hét páratlan szám.*

(b) *A tíz nem osztható öttel.*

(c) *Prímnek nevezzük azokat a természetes számokat, amelyeknek pontosan két osztójuk van (maga a szám és 1).*

(d) *Minden ötnél nagyobb páratlan szám előáll három prímszám összegeként.*[2]

(e) $x \geq 0$.

2.I.3. Mi a probléma a logikában az alábbi kijelentő mondatokkal?

(a) *Fiam, aki Budapesten él, biológus.*

(b) *A Tisza mellékfolyója árad.*

(c) *Ez az állítás hamis.*

(d) *A jelenleg uralkodó egyiptomi fáraó kopasz.*

[1] Arany: Toldi

[2] Goldbach-sejtés

2.I.4. Vannak-e az alábbi mondatok között olyanok, amelyek ugyanazt az állítást fejezik ki?

(a) *Anna Béla felesége.*

(b) *Béla Anna férje.*

(c) *Csaba Anna unokája.*

(d) *Van olyan gyermeke Annának, aki szülője Csabának.*

(e) *Csaba valaki olyannak a gyermeke, akinek egyik szülője Anna.*

(f) *Itt van a kutya elásva.*

(g) *Ezen a helyen hantolták el az ebet.*

2.I.5. Írjuk át a természetes nyelven megfogalmazott negációkat a $\neg$ jel használatával a következő állításokban! A negációjel argumentumát határoljuk zárójelekkel!

(a) *A tíz osztható öttel.*

(b) *A tíz nem osztható öttel.*

(c) *Nem igaz, hogy a tíz nem osztható öttel.*

Megoldás

$$\neg\neg(\text{tíz osztható öttel})$$

(d) *Az ébenfa nem fehér.*

(e) *Az ébenfa fekete.*

(f) *Tévedés, hogy az ébenfa nem fekete.*

(g) *A csokoládét Péter megette.*

(h) *A csokoládét nem Péter ette meg.*

(i) *Nem igaz, hogy a csokoládét Péter megette.*

(j) *Nincs igaza annak, aki tagadja, hogy a csokoládét Péter megette.*

(k) *A probléma megoldható.*

(l) *A probléma megoldhatatlan.*

(m) *Tévedés az, hogy a probléma megoldhatatlan.*

2.I.6. Írjuk át a természetes nyelven megfogalmazott negációkat a $\neg$, a konjunkciókat $\wedge$ jelek használatával a következő állításokban! Az argumentumokat határoljuk most is zárójelekkel!

(a) *„Hervad már ligetünk, s díszei hullanak."*[3]

(b) *„És valóban ősszel a föld*
csak elalszik, nem hal meg;
Szeméből is látszik, hogy csak
Álmos ő, de nem beteg."[4]

(c) *„Tán csodállak, ámde nem szeretlek ... "*[5]

(d) *„Elment, nem látom többé már soha,*
Elment, nem látom többé már soha."[6]

(e) *„Sem utódja, sem boldog őse,*
Sem rokona sem ismerőse
nem vagyok senkinek."[7]

2.I.7. A köznyelvben a *vagy* kötőszót többféle értelemben használjuk: *megengedő* (egyik vagy másik, vagy mindkettő), *kizáró* (egyik vagy másik, de csak az egyik) és *összeférhetetlen* (egyik vagy másik, vagy egyik sem) értelemben. Döntsük el, hogy az alábbi állításokban milyen értelemben használtuk a kötőszót!

(a) *Zoltánt vagy Gábort magammal viszem.*

(b) *Vagy Zoltánt viszem magammal, vagy Gábort.*

(c) *Egy angolul vagy németül beszélő idegenvezető kíséri a turistákat.*

(d) *Melyik állomás következik most? – kérdezi az egyik utas a másiktól. Vagy Téglás, vagy Újfehértó – feleli az.*

(e) *Kérlek, Tomi, tedd le most a könyvet – mondta az apja. Vagy eszik az ember, vagy olvas.*

(f) *Holnapra vagy holnaputánra kijavítom a dolgozatokat – ígérte a tanárnő.*

[3] Berzsenyi: A közelítő tél
[4] Petőfi: Itt van az ősz, itt van ujra ...
[5] Petőfi: Az Alföld
[6] Ady: Egyedül a tengerrel
[7] Ady: Szeretném, ha szeretnének

2.I.8. Írjuk át a természetes nyelven megfogalmazott negációkat a $\neg$, a konjunkciókat $\wedge$, a diszjunkciókat $\vee$ jelek használatával a következő állításokban! Az argumentumokat határoljuk zárójelekkel!

(a) *Az alkalmazott nem tudott mindent, vagy pedig megtiltották, hogy beszéljen.*

(b) *Elutazhatunk a Balatonra vagy a Mátrába, de nem utazhatunk a Balatonra is, és a Mátrába is.*

(c) *Kati elmegy és Alma itt marad, vagy mind a ketten elmennek, és Kati vissza sem jön már, de Alma vagy visszajön, vagy mégsem jön vissza.*

(d) *Kizárt, hogy nem vizsgázom le logikából vagy diszkrét matematikából elsőre, mégis izgulok.*

2.I.9. Írjuk át a természetes nyelven megfogalmazott negációkat a $\neg$, a konjunkciókat $\wedge$, a diszjunkciókat $\vee$, az implikációkat $\supset$ jelek használatával a következő mondatokban! Az argumentumokat határoljuk zárójelekkel!

(a) *„Ha egy úri lócsiszárral*
találkoztam s bevert sárral: Nem pöröltem, -
Félreálltam, letöröltem.”[8]

(b) *„Ha meghalunk, hát meghalunk ... ”*[9]

(c) *„Csak akkor születtek nagy dolgok,*
Ha bátrak voltak, akik mertek.”[10]

(d) *„ Ó ha cinke volnék,*
útra kelnék,
hömpölygő sugárban
énekelnék - ”[11]

(e) *„Ha vizipók jő a tóra,*
és ha légy nádra száll:
tátva bukik ki a vízből
már ezer békaszáj - ”[12]

[8] Arany: Epilógus
[9] Ady: Hadak útján
[10] Ady: A Tűz csiholója
[11] Weöres: Buba éneke
[12] Zelk: Békabánat

2.I.10. Mely állítások fejezik ki ugyanazt?

(a) *Ha Julcsinak sikerül a dolgozata, megkapja a jelest.*

(b) *Ha Julcsinak nem sikerül a dolgozata, nem kapja meg a jelest.*

(c) *Ha Julcsi megkapta a jelest, sikerült a dolgozata.*

(d) *Ha Julcsi nem kapta meg a jelest, nem sikerült a dolgozata.*

(e) *Csak akkor kapja meg Julcsi a jelest, ha sikerül a dolgozata.*

(f) *Csak akkor nem kapja meg Julcsi a jelest, ha nem sikerül a dolgozata.*

2.I.11. „*Reginam occidere nolite timere bonum est si omnes consentiunt ego non contradico.*" – írta Merániai János esztergomi érsek híres levelében dodonai kétértelműséggel. Magyarul: „*A királynőt megölni nem kell félnetek jó lesz ha mindnyájan beleegyeztek én nem ellenzem.*" Adjuk meg a lehetséges jelentéseket, melyeket alább formalizáltunk!

(a) ¬(a királynőt meg kell ölni) ∧ (félnetek jó lesz)∧
((mindnyájan beleegyeztek) ⊃ ¬(én beleegyeztem))∧
(én ellenzem)

(b) ¬(a királynőt megölni félnetek kell) ∧ (jó lesz)∧
((mindnyájan beleegyeztek) ⊃ ¬(én ellenzem))

2.I.12. Írjuk le az ítéletlogika nyelvén!

(a) *Nemcsak* X*, hanem* Y *is.*

(b) X *abban az esetben, ha* Y*.*

(c) *Nem igaz, hogy ha* X*, akkor egyúttal* Y*.*

(d) X*, feltéve, hogy* Y*.*

(e) *Bár nem* X*, mégis* Y*.*

(f) *Sem* X*, sem* Y*.*

(g) *Csak akkor* X*, ha* Y*.*

Megoldás

$$X \supset Y$$

(h) *Legfeljebb akkor* X*, ha* Y*.*

(i) *X, kivéve, ha nem Y.*

(j) *Akkor X, ha Y, de csak akkor.*

(k) *Ha nem X, hát legalább Y.*

(l) *Vagy X, vagy Y, de nem mind a kettő.*

(m) *Ha X, akkor Y, feltéve hogy nem Z.*

(n) *Pontosan akkor X, ha nem Y.*

Megoldás

$$X \equiv \neg Y$$

2.I.13. Jelentse E, hogy „esik az eső”, S, hogy „strandolok”, N, hogy „napozok”, O, hogy „otthon maradok”. Mit jelentenek természetes nyelven az alábbi formulák?

(a) $E \supset \neg(S \vee N)$

(b) $O \equiv E$

(c) $S \supset \neg E$

(d) $(E \wedge O) \vee (\neg E \wedge S)$

(e) $\neg O \supset (N \wedge \neg E) \vee S$

2.I.14. Írjuk fel ítéletlogikai nyelven az alábbi állításokat! [13]

(a) *Nincs jó idő.*

(b) *Ha jó az idő, kirándulni megyünk.*

(c) *Nincs jó idő, és nem megyünk kirándulni.*

(d) *Csak akkor megyünk kirándulni, ha jó az idő.*

Megoldás

$K \supset J$ $\quad$ K– megyünk kirándulni
J– jó az idő

(e) *Nem fordulhat elő, hogy kirándulni megyünk, és nincs jó idő.*

[13] A (q)-(r) feladatokat a [10] könyvből vettük át.

(f) *Ha esik az eső vagy fúj a szél, akkor nincs jó idő.*

(g) *Ha esik az eső, pedig süt a Nap, akkor szivárványt lehet látni, kivéve ha éppen a városban vagyunk.*

(h) *Csak akkor lehet szivárványt látni, ha az eső is esik, és a Nap is süt, de nem városban vagyunk.*

(i) *Ha időben felébreszt a vekker, akkor – föltéve hogy várakozás nélkül kapok buszt is – nyolc órára megérkezek.*

(j) *Ha nem ébreszt fel időben a vekker, nem kapok várakozás nélkül buszt sem.*

(k) *Ha időben felébreszt a vekker, akkor buszt is várakozás nélkül kapok, és meg is érkezek nyolc órára.*

(l) *Csak akkor érkezek meg nyolc órára, ha nem történik meg, hogy nem ébreszt időben a vekker vagy nem kapok várakozás nélkül buszt.*

Megoldás

$M \supset \neg(\neg E \vee \neg K)$

M– megérkezek nyolc órára
E– időben ébreszt a vekker
K– várakozás nélkül kapok buszt

(m) *Vagy nyolc órára megérkezek, vagy nem ébreszt fel időben a vekker, vagy buszra kell várakozzak.*

(n) *A talált ujjlenyomatok csak akkor származnak a tettestől, ha a szomszédok tanúvallomása helytálló.*

(o) *Pontosan akkor származnak az ujjlenyomatok a tettestől, ha a gyanúsított a tettes.*

(p) *Amennyiben a szomszédok tanúvallomása helytálló, úgy a gyanúsított a tettes.*

(q) *Ha a szemtanú megbízható, és az írásszakértő véleménye helytálló, úgy a bűncselekményt akkor és csak akkor követték el előre megfontolt szándékkal, ha a talált ujjlenyomat a tettestől vagy esetleges bűntársától származik.*

(r) *Ha a szemtanú megbízható, az írásszakértő véleménye helytálló, és a talált ujjlenyomat a tettestől származik, akkor a bűncselekményt előre megfontolt szándékkal követték el.*

2.I.15. Alkalmas ítéletlogikai nyelven írjuk le az alábbi állításokat!

(a) *Ha Dávid elmegy a koncertre, akkor Barna és Csaba is ott lesz.*

(b) *Csaba csak akkor megy a koncertre, ha András és Barna nem mennek.*

(c) *Ha Dávid megy koncertre, akkor feltéve hogy Csaba nem megy, András is megy.*

(d) *Csaba megy koncertre, amennyiben Dávid nem, de ha Dávid megy, akkor Barna is ott lesz.*

(e) *Ahhoz, hogy András elmenjen a koncertre az szükséges, hogy ha Barna és Csaba nem mennek, akkor Dávid menjen.*

(f) *András, Barna és Csaba pont akkor mennek koncertre, ha Dávid nem, de ha sem András, sem Barna nem mennek, akkor Dávid csak akkor megy, ha Csaba is megy.*

(g) *Ahhoz, hogy Dávid ne menjen el a koncertre, elegendő, hogy András és Csaba ott legyenek.*

2.I.16. Adjunk meg olyan ítéletlogikai nyelvet, amelyik lehetővé teszi egy közlekedési lámpa működésének leírását! Fejezzük ki a nyelv formuláival az alábbi tényeket!

(a) *A közlekedési lámpa vagy zölden, vagy pirosan, vagy éppen sárgán világít.*

Megoldás

Z_k – a k-adik időegységben a lámpa zöld

P_k – a k-adik időegységben a lámpa piros

S_k – a k-adik időegységben a lámpa sárga

$$(Z_k \equiv \neg P_k \wedge \neg S_k) \wedge (P_k \equiv \neg Z_k \wedge \neg S_k) \wedge (S_k \equiv \neg P_k \wedge \neg Z_k)$$

(b) *A közlekedési lámpa zöldről sárgára, sárgáról pirosra és pirosról zöldre vált.*

(c) *A közlekedési lámpa ugyanazzal a színnel legfeljebb 3 egymást követő időegységig világít.*

2.P. Elsőrendű logika

FELADATOK

2.P.1. Keressük meg az alábbi állításokban a predikátumokat! Írjuk le elől a predikátumot, s utána zárójelekkel közrefogva az argumentumot (*prefix írásmód*)!

(a) *Lóránt fizikus.*

(b) *Magda és Julcsi testvérek.*

(c) *Lóránt fiatalabb, mint Győző.*

Megoldás

fiatalabb(Lóránt, Győző)

(d) *Anna Bella és Csilla között áll.*

(e) *András elküldte Balázst Ceglédre Dóráért.*

2.P.2. Keressük meg az alábbi állításokban a neveket (tulajdonneveket, leírásokat, névmásokat)! Használjuk a prefix írásmódot!

(a) *Informatikus vagyok.*

(b) *Tamás édesapja főiskolai tanár.*

(c) *Rómeó szereti Júliát.*

(d) *Szeretlek.*

(e) *Péter édesanyja édesanyám munkatársa.*

Megoldás

munkatársa(édesanyja(Péter),édesanyja(én))

(f) *Péter barátjának a barátja sportoló.*

(g) *A Duna a Fekete-tengerbe ömlik.*

(h) *Magyarország leghosszabb folyója a Fekete-tengerbe ömlik.*

(i) *Petőfi hazájának leghosszabb folyója a Fekete-tengerbe ömlik.*

2.P.3. Írjuk le alkalmas elsőrendű logikai nyelv segítségével az alábbi állításokat!

(a) *Karak megetette és a barlangjába vitte a kis Vukot.*

(b) *Vuk csak akkor tudja kiszabadítani Inyt, ha Karak segít neki.*

(c) *Ha Vahur nem aludt volna el, akkor Vuk nem tudta volna kiszabadítani Inyt.*

2.P.4. Az alábbi állítások az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazról szólnak. Formalizáljuk az állításokat: vezessünk be változókat és jelöljük ki a kvantorokat!

(a) *A számok között van páros.*

(b) *Minden szám egyjegyű.*

(c) *Nincs* 5*-nél nagyobb szám.*

(d) *Nem minden szám prím.*

2.P.5. Az alábbi (nyitott) mondatokban vezessünk be új változókat és jelöljük ki a kvantorokat! Használjuk szükség szerint a $\neg$ negációjelet!

(a) x *szeret valakit.*

(b) x*-et szereti valaki.*

(c) x *szeret mindenkit.*

(d) x*-et mindenki szereti.*

(e) x *nem szeret mindenkit.*

(f) x*-et nem szereti mindenki.*

(g) x *senkit sem szeret.*

(h) x*-et senki sem szereti.*

2.P.6. Az alábbi állításokban vezessünk be új változókat és jelöljük ki a kvantorokat! Használjuk szükség szerint a $\neg$ negációjelet!

(a) *Mindenki szeret valakit.*

(b) *Mindenkit szeret valaki.*

(c) *Mindenki szeret mindenkit.*

(d) *Mindenki szereti önmagát.*

(e) *Van, aki mindenkit szeret.*

(f) *Van, akit mindenki szeret.*

(g) *Van, aki szereti önmagát.*

(h) *Senki sem szeret mindenkit.*

Megoldás

$$\neg\exists x \forall y \text{ szeret}(x,y) \qquad \text{szeret}(x,y) - x \text{ szereti } y\text{-t}$$

(i) *Senkit sem szeret mindenki.*

(j) *Van, aki senkit sem szeret.*

(k) *Van, akit senki sem szeret.*

2.P.7. Jelentse $f(x)$ az x természetes számot követő természetes számot (azaz $x+1$-et), $P(x)$ azt, hogy az x természetes szám páros, $Q(x,y)$ pedig azt, hogy $x \leq y$. Olvassuk fel természetes nyelven az alábbi formulákat!

(a) $\exists x P(x)$

(b) $\neg\forall x P(x)$

(c) $\exists x \neg P(x)$

(d) $\neg\neg\exists x P(x)$

(e) $\exists x \neg\forall y Q(x,y)$

(f) $\exists x \forall y Q(x,y)$

(g) $\forall x \exists y Q(x,y)$

(h) $\forall y \exists x Q(x,y)$

(i) $\neg\exists y \forall x Q(x,y)$

Megoldás

Nincs olyan természetes szám, amely minden természetes számnál nagyobb vagy egyenlő lenne.

(j) $\forall x Q(x,x)$

(k) $\forall x(P(x) \vee P(f(x)))$

(l) $\forall x(P(x) \supset P(f(f(x))))$

(m) $\forall x \forall y \forall z(Q(x,y) \wedge Q(y,z) \supset Q(x,z))$

(n) $\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \supset Q(x,y) \vee Q(y,x))$

(o) $\neg \exists x \neg Q(x, f(x))$

(p) $\neg \exists x Q(f(x), x)$

2.P.8. Formalizáljuk alkalmas elsőrendű logikai nyelven a következő állításokat!

(a) *Veronika egyetemi hallgató.*

(b) *Ha Veronika egyetemi hallgató, akkor Ákos is az.*

(c) *Vannak egyetemi hallgatók.*

(d) *Nem mindenki egyetemi hallgató.*

(e) *Minden egyetemi hallgató sportol.*

(f) *Bizonyos egyetemi hallgatók sportolnak.*

(g) *Nincs olyan egyetemi hallgató, aki nem sportol.*

Megoldás

$E(x)$ – x egytemista

$S(x)$ – x sportol

$$\neg \exists x(E(x) \wedge \neg S(x))$$

(h) *Nincs lusta egyetemi hallgató.*

(i) *A lusta egyetemi hallgatók nem sportolnak.*

(j) *Egyes egyetemi hallgatók szorgosak, de nem sportolnak.*

(k) *A jogászhallgatók kivételével minden egyetemi hallgató szavazott.*

(l) *Csak a sportoló egyetemi hallgatók nem szavaztak.*

(m) *Néhány egyetemi hallgató, aki szavazott, diákképviselő.*

(n) *Veronikának van testvére.*

(o) *Győzőnek van húga is, és öccse is.*

(p) *Zsófinak van testvére, de nincs sem húga, sem öccse.*

(q) *Egyetlen diákképviselő testvére sem szavazott.*

(r) *Azok az egyetemi hallgatók, akiknek van testvére, mind szavaztak.*

(s) *Mindenkit, akit P. professzor tanít, a professzor öccse is tanítja.*

(t) *Aki minden egyetemi hallgatót tanít, az legalább egy sportolót is tanít.*

(u) *Senki sem tanítja a sportoló egyetemi hallgatókat.*

(v) *Mindenki, kivéve akit P. professzor tanít, tisztel minden tanárt.*

(w) *Minden szorgos egyetemi hallgató tisztel néhány tanárt.*

(z) *A lusta egyetemi hallgatók egyetlen tanárukat sem tisztelik.*

2.P.9. Formalizáljuk elsőrendű logikai nyelven a következő állításokat!

(a) *„Egy kálomista pap s Csokonai*
Egymásnak voltak jóbarátai.”[14]

(b) *„Neved ki diccsel ejtené,*
Nem él oly velszi bárd.”[15]

(c) *„Sem utódja, sem boldog őse,*
Sem rokona sem ismerőse
nem vagyok senkinek.”[16]

(d) *„Nincs madár, mely akkor énekeljen,*
midőn éhezik vagy fázik … ”[17]

(e) *„Senki sem szerez barátokat, ha nem voltak ellenségei.”*[18]

(f) *„A nagyapám pipájának kupakja*
nem a pipám kupakjának nagyapja.”[19]

(g) *Nem minden szarka farka tarka, csak a tarka farkú szarka farka tarka.*

[14] Petőfi: Csokonai
[15] Arany: A walesi bárdok
[16] Ady: Szeretném, ha szeretnének
[17] Platón
[18] Tennyson
[19] Páskándi: Tréfás-pipás-kupakos

2.P.10. A sudoku egy logikai játék, melyben megadott szabályok szerint az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyeket kell elhelyezni egy táblázatban. A táblázat 9 sorban és 9 oszlopban elrendezett cellákat tartamaz, továbbá 9 3x3-as cellacsoport is ki van jelölve. A számokat úgy kell a cellákba beírni, hogy tetszőleges sorban, oszlopban és háromszor hármas négyzetben minden szám csupán egyszer forduljon elő. Segítségül bizonyos számokat előre megadnak, például

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Formalizáljuk alkalmas logikai nyelven a kitöltés során betartandó feltételeket:

(a) *Egyetlen cella sem tartalmazhat két különböző számot.*

(b) *Minden sorban mind a kilenc különböző számnak szerepelnie kell, tehát egy-egy szám egy sorban csak egyszer fordulhat elő.*

(c) *Minden oszlopban mind a kilenc különböző számnak szerepelnie kell, tehát egy-egy szám egy oszlopban csak egyszer fordulhat elő.*

(d) *Minden vastag vonallal határolt cellacsoportban mind a kilenc különböző számnak szerepelnie kell, tehát egy-egy szám ezekben is csak egyszer fordulhat elő.*

3. Kvantorok, kötött változók, kongruencia

3.P. Elsőrendű logika

3.P.1. Definíció. Egy formulában egy *változónak* kétféle *előfordulását* különböztetjük meg. Az x változó egy adott előfordulása az A formulában *kötött*, ha egy az x-et megnevező kvantor hatáskörében van. Az x változó előfordulása *szabad*, ha nem kötött. Egy kvantor a kvantoros előtagban megnevezett változónak a hatásköre közvetlen részformulájában még szabad előfordulásait köti.

3.P.2. Szabály. Egy változó-előfordulás kötöttségének meghatározása:

- Egy atomi formulában minden változó-előfordulás szabad.
- Az $A \triangle B$ formulában egy változó-előfordulás kötött, ha ez az előfordulás vagy A-ban van és már A-ban kötött, vagy B-ben van és már B-ben kötött.
- A $\neg A$ formulában egy változó-előfordulás kötött, ha ez az előfordulás már A-ban kötött.
- A QxA formulában x minden előfordulása kötött. Ha x egy előfordulása A-ban még szabad volt, akkor ezt az előfordulást a QxA formulában a Q kvantor köti. Egy az x-től különböző változó valamely előfordulása QxA-ban kötött, ha már A-ban is kötött volt.

3.P.3. Megjegyzés. Egy változót a formula *paraméterének* nevezünk, ha van a formulában szabad előfordulása. Egy A formula paramétereinek a halmazára $\mathrm{Par}(A)$-val hivatkozunk.

3.P.4. Definíció. A QxA formulában a Q kvantor által *kötött x változó átnevezéséről* beszélünk, amikor

- a Qx kvantoros előtagban x helyett egy vele megegyező típusú y változót nevezünk meg, majd
- A-ban az x változó minden szabad előfordulását y-ra cseréljük ki (a kapott formulát jelöljük A_y^x-nal),

és így a QyA_y^x formulát kapjuk.

3.P.5. Definíció. A QxA formulából *szabályosan végrehajtott kötött változó átnevezéssel* kapjuk a QyA_y^x formulát, ha y nem paramétere QxA-nak, és az x változó egyetlen Q által kötött előfordulása sem tartozik egyetlen y-t kötő kvantor hatáskörébe sem.

3.P.6. Definíció. Az A' formula az A formula *variánsa* (vagy A és A' *egymással kongruens formulák*) ha egymástól csak kötött változók szabályosan végrehajtott átnevezésében különböznek. Jelölése: $A \approx A'$.

3.P.7. Szabály. Annak eldöntése indukcióval, hogy két formula egymás variánsa-e:

- Egy atomi formula csak önmagával kongruens.
- $A \vartriangle B \approx A' \vartriangle B'$, ha $A \approx A'$ és $B \approx B'$.
- $\neg A \approx \neg A'$, ha $A \approx A'$.
- $QxA \approx QyB$, ha minden z-re, mely különbözik QxA és QyB összes (kötött és szabad) változójától, $A_z^x \approx B_z^y$.

3.P.8. Megjegyzés. Segédeszköz annak eldöntésére, vajon két formula egymás variánsa-e:

- vonalak segítségével jelöljük meg, melyek a kötött változó-előfordulások, és mely kvantorok kötik ezeket;
- töröljük az összekötött változó-előfordulásokat a kvantoros előtagban található változó-megnevezéssel együtt.

Az így kapott alakzatot az eredeti *formula vázának* nevezzük. Két formula pontosan akkor lesz egymás variánsa, ha megegyező a vázuk.

3.P.9. Definíció. Egy formulát *változóiban tisztának* nevezünk, ha minden kvantoros előtagban a formula paramétereitől is, és páronként egymástól is különböző változó van megnevezve.

3.P.10. Tétel. Legyen A egy formula és S változóknak egy véges halmaza. Ekkor konstruálható A-val kongruens olyan változó-tiszta B formula, hogy B minden, a kvantoros előtagokban megnevezett változója különbözik az összes S-beli változótól.

FELADATOK

3.P.1. Határozzuk meg, hogy az alábbi formulában az egzisztenciális kvantor az x változó mely előfordulásait köti!

$$\forall x(P(x) \supset \exists x(\neg Q(f(x)) \vee \forall x P(f(x))) \vee \forall x R(x))$$

> **Megoldás**
>
> Először határozzuk meg az egzisztenciális kvantor hatáskörét:
>
> $$\exists x(\neg Q(f(x)) \vee \forall x P(f(x)))$$
>
> A kvantor az x változónak a $\neg Q(f(x)) \vee \forall x P(f(x))$ formulabeli szabad előfordulásait köti.
>
> - a $\neg Q(f(x))$ közvetlen részformulában x változó minden előfordulása szabad, mivel a $Q(f(x))$ atomi formulában minden változó előfordulás szabad,
> - a $\forall x P(f(x))$ közvetlen részformulában az x változó minden előfordulása kötött.
>
> Ezért a kvantor – bár hatáskörébe x változó több előfordulása is esik – a formulában egyetlen változó előfordulást köt.
>
> $$\forall x(P(x) \supset \exists x(\neg Q(f(x)) \vee \forall x P(f(x))) \vee \forall x R(x))$$

3.P.2. A következő formulákban állapítsuk meg a kvantorok hatáskörét, és döntsük el, mely változó-előfordulások szabadok és melyek kötöttek! Határozzuk meg a formulák paramétereinek halmazát! (x, y, z változók és c konstansszimbólum.)

(a) $\exists x P(x) \wedge P(x)$

(b) $\forall x Q(x, y) \supset \forall y Q(x, y)$

(c) $\exists x \exists y(Q(x, y) \wedge P(z))$

(d) $\forall x(Q(x, c) \supset \exists y Q(x, y))$

(e) $\forall x(\forall y R(x, y, z) \supset Q(x, y))$

(f) $\forall y \exists z(R(x, g(x, y), z) \supset \exists x Q(z, x))$

(g) $\exists x \forall y(P(x) \vee Q(x, f(y)) \supset \forall y Q(x, y))$

3.P.3. Vizsgáljuk meg, hogy szabályos-e az univerzálisan kvantált x változó átnevezése y változóra az alábbi formulák esetén, és hajtsuk végre a szabályos átnevezést, amennyiben ez lehetséges!

(a) $\forall x(P(x,y) \vee \neg Q(y,x))$

(b) $\forall x \exists y Q(x,y)$

(c) $\forall x(Q(x,x) \supset \exists x \exists y R(x,y))$

Megoldás

(a) Az átnevezés nem szabályos, mert az y változó paramétere a formulának.

$$\mathrm{Par}(\forall x(P(x,y) \vee \neg Q(y,x))) = \{y\}$$

(b) Az átnevezés nem szabályos, mert található olyan y változót kötő kvantor, melynek hatásköre a $\exists y Q(x,y)$ formula, ahol az x változó előfordulása a tekintett univerzális kvantor által kötött.

(c) Az átnevezés szabályos, mivel y nem paraméter, és x változót csak a $Q(x,x)$ részformulában köti az univerzális kvantor, és ezen változó előfordulások nem esnek y-t kötő kvantor hatáskörébe.

Ellenőrzésként figyeljük meg, hogy a szabályosan végrehajtott változó átnevezés segítségével kongruens formula jön létre, tehát a kötési viszonyok megegyeznek.

$$\forall x(Q(x,x) \supset \exists x \exists y R(x,y)) \qquad \forall y(Q(y,y) \supset \exists x \exists y R(x,y))$$

3.P.4. Keressük meg az alábbi formulák közt egymás variánsait!

(a) $\exists x P(x,y)$, $\exists x P(x,z)$, $\exists y P(y,y)$

(b) $\exists x P(x,y) \supset \forall z P(x,z)$, $\exists z P(z,y) \supset \forall y P(x,y)$

Megoldás

A feladatok megoldásához először rajzoljuk be a formulákba a kötési viszonyokat! A változók szabad előfordulását az előfordulás felett elhelyezett nyíllal jelölhetjük. Az egyes kvantorok által kötött változó-előfordulásokat a kvantorral összekötve szemléltethetjük. A kötési viszonyok ismeretében a formula váza a kötött változók nevének elhagyásával kapható.

(a) A formulák nem egymás variánsai, mivel vázuk különbözik:

$$\exists x P(x,y) \qquad \exists x P(x,z) \qquad \exists y P(y,y)$$

$$\exists\ \ P(\ \ ,y) \qquad \exists\ \ P(\ \ ,z) \qquad \exists\ \ P(\ \ ,\ \ )$$

(b) A két formula egymás variánsa, mivel vázuk megegyezik:

$$\exists x P(x,y) \supset \forall z P(x,z) \qquad \exists z P(z,y) \supset \forall y P(x,y)$$

$$\exists\ \ P(\ \ ,y) \supset \forall\ \ P(x,\ \ ) \qquad \exists\ \ P(\ \ ,y) \supset \forall\ \ P(x,\ \ )$$

3.P.5. Vannak-e az alábbi formulák között olyanok, amelyek egymás variánsai?

(a) $\forall x(P(x,y) \supset \exists z Q(x,z)) \wedge \forall y R(y,z)$

(b) $\forall x(P(z,y) \supset \exists z Q(x,z)) \wedge \forall y R(y,z)$

(c) $\forall u(P(z,y) \supset \exists u Q(u,u)) \wedge \forall u R(u,z)$

(d) $\forall z(P(z,y) \supset \exists x Q(z,x)) \wedge \forall v R(v,z)$

3.P.6. Döntsük el a következő formulákról, melyek egymás variánsai!

(a) $\forall z(\forall x Q(z,x,v) \supset \exists v(P(v,u) \supset \exists w Q(v,w,x)))$

(b) $\forall x(\forall w Q(x,w,v) \supset \exists w(P(w,u) \supset \exists v Q(w,v,x)))$

(c) $\forall x(\forall w Q(x,w,u) \supset \exists v(P(v,u) \supset \exists w Q(v,w,x)))$

(d) $\forall z(\forall x Q(x,z,v) \supset \exists w(P(w,u) \supset \exists v Q(w,v,x)))$

3.P.7. Legyen az alábbi szimbólumsorozat egy elsőrendű logikai nyelv formulája.

$$R(x) \wedge \exists x \neg(P(y,c) \supset \exists x R(x) \vee \forall y Q(x,y,z))$$

(a) Készítsük el a formula vázát!

(b) Adjuk meg a formula egy változó-tiszta variánsát!

Megoldás

A feladatok megoldásához először rajzoljuk be a formulába a kötési viszonyokat! A formulában az x, y és z változóknak egy-egy szabad előfordulása van, melyet az előfordulás felett elhelyezett nyíllal jelölhetünk. Ezek lesznek a formula paraméterei. (A c konstansszimbólum, így nincs státusza.) Az egyes kvantorok által kötött változó-előfordulásokat a kvantorral összekötve szemléltethetjük.

$$R(x) \land \exists x \neg(P(y,c) \supset \exists x R(x) \lor \forall y Q(x,y,z))$$

(a) A kötési viszonyok ismeretében a formula váza a kötött változók nevének elhagyásával kapható:

$$R(x) \land \exists\ \neg(P(y,c) \supset \exists\ R(\ ) \lor \forall\ Q(\ ,\ ,z))$$

(b) A változó-tiszta variáns a formula vázából úgy állítható elő, hogy az elhagyott kötött változónevek helyébe új, a formulában még nem szereplő változóneveket helyettesítünk. Legyenek ezek most balról jobbra haladva a következők: u, v, w. A behelyettesítés eredménye:

$$R(x) \land \exists u \neg(P(y,c) \supset \exists v R(v) \lor \forall w Q(u,w,z))$$

3.P.8. Változó-tiszták-e az alábbi formulák? Amelyik nem, azt hozzuk a változóiban tiszta alakra!

(a) $\neg\exists z Q(z,z) \land P(f(y,z))$

(b) $\exists x \forall y (P(x) \land P(y)) \supset \forall x Q(x,x)$

(c) $\exists x R(x,y,z) \supset \forall x \forall y (P(y) \land R(x,y,z))$

3.P.9. Írjunk programot, amely meghatározza egy formula paramétereinek halmazát!

3.P.10. Írjunk programot, amely ellenőrzi, hogy egy formula változóiban tiszta-e, és ha nem, akkor a formulát változótiszta alakra hozza!

3.P.11. Írjunk programot, amely eldönti, hogy két formula kongruens-e!

4. Termhelyettesítés, illesztő helyettesítés

4.P. Elsőrendű logika

4.P.1. Definíció. A *termhelyettesítés* változók és velük megegyező típusú termek párjainak olyan véges $\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_k/t_k\}$ halmaza, melyben $x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$ minden $i, j = 1, 2, \ldots, k$-ra, $k \geq 1$.

4.P.2. Megjegyzés. A termhelyettesítést megadhatjuk táblázattal is:

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_k \end{pmatrix}.$$

Gyakran a táblázat két sorát egymástól két vonallal elválasztva egy sorban írjuk le: $(x_1, x_2, \ldots, x_k \parallel t_1, t_2, \ldots, t_k)$. Szokás az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ változókat a termhelyettesítés értelmezési tartományának ($\mathrm{Dom}(\theta)$), a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termeket pedig a helyettesítés értékkészletének ($\mathrm{Rng}(\theta)$) nevezni, $\theta(x_i)$-vel pedig a θ helyettesítésben az x_i-hez tartozó t_i termre hivatkozni. Ha $\mathrm{Dom}(\theta) = \varnothing$, θ üres helyettesítés, jele: ε.

4.P.3. Definíció. Legyen K egy elsőrendű logikai nyelv valamely kifejezése, $\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_k/t_k\}$ pedig egy termhelyettesítése. Az x_i változók összes K-beli szabad előfordulását helyettesítsük egyidejűleg a t_i termekkel. Az így kapott kifejezést θ K-ba való *helyettesítése eredményének* nevezzük és $K\,\theta$-val, vagy $K^{x_1,\ldots,x_k}_{t_1,\ldots,t_k}$-val jelöljük.

4.P.4. Szabály. Egy kifejezésbe való helyettesítés eredményének meghatározása a kifejezés szerkezete szerinti indukcióval:

- $x\,\theta = \begin{cases} x & \text{ha } x \notin \mathrm{Dom}(\theta) \\ \theta(x) & \text{ha } x \in \mathrm{Dom}(\theta) \end{cases}$
- $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)\,\theta = f(t_1\,\theta, t_2\,\theta, \ldots, t_k\,\theta)$
- $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)\,\theta = P(t_1\,\theta, t_2\,\theta, \ldots, t_k\,\theta)$
- $(A \vartriangle B)\,\theta = A\,\theta \vartriangle B\,\theta$
- $(\neg A)\,\theta = \neg(A\,\theta)$
- $(QxA)\,\theta = Qx(A\,\theta_{-x})$, ahol θ_{-x} azt a termhelyettesítést jelöli (*redukált helyettesítés*), melyre $\mathrm{Dom}(\theta_{-x}) = \mathrm{Dom}(\theta) \setminus \{x\}$, és minden $z \in \mathrm{Dom}\ \theta_{-x}$ esetén $\theta_{-x}(z) = \theta(z)$.

4.P.5. Definíció. A θ helyettesítés *megengedett* a K kifejezés számára, ha minden $x \in \mathrm{Dom}(\theta)$ változó minden K-beli szabad előfordulása kívül esik a $\theta(x)$ term valamennyi változója szerinti kvantor hatáskörén.

4.P.6. Szabály. Annak meghatározása, hogy egy helyettesítés megengedett-e egy kifejezés számára – a kifejezés szerkezete szerinti indukcióval:

- Termek és atomok számára minden helyettesítés megengedett.
- $A \vartriangle B$ számára egy helyettesítés megengedett, ha megengedett A és B számára is.
- $\neg A$ számára egy helyettesítés megengedett, ha megengedett A számára.
- QxA számára egy θ helyettesítés megengedett, ha θ_{-x} megengedett A számára, és egyetlen $z \in \mathrm{Par}(QxA) \cap \mathrm{Dom}(\theta)$ változó esetén sem szerepel x a $\theta(z)$ termben.

4.P.7. Definíció. Legyen K egy kifejezés, és θ egy termhelyettesítés. Tekintsük K-nak egy olyan K' variánsát, mely számára a θ termhelyettesítés megengedett. Ekkor a $K'\,\theta$ kifejezés a θ *szabályos helyettesítésének eredménye* K-ba. Jelölése: $[K\,\theta]$.

4.P.8. Szabály. Egy kifejezésbe való szabályos helyettesítés eredményének meghatározása a kifejezés szerkezete szerinti indukcióval:

- Ha K term vagy atomi formula, akkor $[K\theta] = K\theta$.
- $[(A \vartriangle B)\,\theta] = [A\,\theta] \vartriangle [B\,\theta]$
- $[(\neg A)\,\theta] = \neg[A\,\theta]$
-
  - Ha egyetlen $z \in \mathrm{Par}(QxA) \cap$ $\mathrm{Dom}(\theta)$ változó esetén sem szerepel a $\theta(z)$ termben x, akkor
  $$[(QxA)\,\theta] = Qx[A\,\theta_{-x}].$$
  - Ha van olyan $z \in \mathrm{Par}(QxA) \cap$ $\mathrm{Dom}(\theta)$ változó, hogy x paraméter $\theta(z)$-ben, akkor válasszunk egy új változót, például u-t, mely nem szerepel sem QxA-ban, sem θ-ban, így
  $$[(QxA)\,\theta] = Qu[(A^x_u)\,\theta_{-x}].$$

4.P.9. Definíció. Egy elsőrendű logikai nyelv termhelyettesítései halmazán vezessük be a következő műveletet: a

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ t_1 & t_2 & \dots & t_k \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \eta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_\ell \\ s_1 & s_2 & \dots & s_\ell \end{pmatrix}$$

helyettesítések *kompozícióján* a

$$(\theta\eta) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_j} \\ (t_1\eta) & (t_2\eta) & \dots & (t_k\eta) & s_{i_1} & s_{i_2} & \dots & s_{i_j} \end{pmatrix}$$

termhelyettesítést értjük, ahol $\{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_j}\} = \mathrm{Dom}(\eta) \setminus \mathrm{Dom}(\theta)$ és $\mathrm{Dom}(\theta\eta) = \mathrm{Dom}(\theta) \cup \mathrm{Dom}(\eta)$.

4.P.10. Tétel. Ha θ és η termhelyettesítések, akkor tetszőleges K kifejezés esetén

$$K\,(\theta\eta) = (K\,\theta)\eta.$$

4.P.11. Definíció. Legyen A és B két azonos predikátumszimbólummal kezdődő atomi formula. Az olyan θ termhelyettesítést, amelyre

$$A\,\theta = B\,\theta,$$

A-t és B-t egymáshoz *illesztő helyettesítésnek* nevezzük.

4.P.12. Definíció. Legyenek θ és σ az A és B atomok illesztő helyettesítései. σ *általánosabb* θ-nál, ha van olyan λ termhelyettesítés, hogy

$$\theta = \sigma\lambda.$$

σ az A és B atomok *legáltalánosabb illesztő helyettesítése*, ha A és B minden illesztő helyettesítésénél általánosabb.

4.P.13. Megjegyzés.

- Az illesztő helyettesítés fogalmát kiterjeszthetjük: W legyen az azonos predikátumszimbólummal kezdődő $A_1, A_2, \dots, A_k$ ($k \geq 2$) atomi formulák halmaza. W illesztő helyettesítése W minden atompárját illeszti egymáshoz.

- Vizsgáljuk W elemeit párhuzamosan, szimbólumonként balról jobbra haladva. Álljunk meg annál az első szimbólumnál, amelyik nem minden atomban egyezik meg. Az ezen a pozíción kezdődő résztermek D halmazát W *különbségi halmazának* nevezzük.

4.P.14. Algoritmus. *Robinson* algoritmusa véges sok lépésben meghatározza W legáltalánosabb illesztő helyettesítését, ha van ilyen, illetve jelzi, ha nem illeszthetők egymáshoz W atomjai.

1. $k := 0, \quad W_k := W, \quad \sigma_k := \varepsilon.$
2. Ha W_k egyetlen atomot tartalmaz, akkor sikeresen vége: σ_k a W legáltalánosabb illesztő helyettesítése.
   Egyébként határozzuk meg W_k különbségi halmazát: D_k-t.
3. Ha van D_k-ban olyan x_k változó és t_k term, hogy x_k nem fordul elő t_k-ban, akkor a 4. lépéssel folytatjuk.
   Egyébként W atomjai nem illeszthetők egymáshoz. Vége.
4. $\sigma_{k+1} := \sigma_k(x_k \parallel t_k), \quad W_{k+1} := \{A(x_k \parallel t_k) \,|\, A \in W_k\}.$
   (Megjegyezzük, hogy $W_{k+1} = \{A\sigma_{k+1} \,|\, A \in W\}$.)
5. $k := k + 1$, és a 2. lépéssel folytatjuk.

4.P.15. Megjegyzés.

- Az illesztő helyettesítés fogalmát másképp is kiterjeszthetjük: W legyen az
  $$(A_1, B_1),\ (A_2, B_2),\ \ldots,\ (A_k, B_k)$$
  páronként azonos predikátumszimbólummal kezdődő atomi formulák halmaza. Keressük a minden pár atomjait egymáshoz illesztő helyettesítést.

- Képezzük a W-beli párok atomjaiból a
  $$W' \leftrightharpoons \{\, A_1 \doteq B_1,\ A_2 \doteq B_2,\ \ldots,\ A_k \doteq B_k \,\}$$
  formális egyenlőséghalmazt. Egy változó - term párokból álló
  $$\{\, x_1 \doteq t_1,\ x_2 \doteq t_2,\ \ldots,\ x_l \doteq t_l \,\}$$
  formális egyenlőséghalmaz *kiszámított alakú*, ha $x_i \neq x_j$, amikor $i \neq j$, és $x_i \notin \mathrm{Par}\{t_1, \ldots, t_l\}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, l)$. Az előbbi kiszámított alakú formális egyenlőséghalmaz által meghatározott termhelyettesítés
  $$(x_1, x_2, \ldots, x_l \parallel t_1, t_2, \ldots, t_l).$$

4.P.16. Algoritmus. *Herbrand* algoritmusa véges sok lépésben meghatározza W legáltalánosabb illesztő helyettesítését, ha van ilyen, illetve jelzi, ha nem illeszthetők egymáshoz W párjainak atomjai.

1. $k \coloneqq 0, \quad W'_k \coloneqq W'$.
2. Ha W'_k kiszámított alakú, akkor sikeresen vége: az általa meghatározott helyettesítés W legáltalánosabb illesztő helyettesítése. Egyébként válasszunk ki egy $K_1 \doteq K_2$ formális egyenlőséget W'_k-ból.
3. $W'_{k+1} \coloneqq W'_k \setminus \{K_1 \doteq K_2\}$.
4. Ha $K_1 \doteq K_2$ alakja
   - $x \doteq x$, ahol x változó, vagy $c \doteq c$, ahol c konstansszimbólum, akkor tovább az 5. lépésre.
   - $t \doteq x$, ahol x változó, t összetett term, $W'_{k+1} \coloneqq W'_{k+1} \cup \{x \doteq t\}$.
   - $c \doteq d$, ahol $c \neq d$ konstansszimbólumok, akkor W atomjai nem illesztők egymáshoz. Vége.
   - $f(t_1, \ldots, t_k) \doteq g(s_1, \ldots, s_l)$, ahol $f \neq g$ függvényszimbólumok, akkor W atomjai nem illesztők egymáshoz. Vége.
   - $f(t_1, \ldots, t_k) \doteq f(s_1, \ldots, s_k)$, ahol f függvényszimbólum, vagy $P(t_1, \ldots, t_k) \doteq P(s_1, \ldots, s_k)$, ahol P predikátumszimbólum, akkor $W'_{k+1} \coloneqq W'_{k+1} \cup \{t_1 \doteq s_1, \ldots, t_k \doteq s_k\}$.
   - $x \doteq t$, ahol $x \in \mathrm{Par}(t)$, akkor W atomjai nem illesztők egymáshoz. Vége.
   - $x \doteq t$, ahol $x \notin \mathrm{Par}(t)$, akkor W'_{k+1} formális egyenlőségeiben elvégezzük az $\{x/t\}$ helyettesítést, majd $W'_{k+1} \coloneqq W'_{k+1} \cup \{x \doteq t\}$.
5. $k \coloneqq k + 1$, és a 2. lépéssel folytatjuk.

FELADATOK

4.P.1. Határozzuk meg az alábbi formulába való termhelyettesítés eredményét!

$$\big(\exists x(Q(x,y) \supset \forall y R(y,x)) \supset \neg P(f(x)) \wedge P(y)\big) \begin{pmatrix} x & y & z \\ f(x) & z & f(z) \end{pmatrix}$$

Megoldás

Jelöljük θ-val az elvégzendő helyettesítést. A **4.P.4.** szabályt követve, a formula szerkezetének vizsgálata után az alábbiakat kapjuk:

$$\exists x(\underbrace{Q(x,y)}_{\theta'} \supset \forall y\,\underbrace{R(y,x)}_{\theta''}) \supset \neg\,\underbrace{P(f(x))}_{\theta} \wedge \underbrace{P(y)}_{\theta}$$

- A θ-val jelölt atomok egyetlen kvantor hatáskörében sem állnak.
- A θ'-vel jelölt atom az x változót kötő kvantor hatáskörében van, ezért $\theta' = \theta_{-x} = \{y/z, z/f(z)\}$.
- A θ''-vel jelölt atom x-et és y-t kötő kvantorok hatáskörében is benne van, így $\theta'' = \theta'_{-y} = \{z/f(z)\}$. Ez utóbbi esetben $\mathrm{Dom}(\theta'') = \{z\}$, de z nincs az atomban.

Elvégezve a helyettesítéseket az atomokban, az összetett termekben, majd végül a változókban, az alábbi formulát kapjuk:

$$\exists x(Q(x\theta', y\theta') \supset \forall y R(y\theta'', x\theta'')) \supset \neg P(f(x\theta)) \wedge P(y\theta) =$$

$$= \exists x(Q(x,z) \supset \forall y R(y,x)) \supset \neg P(f(f(x))) \wedge P(z).$$

Figyeljük meg, hogy ugyanerre az eredményre juthatunk a **4.P.3**. definíció közvetlen alkalmazásával is, hiszen a redukált helyettesítések értelmezési tartományából épp a kötött változók hiányoznak.

$$\exists x(Q(x,y\theta) \supset \forall y R(y,x)) \supset \neg P(f(x\theta)) \wedge P(y\theta) =$$

$$= \exists x(Q(x,z) \supset \forall y R(y,x)) \supset \neg P(f(f(x))) \wedge P(z)$$

4.P.2. Számítsuk ki az alábbi termhelyettesítések eredményét! Hasonlítsuk össze az eredeti és az eredmény formulákban a kötési viszonyokat!

(a) $(\exists y P(x,y,z))\begin{pmatrix} x \\ f(x,z) \end{pmatrix}$

(b) $(\exists y P(x,y,z))\begin{pmatrix} y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$

(c) $(\exists y P(x,y,z))\begin{pmatrix} z \\ f(x,y) \end{pmatrix}$

(d) $(\forall y P(x,y,z) \supset Q(x))\begin{pmatrix} x \\ f(x,z) \end{pmatrix}$

(e) $(\exists z \forall y P(x,y,z) \supset Q(x))\begin{pmatrix} x \\ f(x,z) \end{pmatrix}$

(f) $(P(x,y,z) \supset \forall y Q(y))\begin{pmatrix} x & y \\ f(x,y) & z \end{pmatrix}$

(g) $(\forall y P(x,y,z) \lor \exists x R(x,y))\begin{pmatrix} x & y \\ f(x,y) & f(z,z) \end{pmatrix}$

4.P.3. Határozzuk meg, hogy mely helyettesítések megengedettek a következő formula számára, majd végezzük el a szabályos helyettesítést!

$$\forall x(\exists y Q(x,y,z) \supset \forall z P(x,z)) \lor \neg P(x,z)$$

(a) $\begin{pmatrix} x & y \\ f(x) & x \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} x & z \\ y & g(y,c) \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} y & z \\ f(x) & g(x,y) \end{pmatrix}$

Megoldás

Mivel a helyettesítést a szabad változókon kell végrehajtani, először jelöljük meg a szabad változó-előfordulásokat!

$$\forall x(\exists y Q(x,y,\overset{(1)}{z}) \supset \forall z P(x,z)) \lor \neg P(\overset{(2)}{x},\overset{(3)}{z})$$

(a) Vegyük sorra a helyettesítés értelmezési tartományába eső változókat! A helyettesítés megengedett, mivel

- x egyetlen szabad előfordulása (2) nem esik kvantor hatáskörébe, ezért tetszőleges termmel helyettesíthető, és
- y nem paraméter, így egyetlen előfordulása sem kerül helyettesítésre.

A helyettesítés megengedett, tehát a szabályos helyettesítés eredménye egybeesik a *formális* helyettesítés eredményével:

$$\forall x(\exists y Q(x,y,z) \supset \forall z P(x,z)) \lor \neg P(f(x),z)$$

(b) A helyettesítés nem megengedett, mivel a z változóhoz a $g(y,c)$ termet rendeli, és a formulában z-nek van olyan szabad előfordulása (1), mely az y változót kötő kvantor hatáskörébe esik.

Amennyiben a formulában az y változó kötött előfordulásait új változóra (például sem a formulában, sem a helyettesítésben nem szereplő u-ra) cseréljük, úgy a formula olyan variánsát kapjuk, amely számára a helyettesítés megengedett:

$$\forall x(\exists u Q(x,u,z) \supset \forall z P(x,z)) \vee \neg P(x,z)$$

A helyettesítés után:

$$\forall x(\exists u Q(x,u,g(y,c)) \supset \forall z P(x,z)) \vee \neg P(y,g(y,c))$$

(c) A helyettesítés (az előbbi példához hasonlóan) most sem megengedett. Ugyanakkor minden formulához készíthető olyan variáns, melyben az összes kötött változó neve különbözik a paraméterektől és a helyettesítésben előforduló változónevektől is:

$$\forall w(\exists u Q(w,u,z) \supset \forall v P(w,v)) \vee \neg P(x,z)$$

Ezen variáns esetében a helyettesítés nyilvánvalóan megengedett. Eredménye:

$$\forall w(\exists u Q(w,u,g(x,y)) \supset \forall v P(w,v)) \vee \neg P(x,g(x,y))$$

Utóbbi megoldás előnye, hogy a helyettesítés értelmezési tartományába eső minden változó – ha előfordul a formulában – paraméter, így a kötési viszonyok ellenőrzését elhagyva a formális helyettesítés elvégzése is egyszerűbb.

4.P.4. Megengedett-e az $\{x/t\}$ helyettesítés az A számára?

(a) $x = v,\ \ t = f(y,z),\ \ A = \forall y P(y,v)$

(b) $x = y,\ \ t = f(y,v),\ \ A = (P(y,v) \supset \exists v Q(v))$

4.P.5. Döntsük el, hogy az alábbi helyettesítések megengedettek-e, és végezzük el szabályosan a helyettesítéseket!

(a) $(\forall y P(x,y,z) \supset Q(x))\begin{pmatrix} x \\ f(x,z) \end{pmatrix}$

(b) $(\exists z \forall y P(x,y,z) \supset Q(x))\begin{pmatrix} x \\ f(x,z) \end{pmatrix}$

(c) $(\exists y P(x,y,z) \supset \forall z R(y,z)) \begin{pmatrix} x & y \\ f(x,y) & z \end{pmatrix}$

(d) $(\forall y P(x,y,z) \vee \exists x R(x,y)) \begin{pmatrix} x & y \\ f(x,y) & f(x,y) \end{pmatrix}$

(e) $(\forall x (P(x,y,z) \vee \exists z R(y,z)) \supset Q(x)) \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & f(x,z) & f(x,z) \end{pmatrix}$

(f) $(\forall x (\exists y P(x,y,z) \supset \forall x R(x,y))) \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & f(x,y) \end{pmatrix}$

4.P.6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges K formula és θ helyettesítés esetén a szabályos helyettesítéssel kapott $[K\theta]$ formula paraméterei éppen a K formula paraméterein elvégzett θ helyettesítés során előálló termek változói, azaz

$$\mathrm{Par}([K\theta]) = \bigcup_{u \in \mathrm{Par}(K)} \mathrm{Var}(u\theta),$$

ahol $\mathrm{Var}(t)$ a t termben található változók halmazát jelöli.

Megoldás

1. Ha $l(K) = 0$, akkor $K = P(t_1, \ldots, t_n)$. Ekkor $P(t_1, \ldots, t_n)\theta = P(t_1\theta, \ldots, t_n\theta)$, ahol minden $t_i\theta$ termben ($i \in \{1, \ldots, n\}$) az összes változó ($\mathrm{Var}(t_i\theta)$) a formula paramétere, hiszen atomi formula minden változó-előfordulása szabad. Ugyanakkor K összes változója is paraméter volt, ezért:

$$\mathrm{Par}([P(t_1, \ldots, t_n)\,\theta]) = \bigcup_{u \in \mathrm{Par}(P(t_1, \ldots, t_n))} \mathrm{Var}(u\,\theta)$$

2. Indukciós feltevésünk, hogy az állítás minden $l(K) < n$ összetettségű K formulára igaz.

3. Ha most $l(K) = n$ ($n > 0$), a következő esetek valamelyike lehet:

   - Ha $K = \neg A$, akkor $l(A) = n - 1$ miatt az indukciós feltevés szerint igaz az állítás, továbbá mivel $\mathrm{Par}(\neg A) = \mathrm{Par}(A)$, így

   $$\mathrm{Par}([(\neg A)\,\theta]) = \mathrm{Par}(\neg[A\,\theta]) = \mathrm{Par}([A\,\theta]) =$$

   $$= \bigcup_{u \in \mathrm{Par}(A)} \mathrm{Var}(u\,\theta) = \bigcup_{u \in \mathrm{Par}(\neg A)} \mathrm{Var}(u\,\theta),$$

   azaz negációs formulák esetében az állítás igaz.

- Ha $K = A \triangle B$, akkor egyrészt

$$\mathrm{Par}([(A \triangle B)\,\theta]) = \mathrm{Par}([A\,\theta] \triangle [B\,\theta]) =$$

$$= \mathrm{Par}([A\,\theta]) \cup \mathrm{Par}([B\,\theta]),$$

másrészt $l(A) < n$ és $l(B) < n$, és így alkalmazhatjuk az indukciós feltevést. Ekkor az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\bigcup_{u \in \mathrm{Par}(A)} \mathrm{Var}(u\,\theta) \cup \bigcup_{u \in \mathrm{Par}(B)} \mathrm{Var}(u\,\theta) =$$

$$= \bigcup_{u \in \mathrm{Par}(A) \cup \mathrm{Par}(B)} \mathrm{Var}(u\,\theta) = \bigcup_{u \in \mathrm{Par}(A \triangle B)} \mathrm{Var}(u\,\theta)$$

vagyis az állítás ismét igaznak bizonyult.

- Ha $K = QxA$, akkor $l(A) = n - 1$. Legyen s olyan változó, mely nem szerepel sem QxA-ban, sem θ-ban. Ekkor:

$$\mathrm{Par}([(QxA)\,\theta]) = \mathrm{Par}(Qs[(A_s^x)\,\theta_{-x}]) =$$

$$= \mathrm{Par}([(A_s^x)\,\theta_{-x}]) \setminus \{s\} = \left(\bigcup_{u \in \mathrm{Par}(A_s^x)} \mathrm{Var}(u\,(\theta_{-x})) \right) \setminus \{s\}.$$

Mivel $s \notin \mathrm{Dom}(\theta_{-x})$, $s \in \mathrm{Var}(u\,(\theta_{-x}))$ csak akkor lehetséges, ha épp $u = s$ (tehát csak magán az s változón elvégezve a helyettesítést, kaphatjuk az s változót az eredményben):

$$\left(\bigcup_{u \in \mathrm{Par}(A_s^x)} \mathrm{Var}(u\,(\theta_{-x})) \right) \setminus \{s\} = \bigcup_{u \in \mathrm{Par}(A_s^x) \setminus \{s\}} \mathrm{Var}(u\,(\theta_{-x})).$$

Felhasználva hogy $\mathrm{Par}(A_s^x) \setminus \{s\} = \mathrm{Par}(A) \setminus \{x\} = \mathrm{Par}(QxA)$, továbbá mivel $x \notin \mathrm{Par}(QxA)$ és tetszőleges $u \neq x$ esetén $u\,(\theta_{-x}) = u\,\theta$, ismét elértük a kívánt összefüggést:

$$\bigcup_{u \in \mathrm{Par}(A_s^x) \setminus \{s\}} \mathrm{Var}(u\,(\theta_{-x})) = \bigcup_{u \in \mathrm{Par}(QxA)} \mathrm{Var}(u\,\theta).$$

4.P.7. Jelölje $A(x,y)$ a $\exists x \neg R(x,y) \supset \neg \forall y(\exists z P(x,z,y) \supset \forall z R(x,z))$ formulát. Írjuk ki az $A(f(y,z), g(x,y))$ formula teljes alakját!

4.P.8. Jelölje $A(u,v,w)$ a $\forall x(P(x,u) \supset (\exists v Q(v,x) \supset R(w,v)))$ formulát. Írjuk ki az $A(f(u,x), x, x)$ formula teljes alakját!

4.P.9. Bizonyítsuk be, hogy

(a) a $\theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k \end{pmatrix}$ *triviális* helyettesítés megengedett minden kifejezés számára!

(b) ha a K kifejezésben nincs a helyettesítendő $x_1, x_2, \ldots, x_k$ változóknak szabad előfordulása, akkor θ megengedett K számára!

(c) ha a K kifejezésben nincs $t_1, t_2, \ldots, t_k$-beli változókat megnevező kvantor, akkor θ megengedett K számára!

(d) ha a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ helyettesítő termekben nincs változó, akkor θ megengedett minden kifejezés számára!

4.P.10. Határozzuk meg az alábbi termhelyettesítések kompozícióját!

(a) $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & f(x,u) \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} x & y & z & u & w \\ c & z & u & z & f(x,z) \end{pmatrix}$.

Megoldás

Legyenek

$$\theta = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & f(x,u) \end{pmatrix} \text{ és } \eta = \begin{pmatrix} x & y & z & u & w \\ c & v & u & z & f(x,z) \end{pmatrix}$$

ekkor

$$(\theta\eta) = \begin{pmatrix} x & y & z & u & w \\ v & c & f(c,z) & z & f(x,z) \end{pmatrix}$$

és

$$(\eta\theta) = \begin{pmatrix} x & y & z & u & w \\ c & v & u & f(x,u) & f(y,f(x,u)) \end{pmatrix}.$$

(b) $\begin{pmatrix} x & y \\ f(y) & z \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & y \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} x & y & z & v \\ z & x & f(z) & f(x) \end{pmatrix}$

4.P.11. Döntsük el Robinson algoritmusával, hogy illeszthetők-e a

$$W = \{\, P(a, x, f(g(y))),\ P(z, f(z), f(u)) \,\}$$

halmaz atomi formulái egymáshoz!

Megoldás

1. $W_0 := W, \quad \sigma_0 := \varepsilon.$
2. W_0 két atomi formulát tartalmaz, így σ_0 nem a legáltalánosabb illesztő helyettesítés W-re. W_0 különbségi halmaza: $D_0 = \{a, z\}$.
3. z egy változó, a egy a z-t nem tartalmazó term.
4. $\sigma_1 := \sigma_0(z \parallel a) = \varepsilon(z \parallel a) = (z \parallel a)$.
$$\begin{aligned} W_1 &:= \big\{ P(a, x, f(g(y)))(z \parallel a),\ P(z, f(z), f(u))(z \parallel a) \big\} = \\ &= \big\{ P(a, x, f(g(y))),\ P(a, f(a), f(u)) \big\}. \end{aligned}$$
5. W_1 nem egyelemű, így σ_1 nem a legáltalánosabb illesztő helyettesítés W-re. A W_1 különbségi halmaza: $D_1 = \big\{ x,\ f(a) \big\}$.
6. x egy változó, $f(a)$ egy az x-et nem tartalmazó term.
7. $\sigma_2 := \sigma_1(x \parallel f(a)) = (z \parallel a)(x \parallel f(a)) = (z, x \parallel a, f(a))$.
$$\begin{aligned} W_2 &:= \big\{ P(a, x, f(g(y)))(x \parallel f(a)), \\ &\qquad P(a, f(a), f(u))(x \parallel f(a)) \big\} = \\ &= \big\{ P(a, f(a), f(g(y))),\ P(a, f(a), f(u)) \big\}. \end{aligned}$$
8. W_2-ben nem egy atom van, így σ_2 nem a legáltalánosabb illesztő helyettesítés W-re. A W_2 különbségi halmaza: $D_2 = \{g(y), u\}$.
9. u egy változó, $g(y)$ egy az u-t nem tartalmazó term.
10. $\sigma_3 := \sigma_2(u \parallel g(y)) = (z, x, u \parallel a, f(a), g(y))$.
$$\begin{aligned} W_3 &:= \big\{ P(a, f(a), f(g(y)))(u \parallel g(y)), \\ &\qquad P(a, f(a), f(u))(u \parallel g(y)) \big\} = \\ &= \big\{ P(a, f(a), f(g(y))) \big\}. \end{aligned}$$
11. W_3-ban egyetlen atom van, így σ_3 a legáltalánosabb illesztő helyettesítés W-re.

4.P.12. Döntsük el Robinson algoritmusával, hogy illeszthetők-e a

$$W = \big\{ Q(f(a), g(x)),\ Q(y, y) \big\}$$

halmaz atomi formulái egymáshoz!

Megoldás

1. $W_0 := W, \quad \sigma_0 := \varepsilon.$
2. W_0 két atomot tartalmaz, így σ_0 nem a legáltalánosabb helyettesítés W-re. A W_0 különbségi halmaza: $D_0 = \{f(a), y\}$.
3. y egy változó, $f(a)$ egy az y-t nem tartalmazó term.
4. $\sigma_1 := \sigma_0(y \parallel f(a)) = \varepsilon(y \parallel f(a)) = (y \parallel f(a))$.

$$\begin{aligned} W_1 &:= \big\{ Q(f(a), g(x))(y \parallel f(a)),\ Q(y, y)(y \parallel f(a)) \big\} = \\ &= \big\{ Q(f(a), g(x)),\ Q(f(a), f(a)) \big\}. \end{aligned}$$

5. W_1 nem egy atomot tartalmaz, így σ_1 nem a legáltalánosabb helyettesítés W-re. A W_1 különbségi halmaza: $D_1 = \{g(x), f(a)\}$.
6. A D_1-ben nincs változó, ezért az algoritmus azzal az eredménnyel fejeződik be, hogy W atomjai nem illeszthetők.

4.P.13. Döntsük el Robinson algoritmusával, hogy illeszthetők-e a következő halmazok atomi formulái egymáshoz!

(a) $\big\{ R(x, y),\ R(u, f(z)) \big\}$

(b) $\big\{ R(g(x), y),\ R(y, y),\ R(u, f(v)) \big\}$

(c) $\big\{ R(h(x, y), w),\ R(h(g(v), a), f(v)),\ R(h(g(v), a), f(b)) \big\}$

(d) $\big\{ R(h(x), w),\ R(w, w),\ R(y, f(a)) \big\}$

(e) $\big\{ R(x, x),\ R(y, f(y)) \big\}$

(f) $\big\{ R(g(x), f(y, z)),\ R(g(a), w),\ R(y, f(g(x), x)) \big\}$

(g) $\big\{ R(f(y, g(z)), h(b)),\ R(f(h(w), g(a)), u),\ R(f(h(b), g(z)), y) \big\}$

(h) $\big\{ P(h(y), a, z),\ P(h(g(w)), a, w),\ P(h(g(a)), x, b) \big\}$

(i) $\big\{ P(x, f(y), z),\ P(g(a), f(w), u),\ P(v, f(b), c) \big\}$

4.P.14. Határozzuk meg, hogy amikor a Robinson-algoritmus véget ér, milyen összetettségűek lesznek a

$$\big\{ Q(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ Q(f(x_0, x_0), f(x_1, x_1), \ldots, f(x_{n-1}, x_{n-1}) \big\}$$

halmaz egymáshoz illesztett atomjaiban a termek!

4.P.15. Döntsük el Herbrand algoritmusával, hogy illeszthetők-e a

$$W = \{\, P(a, x, h(g(z))),\ P(z, h(y), h(y)) \,\}$$

halmaz atomi formulái egymáshoz!

Megoldás

$$P(a,x,h(g(z))\doteq P(z,h(y),h(y)) \to \begin{cases} a\doteq z \\ x\doteq h(y) \\ h(g(z))\doteq h(y) \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} z\doteq a \\ x\doteq h(y) \\ h(g(z))\doteq h(y) \end{cases} \to \begin{cases} z\doteq a \\ x\doteq h(y) \\ g(z)\doteq y \end{cases} \to \begin{cases} z\doteq a \\ x\doteq h(y) \\ y\doteq g(z) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\{z/a\}} \begin{cases} z\doteq a \\ x\doteq h(y) \\ y\doteq g(a) \end{cases} \xrightarrow{\{y/g(a)\}} \begin{cases} z\doteq a \\ x\doteq h(g(a)) \\ y\doteq g(a) \end{cases}$$

Kiszámított alakú formális egyenlőséghalmazt kaptunk, így a legáltalánosabb illesztő helyettesítés W-re: $\theta = (z, x, u \parallel a, h(g(a)), g(a))$.

4.P.16. Döntsük el Herbrand algoritmusával, hogy illeszthetők-e a

$$W = \{\, Q(f(a), g(x)),\ Q(y, y) \,\}$$

halmaz atomi formulái egymáshoz!

Megoldás

$$Q(f(a), g(x))\doteq Q(y,y) \to \begin{cases} f(a)\doteq y \\ g(x)\doteq y \end{cases} \to \begin{cases} y\doteq f(a) \\ g(x)\doteq y \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\{y/f(a)\}} \begin{cases} y\doteq f(a) \\ g(x)\doteq f(a) \end{cases} \to \text{Nincs illesztő helyettesítés}$$

4.P.17. Döntsük el Herbrand algoritmusával, hogy illeszthetők-e a

$$W = \{\, P(x, x)),\ P(y, f(y)) \,\}$$

halmaz atomi formulái egymáshoz!

Megoldás

$$P(x,x)\doteq P(y,f(y)) \rightarrow \begin{cases} x\doteq y \\ x\doteq f(y) \end{cases} \xrightarrow{\{x/y\}} \begin{cases} x\doteq y \\ y\doteq f(y) \end{cases}$$

$\rightarrow$ Nincs illesztő helyettesítés, mert $y \in \mathrm{Par}(f(y))$.

4.P.18. Döntsük el Herbrand algoritmusával, hogy illeszthetők-e a következő halmazok atomi formulái egymáshoz!

(a) $\{R(x,y),\ R(y,f(z))\}$

(b) $\{R(x,g(x)),\ R(y,y)\}$

(c) $\{R(h(x),y),\ R(w,f(v)),\ R(y,f(u))\}$

(d) $\{P(a,x,h(g(z))),\ P(z,h(y),h(y))\}$

(e) $\{P(a,y,f(y)),\ P(z,z,u)\}$

(f) $\{P(x,f(y,z)), P(a,x), P(x,g(f(x,x)))\}$

(g) $\{P(x,g(x),y),\ P(z,u,g(a)),\ P(a,g(a),v)\}$

(h) $\{P(h(z),a,z),\ P(h(g(w)),a,w),\ P(h(g(a)),x,b)\}$

(i) $\{P(x,f(y),z),\ P(g(a),f(w),g(x)),\ P(v,f(b),c)\}$

4.P.19. Bizonyítsuk be a **4.P.10**. tételt!

4.P.20. Írjunk programot, amely Herbrand algoritmusát alkalmazva megkeresi egy atomhalmaz legáltalánosabb illesztő helyettesítését!

4.P.21. Írjunk programot, amely Robinson algoritmusát alkalmazva megkeresi egy atomhalmaz legáltalánosabb illesztő helyettesítését!

5. A nyelv szemantikája; igazságértékelés

5.I. Ítéletlogika

5.I.1. Definíció. Egy ítéletlogikai nyelv propozícionális betűinek (ítéletváltozóinak) a halmazát jelölje $\mathcal{P}r$. A nyelv *interpretációja* (*modellje*) egy $\mathcal{I}\colon \mathcal{P}r \to \{0,1\}$ függvény.

5.I.2. Megjegyzés. A logikai szemantika feltételez két absztrakt objektumot: az igazságot és a hamisságot – közös nevük: *igazságértékek* – mint az állítások lehetséges szemantikai értékeit. Jelölje a továbbiakban 1 az *igaz*, 0 pedig a *hamis* igazságértéket.

5.I.3. Definíció. Egy ítéletlogikai nyelv egy C formulájának *értéke* $\mathcal{I}$-ben (jelölése: $|C|_{\mathcal{I}}$) a következő rekurzív módon megadott érték:

- Ha $C = X$, ahol $X \in \mathcal{P}r$, akkor $|C|_{\mathcal{I}} \leftrightharpoons \mathcal{I}(X)$.
- Ha $C = A \vartriangle B$, ahol A és B értékei rendre $|A|_{\mathcal{I}}, |B|_{\mathcal{I}}$, akkor
  (a) $|A \wedge B|_{\mathcal{I}} \leftrightharpoons \mathrm{Min}\{|A|_{\mathcal{I}}, |B|_{\mathcal{I}}\}$.
  (b) $|A \vee B|_{\mathcal{I}} \leftrightharpoons \mathrm{Max}\{|A|_{\mathcal{I}}, |B|_{\mathcal{I}}\}$.
  (c) $|A \supset B|_{\mathcal{I}} \leftrightharpoons \mathrm{Max}\{1 - |A|_{\mathcal{I}}, |B|_{\mathcal{I}}\}$.
- Ha $C = \neg A$, ahol A értéke $|A|_{\mathcal{I}}$, akkor $|C|_{\mathcal{I}} \leftrightharpoons 1 - |A|_{\mathcal{I}}$.

5.I.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy a C formula *igaz* az $\mathcal{I}$ interpretációban (jelölése: $\mathcal{I} \vDash C$), ha $|C|_{\mathcal{I}} = 1$, egyébként pedig (tehát ha $|C|_{\mathcal{I}} = 0$) a C formuláról azt mondjuk, hogy *hamis* $\mathcal{I}$-ben (jelölése: $\mathcal{I} \nvDash C$).

5.I.5. Megjegyzés. Összetett ítéletlogikai formula igazságértéke egy modellben csak a közvetlen részformulák igazságértékeitől függ, a közvetlen részformulák igazságértékeiből számoljuk. A számolás módját táblázatokban is összefoglalhatjuk.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \supset B$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

Fogalmazhatunk úgy, hogy ezekkel az ún. *igazságtáblákkal* a $\{0,1\}$ igazságértékeken értelmezett *logikai műveleteket* definiálunk. A műveleteket rendre – a megfelelő összekötő jelekkel összhangban – *negáció, konjunkció, diszjunkció és implikáció műveleteknek* nevezzük és ugyanazokkal a jelekkel jelöljük, mint a megfelelő összekötő jeleket.

FELADATOK

5.I.1. *Két testvért, egy fiút és egy lányt, megkérdeztek, melyikük az idősebb. „Én vagyok az idősebb" – mondta a fiú. „Én vagyok a fiatalabb" – mondta a lány. Kiderült azonban, hogy legalább az egyikük hazudott.* Ki az idősebb?

5.I.2. *Hasszán, Ali és Ahmed jó barátok voltak. Hármójuk közül vagy Ali, vagy Ahmed a legidősebb. Azt is tudjuk, hogy vagy Ali a legfiatalabb, vagy Hasszán a legidősebb.* Ki a legfiatalabb és ki a legidősebb?

5.I.3. *Jal minden hétfőn hazudik, a hét többi napján igazat mond. „Ma hétfő van, és nős vagyok" – állította az egyik nap.* Tényleg hétfő volt aznap? Jal tényleg nős? Mi az az állítás, amit Jal csak csütörtökön, és semelyik másik napon nem állíthatna?

5.I.4. *Jalnak van egy fiútestvére, akit Taknak hívnak, s aki csak csütörtökönként hazudik. Egy nap egyikük ezt állította: „Holnap kedd lesz." Majd szintén ő, pontosan egy héttel később ezt mondta: „Holnap hazudni fogok."* A hét melyik napján történtek ezek?[20]

5.I.5. Az alábbi állítások közül melyek igazak, és melyek hamisak?

(a) *Ha kétszer kettő négy, akkor öt osztható hárommal.*

(b) *Ha öt osztható hárommal, akkor kétszer kettő négy.*

(c) *Abból, hogy a körvonalon van három egy egyenesen levő pont, következik, hogy öt osztható hárommal.*

(d) *Nem igaz, hogy a következő két állítás ekvivalens:*

- *Kétszer kettő egyenlő öttel.*
- *Öt osztható hárommal.*

(e) *Az a tény, hogy öt osztható hárommal, ekvivalens azzal, hogy van a körvonalon három olyan pont, amely egy egyenesre illeszkedik.*

[20] Az 1-4. feladatokat Smullyan: Seherezádé rejtélye c. könyvéből vettük át.

5.I.6. Adjuk meg az $X \vee \neg Y \supset Z$ formula igazságértékét az alábbi interpretációkban!

(a) $\mathcal{I}(X) = 1$, $\mathcal{I}(Y) = 1$, $\mathcal{I}(Z) = 0$

(b) $\mathcal{I}(X) = 0$, $\mathcal{I}(Y) = 0$, $\mathcal{I}(Z) = 1$

Megoldás

A rekurzív definíciót felhasználva az alábbi megoldást kapjuk. Figyeljük meg, hogy mivel minden részkifejezés a $\{0,1\}$ halmazból vehet fel értéket, így több helyen egyszerűsítésre adódik lehetőség!

(a) Definíció szerint:

$$
\begin{aligned}
&|X \vee \neg Y \supset Z|_{\mathcal{I}} = \\
&\quad = \mathrm{Max}(1 - |X \vee \neg Y|_{\mathcal{I}}, |Z|_{\mathcal{I}}) \\
&\quad = \mathrm{Max}(1 - \mathrm{Max}(|X|_{\mathcal{I}}, |\neg Y|_{\mathcal{I}}), \mathcal{I}(Z)) \\
&\quad = \mathrm{Max}(1 - \mathrm{Max}(\mathcal{I}(X), 1 - |Y|_{\mathcal{I}}), 0) \\
&\quad = \mathrm{Max}(1 - \mathrm{Max}(1, 1 - \mathcal{I}(Y)), 0) \\
&\quad = \mathrm{Max}(1 - \mathrm{Max}(1, 1 - 1), 0) \\
&\quad = \mathrm{Max}(1 - 1, 0) = 0
\end{aligned}
$$

(b) Definíció szerint (ahol lehet egyszerűsítve):

$$
\begin{aligned}
&|X \vee \neg Y \supset Z|_{\mathcal{I}} = \\
&\quad = \mathrm{Max}(1 - |X \vee \neg Y|_{\mathcal{I}}, |Z|_{\mathcal{I}}) \\
&\quad = \mathrm{Max}(1 - |X \vee \neg Y|_{\mathcal{I}}, \mathcal{I}(Z)) \\
&\quad = \mathrm{Max}(1 - |X \vee \neg Y|_{\mathcal{I}}, 1) = 1
\end{aligned}
$$

Ha a formula részformuláinak értékét a kisebb logikai összetettségűek felől a nagyobb összetettségűek felé haladva határozzuk meg, akkor a megoldás az alábbi táblázat balról jobbra történő kitöltésével kapható.

	X	Y	Z	$\neg Y$	$X \vee \neg Y$	$X \vee \neg Y \supset Z$
(a)	1	1	0	0	1	0
(b)	0	0	1	0	1	1

5.I.7. Adjuk meg a $\neg(X \supset Y \vee \neg Z) \wedge \neg Y \supset \neg Z$ formula igazságértékét az alábbi interpretációkban!

(a) $\mathcal{I}(X) = 1$, $\mathcal{I}(Y) = 1$, $\mathcal{I}(Z) = 0$

(b) $\mathcal{I}(X) = 0$, $\mathcal{I}(Y) = 1$, $\mathcal{I}(Z) = 0$

5.I.8. Határozzuk meg az alábbi formulák igazságértékét, ha $\mathcal{I}(X) = 0$, és $\mathcal{I}(Y) = 1$:

(a) $X \supset (Y \supset X)$

(b) $\neg(Y \supset X) \wedge (X \vee \neg Y)$

(c) $\neg(\neg Y \vee \neg X \supset \neg X \wedge Y)$

(d) $((\neg X \supset Y) \supset X) \supset \neg Y$

5.I.9. Tudunk-e valamit mondani a $\neg X \supset (\neg Y \wedge X) \vee Z$ formula igazságértékéről az $\mathcal{I}$ interpretációban, ha csak annyit tudunk, hogy $|Z|_{\mathcal{I}} = 1$?

Megoldás

$$\begin{aligned}
&|\neg X \supset (\neg Y \wedge X) \vee Z|_{\mathcal{I}} = \\
&\quad = \mathrm{Max}(1 - (1 - |X|_{\mathcal{I}}), \mathrm{Max}(\mathrm{Min}(1 - |Y|_{\mathcal{I}}, |X|_{\mathcal{I}}), |Z|_{\mathcal{I}})) = \\
&\quad = \mathrm{Max}(1 - (1 - |X|_{\mathcal{I}}), \mathrm{Max}(\mathrm{Min}(1 - |Y|_{\mathcal{I}}, |X|_{\mathcal{I}}), 1)) = \\
&\quad = \mathrm{Max}(1 - (1 - |X|_{\mathcal{I}}), 1) = 1
\end{aligned}$$

5.I.10. Tudunk-e valamit mondani az alábbi formulák igazságértékéről, ha csak bizonyos más formulák igazságértékeit ismerjük az $\mathcal{I}$ interpretációban!

(a) $(X \supset Y) \supset (\neg Y \supset \neg X)$, ha $|Y|_{\mathcal{I}} = 1$

(b) $\neg X \wedge Y \supset X \vee Y$, ha $|X \supset Y|_{\mathcal{I}} = 1$

(c) $(X \supset \neg Y) \wedge (\neg Y \supset X)$, ha $|(X \supset Y) \wedge (Y \supset X)|_{\mathcal{I}} = 1$

(d) $(X \supset (Y \supset \neg Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$, ha $|X|_{\mathcal{I}} = 0$

5.I.11. Konstruáljunk az X, Y és Z ítéletváltozókat tartalmazó olyan formulát, amelyik akkor és csak akkor igaz, ha

(a) pontosan egy változója hamis;

(b) pontosan két változója hamis!

5.I.12. Készítsük el a rövidítésként bevezetett $\equiv$ (ekvivalencia) logikai összekötő jel jelentését megadó művelet igazságtábláját!

Megoldás

Az ekvivalencia definíciója az alábbi:

$$A \equiv B \leftrightharpoons (A \supset B) \wedge (B \supset A)$$

Határozzuk meg az A és B formulák lehetséges igazságértékeinek függvényében az ekvivalenciájuk igazságértékét, így az ekvivalencia logikai művelet igazságtábláját kapjuk!

A	B	$A \supset B$	$B \supset A$	$(A \supset B) \wedge (B \supset A)$	$A \equiv B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

5.I.13. Készítsük el az alábbi rövidítésként bevezethető logikai összekötő jelek jelentését megadó logikai műveletek igazságtábláit!

(a) kizáró vagy $A \otimes B \leftrightharpoons (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

(b) Sheffer-vonás $A \mid B \leftrightharpoons \neg A \vee \neg B$

(c) Peirce-vonás $A \downarrow B \leftrightharpoons \neg A \wedge \neg B$

5.P. Elsőrendű logika

5.P.1. Definíció. Egy

$$\mathcal{L}_1 = \langle\, Srt, Cnst, Fn, Pr \,\rangle$$

elsőrendű nyelv $\mathcal{I}$ *interpretációját* (*modelljét* vagy *algebrai struktúráját*) olyan

$$\mathcal{I} = \left\langle \mathcal{D}, \widehat{Cnst}, \widehat{Fn}, \widehat{Pr} \right\rangle$$

függvénynégyes határozza meg, melyben

- a $\mathcal{D} : \pi \mapsto D_\pi$ $(\pi \in Srt)$ függvény a *nyelv hordozója*, a D_π *objektumtartomány* π típusú objektumok nemüres halmaza, $D = \bigcup_{\pi \in Srt} D_\pi$ az interpretáció objektumtartománya (*univerzuma*),

- a $\widehat{Cnst} : c \mapsto \tilde{c}$ függvény olyan, hogy ha $c \in Cnst$ π típusú konstansszimbólum, akkor $\tilde{c} \in D_\pi$,
- az $\widehat{Fn} : f \mapsto \tilde{f}$ függvény minden $f \in Fn \quad (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k \to \pi)$ alakú függvényszimbólumhoz olyan $\tilde{f}$ függvényt rendel, melynek értelmezési tartománya $D_{\pi_1} \times D_{\pi_2} \times \cdots \times D_{\pi_k}$, és értékeit D_π-ből veszi fel, azaz

$$\tilde{f} : D_{\pi_1} \times D_{\pi_2} \times \cdots \times D_{\pi_k} \to D_\pi,$$

- a $\widehat{Pr} : P \mapsto \tilde{P}$ függvény pedig olyan, hogy ha a $P \in Pr$ predikátumszimbólum alakja $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ és $(k \geq 1)$, akkor

$$\tilde{P} : D_{\pi_1} \times D_{\pi_2} \times \cdots \times D_{\pi_k} \to \{0, 1\}$$

  predikátum, ha P propozícionális betű, akkor $\tilde{P}$ vagy 0, vagy 1.

5.P.2. Megjegyzés. Legyen az $\mathcal{L}_1$ nyelv hordozója $\mathcal{D}$. Bővítsük ki a nyelvet a hordozó objektumait jelölő új konstansszimbólumokkal:

$$\mathcal{L}_1(\mathcal{D}) = \langle Srt, Cnst(\mathcal{D}), Fn, Pr \rangle,$$

ahol $Cnst(\mathcal{D})$-t úgy kapjuk, hogy minden $a \in D_\pi$ objektumhoz rendelünk egy új – általunk $\underline{a}$-val jelölt – $\pi \in Srt$ típusú konstansszimbólumot. (Ezzel az eredeti nyelv konstansszimbólumaira új jelölést vezettünk be: a $c \in Const$ helyett a $\underline{\tilde{c}}$-t.)

5.P.3. Definíció. Az $\mathcal{L}_1(\mathcal{D})$ nyelv paramétermentes (*zárt*) logikai kifejezéseit *értékelt kifejezéseknek*, a

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ \underline{a}_1 & \dots & \underline{a}_k \end{pmatrix}$$

alakú termhelyettesítéseket pedig az $\mathcal{L}_1$ nyelv $\mathcal{D}$-*értékelő helyettesítéseinek* nevezzük. Egy θ értékelő helyettesítés a K *logikai kifejezés értékelése*, ha $\mathrm{Par}(K) \subseteq \mathrm{Dom}(\theta)$.

5.P.4. Megjegyzés. Ha θ a K logikai kifejezés értékelése, akkor $K\theta$ értékelt kifejezés, azaz bármely értékelt kifejezés az $\mathcal{L}_1$ nyelv megfelelő kifejezéséből származtatható, ha az utóbbiban minden paramétert az $\mathcal{L}_1(\mathcal{D})$ nyelv valamely konstansszimbólumával helyettesítünk.

5.P.5. Definíció. Legyen $\mathcal{I}$ az $\mathcal{L}_1$ nyelv egy interpretációja.

1. Az $\mathcal{L}_1(\mathcal{D})$ nyelv egy π típusú, *értékelt termjének értéke* $\mathcal{I}$-ben az alábbi – rekurzív definícióval megadott – D_π-beli objektum. (Egy t term $\mathcal{I}$-beli értékét $|t|_\mathcal{I}$-vel fogjuk jelölni.)

   - Ha $\underline{a} \in Cnst(\mathcal{D})$ az $a \in D_\pi$ objektumhoz rendelt új $\underline{a}$ szimbólum, akkor $|\underline{a}|_\mathcal{I} \leftrightharpoons a$.
   - Ha $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ az $\mathcal{L}_1(\mathcal{D})$ nyelv egy értékelt termje, ahol a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek értékei $\mathcal{I}$-ben rendre $|t_1|_\mathcal{I}, |t_2|_\mathcal{I}, \ldots, |t_k|_\mathcal{I}$, és $\tilde{f} = \widehat{Fn}(f)$, akkor

$$|f(t_1, t_2, \ldots, t_k)|_\mathcal{I} \leftrightharpoons \tilde{f}(|t_1|_\mathcal{I}, |t_2|_\mathcal{I}, \ldots, |t_k|_\mathcal{I}).$$

2. Ha $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ az $\mathcal{L}_1(\mathcal{D})$ nyelv egy értékelt atomi formulája, ahol a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek értékei $\mathcal{I}$-ben rendre $|t_1|_\mathcal{I}, |t_2|_\mathcal{I}, \ldots, |t_k|_\mathcal{I}$, és $\tilde{P} = \widehat{Pr}(P)$, akkor

$$|P(t_1, t_2, \ldots, t_k)|_\mathcal{I} \leftrightharpoons \tilde{P}(|t_1|_\mathcal{I}, |t_2|_\mathcal{I}, \ldots, |t_k|_\mathcal{I}).$$

3. Az $\mathcal{L}_1(\mathcal{D})$ nyelv egy C *értékelt formulájának értéke* $\mathcal{I}$-ben (jelölése: $|C|_\mathcal{I}$) a következő, rekurzív definícióval megadott igazságérték:

   - Ha $C = A \triangle B$, ahol az A és B értékelt formulák értékei rendre $|A|_\mathcal{I}, |B|_\mathcal{I}$, akkor

$$|A \wedge B|_\mathcal{I} \leftrightharpoons \mathrm{Min}\{|A|_\mathcal{I}, |B|_\mathcal{I}\},$$

$$|A \vee B|_\mathcal{I} \leftrightharpoons \mathrm{Max}\{|A|_\mathcal{I}, |B|_\mathcal{I}\},$$

$$|A \supset B|_\mathcal{I} \leftrightharpoons \mathrm{Max}\{1 - |A|_\mathcal{I}, |B|_\mathcal{I}\}.$$

   - Ha $C = \neg A$, ahol az A értékelt formula értéke $|A|_\mathcal{I}$, akkor

$$|C|_\mathcal{I} \leftrightharpoons 1 - |A|_\mathcal{I}.$$

   - Ha $C = \forall x A$, ahol x π típusú változó, akkor

$$|C|_\mathcal{I} \leftrightharpoons \begin{cases} 1 & \text{ha minden } a \in D_\pi \text{ esetén } |A^x_{\underline{a}}|_\mathcal{I} = 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   - Ha $C = \exists x A$, ahol x π típusú változó, akkor

$$|C|_\mathcal{I} \leftrightharpoons \begin{cases} 1 & \text{ha van olyan } a \in D_\pi, \text{ hogy } |A^x_{\underline{a}}|_\mathcal{I} = 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

5.P.6. Definíció. Legyen $\mathcal{I}$ az $\mathcal{L}_1$ nyelv egy interpretációja és C értékelt formula $\mathcal{L}_1(\mathcal{D})$-ben. Azt mondjuk, hogy a C formula igaz $\mathcal{I}$-ben (jelölése: $\mathcal{I} \vDash C$), ha $|C|_{\mathcal{I}} = 1$, egyébként a C formula hamis $\mathcal{I}$-ben.

5.P.7. Tétel. Legyen $\mathcal{I}$ az $\mathcal{L}_1$ nyelv egy interpretációja és r egy olyan term, melyben legfeljebb egy paraméter, a π típusú x szerepel. Legyen a t π típusú értékelt term értéke $|t|_{\mathcal{I}}$. Ekkor

$$\left| r\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \right|_{\mathcal{I}} = \left| r\begin{pmatrix} x \\ |t|_{\mathcal{I}} \end{pmatrix} \right|_{\mathcal{I}},$$

azaz egy értékelt term értéke csak résztermjei értékeitől függ.

5.P.8. Tétel. Legyen $\mathcal{I}$ az $\mathcal{L}_1$ nyelv egy interpretációja és A egy olyan formula, melyben legfeljebb egy paraméter, a π típusú x szerepel. Továbbá legyen a t π típusú értékelt term értéke $|t|_{\mathcal{I}}$. Ekkor

$$\mathcal{I} \vDash \left[A\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \right] \text{ akkor és csak akkor, ha } \mathcal{I} \vDash A\begin{pmatrix} x \\ |t|_{\mathcal{I}} \end{pmatrix}.$$

FELADATOK

5.P.1. Tekintsük a $\left\langle \{\pi\}, \{c\}, \{f_{(\pi\to\pi)}\}, \{P_{(\pi,\pi)}, Q_{(\pi,\pi)}\} \right\rangle$ elsőrendű logikai nyelvet. Mit jelent természetes nyelven a

$$\forall x(P(x,c) \supset \exists y Q(f(y), x))$$

formula a következő interpretációkban?

(a)
- Az objektumtartomány legyen $\mathbb{R}$.
- c jelölje a 0-t.
- f jelölje a négyzetre emelést.
- P jelölje a nagyobb, Q pedig az egyenlőség relációt.

(b)
- Az objektumtartomány legyen egy rendezvényen részvevő emberek halmaza.
- c jelölje Cilikét.
- $f(x)$ jelölje azt a részvevőt, aki x-et meghívta a rendezvényre.
- $P(x, y)$ jelölje, hogy x és y barátok, $Q(x, y)$ pedig, hogy x és y ugyanaz a személy.

5.P.2. Adjuk meg formálisan az

$$\mathcal{L} = \left\langle \{\pi_1, \pi_2\}, \varnothing, \left\{f_{(\pi_1,\pi_2)}\right\}, \left\{P_{(\pi_1)}, Q_{(\pi_2,\pi_2)}\right\}\right\rangle$$

elsőrendű logikai nyelv alábbi, informálisan megadott interpretációját:

- a π_1 típusú elemek az Aranka, a Botond és a Ciceró keresztnevek,
- a π_2 típusú elemek a keresztnevek eredetei: magyar, latin,
- f minden névhez annak eredetét rendeli,
- P-vel jelöljük, hogy egy keresztnév férfinév,
- Q-val pedig, hogy két eredet megegyezik.

Megoldás

Definiáljuk $\mathcal{L}$ $\mathcal{I} = \left\langle \mathcal{D}, \widehat{Cnst}, \widehat{Fn}, \widehat{Pr} \right\rangle$ interpretációját a következőképpen:

$$\mathcal{D}(\pi_1) = D_{\pi_1} = \{\mathit{Aranka}, \mathit{Botond}, \mathit{Ciceró}\}$$
$$\mathcal{D}(\pi_2) = D_{\pi_2} = \{\mathit{magyar}, \mathit{latin}\}$$

$$\widehat{Fn}(f) = \widetilde{f}, \text{ ahol } \widetilde{f} : D_{\pi_1} \to D_{\pi_2}$$
$$\widetilde{f}(u) = \begin{cases} \mathit{latin} & \text{ha } u = \mathit{Ciceró} \\ \mathit{magyar} & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\widehat{Pr}(P) = \widetilde{P}, \text{ ahol } \widetilde{P} : D_{\pi_1} \to \{0,1\}$$
$$\widetilde{P}(u) = \begin{cases} 1 & \text{ha } u \in \{\mathit{Botond}, \mathit{Ciceró}\} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\widehat{Pr}(Q) = \widetilde{Q}, \text{ ahol } \widetilde{Q} : D_{\pi_2} \times D_{\pi_2} \to \{0,1\}$$
$$\widetilde{Q}(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{ha } u = v \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

5.P.3. Definiáljunk olyan elsőrendű logikai nyelvet, melyben a

$$\exists x P(x) \supset P(y)$$

szimbólumsorozat formula! Adjuk meg a nyelvnek olyan $\mathcal{I}$ interpretációját, és a formula $\mathcal{I}$-beli olyan θ értékelését, mely mellett a formula hamis!

Megoldás

A legegyszerűbb nyelv, melyben a szimbólumsorozat formula, egytípusos, és egyetlen predikátumszimbólumot tartalmaz:

$$\mathcal{L} = \left\langle \{\pi\}, \emptyset, \emptyset, \left\{P_{(\pi)}\right\}\right\rangle$$

Ekkor x és y egyaránt π típusú változók.

A formula implikáció. Egy implikáció pontosan akkor hamis, ha az előtagja igaz és az utótagja hamis. Ebből következik, hogy az utótagban található y paramétert úgy kell értékelni, hogy az utótag hamis legyen. Ugyanakkor az előtag csak akkor lehet igaz, ha van olyan értékelése x-nek, mely esetén az egzisztenciálisan kvantált formula közvetlen részformulája igaz. Tehát az objektumtartomány legalább kételemű kell legyen:

$$\mathcal{I} = \left\langle \mathcal{D}, \widehat{Cnst}, \widehat{Fn}, \widehat{Pr}\right\rangle$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\pi) &= D_\pi = \{a, b\} \\ \widehat{Pr}(P) &= \widetilde{P},\ \text{ahol } \widetilde{P} : D_\pi \to \{0,1\} \\ \widetilde{P}(u) &= \begin{cases} 1 & \text{ha } u = a \\ 0 & \text{ha } u = b \end{cases} \end{aligned}$$

A formulának y paramétere, ezért a θ értékelő helyettesítés legyen olyan, hogy $\mathrm{Dom}(\theta) = \{y\}$, és a fenntiekből következően $\theta(y) = b$.

Ellenőrzésképpen, adjuk meg a formula igazságértékét az $\mathcal{I}$ interpretációban a θ értékelő helyettesítés mellett:

$$\begin{aligned} |[(\exists x P(x) \supset P(y))\theta]|_{\mathcal{I}} &= \mathrm{Max}(1 - |\exists x P(x)|_{\mathcal{I}}, |P(y)\theta|_{\mathcal{I}}) \\ &= \mathrm{Max}(1 - |\exists x P(x)|_{\mathcal{I}}, \widetilde{P}(b)) \\ &= \mathrm{Max}(1 - |\exists x P(x)|_{\mathcal{I}}, 0) \\ &= 1 - |\exists x P(x)|_{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

Az egzisztenciálisan kvantált formula értékét meghatározhatjuk, a kvantor által megnevezett változó lehetséges értékei szerint a közvetlen részformulához készített értéktáblázattal.

x	$\lvert P(x)\rvert_{\mathcal{I}}$
a	1
b	0

Mivel x változónak van olyan értékelése, mely esetén a kvantált formula közvetlen részformulája igaz, ezért $|\exists x P(x)|_{\mathcal{I}} = 1$, tehát $|[(\exists x P(x) \supset P(y))\theta]|_{\mathcal{I}} = 0$.

5.P.4. Legyen $\mathcal{L}$ egy olyan elsőrendű nyelv, melyben $Srt = \{\pi\}$, $Cnst = \{c_\pi\}$, és $Fn = \{f_{(\pi,\pi)}, g_{(\pi,\pi,\pi)}\}$, továbbá $x, y, z, \ldots$ π típusú változók. Legyen az $\mathcal{L}$ nyelvnek $\mathcal{I}$ egy olyan interpretációja, melyben:

$$\mathcal{D}(\pi) = D_\pi = \{1,2,3,4\} \qquad \widehat{Cnst}(c) = 2$$

$$\widehat{Fn}(f) = \widetilde{f}, \text{ ahol } \widetilde{f} : D_\pi \to D_\pi \qquad \widetilde{f}(u) = 5 - u$$

$$\widehat{Fn}(g) = \widetilde{g}, \text{ ahol } \widetilde{g} : D_\pi \times D_\pi \to D_\pi \qquad \widetilde{g}(u,v) = |u - v| + 1$$

Határozzuk meg a következő termek értékét az $\mathcal{I}$ interpretációban θ helyettesítés mellett, ahol $\theta(x) = 1$ és $\theta(y) = 3$!

(a) $f(c)$

(b) $g(x,y)$

(c) $f(g(c,c))$

(d) $g(f(x), f(y))$

(e) $f(g(x, g(y,c)))$

5.P.5. Legyen

$$\mathcal{L} = \left\langle \{\pi\}, \varnothing, \varnothing, \{R_{(\pi,\pi)}\} \right\rangle$$

egy elsőrendű logikai nyelv, ahol $x, y, z, \ldots$ π típusú változók. Legyen az $\mathcal{L}$ nyelvnek $\mathcal{I}$ egy olyan interpretációja, melyben $D_\pi = \{1,2,3,4\}$ és $\widehat{Pr}(R) = \widetilde{R}$, ahol

$$\widetilde{R}(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{ha } u\text{-t osztja } v, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a következő formulák igazságértékeit $\mathcal{I}$-ben!

(a) $\neg\exists x \neg R(x,x)$

(b) $\forall y \exists x R(x,y)$

(c) $\exists x \forall y R(x,y)$

(d) $\exists x \exists y (R(x,y) \wedge \neg R(y,x))$

(e) $\forall x \forall y (R(x,y) \vee \neg R(y,x))$

(f) $\forall x (R(x,y) \supset \neg R(y,x))\theta$, ha $\theta(y) = 4$.

5.P.6. Legyen

$$\mathcal{L} = \left\langle \{\pi\}, \{a_\pi, b_\pi\}, \{f_{(\pi\to\pi)}, g_{(\pi\to\pi)}, h_{(\pi,\pi\to\pi)}\}, \{P_{(\pi)}, Q_{(\pi,\pi)}, R_{(\pi,\pi,\pi)}\} \right\rangle$$

egy elsőrendű logikai nyelv, ahol $x, y, z, \ldots$ π típusú változók. Legyen az $\mathcal{L}$ nyelvnek $\mathcal{I}$ egy olyan interpretációja, melyben

$$D_\pi = \{0, 1, 2, 3\},$$

$$\widehat{Cnst}(a) = 0, \ \ \widehat{Cnst}(b) = 2,$$

$$\widehat{Fn}(f) = \widetilde{f}, \quad \text{ahol } \widetilde{f}(u) = u + 1 \pmod 4, \text{ ha } u \in D_\pi,$$

$$\widehat{Fn}(g) = \widetilde{g}, \quad \text{ahol } \widetilde{g}(u) = u + 3 \pmod 4, \text{ ha } u \in D_\pi,$$

$$\widehat{Fn}(h) = \widetilde{h}, \quad \text{ahol } \widetilde{h}(u, v) = u + v \pmod 4, \text{ ha } u \in D_\pi,$$

$$\widehat{Pr}(P) = \widetilde{P}, \quad \text{ahol } \widetilde{P}(u) = \begin{cases} 1 & \text{ha } u + 2 \doteq 0 \pmod 4, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$\widehat{Pr}(Q) = \widetilde{Q}, \quad \text{ahol } \widetilde{Q}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{ha } u \doteq v \pmod 4, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$\widehat{Pr}(R) = \widetilde{R}, \quad \text{ahol } \widetilde{R}(u, v, w) = \begin{cases} 1 & \text{ha } u + v + 2 \doteq w \pmod 4 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg a következő formulák igazságértékeit $\mathcal{I}$-ben!

(a) $Q(h(a, f(b)), h(b, f(a)))$

(b) $\forall x \exists y Q(g(x), h(y, a))$

(c) $\exists x \forall y Q(g(x), h(y, a))$

(d) $\exists y \forall x (Q(a, h(x, y)) \supset P(f(x)) \vee R(x, y, b))$

(e) $\forall x (R(x, h(x, a), g(b)) \vee \exists y \exists z Q(z, h(f(x), g(y))))$

(f) $\exists x (P(x) \wedge \forall y R(x, y, y))$

5.P.7. Bizonyítsuk be az

(a) **5.P.7.** tételt az r term,

(b) **5.P.8.** tételt az A formula

összetettsége szerinti indukcióval!

6. Elsőrendű matematikai logikai nyelvek

6.P.1. Példanyelv. A *Geom nyelv* egy olyan matematikai logikai nyelv, melynek segítségével leírhatjuk az elemi geometria tényanyagát. Nem logikai szimbólumainak halmaz-négyese

$$\Big\langle \{ pt, et, st \}, \varnothing, \varnothing, \{ =_{(pt,pt)}, \in_{(pt,et)}, \in_{(pt,st)} \} \Big\rangle .$$

Tehát a Geom nyelvnek három különböző típusú változója van. A pont típusú (pt) változók jelölésére az $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \ldots$, egyenes típusú ($et$) változók jelölésére az $e, f, g, h, \ldots$, sík típusú (st) változók jelölésére pedig az $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \ldots$ betűket használjuk. Három predikátumszimbólum van az ábécében, melyekkel három alaprelációt jelölhetünk. Így minden atomi formula vagy $(\mathcal{A} = \mathcal{B})$, vagy $(\mathcal{A} \in e)$, vagy $(\mathcal{A} \in \mathtt{a})$ alakú, ahol $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ pt típusú, e et típusú és $\mathtt{a}$ st típusú változók. A Geom nyelv egy lehetséges interpretációjában a háromdimenziós euklideszi tér pontjai lehetnek a pontváltozók, egyenesei az egyenesváltozók, síkjai a síkváltozók értékei. Az egyes predikátumszimbólumok pedig rendre a tér két pontjának azonosságát, a tér egy pontjának egy egyenesre, illetve egy síkra illeszkedését kifejező relációkat jelölik.

6.P.2. Példanyelv. A *Subset nyelv* segítségével egy halmaz részhalmazairól tudunk állításokat megfogalmazni. Nem logikai szimbólumainak halmaz-négyese

$$\Big\langle \{ rh \}, \varnothing, \varnothing, \{ \subseteq_{(rh,rh)} \} \Big\rangle .$$

Ebben a nyelvben minden változó rh típusú – $x, y, z, \ldots$ –, mely változók a halmaz részhalmazait jelölik. Egy predikátumszimbólumunk van, így minden atomi formula $(x \subseteq y)$ (olvasva: x-et tartalmazza y) alakú, ahol x és y változók. A Subset nyelv egy-egy interpretációjában rögzítünk egy-egy alaphalmazt, és a nyelv változóinak értékei ezen halmaz részhalmazai lesznek. A predikátumszimbólum jelentése a tartalmazás reláció.

6.P.3. Példanyelv. A *Set nyelv* nem logikai szimbólumainak halmaz-négyese

$$\Big\langle \{ h \}, \varnothing, \varnothing, \{ \in_{(h,h)} \} \Big\rangle .$$

A Set nyelvben is csak egyfajta változó van – $x, y, z, \ldots$ –, mellyel halmazokat jelölhetünk. Az atomi formulák ebben a nyelvben $(x \in y)$ (olvasva: x eleme y-nak) alakúak, ahol x és y változók. A Set nyelv interpretációiban a változók értékeiket halmazoknak egy-egy rögzített halmazából vehetik fel, a predikátumszimbólum jelentése pedig az eleme reláció.

6.P.4. Példanyelv. Az *Ar nyelvet* számokra vonatkozó állítások leírására használjuk. Nem logikai szimbólumainak halmaz-négyese

$$\Big\langle \{\,sz\,\},\,\{\,0\},\,\{\,S_{(sz\to sz)},\,+_{(sz,sz\to sz)},\,*_{(sz,sz\to sz)}\,\},\,\{\,=_{(sz,sz)}\,\}\Big\rangle.$$

Itt is egyetlen típusú változó szerepel – $x, y, z, \ldots$ –, melyek számokat jelölnek. Az ábécében van egy konstans is – *0* –, mellyel a számok közül egyet kitüntetünk. Három függvényszimbólumunk van, az S egyváltozós, a + és a $*$ kétváltozós szimbólumok. A változókból és konstansból a függvényszimbólumok segítségével termeket alkothatunk: minden változó és konstans term, továbbá ha t és r termek, akkor $St, (t+r)$, és $(t*r)$ is azok. Az Ar nyelvben egy predikátumszimbólum van. Az atomi formulák $(t = r)$ alakúak, ahol t és r termek. Az Ar nyelv interpretációi

1. az $\mathbb{N}_0$ interpretáció:
   - a nyelv változóinak értékei természetes számok;
   - a *0* konstans a 0 természetes szám;
   - az S függvényszimbólumot a számlálás jelölésére, a + szimbólumot a természetes számok összeadásának, a $*$ szimbólumot pedig a szorzásának jelölésére használjuk; és
   - a predikátumszimbólum a természetes számok közötti egyenlőség reláció.
2. a $\mathbb{Z}$ interpretáció:
   - a változók az egész számok halmazából veszik fel értéküket;
   - a *0* konstans a 0 egész szám;
   - a függvényszimbólumok a számlálást, az összeadást és a szorzást jelentik az egész számok halmazán;
   - a predikátumszimbólum az egész számok egyenlősége reláció.
3. az $\mathbb{R}$ interpretáció:
   - a változók a valós számok R halmazából veszik fel értéküket;
   - a *0* konstans a 0 valós szám;
   - a függvényszimbólumok változatlanul a számlálást, az összeadást és a szorzást jelentik, de most a valós számok halmazán;
   - a predikátumszimbólum a valós számok egyenlősége relációt fejezi ki.

6.P.5. Példanyelv. Az *Ar* nyelv* nem logikai szimbólumainak halmaznégyese

$$\big\langle \{\, sz \,\}, \varnothing, \varnothing, \{\, + =_{(h,h,h)}, \cdot =_{(h,h,h)} \,\} \big\rangle .$$

Itt is egyfajta változó van – $x, y, z, \ldots$ –, melyekkel számokat jelölhetünk. Két predikátumszimbólumunk van, így minden atomi formula vagy $(x + y = z)$, vagy $(x \cdot y = z)$ alakú formális egyenlőség, ahol x, y és z változók. Az Ar* nyelv $\mathbb{N}_0$ ($\mathbb{R}$) interpretációjában a változók értékei a természetes (valós) számok lehetnek, a predikátumszimbólumok pedig két természetes (valós) szám összegének, illetve szorzatának egyenlősége egy harmadikkal reláció.

6.P.6. Példanyelv. A *Vect nyelv* vektorterek tulajdonságainak leírására alkalmas. Nem logikai szimbólumainak halmaz-négyese

$$\big\langle \{\, s, v \,\}, \{\, \mathit{0}, \underline{\mathit{0}} \,\}, \{\, S_{(s\to s)}, +_{(s,s\to s)}, *_{(s,s\to s)}, \underline{+}_{(v,v\to v)}, \underline{*}_{(s,v\to v)} \,\}, \\ \{\, =_{(s,s)}, =_{(v,v)} \,\} \big\rangle .$$

Két különböző típusú változója van, a számokat jelölő $x, y, z, \ldots$ skalár típusú és a vektorokat jelölő $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \ldots$ vektor típusú változók. A nyelvben két konstans van ($\mathit{0}$ és $\underline{\mathit{0}}$), egy kitüntetett szám és egy kitüntetett vektor jelölésére. A konstansokból és változókból termek alkothatók az S számváltozós, számértékű, a + és a $*$ két szám típusú kétváltozós, számértékű, a $\underline{+}$ vektor típusú kétváltozós, vektorértékű és a $\underline{*}$ szám és vektor típusú kétváltozós, vektorértékű függvényszimbólumok segítségével. A termek is vagy szám, vagy vektor típusúak. A Vect nyelv atomi formulái formális egyenlőségek: $(t = z)$, ahol t és z skalár típusú term, és $(T = Z)$, ahol T és Z vektor típusú term. A Vect nyelv egy interpretációja például egy konkrét E_n n-dimenziós valós vektortér lehetne:

- a skalárváltozó értékei valós számok, a vektorváltozó értékei az n-dimenziós vektorok;
- a $\mathit{0}$ konstans a 0 valós szám, a $\underline{\mathit{0}}$ konstans pedig az n-dimenziós nullvektor;
- a függvényszimbólumok jelentése rendre S egynek hozzáadása egy valós számhoz, + két valós szám összeadása, $*$ két valós szám szorzása, $\underline{+}$ két vektor összeadása, $\underline{*}$ vektor szorzása számmal;
- a predikátumszimbólumok pedig két szám, illetve két vektor azonosságára vonatkozó relációkat jelölik.

FELADATOK

6.P.1. Formalizáljuk Geom nyelven a háromdimenziós euklideszi tér következő relációit!

(a) *Az e egyenes metszi (döfi) az* $\mathtt{a}$ *síkot.*

(b) *Az e és f egyenesek kitérőek.*

Megoldás

(a) Egy egyenes akkor és csak akkor metsz (döf) egy síkot, ha pontosan egy közös pontjuk van.

$$\exists\mathcal{A}((\mathcal{A}\in e)\wedge(\mathcal{A}\in\mathtt{a})\wedge\forall\mathcal{B}((\mathcal{B}\in e)\supset(\mathcal{A}=\mathcal{B})\vee\neg(\mathcal{B}\in\mathtt{a})))$$

(b) Kitérő egyeneseknek olyan egyeneseket nevezünk, melyek nem egy síkban vannak.

$$\neg\exists\mathtt{a}(\forall\mathcal{A}((\mathcal{A}\in e)\supset(\mathcal{A}\in\mathtt{a}))\wedge\forall\mathcal{A}((\mathcal{A}\in f)\supset(\mathcal{A}\in\mathtt{a})))$$

6.P.2. Fejezzük ki a Geom nyelvben a következő relációkat!

(a) $(e=f)$ *: Az e és az f egyenesek egybeesnek.*

(b) $(e\neq f)$ *: Az e és az f egyenesek különböznek.*

(c) $(\mathtt{a}=\mathtt{b})$ *: Az* $\mathtt{a}$ *és a* $\mathtt{b}$ *síkok egybeesnek.*

(d) $(\mathtt{a}\neq\mathtt{b})$ *: Az* $\mathtt{a}$ *és a* $\mathtt{b}$ *síkok különböznek.*

(e) $(e\in\mathtt{a})$ *: Az e egyenes az* $\mathtt{a}$ *síkban fekszik.*

(f) *Az e és az f egyenesek metszik egymást.*

(g) $(e\parallel f)$ *: Az e és az f egyenesek párhuzamosak.*

(h) $(\mathtt{a}\parallel\mathtt{b})$ *: Az* $\mathtt{a}$ *és a* $\mathtt{b}$ *síkok párhuzamosak.*

6.P.3. Vezessünk be egy új jelölést a *„pontosan egy olyan x van, hogy teljesül az A állítás"* kifejezésére:

$$\exists!xA \leftrightharpoons \exists xA\wedge\forall x\forall y((A\wedge A_y^x)\supset x=y),$$

ahol A_y^x az A formulából úgy keletkezett, hogy A-ban az x változó szabad előfordulásait egy, az A-ban nem szereplő, új y változóra cseréltük.

Fejezzük ki a Geom nyelvben az alábbi állításokat a $\exists!$ jelölés használatával és anélkül!

(a) *Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszthető.*

(b) *Bármely nem egy egyenesen fekvő három pontra pontosan egy sík illeszthető.*

6.P.4. Fejezzük ki a Geom nyelvben a párhuzamos egyenesekről szóló

(a) euklideszi axiómát: *A síkban egy ponton át legfeljebb egy olyan egyenes húzható, mely a ponton át nem haladó egyenessel párhuzamos.*

(b) Bolyai-Lobacsevszkij-féle axiómát: *A síkban egy ponton át húzható két olyan egymástól különböző egyenes, melyek a ponton át nem haladó egyenessel párhuzamosak.*

6.P.5. Fejezzük ki a Subset nyelvben a következőket!

(a) $(x = U)$: *Az x részhalmaz maga az alaphalmaz.*

(b) $(x = \emptyset)$: *Az x részhalmaz üres halmaz.*

(c) $(x = y)$: *Az x és az y részhalmazok egyenlőek.*

(d) $(x \subset y)$: *Az x részhalmaz valódi része az y részhalmaznak.*

(e) *Az x részhalmaz egyelemű.*

(f) $(x = y \cap z)$: *Az x részhalmaz az y és a z részhalmazok metszete.*

(g) $(x = y \cup z)$: *Az x részhalmaz az y és a z részhalmazok uniója.*

(h) $(x = \bar{y})$: *Az x részhalmaz az y komplementere.*

(i) $(x = y \setminus z)$: *Az x részhalmaz a z részhalmaz y-ra vonatkozó komplementere.*

6.P.6. Fejezzük ki Subset nyelven, hogy az x és az y nem üres halmazok diszjunktak (feltéve hogy az $(x = \emptyset)$ jelölést már bevezettük)!

Megoldás

Két nem üres halmaz pontosan akkor diszjunkt, ha nincs közös nem üres részhalmazuk.

$$\neg(x = \emptyset) \wedge \neg(y = \emptyset) \wedge \neg\exists z((z \subseteq x) \wedge (z \subseteq y) \wedge \neg(z = \emptyset))$$

6.P.7. Fejezzük ki a Subset nyelvben az alábbi mondatokat!

(a) *Létezik a tartalmazásra nézve szigorúan növekvő háromtagú lánc, melynek tagjai az alaphalmaz részhalmazai.*

(b) *Létezik az alaphalmaznak három, páronként különböző részhalmaza.*

6.P.8. Milyen interpretációkban igazak az előző feladat mondatai?

6.P.9. Adjunk általános módszert a Subset nyelv bonyolult kifejezései közötti egyenlőségek leírására! Fejezzük ki ennek segítségével az

(a) $(x \setminus ((y \cap z) \cup y) = x \cup (y \setminus z))$

(b) $((y \setminus z) \cup (x \setminus z) = x \setminus (y \setminus z))$

egyenlőségeket!

6.P.10. Fejezzük ki a Set nyelvben a következőket!

(a) $(x \subseteq y)$: *Az x halmaz az y-nak részhalmaza.*

(b) $(x \neq y)$: *Az x és az y halmazok különbözőek.*

(c) $(x \subset y)$: *Az x halmaz része az y-nak, de x és y különböznek.*

(d) $(x = \varnothing)$: *x az üres halmaz.*

(e) $(x = \{y, z\})$: *x kételemű halmaz, melynek elemei y és z.*

Megoldás

$$(y \in x) \wedge (z \in x) \wedge \neg \exists u((u \neq y) \wedge (u \neq z) \wedge (u \in x))$$

(f) $(x = y \cup z)$: *x az y és z halmazok uniója.*

(g) $(x = y \cap z)$: *x az y és z halmazok metszete.*

(h) $(x = y \setminus z)$: *x a z-nek y-ra vonatkozó komplementere.*

(i) $(x = Py)$: *x az y részhalmazainak a halmaza.*

Megoldás

$$\forall z((z \subseteq y) \equiv (z \in x))$$

6.P.11. Formalizáljuk az Ar nyelv $\mathbb{N}_0$ halmazon vett interpretációja segítségével a következő állításokat!

(a) *Kétszer kettő egyenlő öttel.*

(b) x *négyzetszám.*

(c) *A négyzetszámok száma végtelen.*

Megoldás

(a) $\underbrace{SS0}_{2} * \underbrace{SS0}_{2} = \underbrace{SSSSS0}_{5}$

(b) Négyzetszámok azok a természetes számok, amelyek felírhatók valamely természetes szám négyzeteként:

$$\exists y(x = y * y)$$

(c) A természetes számok halmazának egy részhalmaza végtelen, ha ennek a részhalmaznak tetszőleges természetes számnál mindig van nagyobb eleme.

$$\forall x \exists y(\underbrace{\exists z(y = x + Sz)}_{y>x} \wedge \underbrace{\exists z(y = z * z)}_{y \text{ négyzetszám}})$$

6.P.12. Fejezzük ki Ar nyelven az $\mathbb{N}_0$ interpretáció mellett a következő relációkat!

(a) $(x \neq y)$ *: x és y különböző számok.*

(b) $(x \leq y)$ *: x kisebb vagy egyenlő, mint y.*

(c) $(x < y)$ *: x kisebb, mint y.*

(d) $(x \mid y)$ *: x osztója y-nak.*

(e) x *prímszám.*

(f) $(z = (x, y))$ *: z az x és az y legnagyobb közös osztója.*

(g) $(z = [x, y])$ *: z az x és az y legkisebb közös többszöröse.*

6.P.13. Fejezzük ki Ar nyelven az $\mathbb{N}_0$ interpretációban a következő állításokat!

(a) *A prímszámok száma végtelen.*

(b) *A prímszámok száma véges.*

(c) *Az ikerprímek száma végtelen.*

(d) *Minden természetes szám előáll négy négyzetszám összegeként.*

(e) *Van legnagyobb a természetes számok között.*

(f) *A* $3x^2 + 2x + 1 = 0$ *egyenletnek pontosan két különböző gyöke van.*

6.P.14. Az előző feladat mely mondatai igazak, melyek hamisak az $\mathbb{N}_0$ interpretációban?

6.P.15. Fejezzük ki az Ar nyelvben $\mathbb{R}$ interpretációban a következőket:

(a) $(x \leq y)$ *: x kisebb vagy egyenlő, mint y.*

(b) $(x < y)$ *: x kisebb, mint y.*

(c) *Ha x kisebb, mint y, akkor van olyan szám is, amelyik x-nél nagyobb, de y-nál kisebb.*

(d) *Van olyan szám, hogy* $\sqrt{3}$.

(e) *Van olyan szám, hogy* $(-\sqrt[3]{5})$.

6.P.16. Fejezzük ki az Ar nyelv $\mathbb{Z}$ interpretációjában, hogy minden számnak van additív inverze!

Megoldás

$$\forall x \exists y (x + y = 0)$$

6.P.17. Fejezzük ki az Ar nyelvben $\mathbb{Z}$ interpretációban a következőket!

(a) $(x > 0)$ *: x pozitív.*

(b) $(x \leq y)$ *: x kisebb vagy egyenlő, mint y.*

(c) $(x < (y - z))$ *: x kisebb, mint y és z különbsége.*

6.P.18. Fejezzük ki az Ar* nyelvben $\mathbb{N}_0$ interpretációban a következőket!

(a) $(x = 0)$ *: x egyenlő* 0*-val.*

(b) $(x \neq 0)$ *: x nem egyenlő* 0*-val.*

(c) $(x = 1)$ *: x egyenlő* 1*-gyel.*

(d) $(x = y)$ *: x egyenlő y-nal.*

(e) $(x = Sy)$: *x egyenlő Sy-nal.*

(f) $(x = 2)$: *x egyenlő* 2*-vel.*

(g) $(x = (y + z) \cdot Sy)$: *x egyenlő az* $(y + z) \cdot Sy$ *kifejezéssel.*

(h) $(x \mid y)$: *x osztója y-nak.*

(i) *x prímszám.*

6.P.19. Fejezzük ki az Ar* nyelvben $\mathbb{N}_0$ interpretációban, hogy bármely két nullától különböző számnak van legkisebb közös többszöröse!

6.P.20. Adjunk általános módszert, hogy lehet leírni az Ar* nyelv bonyolult kifejezéseinek egyenlőségét az $\mathbb{N}_0$ interpretációban. Fejezzük ki ennek segítségével az

$$((x^2 + x \cdot y)^2 = (z + x) \cdot z)$$

egyenlőséget!

6.P.21. Bizonyítsuk be, hogy az Ar nyelv bármely $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ formulájához ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ a formula paraméterei) van olyan Ar*-beli $A^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ formula, hogy az

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv A^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

formula az $\mathbb{N}_0$ interpretációban igaz!

6.P.22. Fejezzük ki az Ar* nyelvben az $\mathbb{R}$ interpretációban az

$$((x + y) \leq x^2)$$

egyenlőtlenséget!

6.P.23. Formalizáljuk Vect nyelven azt, hogy van két vektorból álló lineárisan független vektorrendszer! Mely interpretációkban igaz és mely interpretációkban hamis a formula?

Megoldás

$$\exists \underline{a} \exists \underline{b} \forall x \forall y ((x \,\underline{*}\, \underline{a} \,\underline{+}\, y \,\underline{*}\, \underline{b} = \underline{0}) \supset (x = 0 \land y = 0))$$

Az egydimenziós valós vektortérben, E_1-ben, hamis, többdimenziós vektorterekben, E_n $n \geq 2$-ben, igaz.

6.P.24. Szerkesszünk olyan mondatot a Vect nyelvben, mely az E_3 interpretációban igaz, de bármely E_n $(n \neq 3)$ interpretációban hamis!

7. Kielégíthetőség, logikai következmény

7.I. Ítéletlogika

7.I.1. Definíció. Az ítéletlogikai nyelv egy A formulája *kielégíthető*, ha van a nyelvnek olyan interpretációja, melyben A igaz, egyébként A *kielégíthetetlen* vagy *ellentmondásos* (jelölése: $\Dashv A$).

7.I.2. Definíció. Az ítéletlogikai nyelv egy A formulája ítéletlogikai *törvény* vagy *tautológia* (jelölve: $\vDash A$), ha A a nyelv minden interpretációjában igaz.

7.I.3. Tétel.

(1) $\Dashv A$ akkor és csak akkor, ha $\vDash \neg A$.

(2) A akkor és csak akkor elégíthető ki, ha nem igaz, hogy $\vDash \neg A$.

7.I.4. Tétel. Ha A, B, C formulák, az alábbi formulák tautológiák:

a kizárt harmadik törvénye	$\vDash A \vee \neg A$
ellentmondás törvénye	$\vDash \neg(A \wedge \neg A)$
az azonosság törvénye	$\vDash A \supset A$
a kétszeres tagadás törvénye	$\vDash \neg\neg A \supset A$
bővítés előtaggal	$\vDash A \supset (B \supset A)$
ellentmondásból	
bármi következik	$\vDash A \supset (\neg A \supset B)$
Peirce-törvény	$\vDash ((A \supset B) \supset A) \supset A$
implikációlánc-törvény	$\vDash (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset$
	$\supset (A \supset C))$
reductio ad absurdum	$\vDash (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$
tranzitivitás	$\vDash (A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset (A \supset C)$
	$\vDash A \supset (B \supset A \wedge B)$
	$\vDash A \wedge B \supset A$ és $\vDash A \wedge B \supset B$
	$\vDash (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$
	$\vDash A \supset A \vee B$ és $\vDash B \supset A \vee B$

7.I.5. Megjegyzés. A kielégíthetőség fogalmát kiterjeszthetjük formulahalmazokra is: egy ítéletlogikai nyelv formuláiból álló halmaz *kielégíthető*, ha van a nyelvnek olyan interpretációja, melyben minden formula igaz, egyébként (azaz ha minden interpretációban a formulahalmaz valamelyik formulája hamis) a formulahalmaz *kielégíthetetlen*.

7.I.6. Definíció. Ítéletlogikai formulák egy Γ halmaza *lefelé telített*, ha minden olyan esetben, amikor

- $A \wedge B \in \Gamma$, akkor $A \in \Gamma$ és $B \in \Gamma$,
- $A \vee B \in \Gamma$, akkor $A \in \Gamma$ vagy $B \in \Gamma$,
- $A \supset B \in \Gamma$, akkor $\neg A \in \Gamma$ vagy $B \in \Gamma$,
- $\neg(A \wedge B) \in \Gamma$, akkor $\neg A \in \Gamma$ vagy $\neg B \in \Gamma$,
- $\neg(A \vee B) \in \Gamma$, akkor $\neg A \in \Gamma$ és $\neg B \in \Gamma$,
- $\neg(A \supset B) \in \Gamma$, akkor $A \in \Gamma$ és $\neg B \in \Gamma$,
- $\neg\neg A \in \Gamma$, akkor $A \in \Gamma$.

7.I.7. Definíció. Formulák egy Γ halmaza *Hintikka-halmaz*, ha Γ lefelé telített, és egyetlen formulájának sem tartalmazza a negáltját.

7.I.8. Tétel. Ha Γ Hintikka-halmaz, akkor Γ kielégíthető.

7.I.9. Definíció. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \geq 1)$ és B egy ítéletlogikai nyelv formulái. Azt mondjuk, hogy a B formula ítéletlogikai *következménye* az $A_1, A_2, \dots, A_n$ formuláknak, ha a nyelv minden olyan interpretációjában, amelyben az $A_1, A_2, \dots, A_n$ formulák mind igazak, B is igaz. Jelölése: $A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B$.

7.I.10. Tétel.

(1) $A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \supset B$.

(2) $A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B$ akkor és csak akkor, ha $\Dashv A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$.

(3) $A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B$ akkor és csak akkor, ha $\Dashv \{ A_1, A_2, \dots, A_n, \neg B \}$.

(4) $\vDash A \supset B$ akkor és csak akkor, ha $A \vDash B$.

7.I.11. Definíció. Legyen $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ tetszőleges formulahalmaz, és B egy formula. Az $(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}, B)$ párt *következtetésformának* nevezzük. Az $(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}, B)$ pár *helyes következtetésforma*, ha $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ kielégíthető és $A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash B$.

7.I.12. Tétel. Legyenek A, B és C formulák. Az alábbi következtetésformák helyesek:

leválasztási szabály (modus ponens)	$(\{A \supset B, A\}, B)$
kontrapozíció (modus tollens)	$(\{A \supset B, \neg B\}, \neg A)$
reductio ad absurdum	$(\{A \supset B, A \supset \neg B\}, \neg A)$
indirekt bizonyítás	$(\{\neg A \supset B, \neg A \supset \neg B\}, A)$
feltételes szillogizmus	$(\{A \supset B, B \supset C\}, A \supset C)$
esetszétválasztás	$(\{A \vee B, A \supset C, B \supset C\}, C)$
modus tollendo ponens	$(\{A \vee B, \neg A\}, B)$
modus ponendo tollens	$(\{\neg(A \wedge B), A\}, \neg B)$
$\vee$*-ra vonatkozó következtetésforma*	$(\{A\}, A \vee B)$ és $(\{B\}, A \vee B)$
$\wedge$*-re vonatkozó következtetésforma*	$(\{A, B\}, A \wedge B)$
	$(\{A \wedge B\}, A)$ és $(\{A \wedge B\}, B)$
$\supset$*-ra vonatkozó következtetésforma*	$(\{B\}, A \supset B)$
$\neg\neg$*-re vonatkozó következtetésforma*	$(\{\neg\neg A\}, A)$ és $(\{A\}, \neg\neg A)$

FELADATOK

7.I.1. Mely állítás igaz, és miért?

(a) Egy formula akkor és csak akkor kielégíthető, ha logikai törvény.

(b) Egy formula csak akkor kielégíthető, ha logikai törvény.

(c) Egy formula csak akkor logikai törvény, ha kielégíthető.

(d) Egy formula pontosan akkor nem lesz kielégíthető, ha ellentmondásos.

(e) Annak szükséges feltétele, hogy egy formula logikai törvény legyen az, hogy a formula legyen kielégíthető.

(f) Annak elegendő feltétele, hogy egy formula ne legyen logikai törvény az, hogy a formula ne legyen ellentmondásos.

(g) Ha egy formula kielégíthető, akkor a negáltja is kielégíthető.

(h) Ha egy formula logikai törvény, akkor a negáltja nem elégíthető ki.

(i) Ha egy formula negáltja kielégíthető, akkor a formula logikai törvény.

7.I.2. Bizonyítsuk be a **7.I.3.** tételben megfogalmazott állításokat!

7.I.3. Igazoljuk, hogy az alábbi formulák kielégíthetőek!

(a) $\neg(X \supset \neg X)$

(b) $(X \supset Y) \supset (Y \supset X)$

(c) $(X \supset Y \wedge Z) \wedge \neg(X \vee Z \supset Y)$

7.I.4. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi ítéletlogikai formulák tautológiák!

(a) $\neg(Y \vee \neg X) \supset \neg(X \supset Y)$

(b) $X \supset (Y \supset (Z \supset (U \supset (V \supset (W \supset X)))))$

Megoldás

(a) A formulában két különböző ítéletváltozó van, melyeket együttesen négy különböző módon lehet interpretálni. Ha mind a négy interpretációban igaz a formula, akkor beláttuk, hogy tautológia.

A formula értékét a különböző interpretációkban meghatározhatjuk olyan táblázat segítségével, ahol az egyes logikai összekötőjelek alatt a hatáskörüket jelentő formula értékét jegyezzük be, így végül a fő logikai összekötőjel alatt a formula értékét kapjuk.

X	Y	$\neg$	$(Y$	$\vee$	$\neg$	$X)$	$\supset$	$\neg$	$(X$	$\supset$	$Y)$
0	0	0	0	1	1	0	**1**	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	**1**	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	**1**	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	**1**	0	1	1	1

Mivel a fő logikai összekötő jel alatt minden interpretáció esetében 1 szerepel, így a formula valóban tautológia.

(b) A formulában 6 különböző ítéletváltozó van, melyeket együttesen 2^6 különféle módon lehet interpretálni. Ez esetben egy 64 sorból álló táblázat elkészítése már nem tűnik célszerűnek. A következőképpen gondolkozhatunk:

Tekintsünk egy tetszőleges $\mathcal{I}$ interpretációt. A formula fő logikai összekötő jele $\supset$. Az implikációs előtag X. Az X ítéletváltozó igazságértékének szempontjából két eset lehetséges:

- $|X|_{\mathcal{I}} = 0$ esetén az implikációs előtag hamis, ezért:

$$|X \supset (Y \supset (Z \supset (U \supset (V \supset (W \supset X)))))|_{\mathcal{I}} = 1.$$

- $|X|_{\mathcal{I}} = 1$ esetén $W \supset X$ részformulában az implikációs utótag igaz ezért $|W \supset X|_{\mathcal{I}} = 1$. Ez a formula szintén implikációs utótag a $V \supset (W \supset X)$ formulában, ezért $|V \supset (W \supset X)|_{\mathcal{I}} = 1$. Folytatva:

$$\begin{gathered}|U \supset (V \supset (W \supset X))|_{\mathcal{I}} = 1 \\ \Downarrow \\ |Z \supset (U \supset (V \supset (W \supset X)))|_{\mathcal{I}} = 1 \\ \Downarrow \\ |Y \supset (Z \supset (U \supset (V \supset (W \supset X))))|_{\mathcal{I}} = 1 \\ \Downarrow \\ |X \supset (Y \supset (Z \supset (U \supset (V \supset (W \supset X)))))|_{\mathcal{I}} = 1\end{gathered}$$

Ezzel megmutattuk, hogy tetszőleges $\mathcal{I}$ interpretációban a formula igaz, tehát tautológia.

7.I.5. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formula ellentmondás!

$$(X \supset Y \wedge Z) \wedge ((\neg Y \vee \neg Z \supset X) \wedge (Y \supset \neg Z))$$

Megoldás

Indirekt tegyük fel, hogy van olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, melyben a formula igaz.

$$\begin{gathered}|(X \supset Y \wedge Z) \wedge ((\neg Y \vee \neg Z \supset X) \wedge (Y \supset \neg Z))|_{\mathcal{I}} = 1 \\ \Downarrow \\ |X \supset Y \wedge Z|_{\mathcal{I}} = 1 \text{ és } |\neg Y \vee \neg Z \supset X|_{\mathcal{I}} = 1 \text{ és } |Y \supset \neg Z|_{\mathcal{I}} = 1\end{gathered}$$

A bal oldali konjunkciós tag, $(X \supset Y \wedge Z)$, kétféle interpretációban lehet igaz:

- az implikáció igaz, ha utótagja igaz: $|Y \wedge Z|_{\mathcal{I}} = 1$. Ez esetben $|Y|_{\mathcal{I}} = 1$ és $|Z|_{\mathcal{I}} = 1$. Innen $|Y \supset \neg Z|_{\mathcal{I}} = 0$ összefüggést kapjuk, ami ellentmond a feltevésünknek.

- az implikáció igaz, ha előtagja hamis: $|X|_{\mathcal{I}} = 0$. Ekkor a $|\neg Y \vee \neg Z \supset X|_{\mathcal{I}} = 1$ csak úgy lehetséges, ha $|\neg Y \vee \neg Z|_{\mathcal{I}} = 0$, melyből következik, hogy $|Y|_{\mathcal{I}} = 1$ és $|Z|_{\mathcal{I}} = 1$, ami ugyancsak $|Y \supset \neg Z|_{\mathcal{I}} = 0$ miatt ellentmond a feltevésünknek.

Mivel a feltevésünk mellett ellentmondásra jutottunk, beláttuk, hogy az indirekt feltevésünk helytelen, azaz nem létezik olyan interpretáció, mely kielégíti a formulát. Ekkor a formula logikai ellentmondás.

7.I.6. Bizonyítsuk be a **7.I.4.** tételben felsorolt formulákról, hogy logikai törvények!

7.I.7. Döntsük el, mely formulák nem logikai törvények! Indokoljunk!

(a) $\neg(X \supset Y) \supset \neg Y$

(b) $\neg(X \supset Y) \supset X$

(c) $X \supset \neg(X \supset Y)$

(d) $\neg X \supset (X \supset Y)$

(e) $(X \supset Z) \supset ((X \supset Y) \supset (Y \supset Z))$

(f) $\neg X \wedge (Y \supset Z) \wedge X \supset \neg Y \vee X$

7.I.8. Döntsük el, mely formulák logikai törvények! Indokoljunk!

(a) $((X \supset Y) \supset Y) \supset Y$

(b) $((Y \supset Z) \supset (X \supset Y)) \supset (X \supset Y)$

(c) $X \supset (Y \supset (Y \supset X))$

(d) $X \wedge Y \supset X \vee Z$

(e) $((X \supset Y) \supset X) \supset X$

(f) $(X \supset Y) \supset ((Y \supset Z) \supset (X \supset Z))$

(g) $(\neg X \supset Y) \supset (\neg Z \supset (X \supset X))$

7.I.9. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formulák logikai törvények!

(a) $X \supset (Y \supset X) \equiv (\neg X) \supset (X \supset Y)$

(b) $(X \supset Y) \supset Y \equiv X \vee Y$

(c) $X \supset (Y \vee Z) \equiv (X \supset Y) \vee (X \supset Z)$

(d) $(X \supset Z) \wedge (Y \supset Z) \equiv (X \vee Y) \supset Z$

(e) $X \supset Y \equiv X \supset (X \wedge Y)$

7.I.10. Bizonyítsuk be, hogy

$$=\!\!| \; (X \supset Y \vee Z) \wedge \neg((X \supset Y) \vee (X \supset Z)).$$

7.I.11. Döntsük el az alábbi formulahalmazokról, hogy kielégíthetőek-e!

(a) $\{\neg X, X \supset Y, X \vee \neg Y\}$

(b) $\{X \supset Y, X, \neg Y\}$

7.I.12. Egy nemzetközi bűnbanda négy tagja egy razzia során lebukott. Kihallgatásuk során többek között az alábbiakat jegyezte fel a nyomozó:

Ha Abrosz Tisztakosz nem tudott a csempészáru megérkezéséről, akkor Bot Ond vagy Csalez Lopez kellett tudjon róla. Ha Csalez Lopez tudott róla, akkor Deb Ella hamis vallomást tett. Nem igaz, hogy ha Abrosz Tisztakosz nem tudott a csempészáru megérkezéséről, akkor Deb Ella hamis vallomást tett. Bot Ond nem tudta, hogy megérkezett a csempészáru.

Mikor a kihallgatás után átnézte a feljegyzéseit a nyomozó, észrevett valamit. Vajon mit?

7.I.13. Igaz-e, hogy

(a) minden kielégíthetetlen formulahalmaznak van kielégíthető (nemüres) része?

(b) minden kielégíthető formulahalmaznak van kielégíthetetlen bővítése?

(c) egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden részhalmaza kielégíthetetlen?

7.I.14. Állítsunk elő az $(X \supset Y) \vee Z \supset \neg X \wedge Z$ formulát tartalmazó lefelé telített formulahalmazokat! Hintikka-halmazok-e az előállított halmazok?

7.I.15. Bizonyítsuk be a **7.I.8.** tételt!

7.I.16. Az $X \supset Y \vee Z$, X, $\neg Y$ premisszáknak melyik formula logikai következménye? Indokoljuk a választ!

(a) $X \wedge Z$ (b) $Y \wedge Z$

(c) $\neg(X \wedge Y \supset X \vee \neg Y)$ (d) $X \wedge \neg Y \wedge Z$

7.I.17. Az $X \supset (Y \supset Z)$, Y, $\neg Z$ premisszáknak melyik formula logikai következménye? Indokoljunk!

(a) $\neg X$ (b) $Y \supset Z$
(c) X (d) $X \wedge Y \wedge \neg Z$

7.I.18. A $\neg X \supset \neg Y \vee Z$, Y, $\neg Z$ premisszáknak mely formula logikai következménye? Indokoljunk!

(a) $X \wedge Z$ (b) $Z \supset \neg X$
(c) $X \wedge Y$ (d) $X \wedge Y \wedge Z$

7.I.19. Bizonyítsuk be a **7.I.10.** tétel állításait!

7.I.20. Bizonyítsuk be a **7.I.12.** tételbeli következtetésformákról, hogy helyesek!

7.I.21. Döntsük el, hogy az alábbi következményrelációk fennállnak-e!

(a) $X \supset \neg Y \vDash X \supset (Y \supset Z)$

(b) $\neg X \vee Y,\ Z \supset \neg Y \vDash X \supset \neg Z$

(c) $(X \vee Y) \supset (Z \wedge U),\ (U \vee V) \supset W \vDash X \supset W$

(d) $X \supset Y,\ \neg Z \supset \neg Y,\ \neg Z \vee \neg U \vDash U \supset \neg X$

7.I.22. Vizsgáljuk meg az alábbi következtetéseket!

Premisszák:

Csak akkor megyek boltba, ha elfogyott a tej vagy kevés a kenyér. Nem igaz az, hogy nem megyek boltba vagy elfogyott a tej. Akkor fogyott el a tej vagy a liszt, ha kevés volt a kenyér.

(a) Bizonyítsuk a szemantikai definíciók segítségével, hogy az alábbi következtetés helyes!

Ha nem fogyott el a tej, akkor kevés a kenyér.

(b) Cáfoljuk meg az alábbi következtetést!

Ha elmegyek a boltba, akkor nem igaz, hogy liszt már nincs.

Megoldás

A mondatok formalizálásához a következő ítéletváltozókat használjuk:

$B \leftrightharpoons$ *Boltba megyek.* $K \leftrightharpoons$ *Kevés a kenyér.*
$L \leftrightharpoons$ *Nincs már liszt.* $T \leftrightharpoons$ *Elfogyott a tej.*

A premisszák formalizálva sorrendben a következők:

$$B \supset T \vee K, \qquad \neg(\neg B \vee T), \qquad K \supset T \vee L$$

(a) Legyen $\mathcal{I}$ egy intrerpretáció, amelyben a premisszák igazak.

$$|\neg(\neg B \vee T)|_{\mathcal{I}} = 1 - |\neg B \vee T|_{\mathcal{I}} = 1 - \mathrm{Max}(1 - |B|_{\mathcal{I}}, |T|_{\mathcal{I}}) = 1$$

$\mathrm{Max}(1-|B|_{\mathcal{I}}, |T|_{\mathcal{I}}) = 0$ csak akkor lehetséges, ha $|B|_{\mathcal{I}} = 1$ és $|T|_{\mathcal{I}} = 0$.

$$|B \supset T \vee K|_{\mathcal{I}} = \mathrm{Max}(1 - |B|_{\mathcal{I}}, \mathrm{Max}(|T|_{\mathcal{I}}, |K|_{\mathcal{I}})) =$$

$$= \mathrm{Max}(1 - 1, \mathrm{Max}(0, |K|_{\mathcal{I}})) = \mathrm{Max}(0, |K|_{\mathcal{I}}) = 1$$

Tehát $|K|_{\mathcal{I}} = 1$. A konklúzió logikai értéke:

$$|\neg T \supset K|_{\mathcal{I}} = \mathrm{Max}(1 - (1 - |T|_{\mathcal{I}}), |K|_{\mathcal{I}}) = \mathrm{Max}(1 - (1 - 0), 1) = 1.$$

Mivel a konkluzió is igaz az $\mathcal{I}$ interpretációban a következtetés helyes.

Bizonyíthatunk indirekt is. Tegyük fel, hogy a következtetés helytelen, azaz van olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, melyben a konklúzió hamis, $|\neg T \supset K|_{\mathcal{I}} = 0$, de a premisszák igazak.

A konklúzió hamissága esetén $|T|_{\mathcal{I}} = 0$ és $|K|_{\mathcal{I}} = 0$. Ekkor $|T \vee K|_{\mathcal{I}} = 0$. Mivel $B \supset T \vee K$ premissza, így $|B \supset T \vee K|_{\mathcal{I}} = 1$, ami csak úgy teljesülhet, ha $|B|_{\mathcal{I}} = 0$. Innen azonban $|\neg B \vee T|_{\mathcal{I}} = 1$, ami ellentmond a második premissza igazságának. Mivel ellentmondásra jutottunk, így sikerült indirekt módon igazolni, hogy a következtetés helyes.

(b) A következtetés helyességének cáfolásához elegendő egy olyan interpretációt találni, melyben a konklúzió hamis, $|B \supset \neg L|_{\mathcal{I}} = 0$, miközben a premisszák mind igazak. A következő interpretáció ilyen:

$$|B|_{\mathcal{I}} = 1, \qquad |K|_{\mathcal{I}} = 1, \qquad |L|_{\mathcal{I}} = 1, \qquad |T|_{\mathcal{I}} = 0$$

7.I.23. Ellenőrizzük, hogy az alábbi következtetések helyesek-e!

(a) Premisszák:
Ha reggel uszodába megyek, korán kelek. Ha viszont sok dolgozatot kell kijavítanom éjszaka, nem tudok reggel korán kelni. Ma reggel uszodában voltam.
Konklúzió:
Tegnap éjszaka nem kellett sok dolgozatot kijavítanom.

(b) Premisszák:
Ha a 2 prímszám, akkor a 2 a legkisebb prímszám. Ha a 2 a legkisebb prímszám, akkor az 1 nem prímszám. Az 1 nem prímszám.
Konklúzió:
Tehát a 2 prímszám.

(c) Premisszák:
Éva úgy gondolta, hogy ha a kölcsönzőben nem talál megfelelő jelmezt, akkor vagy varr magának egyet, vagy felveszi a tavalyit. Kiderült, hogy a kölcsönzőben nincs Évának tetsző jelmez, a tavalyit pedig nem tudja felvenni, mert szűk.
Konklúzió:
Éva jelmezt varr magának.

(d) Premisszák:
Ha Ede helyesen oldja meg a dolgozat feladatainak felét, akkor nem kell a vizsgát megismételnie. Tudja ugyanakkor, hogy ha nem puskázik, akkor meg kell ismételnie a vizsgát. Ede vagy megoldja helyesen a feladatok felét, vagy vizsgát ismétel.
Konklúzió:
Ede pont akkor oldja meg helyesen a feladatok felét, ha puskázik.

(e) Premisszák:
Anna és Bella egyforma magas, vagy Anna magasabb Bellánál. Ha Anna és Bella egyfoma magas, akkor Cili és Bella is egyforma magas. Ha Anna magasabb Bellánál, akkor Bella magasabb Dóránál.
Konklúzió:
Cili és Bella egyforma magas, vagy Bella magasabb Dóránál.

(f) Premisszák:
Ha a parlament nem szavazza meg az új törvényjavaslatot, akkor a sztrájkot a vasutasok nem fogják abbahagyni, hacsak nem mond le a vezérigazgató, és törlik el a kötelező túlmunkát. A parlament nem szavazta meg az új törvényjavaslatot, és a túlmunka továbbra is kötelező.
Konklúzió:
Következésképp a sztrájkot a vasutasok nem fogják abbahagyni.

(g) Premisszák:
Ha a lóversenyek eredményeit a maffiózók előre eldöntik, vagy a játéktermeket kezükbe veszik a hamiskártyások, akkor a turizmus kevesebb bevételt hoz, és a város kárt szenved. Ha a turizmus kevesebb bevételt hoz, a rendőrség meg lesz elégedve. A rendőrség sohasem elégedett.
Konklúzió:
Tehát a lóversenyek eredményeit nem a maffiózók döntik el.

7.P. Elsőrendű logika

7.P.1. Definíció. Egy A elsőrendű formula *kielégíthető*, ha van a nyelvnek olyan interpretációja és A-nak olyan θ értékelése, amely mellett $A\theta$ igaz, egyébként A *kielégíthetetlen* vagy *ellentmondás* (jelölése: $\dashv A$).

7.P.2. Definíció. Egy A elsőrendű formula *logikai törvény*, ha a nyelv bármely interpretációjában és A bármely θ értékelése mellett $A\theta$ igaz (jelölése: $\vDash A$).

7.P.3. Tétel. Az elsőrendű logikai nyelvben a **7.I.4**. tételben felsorolt formulák, továbbá az alábbi formulák mind elsőrendű logikai törvények:

kvantorcsere implikációban	$\vDash \forall x A(x) \supset \exists x A(x)$
	$\vDash \exists y \forall x A(x,y) \supset \forall x \exists y A(x,y)$
kvantor és termhelyettesítés	$\vDash \forall x_1 \dots \forall x_n A \supset [A(x_1, \dots, x_n \| t_1, \dots, t_n)]$
	$\vDash [A(x_1, \dots, x_n \| t_1, \dots, t_n)] \supset \exists x_1 \dots \exists x_n A$
kvantorredukció	$\vDash \forall x \forall y A \supset \forall x [A(y \| x)]$
	$\vDash \exists x [A(y \| x)] \supset \exists x \exists y A$

7.P.4. Definíció. Elsőrendű formulák egy S halmaza egy D univerzum felett *lefelé telített*, ha minden olyan esetben, amikor

- $A \wedge B \in S$, akkor $A \in S$ és $B \in S$,
- $A \vee B \in S$, akkor $A \in S$ vagy $B \in S$,
- $A \supset B \in S$, akkor $\neg A \in S$ vagy $B \in S$,
- $\neg(A \wedge B) \in S$, akkor $\neg A \in S$ vagy $\neg B \in S$,
- $\neg(A \vee B) \in S$, akkor $\neg A \in S$ és $\neg B \in S$,
- $\neg(A \supset B) \in S$, akkor $A \in S$ és $\neg B \in S$,
- $\neg\neg A \in S$, akkor $A \in S$,
- $\forall x A \in S$, akkor $A(x \parallel \underline{a}) \in S$ minden $a \in D$-re,
- $\exists x A \in S$, akkor $A(x \parallel \underline{a}) \in S$ legalább egy $a \in D$-re,
- $\neg \forall x A \in S$, akkor $\neg A(x \parallel \underline{a}) \in S$ legalább egy $a \in D$-re,
- $\neg \exists x A \in S$, akkor $\neg A(x \parallel \underline{a}) \in S$ minden $a \in D$-re.

7.P.5. Definíció. Elsőrendű formulák egy S halmaza a D univerzum feletti *Hintikka-halmaz*, ha S lefelé telített D felett, és nem tartalmazza egyetlen formulája esetén sem annak negáltját is.

7.P.6. Tétel. Ha S a D univerzum feletti elsőrendű Hintikka-halmaz, akkor S kielégíthető (D felett).

7.P.7. Definíció. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 1$) és B egy elsőrendű logikai nyelv formulái. Azt mondjuk, hogy a B formula elsőrendű *logikai következménye* az $A_1, A_2, \dots, A_n$ formuláknak, ha a nyelv minden olyan interpretációjában és az $A_1, A_2, \dots, A_n$ és B formulák tetszőleges olyan közös θ értékelése esetén, amelyben $A_1\theta, A_2\theta, \dots, A_n\theta$ mind igazak, ott $B\theta$ is igaz.

7.P.8. Tétel. A **7.I.8.** tételben felsoroltakon túl az alábbi következtetésformák is helyesek:

$\forall$ *elhagyása*	$(\{\forall x A\}, [A(x \parallel t)])$
$\exists$ *bevezetése*	$(\{[A(x \parallel t)]\}, \exists x A)$
szillogizmusok	$(\{\forall x(A \supset B), \forall x(B \supset C\}, \forall x(A \supset C))$
	$(\{\exists x(A \wedge B), \forall x(B \supset C)\}, \exists x(A \wedge C))$

FELADATOK

7.P.1. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formula elsőrendű logikai törvény!

$$\exists x \forall y P(x, y) \supset \exists y P(y, y)$$

Megoldás

Legyen $\mathcal{I}$ tetszőleges interpretáció. Az implikációs előtag igazságértékétől függően két esetet különböztethetünk meg:

- Ha $|\exists x \forall y P(x, y)|_{\mathcal{I}} = 0$, akkor a formula $\mathcal{I}$-ben igaz.
- Ha $|\exists x \forall y P(x, y)|_{\mathcal{I}} = 1$, akkor van olyan $a \in D_\pi$, mely esetén $|\forall y P(\underline{a}, y)|_{\mathcal{I}} = 1$, következésképpen tetszőleges D_π-beli elem esetén, így a esetében is $|P(\underline{a}, \underline{a})|_{\mathcal{I}} = 1$. Ekkor viszont $|\exists y P(y, y)|_{\mathcal{I}} = 1$, ami épp az implikáció utótagja. Tehát a formula $\mathcal{I}$-ben most is igaz.

Ezek szerint tetszőleges interpretációban a formula igaz, így logikai törvény.

7.P.2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formula nem logikai törvény!

$$\exists y P(y,y) \supset \exists x \forall y P(x,y)$$

Megoldás

A bizonyításhoz elegendő megkonstruálni a formula nyelvének egy olyan interpretációját, melyben hamis. Adjuk meg ezt a következőképpen:

$$\mathcal{L} = \left\langle \{\pi\}, \varnothing, \varnothing, \{P_{(\pi,\pi)}\} \right\rangle$$
$$\mathcal{I} = \left\langle \mathcal{D}, \widehat{Cnst}, \widehat{Fn}, \widehat{Pr} \right\rangle$$

$$\mathcal{D}(\pi) = D_\pi = \{a, b\}$$
$$\widehat{Pr}(P) = \widetilde{P} \text{ ahol } \widetilde{P} : D_\pi \times D_\pi \to \{0,1\}$$
$$\widetilde{P}(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{ha } u = a \wedge v = a \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Könnyű belátni, hogy az implikációs előtag ebben az interpretációban igaz, ugyanakkor az utótag hamis, így a tekintett formula hamis, következésképp nem logikai törvény.

7.P.3. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formulák nem logikai törvények!

(a) $\exists x P(x) \supset \forall x P(x)$

(b) $\neg(\exists x P(x) \supset \forall x P(x))$

(c) $\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$

(d) $\forall x \exists y R(x,y) \supset \exists y \forall x R(x,y)$

(e) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \supset \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

(f) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \supset \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

(g) $\forall x R(x,x) \supset \forall x \forall y R(x,y)$

(h) $\exists x \exists y R(x,y) \supset \exists x R(x,x)$

(i) $P(x) \supset \forall x P(x)$

(j) $\exists x P(x) \supset P(x)$

(k) $\forall x R(x,y) \equiv \forall y R(y,y)$

(l) $\exists x R(x,y) \equiv \exists y R(y,y)$

7.P.4. Döntsük el, hogy kielégíthetőek-e a következő formulák?

(a) $\exists x \forall y(Q(x,x) \wedge \neg Q(x,y))$

(b) $\exists x \forall y(Q(x,x) \supset \forall z R(x,y,z))$

7.P.5. Logikai törvények-e az alábbi formulák?

(a) $\neg \exists x \neg P(x) \vee \forall x \neg P(x)$

(b) $\exists x P(x) \wedge \neg \forall x P(x)$

(c) $\exists x \forall y Q(x,y) \supset \forall y \exists x Q(x,y)$

(d) $\forall x \exists y Q(x,y) \supset \forall y \exists x Q(x,y)$

(e) $\forall x P(x) \vee \exists x R(x) \supset \forall x(P(x) \vee R(x))$

7.P.6. Bizonyítsuk be, hogy nem igaz, hogy

$$\models \forall x \exists y P(x,y) \supset \exists y \forall x P(x,y).$$

7.P.7. Bizonyítsuk be, hogy

$$\models \forall x \forall y \exists z(P(x,y) \wedge \neg(P(y,z) \wedge P(z,z))).$$

7.P.8. Bizonyítsuk be, hogy ha A tetszőleges formula és t az x változóval megegyező típusú term, akkor

(a) $\models \forall x A \supset [A(x\|t)]$.

(b) $\models [A(x\|t)] \supset \forall x A$.

7.P.9. Bizonyítsuk be a **7.P.3.** tételt!

7.P.10. Mit mondhatunk szemantikai szempontból az alábbi elsőrendű formulákról?

(a) $\exists x \exists y \exists z(P(x,y) \wedge P(y,z) \supset P(x,z))$

(b) $\forall x \forall y \forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \supset P(x,z))$

(c) $\exists x \exists y(\neg P(x,y) \vee P(y,x))$

(d) $\exists x \forall y(\neg P(x,y) \vee P(y,x))$

7.P.11. Adjunk meg a $\neg(\exists x Q(x) \supset (\forall x P(x) \supset \exists x P(x)))$ formulát tartalmazó, az $\{a,b\}$ univerzum feletti lefelé telített formulahalmazokat! Hintikka-halmazok-e az előállított halmazok?

7.P.12. Mutassuk meg, hogy van olyan végtelen univerzum feletti interpretáció, melyben a

$$\forall x \neg P(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \supset P(x,z)) \wedge \forall x \exists y P(x,y)$$

formula igaz, de egyetlen véges univerzum feletti interpretációban sem az!

7.P.13. Mutassuk meg, hogy a

$$\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \supset P(x,z)) \wedge \forall x \exists y P(x,y) \supset \exists x P(x,x)$$

formula bármelyik véges univerzum feletti interpretációban igaz, és mégis van olyan (végtelen univerzum feletti) interpretáció, melyben ez a formula hamis!

7.P.14. Mutassuk meg, hogy a

$$\exists x \forall y \exists z ((P(y,z) \supset P(x,z)) \supset (P(x,x) \supset P(y,x)))$$

formula bármelyik véges univerzum feletti interpretációban igaz, és mégis van olyan (végtelen univerzum feletti) interpretáció, melyben ez a formula hamis!

7.P.15. Konstruáljunk olyan A formulát, amelyik kielégíthető

(a) valamely három elemű univerzum feletti interpretációban, de nem elégíthető ki egyetlen kételemű univerzum feletti interpretációban sem!

(b) valamely $n \in \mathbb{N}_0$ elemszámú univerzum feletti interpretációban, de nem elégíthető ki egyetlen $m < n$ elemszámú univerzum feletti interpretációban sem!

7.P.16. Formalizáljuk a következő állításokat alkalmas elsőrendű logikai nyelven! Igazoljuk az alábbi következtetés helyességét!

Premisszák:

Ha egy részecske nyugalmi tömege 0 és a részecske bozon, akkor ez a részecske foton. A Higgs-részecske nem foton, de bozon. Nem minden 0 nyugalmi tömegű részecskére igaz, hogy foton.

Konklúzió:

Léteznek nem 0 nyugalmi tömegű részecskék és nem minden részecske bozon.

Megoldás

A mondatok formalizálásához a következő predikátumokat és konstanst használjuk:

$$\begin{array}{rcl} N(x) & \leftrightharpoons & \textit{Az } x \textit{ részecske nyugalmi tömege 0.} \\ B(x) & \leftrightharpoons & \textit{Az } x \textit{ részecske bozon.} \\ F(x) & \leftrightharpoons & \textit{Az } x \textit{ részecske foton.} \\ h & \leftrightharpoons & \textit{Higgs-részecske} \end{array}$$

A premisszák a fenti nyelven formalizálva sorrendben a következők:

$$\forall x(N(x) \wedge B(x) \supset F(x)), \quad \neg F(h) \wedge B(h), \quad \neg\forall x(N(x) \supset F(x))$$

A konklúzió: $\exists x \neg N(x) \wedge \neg\forall x B(x)$. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, mely esetén a premisszák igazak, de a konklúzió hamis. A konklúzió két ok miatt lehet hamis:

- $|\exists x \neg N(x)|_{\mathcal{I}} = 0$ esetén tetszőleges $a \in D_\pi$ objektumtartománybeli elemet választva $|N(\underline{a})|_{\mathcal{I}} = 1$. Tehát azon $\tilde{h} \in D_\pi$ objektumra, melyre $\tilde{h} = \widetilde{Cnst}(h)$, szintén $|N(h)|_{\mathcal{I}} = 1$. Ugyanakkor a második premissza igaz volta miatt $|\neg F(h)|_{\mathcal{I}} = 1$ és $|B(h)|_{\mathcal{I}} = 1$, az első premissza igazsága miatt pedig $|N(h) \wedge B(h) \supset F(h)|_{\mathcal{I}} = 1$, ami ellentmondás.
- $|\neg\forall x B(x)|_{\mathcal{I}} = 0$ esetén tetszőleges $a \in D_\pi$ elemre $|B(\underline{a})|_{\mathcal{I}} = 1$. Továbbá $|N(\underline{a}) \wedge B(\underline{a}) \supset F(\underline{a})|_{\mathcal{I}} = 1$. Ebből következik, hogy $|N(\underline{a}) \supset F(\underline{a})|_{\mathcal{I}} = 1$, de mivel a harmadik premissza miatt lennie kellene olyan $b \in D_\pi$ objektumtartománybeli elemnek, melyre $|N(\underline{b}) \supset F(\underline{b})|_{\mathcal{I}} = 0$, így ismét ellentmondáshoz jutottunk.

7.P.17. Ellenőrizzük, hogy helyesek-e az alábbi következtetések!

(a) Premisszák:
Lacinak nincs autója. Éva csak azokat a fiúkat szereti, akiknek van autójuk.
Konklúzió:
Tehát Éva nem szereti Lacit.

(b) Premisszák:
Minden csillagnak saját fénye van, de egyetlen bolygónak sincs saját fénye.
Konklúzió:
Egyetlen bolygó sem csillag.

(c) Premisszák:
Valaki betörte a lakás ajtaját. Valaki elvitte a lakásból a dossziét.
Konklúzió:
Valaki betörte a lakás ajtaját és elvitte a lakásból a dossziét.

(d) Premisszák:
Minden hegymászó bátor. Minden hegymászó óvatos.
Konklúzió:
Van, aki bátor, de óvatos.

(e) Premisszák:
A vizsgán volt olyan feladat, amelyiket minden hallgató megoldott.
Konklúzió:
Tehát minden hallgató meg tudott oldani legalább egy feladatot.

(f) Premisszák:
Csak azok a hallgatók vizsgáztak sikeresen, akik megértették és megtanulták a tananyagot. Volt olyan hallgató, aki nem tanulta meg a tananyagot, pedig szeretett volna jó jegyet.
Konklúzió:
Volt, aki hiába szeretett volna jó jegyet, nem vizsgázott sikeresen.

(g) Premisszák:
Csak azok a hallgatók tanulnak logikát, akik vagy matematikát, vagy informatikát tanulnak. Van olyan hallgató, aki matematikát ugyan nem, de logikát tanul.
Konklúzió:
Van, aki informatikát tanul, de matematikát nem.

(h) Premisszák:
A kör kúpszelet.
Konklúzió:
Tehát aki kört rajzol, kúpszeletet rajzol.

(i) Premisszák:
Aki ipart űz vagy kereskedik, az nyereségadót fizet. Egyesek nyereségadót fizetnek, de nem űznek ipart.
Konklúzió:
Vannak olyan kereskedők, akik nem űznek ipart.

(j) Premisszák:
András mindenkinél magasabb, aki fiatalabb nála. Béla nem fiatalabb, mint azok, akik magasabbak nála.
Konklúzió:
Béla nem fiatalabb, mint András.

(k) Premisszák:
Csak akkor tudjuk mások tudását helyesen értékelni, ha saját tudásunkat helyesen értékeljük. Vannak, akik nem tudják saját tudásukat helyesen értékelni.
Konklúzió:
Tehát vannak, akik senki tudását sem tudják helyesen értékelni.

(l) Premisszák:
Némelyik páciens minden orvosban megbízik. A kuruzslókban egyetlen páciens sem bízik meg.
Konklúzió:
Az orvosok nem kuruzslók.

(m) Premisszák:
A bizottság minden tagja gazdag és republikánus. A bizottság néhány tagja öreg.
Konklúzió:
Tehát vannak öreg republikánusok.

(n) Premisszák:
Néhány republikánus kedvel minden demokratát. Nincs olyan republikánus, aki szeretné a szocialistákat.
Konklúzió:
Tehát egyik demokrata sem szocialista.

(o) Premisszák:
Ebben a házban macskán kívül más állat nincs. Minden olyan állatot szívesen dédelgetünk, amelyik szeret a Holdra bámulni. Amelyik állatot utálom, azt elkerülöm. Minden húsevő éjjel jár zsákmány után. Nincs olyan macska, amely ne fogna egeret. Azokon kívül, amelyek ebben a házban vannak, egyetlen állat sem barátkozik velem. A kengurukat nem szívesen dédelgetjük. Csak húsevő állat fog egeret. Utálom az olyan állatokat, amelyek nem barátkoznak velem. Azok az állatok, amelyek éjjel járnak zsákmány után, szeretnek a Holdra bámulni.
Konklúzió:
Elkerülöm a kengurukat.[21]

[21] A következtetés Carrol-tól, az Alice-mesék szerzőjétől származik.

8. Ekvivalencia, normálformák

8.I. Ítéletlogika

8.I.1. Definíció. Az A és B ítéletlogikai formulák *ekvivalensek*, ha igazságértékük minden interpretációban megegyezik. Jelölve: $A \sim B$.

8.I.2. Tétel. Legyenek A, B és C formulák, jelöljön $\top$ logikai törvényt, $\bot$ pedig ellentmondást. Az alább felsorolt formulák rendre ekvivalensek egymással:

asszociativitás	
$A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C$
kommutativitás	
$A \wedge B \sim B \wedge A$	$A \vee B \sim B \vee A$
disztributivitás	
$A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
idempotencia	
$A \wedge A \sim A$	$A \vee A \sim A$
elimináció (elnyelés)	
$A \wedge (B \vee A) \sim A$	$A \vee (B \wedge A) \sim A$
De Morgan törvényei	
$\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$
kiszámítási törvények	
$A \wedge \top \sim A$	$A \wedge \bot \sim \bot$
$A \vee \top \sim \top$	$A \vee \bot \sim A$
$A \supset \top \sim \top$	$A \supset \bot \sim \neg A$
$\top \supset A \sim A$	$\bot \supset A \sim \top$
logikai jelek közötti összefüggések	
$A \wedge B \sim \neg(\neg A \vee \neg B)$	$A \wedge B \sim \neg(A \supset \neg B)$
$A \vee B \sim \neg(\neg A \wedge \neg B)$	$A \vee B \sim \neg A \supset B$
$A \supset B \sim \neg(A \wedge \neg B)$	$A \supset B \sim \neg A \vee B$
kétszeres tagadás	$\neg\neg A \sim A$

kontrapozíció	$A \supset B \sim \neg B \supset \neg A$
negáció az implikációban	
$A \supset \neg A \sim \neg A$	$\neg A \supset A \sim A$
implikációs előtagok felcserélése	$A \supset (B \supset C) \sim B \supset (A \supset C)$
implikáció konjunktív előtaggal	$A \wedge B \supset C \sim A \supset (B \supset C)$
az implikáció öndisztributivitása	$A \supset (B \supset C) \sim (A \supset B) \supset (A \supset C)$
esetelemzés	$A \vee B \supset C \sim (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

8.I.3. Definíció. Az atomi formula vagy az atomi formula negáltja közös néven *literál*.

8.I.4. Definíció. Egy literált vagy literálok konjunkcióláncát *elemi konjunkciónak*, egy literált vagy literálok diszjunkcióláncát *elemi diszjunkciónak* nevezzük.

8.I.5. Definíció. Egy elemi diszjunkciót vagy elemi diszjunkciók konjunkcióláncát *konjunktív normálformájú formulának*, egy elemi konjunkciót vagy elemi konjunkciók diszjunkcióláncát *diszjunktív normálformájú formulának* nevezzük.

8.I.6. Tétel. Minden ítéletlogikai formulához konstruálható vele ekvivalens konjunktív normálformájú, és vele ekvivalens diszjunktív normálformájú formula.

8.I.7. Megjegyzés. Egy formulával ekvivalens konjunktív normálformájú formulát a *formula konjunktív normálformájának*, a vele ekvivalens diszjunktív normálformájú formulát a *formula diszjunktív normálformájának* nevezzük.

8.I.8. Szabály. Egy formula normálformája előállításának a lépései:

1. Az implikációs részformulák helyére a logikai jelek közötti összefüggések alapján diszjunkciós formulákat írunk.

2. De Morgan törvényei és a kétszeres tagadás törvénye segítségével elérjük, hogy negáció csak atomokra vonatkozzon.

3. Végül a disztributivitás törvényei segítségével addig alakítjuk a formulát, hogy a konjunkciók és diszjunkciók megfelelő sorrendben kövessék egymást.

FELADATOK

8.I.1. Bizonyítsuk be, hogyha A és B ítéletlogikai formulák, $A \sim B$ pontosan akkor, ha

(a) $\vDash A \equiv B$.

(b) $\vDash A \supset B$ és $\vDash B \supset A$.

(b) $A \vDash B$ és $B \vDash A$.

8.I.2. Bizonyítsuk be igazságtábla segítségével, hogy

$$X \supset Y \sim \neg Y \supset \neg X.$$

Megoldás

Amennyiben a formulák közös igazságtáblájában a fő logikai összekötő jelek alatt az igazságértékek rendre megegyeznek, úgy a formulák ekvivalensek.

X	Y	X	$\supset$	Y	$\neg$	Y	$\supset$	$\neg$	X
1	1	1	**1**	1	0	1	**1**	0	1
1	0	1	**0**	0	1	0	**0**	0	1
0	1	0	**1**	1	0	1	**1**	1	0
0	0	0	**1**	0	1	0	**1**	1	0

8.I.3. Bizonyítsuk, hogy a **8.I.2.** tételben felsorolt formulapárok valóban ekvivalensek egymással!

8.I.4. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formulák ekvivalensek!

$$\neg X \supset Y \wedge \neg Z \quad \sim \quad (\neg Y \supset X) \wedge (Z \supset X)$$

Megoldás

A két formula a **8.I.1.** feladatban bizonyítandó második állítás szerint pontosan akkor ekvivalens, ha a következő állítások teljesülnek:

- Bizonyítható, hogy $\vDash (\neg X \supset Y \wedge \neg Z) \supset (\neg Y \supset X) \wedge (Z \supset X)$. Ehhez indirekt tegyük fel, hogy van olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, melyben:

$$|(\neg X \supset Y \wedge \neg Z) \supset (\neg Y \supset X) \wedge (Z \supset X)|_{\mathcal{I}} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$|\neg X \supset Y \wedge \neg Z|_{\mathcal{I}} = 1, \text{ és } |(\neg Y \supset X) \wedge (Z \supset X)|_{\mathcal{I}} = 0$$

A bal oldali állítás két esetben teljesülhet:

- $|\neg X|_{\mathcal{I}} = 0$ esetén következik, hogy $|X|_{\mathcal{I}} = 1$, így $|(\neg Y \supset X)|_{\mathcal{I}} = 1$ és $|(Z \supset X)|_{\mathcal{I}} = 1$, ami $|(\neg Y \supset X) \wedge (Z \supset X)|_{\mathcal{I}} = 0$ miatt ellentmondás.
- $|Y \wedge \neg Z|_{\mathcal{I}} = 1$ esetén tudjuk, hogy $|Y|_{\mathcal{I}} = 1$ és $|Z|_{\mathcal{I}} = 0$, ezért szintén $|(\neg Y \supset X)|_{\mathcal{I}} = 1$ és $|(Z \supset X)|_{\mathcal{I}} = 1$, ami ellentmondás.

Ezzel az első állítás igazolást nyert.

- Igazolható, hogy $\vDash (\neg Y \supset X) \wedge (Z \supset X) \supset (\neg X \supset Y \wedge \neg Z)$. Ehhez indirekt tegyük fel, hogy van olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, melyben:

$$|(\neg Y \supset X) \wedge (Z \supset X) \supset (\neg X \supset Y \wedge \neg Z)|_{\mathcal{I}} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$|\neg Y \supset X|_{\mathcal{I}} = 1 \text{ és } |Z \supset X|_{\mathcal{I}} = 1 \text{ és } |\neg X \supset Y \wedge \neg Z|_{\mathcal{I}} = 0$$

Utóbbiból következik, hogy $|\neg X|_{\mathcal{I}} = 1$ és $|Y \wedge \neg Z|_{\mathcal{I}} = 0$. $|X|_{\mathcal{I}} = 0$ és $|\neg Y \supset X|_{\mathcal{I}} = 1$ miatt $|Y|_{\mathcal{I}} = 1$. $|X|_{\mathcal{I}} = 0$ és $|Z \supset X|_{\mathcal{I}} = 1$ miatt $|Z|_{\mathcal{I}} = 0$. Ebből következik, hogy $|Y \wedge \neg Z|_{\mathcal{I}} = 1$, ami ellentmondás. Így a második állítás is igaz.

8.I.5. Az

$$(1)\ \neg(X \wedge Y \supset Z \vee U) \quad (2)\ \neg X \vee \neg Y \vee Z \vee U \quad (3)\ X \wedge Y \wedge (\neg Z \vee \neg U)$$

formulákra mely állítások igazak? Indokoljuk a választ!

(a) (1) és (2) ekvivalensek.

(b) (1) és (3) ekvivalensek.

(c) Páronként bármely kettő ekvivalens egymással.

(d) Nincs a felsoroltak között ekvivalens pár.

8.I.6. Igazoljuk az ítéletlogikai ekvivalenciák segítségével, hogy az alábbi formulák logikai törvények!

(a) $\neg(X \supset Y) \supset X$

(b) $(X \wedge Y) \supset (X \supset Y)$

(c) $((X \supset Y) \supset X) \supset (X \vee Y)$

8.I.7. Vezessük be a következő jelölést (Peirce-vonás):

$$A \circ B \leftrightharpoons \neg A \wedge \neg B.$$

A bevezetett $\circ$ összekötő jel neve „sem-sem”, $A \circ B$ jelentése: „sem A, sem B”. Fejezzük ki a $\neg$, $\vee$, $\wedge$ logikai összekötő jeleket a $\circ$ jel segítségével!

8.I.8. Ugyanazt jelenti-e a következő három állítás? (Ítéletlogikai formulák összehasonlításával döntsük el a kérdést!)

János akkor és csak akkor mérges, ha Klári akkor égeti oda a rántást, ha ott van az anyósa, máskor nem.
Az, hogy János mérges, ha Klári odaégeti a rántást, de nem mérges, ha nem, akkor és csak akkor igaz, ha Klári anyósa ott van.
János akkor mérges, ha Klári odaégeti a rántást, máskor nem; Klári viszont akkor égeti oda a rántást, ha az anyósa ott van, máskor nem.[22]

8.I.9. Melyik formulának konjunktív normálformája az $X \wedge Y$ formula?

(a) $X \wedge Y \wedge \neg Z$ (b) $\neg(\neg X \vee \neg Y)$
(c) $X \supset (Y \vee \neg X)$ (d) $(X \supset Y) \supset (\neg Y \supset \neg X)$

8.I.10. Adjuk meg az $(X \supset Y \vee \neg Z) \supset \neg Y \wedge \neg Z$ formula konjunktív és diszjunktív normálformáját!

Megoldás

A normálformákat előállíthatjuk a formula igazságtáblája segítségével.

X	Y	Z	$(X$	$\supset$	Y	$\vee$	$\neg$	$Z)$	$\supset$	$\neg$	Y	$\wedge$	$\neg$	Z
1	1	1	1	1	1	1	0	1	**0**	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0	**0**	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0	1	**1**	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0	**1**	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	**0**	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0	**0**	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	0	1	**0**	1	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	1	1	0	**1**	1	0	1	1	0

A diszjunktív normálformát az igazságtáblából a következőképpen kapjuk. Minden olyan interpretációnak megfelelő sorban, ahol a formula igaz, elemi konjunkciót készítünk az ítéletváltozóinkból származó igaz literálokból. (Ekkor minden elemi konjunkció egy-egy olyan interpretációt ír le, melyben a formula igaz.) Majd képezzük az így nyert elemi konjunkciók diszjunkcióláncát. Esetünkben három sorban igaz a formula:

$$(X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$$

[22] A feladat Varga Tamás: Matematikai logika kezdőknek c. könyvéből származik.

A konjunktív normálformát az igazságtáblából a következőképpen kapjuk. Minden olyan interpretációnak megfelelő sorban, ahol a formula hamis, elemi diszjunkciót készítünk az ítéletváltozóinkból származó hamis literálokból. (Ekkor minden elemi diszjunkció egy-egy olyan interpretációt ír le, melyben a formula hamis.) Majd képezzük az így nyert elemi diszjunkciók konjunkcióláncát. Öt ilyen interpretációnk van:

$$(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge \\ \wedge (X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z)$$

$$[\sim \neg(X \wedge Y \wedge Z) \wedge \neg(X \wedge Y \wedge \neg Z) \wedge \neg(\neg X \wedge Y \wedge Z) \wedge \\ \wedge \neg(\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \wedge \neg(\neg X \wedge \neg Y \wedge Z)]$$

Mivel a táblázatos megoldás csak az ítéletváltozók viszonylag alacsony száma mellett jöhet szóba, oldjuk meg a feladatot a normálformára hozás konstrukciós lépéseit követve! A szabály első két pontja szerint:

$$\begin{aligned} &(X \supset Y \vee \neg Z) \supset \neg Y \wedge \neg Z \sim \\ &\sim \neg(X \supset Y \vee \neg Z) \vee (\neg Y \wedge \neg Z) \sim \\ &\sim (X \wedge \neg(Y \vee \neg Z)) \vee (\neg Y \wedge \neg Z) \sim \\ &\sim (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg Y \wedge \neg Z) \end{aligned}$$

A nyert formula épp diszjunktív normálforma, tehát ezzel kész vagyunk. A formula konjunktív normálformájának előállításához viszont még folytatnunk kell a disztributivitás segítségével a munkát:

$$\begin{aligned} &(X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg Y \wedge \neg Z) \sim \\ &\sim (X \vee \neg Y) \wedge (\neg Y \vee \neg Y) \wedge (Z \vee \neg Y) \wedge (X \vee \neg Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z) \wedge (Z \vee \neg Z) \sim \\ &\sim (X \vee \neg Y) \wedge \neg Y \wedge (Z \vee \neg Y) \wedge (X \vee \neg Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z) \sim \neg Y \wedge (X \vee \neg Z) \end{aligned}$$

Sokszor egyszerűsíthetünk az átalakításokon, ha kiemelést is alkalmazunk. Az előző diszjunktív normálformából kiindulva:

$$\begin{aligned} &(X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg Y \wedge \neg Z) \sim \\ &\sim \neg Y \wedge ((X \wedge Z) \vee \neg Z) \sim \\ &\sim \neg Y \wedge (X \vee \neg Z) \sim && KNF \\ &\sim (\neg Y \wedge X) \vee (\neg Y \wedge \neg Z) && DNF \end{aligned}$$

8.I.11. Hozzuk konjunktív és diszjunktív normálformára a következő formulákat!

(a) $\neg(X \wedge Y \supset \neg X) \wedge \neg(X \wedge Y \supset \neg Y)$

(b) $\neg(X \wedge (Y \vee Z)) \supset (X \wedge Y) \vee Z$

(c) $(Z \supset X) \supset (\neg(Y \vee Z) \supset X)$

(d) $\neg((X \supset \neg Y \wedge Z) \supset (\neg X \wedge \neg Z \supset Y))$

(e) $(\neg Z \supset (X \supset Y)) \supset (\neg Z \supset \neg X)$

(f) $((X \supset Y) \supset (Z \supset \neg X)) \supset (\neg Y \supset \neg Z)$

(g) $((((X \supset Y) \supset \neg X) \supset \neg Y) \supset \neg Z) \supset Z$

8.P. Elsőrendű logika

8.P.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy elsőrendű logikai nyelv A és B formulái *logikailag ekvivalensek*, ha a nyelv minden $\mathcal{I}$ interpretációjában és a formulák minden közös θ értékelése mellett $|A\theta|_{\mathcal{I}} = |B\theta|_{\mathcal{I}}$ (jelölése $A \sim B$).

8.P.2. Tétel. A **8.I.2.** tétel formulapárjai és az alább felsorolt formulapárok elsőrendben logikailag ekvivalensek.

fiktív kvantorok, $x \notin \mathrm{Par}(A)$

$\forall x A \sim A$ $\qquad$ $\exists x A \sim A$

egynemű kvantorok helycseréje

$\forall x \forall y A \sim \forall y \forall x A$ $\qquad$ $\exists x \exists y A \sim \exists y \exists x A$

kvantoros De Morgan-törvények

$\neg \exists x A \sim \forall x \neg A$ $\qquad$ $\neg \forall x A \sim \exists x \neg A$

kvantorok egyoldali kiemelése, $x \notin \mathrm{Par}(A)$

$A \wedge \forall x B \sim \forall x(A \wedge B)$ $\qquad$ $A \wedge \exists x B \sim \exists x(A \wedge B)$

$A \vee \forall x B \sim \forall x(A \vee B)$ $\qquad$ $A \vee \exists x B \sim \exists x(A \vee B)$

$A \supset \forall x B \sim \forall x(A \supset B)$ $\qquad$ $A \supset \exists x B \sim \exists x(A \supset B)$

$\forall x B \supset A \sim \exists x(B \supset A)$ $\qquad$ $\exists x B \supset A \sim \forall x(B \supset A)$

kvantorok kétoldali kiemelése

$\forall x A \wedge \forall x B \sim \forall x(A \wedge B)$ $\qquad$ $\exists x A \vee \exists x B \sim \exists x(A \vee B)$

kvantor-hatáskör átjelölés

$\forall x A \sim \forall y[A(x \parallel y)]$ $\qquad$ $\exists x A \sim \exists y[A(x \parallel y)]$

8.P.3. Tétel. Ha az A és a B elsőrendű formulák kongruensek, akkor A és B ekvivalensek is.

8.P.4. Definíció. Egy $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_nA$ $(n \geq 0)$ alakú elsőrendű formulát, ahol A kvantormentes formula, *prenex alakú formulának* nevezzük. Az A formula a prenex alakú formula *magja* (vagy *mátrixa*).

8.P.5. Tétel. Egy elsőrendű logikai nyelv tetszőleges formulájához előállítható vele ekvivalens prenex alakú formula. Egy formulával ekvivalens prenex alakú formula a *formula prenex alakja*.

8.P.6. Szabály. Egy B formula prenex alakra hozásának lépései:

1. Meghatározzuk B egy változóiban tiszta alakját, azaz egy olyan változóiban tiszta C formulát, melyre $B \approx C$, majd
2. alkalmazzuk C-re a kvantoros De Morgan-törvényeket és az egyoldali kvantorkiemelésre vonatkozó logikai ekvivalenciákat.

8.P.7. Megjegyzés.

- Egy formula prenex alakjának magjában a logikai összekötő jelek sorrendje ugyanaz, mint ami a formulában volt.
- A kvantorok kiemelésének sorrendje többféle lehet, azaz a formula prenex alakjában a kvantoros előtagok sorrendje függ az átalakítás módjától. Ugyanakkor eredetileg egy Q kvantor hatáskörében fekvő másik kvantor a formula prenex alakjában is Q hatáskörében marad.

8.P.8. Definíció. Egy $\forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_nA$ alakú prenex formulát *univerzális Skolem-formának* nevezünk. Ha a Skolem-forma magja konjunktív normálforma, akkor a formulát *univerzális Skolem-normálformának* hívjuk.

8.P.9. Tétel. [Skolem tétele.] Egy elsőrendű logikai nyelv tetszőleges formulájához készíthető olyan univerzális Skolem-formula, amelyik pontosan akkor kielégíthetetlen, ha az eredeti formula is az volt. Azaz egy B elsőrendű formulához konstruálható olyan $\forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_nA$ univerzális Skolem-forma, hogy

$$\vDash\!\!\!\!\text{\reflectbox{$\vDash$}}\; B \text{ akkor és csak akkor, ha } \text{\reflectbox{$\vDash$}}\; \forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_nA.$$

8.P.10. Szabály. A B formula univerzális Skolem-formája megkonstruálásának lépései:

1. Meghatározzuk B prenex alakját, majd
2. az elsőrendű nyelv bővítésével párhuzamosan a kvantoros előtagokon balról jobbra haladva sorra kiküszöböljük az egzisztenciális kvantorokat a következők szerint:
   - Ha az átalakítás alatt álló formula $\exists x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n A$ alakú (azaz a $\exists x_1$ kvantoros előtag nincs univerzális kvantor hatáskörében), bővítsük a nyelvünket egy új (π_{x_1} típusú, azaz x_1 típusával megegyező típusú) konstansszimbólummal (*Skolem-konstans*), legyen ez c, hagyjuk el a $\exists x_1$ kvantoros előtagot, és a formula magján végezzük el az $(x_1 \parallel c)$ helyettesítést.
   - Ha az átalakítás alatt álló formulánk

     $$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_{j-1} \exists x_j Q_{j+1} x_{j+1} \ldots Q_n x_n A$$

     alakú (azaz a $\exists x_j$ kvantoros előtag $j-1$ univerzális kvantor hatáskörében van), bővítsük ki a nyelvünket egy új, ($\pi_{x_1}, \pi_{x_2}, \ldots, \pi_{x_{j-1}} \to \pi_{x_j}$) alakú függvényszimbólummal (*Skolem-függvény*), legyen ez f. Hagyjuk el a $\exists x_j$ kvantoros előtagot, és a formula magján végezzük el az $(x_j \parallel f(x_1, \ldots, x_{j-1}))$ helyettesítést.
   - A fenti két lépést ismételjük mindaddig, amíg már nem marad egzisztenciális kvantor a formulában.

8.P.11. Szabály. A B formula (előbbinél) egyszerűbb univerzális Skolem-formája előállításának lépései:

1. A B formulában a logikai ekvivalenciák segítségével elérjük, hogy csak konjunkció, diszjunkció és negáció összekötő jelek legyenek, majd a De Morgan-összefüggések ismételt alkalmazásával a negációkat az atomi formulák elé visszük. Így megkapjuk a formula ún. *literál alakját*, mely ekvivalens az eredeti formulával.
2. Csökkentjük a kvantorok hatáskörét amennyire csak lehet, az egy- és kétoldali kvantor-kiemeléseket visszafelé alkalmazva.
3. Kiküszöböljük az egzisztenciális kvantorokat új Skolem-konstansszimbólumok, illetve Skolem-függvényszimbólumok bevezetésével a következők szerint:

- ha egy $\exists x_j$ kvantoros előtag nincs univerzális kvantor hatáskörében, bővítsük a nyelvünket egy új konstansszimbólummal, legyen ez c, hagyjuk el a $\exists x_j$ kvantoros előtagot, és a formula magján végezzük el az $(x_j \parallel c)$ helyettesítést;
- ha a $\exists x_j$ kvantoros előtag i univerzális kvantor hatáskörében van – legyenek ezen univerzális kvantorok által kötött változók $x_{j_1}, \ldots, x_{j_i}$ –, bővítsük a nyelvünket egy új, i változós függvényszimbólummal, legyen ez f. Azután hagyjuk el a $\exists x_j$ kvantoros előtagot, és a formula magján végezzük el az $(x_j \parallel f(x_{j_1}, \ldots, x_{j_i}))$ szabályos helyettesítést.
- A fenti két lépést ismételjük mindaddig, amíg nem marad már egzisztenciális kvantor a formulában.

4. Végül a kapott formulát prenex alakra hozzuk.

8.P.12. Megjegyzés. A formula és univerzális Skolem-formája a bővített nyelvben nem ekvivalensek (igazságértékük a bővített nyelv nem minden interpretációjában egyezik meg), de csak egyszerre lehetnek kielégíthetők vagy épp kielégíthetetlenek.

FELADATOK

8.P.1. Bizonyítsuk be a

$$\forall xA \wedge \forall xB \sim \forall x(A \wedge B)$$

kétoldali kvantor-kiemelési szabályt!

Megoldás

Az ekvivalencia pontosan akkor áll fenn, ha

$$\vDash \forall xA \wedge \forall xB \supset \forall x(A \wedge B) \quad \text{és} \quad \vDash \forall x(A \wedge B) \supset \forall xA \wedge \forall xB$$

egyaránt teljesül. Legyen $\mathcal{I}$ egy tetszőleges interpretáció.

(a) Ha $|\forall xA \wedge \forall xB|_{\mathcal{I}} = 1$, akkor $|\forall xA|_{\mathcal{I}} = 1$ és $|\forall xB|_{\mathcal{I}} = 1$. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $a \in D$ elem esetében $|A\,(x \parallel \underline{a})|_{\mathcal{I}} = 1$ és $|B\,(x \parallel \underline{a})|_{\mathcal{I}} = 1$. Következésképp $|(A \wedge B)\,(x \parallel \underline{a})|_{\mathcal{I}} = 1$. Mivel a tetszőleges volt, így $|\forall x(A \wedge B)|_{\mathcal{I}} = 1$. Ezzel beláttuk, hogy:

$$\vDash \forall xA \wedge \forall xB \supset \forall x(A \wedge B)$$

(b) Ha $|\forall x(A \wedge B)|_{\mathcal{I}} = 1$, akkor tetszőleges $a \in D$ objektumtartomány-beli elem esetében teljesül, hogy:

$$|(A \wedge B)\,(x \parallel \underline{a})|_{\mathcal{I}} = 1$$
$$\Downarrow$$
$$|A\,(x \parallel \underline{a}) \wedge B\,(x \parallel \underline{a})|_{\mathcal{I}} = 1$$
$$\Downarrow$$
$$|A\,(x \parallel \underline{a})|_{\mathcal{I}} = 1 \text{ és } |B\,(x \parallel \underline{a})|_{\mathcal{I}} = 1$$

Az a objektum tetszőleges volta miatt $|\forall xA|_{\mathcal{I}} = 1$ és $|\forall xB|_{\mathcal{I}} = 1$, így nyilván a konjunkciójuk is igaz. Ezzel beláttuk, hogy:

$$\models \forall x(A \wedge B) \supset \forall xA \wedge \forall xB$$

8.P.2. Bizonyítsuk be ekvivalens átalakítások segítségével, hogy

$$\forall xA \supset \exists xB \;\sim\; \exists x(A \supset B).$$

Megoldás

$$\forall xA \supset \exists xB \;\sim$$
$$\sim \neg\forall xA \vee \exists xB \;\sim\; \exists x\neg A \vee \exists xB \;\sim\; \exists x(\neg A \vee B) \;\sim\; \exists x(A \supset B)$$

8.P.3. Bizonyítsuk be, hogy a **8.P.2.** tételben felsorolt formulapárok elsőrendben ekvivalensek!

8.P.4. Döntsük el, ugyanazt jelentik-e az alábbi állítások? (Elsőrendű formulák összehasonlításával dolgozzunk!)

Aki mer, az nyer.
Nincs olyan ember, aki mer és mégsem nyer.
Az ember vagy nem mer, vagy nem nyer.
Nincs, aki nem nyer, hiába merész.
Aki nem nyer, az nem volt eléggé merész.

8.P.5. Konstruáljunk az alábbi formulával ekvivalens prenex alakú formulát, majd alakítsuk át úgy, hogy a magja konjunktív illetve diszjunktív normálformában legyen!

$$(\neg\forall xP(x) \supset Q(x, y)) \wedge \neg\exists x(P(x) \supset \exists yQ(x, y))$$

Megoldás

Ha alkalmazzuk a prenex alakra hozás szabályait, első lépésként az eredeti formulával ekvivalens, változóiban tiszta formulát kell készítenünk. A kötött változók átnevezésével a következőt kapjuk:

$$(\neg\forall z P(z) \supset Q(x,y)) \wedge \neg\exists u(P(u) \supset \exists v Q(u,v))$$

Mivel a formula változóiban tiszta, így egyetlen kvantor által kötött változónak sem lesz a formulában sehol szabad előfordulása. A De Morgan-törvények és az egyoldali kvantor-kiemelési szabályok használatával a formula prenex alakját kapjuk:

$$\begin{aligned}
&(\neg\forall z P(z) \supset Q(x,y)) \wedge \neg\exists u(P(u) \supset \exists v Q(u,v)) \sim \\
&\quad\sim (\exists z \neg P(z) \supset Q(x,y)) \wedge \neg\exists u \exists v(P(u) \supset Q(u,v)) \sim \\
&\quad\sim \forall z(\neg P(z) \supset Q(x,y)) \wedge \forall u \forall v \neg(P(u) \supset Q(u,v)) \sim \\
&\quad\sim \forall z \forall u \forall v((\neg P(z) \supset Q(x,y)) \wedge \neg(P(u) \supset Q(u,v))) && \text{prenex}
\end{aligned}$$

A magformula normálformái a következő lépéssorozattal állíthatók elő:

$$\begin{aligned}
&(\neg P(z) \supset Q(x,y)) \wedge \neg(P(u) \supset Q(u,v)) \sim \\
&\quad\sim (P(z) \vee Q(x,y)) \wedge P(u) \wedge \neg Q(u,v) \sim && \text{KNF} \\
&\quad\sim (P(z) \wedge P(u) \wedge \neg Q(u,v)) \vee (Q(x,y) \wedge P(u) \wedge \neg Q(u,v)) && \text{DNF}
\end{aligned}$$

A változóiban tiszta formulából kezdve a prenexizálást, bizonyosan nem használhatunk fel kétoldali kvantor-kiemelési szabályt. Ellenben, ha a kötött változók átnevezését csak akkor végezzük el, amikor valamely kvantor-kiemelési szabály miatt feltétlenül szükséges, lehetőség nyílhat a formula egyszerűsítésére. (A kétoldali kvantorkiemelés kisebb logikai összetettségű formula létrejöttét eredményezi.)

$$\begin{aligned}
&(\neg\forall x P(x) \supset Q(x,y)) \wedge \neg\exists x(P(x) \supset \exists y Q(x,y)) \sim \\
&\quad\sim (\exists x \neg P(x) \supset Q(x,y)) \wedge \neg\exists x \exists y(P(x) \supset Q(x,y)) \sim \\
&\quad\sim \forall u(\neg P(u) \supset Q(x,y)) \wedge \forall x \forall y \neg(P(x) \supset Q(x,y)) \sim \\
&\quad\sim \forall u(\neg P(u) \supset Q(x,y)) \wedge \forall u \forall y \neg(P(u) \supset Q(u,y)) \sim \\
&\quad\sim \forall u((\neg P(u) \supset Q(x,y)) \wedge \forall y \neg(P(u) \supset Q(u,y))) \sim \\
&\quad\sim \forall u \forall v((\neg P(u) \supset Q(x,y)) \wedge \neg(P(u) \supset Q(u,v))) && \text{prenex}
\end{aligned}$$

Nem csak a kvantorok száma csökkent, hanem a mag is megváltozott:

$$\begin{aligned}
&(\neg P(u) \supset Q(x,y)) \wedge \neg(P(u) \supset Q(u,v)) \sim \\
&\quad\sim (P(u) \vee Q(x,y)) \wedge \neg(P(u) \supset Q(u,v)) \sim \\
&\quad\sim (P(u) \vee Q(x,y)) \wedge P(u) \wedge \neg Q(u,v) \sim && KNF \\
&\quad\sim P(u) \wedge \neg Q(u,v) && KNF + DNF
\end{aligned}$$

8.P.6. Határozzuk meg az alábbi formulák prenex alakját!

(a) $\exists x \forall y P(x, y) \vee \exists x \forall y Q(x, y)$

(b) $\exists x \forall y P(x, y) \supset \exists x \forall y Q(x, y)$

(c) $\neg(\exists x \forall y \neg P(x, y) \supset \forall y \exists y Q(x, y))$

(d) $\exists x(\forall y P(x, y) \vee \exists z R(z)) \supset \exists x R(x)$

(e) $\forall x(\exists y P(x, y) \supset \forall x Q(x)) \supset \forall x \exists y P(x, y)$

(f) $\forall x(\exists y(P(x, y) \wedge R(y) \supset \exists y(S(y) \wedge Q(x, y))))$

8.P.7. Írjunk olyan programot, amelyik előállítja egy elsőrendű formula prenex alakját!

8.P.8. Írjunk olyan programot, amelyik csökkenti a beolvasott elsőrendű formulában a kvantorok hatáskörét, amennyire csak lehet!

8.P.9. Állítsuk elő program segítségével a beolvasott elsőrendű formula literál alakját!

8.P.10. Lássuk be, hogy a **8.P.10.** és **8.P.11.** szabályoknak megfelelően megszerkesztett Skolem-forma valóban akkor és csakis akkor kielégíthető, ha az eredeti formula is az!

8.P.11. Határozzuk meg az alábbi formulák univerzális Skolem-normálformáját!

(a) $\neg\exists y \forall x(P(x) \supset P(y))$

Megoldás

1. módszer

Prenex alakra hozunk:

$$\forall y \exists x \neg(P(x) \supset P(y))$$

Skolemizálunk (a $\exists x$ kvantoros előtag a $\forall y$ hatáskörében van, így bevezetjük az f új, egyváltozós függvényszimbólumot, majd a belőle készült termmel helyettesítjük a $\exists x$ elhagyásával felszabadult változókat):

$$\forall y\,[\neg(P(x) \supset P(y))\,(x \parallel f(y))]$$

$$\forall y \neg(P(f(y)) \supset P(y))$$

Konjunktív normálformára hozzuk a formula magját:

$$\forall y(P(f(y)) \wedge \neg P(y))$$

2. módszer

Literál alakra hozunk:

$$\neg\exists y\forall x(P(x) \supset P(y))$$

$$\forall y\exists x\neg(P(x) \supset P(y))$$

$$\forall y\exists x(P(x) \wedge \neg P(y))$$

Csökkentjük a kvantorok hatáskörét (az egyoldali kvantorkiemelés szabályát visszafele alkalmazzuk):

$$\exists x P(x) \wedge \forall y \neg P(y)$$

Skolemizálunk (a $\exists x$ kvantoros előtag nincs univerzális kvantor hatáskörében, így bevezetjük a c új Skolem-konstanst):

$$[P(x)\,(x \parallel c)] \wedge \forall y \neg P(y)$$

$$P(c) \wedge \forall y \neg P(y)$$

Prenex alakra hozunk:

$$\forall y(P(c) \wedge \neg P(y))$$

(b) $\exists x\exists y\forall z\exists u\forall v\exists w P(x,y,z,u,v,w)$

(c) $\forall x P(x,a) \vee \exists y\neg(Q(y) \supset P(b,c)) \supset \forall x P(x,y)$

(d) $\forall x(\exists y\forall z P(x,y,z) \supset \exists y Q(y,z))$

(e) $\neg\forall x(\exists y\forall z P(x,y,z) \supset \exists y Q(y,z))$

(f) $\neg\exists x\exists y\forall z(R(x,y) \supset R(y,z) \wedge R(z,z))$

9. Herbrand tétele

9.P. Elsőrendű logika

9.P.1. Definíció. Egy konstansszimbólumot tartalmazó

$$\langle\{\pi\}, \mathit{Cnst}, \mathit{Fn}, \mathit{Pr}\rangle$$

elsőrendű logikai nyelv *Herbrand-univerzuma* a nyelv zárt (változómentes) termjeinek a halmaza. Ha a nyelvben nincs konstansszimbólum ($\mathit{Cnst} = \varnothing$), választunk egy (a nyelvben nem szereplő) új szimbólumot. Ekkor a nyelv Herbrand-univerzuma ebből az extra szimbólumból (mintha konstansszimbólum lenne) és a nyelv függvényszimbólumaiból a termkészítés szabályai szerint előállítható öszszes, változót nem tartalmazó szó.

9.P.2. Szabály. A $\langle\{\pi\}, \mathit{Cnst}, \mathit{Fn}, \mathit{Pr}\rangle$ elsőrendű logikai nyelv $\mathcal{H}$ Herbrand-univerzuma az alábbi induktív szabállyal adható meg:

- Cnst minden eleme eleme $\mathcal{H}$-nak. Ha $\mathit{Cnst} = \varnothing$, legyen $a \in \mathcal{H}$.
- ha $f \in \mathit{Fn}$ k aritású függvényszimbólum és $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{H}$, akkor $f(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{H}$.

9.P.3. Definíció. A $\langle\{\pi\}, \mathit{Cnst}, \mathit{Fn}, \mathit{Pr}\rangle$ elsőrendű logikai nyelv *Herbrand-bázisa* a

$$\{P(x_1, x_2, \ldots, x_k)(x_1, x_2, \ldots, x_k \parallel t_1, t_2, \ldots, t_k) \mid \\ P \in \mathit{Pr}\ k \text{ aritású és } t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathcal{H}\}$$

ún. *alapatom-halmaz.*

9.P.4. Definíció. Egy $A(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ kvantormentes formula $\mathcal{H}$ Herbrand-univerzum feletti *alappéldányai* az

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_k)(x_1, x_2, \ldots, x_k \parallel t_1, t_2, \ldots, t_k)$$

formulák, ahol $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathcal{H}$.

9.P.5. Megjegyzés. Egy formula Herbrand-univerzum feletti alappéldányaiban az atomok Herbrand-bázisbeli alapatomok.

9.P.6. Definíció. Legyen $\langle\{\pi\}, \mathit{Cnst}, \mathit{Fn}, \mathit{Pr}\rangle$ elsőrendű logikai nyelv, Herbrand-univerzuma pedig $\mathcal{H}$. A nyelv *Herbrand-interpretációinak* nevezzük és $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$-val jelöljük a nyelv azon interpretációit, melyek

- univerzuma éppen $\mathcal{H}$,
- minden $c \in Cnst$ konstansszimbólumhoz $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ a $c \in \mathcal{H}$ univerzumelemet (önmagát) rendeli, és
- minden k aritású $f \in Fn$ függvényszimbólumhoz $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ hozzárendeli azt az $\tilde{f} : \mathcal{H}^k \to \mathcal{H}$ műveletet, amelyikre minden $h_1, h_2, \ldots, h_k \in \mathcal{H}$ esetén
$$\tilde{f}(h_1, h_2, \ldots, h_k) = f(h_1, h_2, \ldots, h_k).$$

9.P.7. Megjegyzés. Egy elsőrendű logikai nyelv különböző Herbrand-interpretációi egymástól csak a predikátumszimbólumok interpretálásában különbözhetnek. Ez azt jelenti, hogy egy Herbrand-interpretációt megadhatunk azzal, hogy a Herbrand-bázis alapatomjairól rendre megmondjuk, igazak-e, vagy épp hamisak.

9.P.8. Tétel. Egy zárt univerzális Skolem-normálformájú formula pontosan akkor kielégíthetetlen, ha nem elégíti ki (a Herbrand-univerzum feletti) egyetlen Herbrand-interpretáció sem.

9.P.9. Tétel. [Herbrand tételének 1. változata.]
Egy zárt univerzális Skolem-normálformájú formula akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha a magja (kvantormentes része) Herbrand-univerzum feletti alappéldányainak van véges kielégíthetetlen részhalmaza.

9.P.10. Tétel. [Herbrand tételének 2. változata.]
Zárt univerzális Skolem-normálformájú formulák konjunkciója akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha a magok Herbrand-univerzum feletti alappéldányainak van véges kielégíthetetlen részhalmaza.

9.P.11. Megjegyzés. Univerzális Skolem-normálformájú formulák konjunkciója a
$$\forall x(A \wedge B) \sim \forall x A \wedge \forall x B$$
ekvivalencia miatt ekvivalens módon felírható olyan univerzális Skolem-normálformájú formulák konjunkciójaként, mely formulákban a magok mind elemi diszjunkciók. Ebben az esetben az elsőrendű logika kielégíthetetlenségi problémáját – Herbrand tételének 2. változata szerint – elemi diszjunkciók alappéldányai halmazának kielégíthetetlenségi problémájára vezettük vissza. Ráadásul a tétel szerint megfogalmazhatunk olyan eljárást, hogy ha ez a halmaz kielégíthetetlen, akkor ezt a tényt a módszerünk véges sok lépésben igazolja. (Azonban ha a halmaz kielégíthető, az eljárásunk nem fogja feltétlenül ezt felismerni.)

FELADATOK

9.P.1. Határozzuk meg a következő nyelvek Herbrand-univerzumát, Herbrand-bázisát, és egy-egy lehetséges Herbrand-interpretációját!

(a) $\left\langle\{\pi\},\{c\},\varnothing,\left\{P_{(\pi)}\right\}\right\rangle$

(b) $\left\langle\{\pi\},\varnothing,\varnothing,\left\{P_{(\pi)},Q_{(\pi,\pi)}\right\}\right\rangle$

(c) $\left\langle\{\pi\},\{a,b,c\},\varnothing,\left\{P_{(\pi)},Q_{(\pi,\pi)}\right\}\right\rangle$

(d) $\left\langle\{\pi\},\{c\},\{f_{(\pi\to\pi)}\},\left\{Q_{(\pi,\pi)}\right\}\right\rangle$

Megoldás

$$\mathcal{H}=\{c,f(c),f(f(c)),\ldots\}$$

$$\mathcal{HB}=\{Q(c,c),Q(c,f(c)),Q(f(c),c),Q(f(c),f(c)),Q(c,f(f(c))),\ldots\}$$

Csak a Herbrand-bázis alapatomjairól kell rendre megmondani, melyik igaz, és melyik hamis. Például most a hamisak elé a bázisban $\neg$ jelet írunk:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}}=\{Q(c,c),\neg Q(c,f(c)),\neg Q(f(c),c),Q(f(c),f(c)),\\ \neg Q(c,f(f(c))),\neg Q(f(c),f(f(c))),\ldots,Q(f(f(c)),f(f(c))),\ldots\}$$

(e) $\left\langle\{\pi\},\{c\},\{g_{(\pi,\pi\to\pi)}\},\left\{P_{(\pi)}\right\}\right\rangle$

(f) $\left\langle\{\pi\},\varnothing,\{f_{(\pi\to\pi)},h_{(\pi\to\pi)}\},\left\{P_{(\pi)},Q_{(\pi,\pi)}\right\}\right\rangle$

9.P.2. Határozzuk meg a $\left\langle\{\pi\},\{a,b,c\},\varnothing,\left\{P_{(\pi)},Q\left(_{(\pi,\pi)}\right\}\right\rangle$ nyelv alábbi formuláinak Herbrand-univerzum feletti alappéldányait!

(a) $P(x)$

(b) $Q(x,y)\vee\neg P(x)$

(c) $(Q(x,y)\vee\neg P(x))\wedge(\neg Q(x,a)\vee\neg P(z))\wedge P(c)$

9.P.3. Határozzuk meg a $\left\langle\{\pi\},\varnothing,\{f_{(\pi\to\pi)}\},\left\{P_{(\pi)},Q\left(_{(\pi,\pi)}\right\}\right\rangle$ nyelv alábbi formuláinak Herbrand-univerzum feletti alappéldányait!

(a) $Q(x,f(x))$

(b) $Q(x,y)\vee\neg P(f(y))$

Megoldás

$$\{Q(c,c) \vee \neg P(f(c)),\ Q(c,f(c)) \vee \neg P(f(f(c))),\ Q(f(c),c) \vee \neg P(f(c)),\\ Q(f(c),f(c)) \vee \neg P(f(f(c))), \dots\}$$

(c) $P(x) \wedge (\neg P(x) \vee P(f(x)))$

9.P.4. Bizonyítsuk be, hogy a $\langle \{\pi\}, \{c\}, \varnothing, \{P_{(\pi)}\} \rangle$ nyelv Herbrand-univerzum feletti lehetséges Herbrand-interpretációi nem elégítik ki a

$$\exists x (P(x) \wedge \neg P(c))$$

formulát, ugyanakkor a formula kielégíthető!

9.P.5. Egy $\mathcal{H}$ Herbrand-interpretációban csak az alábbi alapatomok igazak:

$$P(c), P(f(c)), P(f(f(c))), Q(c, f(c)), Q(c, f(f(c))).$$

Igazak-e a következő formulák $\mathcal{H}$-ban?

(a) $\forall x (P(x) \supset Q(x, f(x)))$

(b) $\forall x (P(x) \supset \exists y Q(y, x))$

(c) $\forall x (Q(c, f(x)) \supset P(x))$

9.P.6. Igazoljuk Herbrand tétele segítségével az alábbi zárt univerzális Skolem-normálformájú formulák kielégíthetetlenségét!

(a) $\forall x (P(x) \wedge \neg P(c))$

(b) $\forall x (P(x) \wedge \neg P(f(x)))$

(c) $\forall x (P(x) \wedge (\neg P(x) \vee R(f(x))) \wedge \neg R(f(a)))$

(d) $\forall x \forall y ((\neg P(x) \vee Q(f(x), x)) \wedge P(c) \wedge \neg Q(x, y))$

(e) $\forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(x, f(y))) \wedge \forall x \neg P(g(x)) \wedge \forall x Q(g(x), x)$

Megoldás

A $\left\langle \{\pi\}, \varnothing, \{f_{(\pi\to\pi)}, g_{(\pi\to\pi)}\}, \{P_{(\pi)}, Q_{(\pi,\pi)}\}\right\rangle$ nyelv fomulájáról van szó. Ennek Herbrand-univerzuma:

$$\mathcal{H} \leftrightharpoons \{c, f(c), g(c), f(f(c)), g(f(c)), f(g(c)), g(g(c)), \ldots\}$$

A konjunkciós tagok magjai Herbrand-univerzum feletti alappéldányainak halmaza:

$$\begin{gathered}\{P(c) \vee \neg Q(c, f(c)),\ P(f(c)) \vee \neg Q(f(c), f(c)),\ P(c) \vee \neg Q(c, f(f(c))),\\ P(f(c)) \vee \neg Q(f(c), f(f(c))),\ P(c) \vee \neg Q(c, f(g(c))),\ \ldots,\\ P(g(f(c))) \vee \neg Q(g(f(c)), f(c)), \ldots,\\ \neg P(g(c)), \neg P(g(f(c))), \neg P(g(g(c))), \ldots\\ Q(g(c), c), Q(g(f(c)), f(c)), Q(g(g(c)), g(c)), \ldots\}\end{gathered}$$

Ez a halmaz kielégíthetetlen, mert a

$$\{\, P(g(f(c))) \vee \neg Q(g(f(c)), f(c)),\ \neg P(g(f(c))),\ Q(g(f(c)), f(c))\,\}$$

részhalmaz kielégíthetetlen.

10. A természetes technika

10.I. Ítéletlogika

10.I.1. Definíció. Az A, B és C szimbólumok.

- Az *ítéletkalkulus alapsémái*:

  1. $A \supset (B \supset A)$
  2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
  3. $A \supset (B \supset A \wedge B)$
  4. $A \wedge B \supset A$
  5. $A \wedge B \supset B$
  6. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$
  7. $A \supset A \vee B$
  8. $B \supset A \vee B$
  9. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$
  10. $\neg\neg A \supset A$

- Az *ítéletkalkulus levezetési szabálya*:

$$\frac{A \quad A \supset B}{B} \qquad (\textit{modus ponens})$$

Ha az A, B és C szimbólumokat egy ítéletlogikai nyelv formuláival helyettesítjük, az alapsémákból *alapformulákat* kapunk, a levezetési szabály segítségével pedig két (vonal feletti) formulából *levezetünk* egy (vonal alatti) harmadikat.

10.I.2. Tétel.

- Az ítéletkalkulus alapformulái logikai törvények.
- $A, A \supset B \vDash B$.

10.I.3. Definíció. A *levezetésfa* és magasságának induktív definíciója:

- minden A formula 1 magasságú levezetésfa, melyben A alsó formula, és nincs nála feljebb levő formula;

- ha $\mathcal{F}_1$ m_1 és $\mathcal{F}_2$ m_2 magasságú olyan levezetésfák, melyben az alsó formulák A és $A \supset B$ alakúak, akkor az

$$\frac{\mathcal{F}_1 \quad \mathcal{F}_2}{B}$$

alakzat is levezetésfa. A nyert levezetésfában B az alsó formula, melynél $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ minden formulája feljebb van. A levezetésfa magassága pedig $\max\{m_1, m_2\} + 1$.

10.I.4. Megjegyzés. A levezetésfában azok a formulák, melyeknél nincs feljebb levő, vagy alapformulák, vagy ún. *hipotézisek*.

10.I.5. Definíció. A Γ véges formulahalmazból az A formula *levezethető*, ha van olyan levezetésfa, melyben A alsó formula, és a hipotésisek mind elemei Γ-nak. (Jelölése $\Gamma \vdash A$, az alakzat neve *szekvencia.*) Ha Γ üres, akkor A hipotézismentesen vezethető le a kalkulusban (jelölése $\vdash A$).

10.I.6. Tétel. [Az ítéletkalkulus helyessége.]
Ha $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \vDash A$.

10.I.7. Tétel. [Az ítéletkalkulus teljessége.]
Ha $\Gamma \vDash A$, akkor $\Gamma \vdash A$.

10.I.8. Megjegyzés. Hogy megkönnyítsék a levezethetőségi reláció fennállásának igazolását, levezetési sémákra vonatkozó segédszabályok egy egész rendszerét dolgozták ki. A segédszabályok állításokat jelölnek: ha adva van(nak) a vonal feletti szekvenciá(ka)t megalapozó (ítélet)kalkulusbeli levezetésfa(ák), akkor megkonstruálható a vonal alatti szekvenciát megalapozó levezetésfa is.

10.I.9. Szabály. [A természetes levezetés strukturális szabályai.]

az azonosság törvénye

$$\Gamma, A \vdash A$$

a bővítés szabálya

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$$

a szűkítés szabálya

$$\frac{\Gamma, B, B, \Delta \vdash A}{\Gamma, B, \Delta \vdash A}$$

a felcserélés szabálya

$$\frac{\Gamma, B, C, \Delta \vdash A}{\Gamma, C, B, \Delta \vdash A}$$

a vágás szabálya

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

10.I.10. Megjegyzés. A természetes levezetés technikájának vannak ún. logikai szabályai is. Minden logikai összekötő jelhez két szabályt fogunk kapcsolni, egy „bevezető” szabályt (*b*-szabály) és egy „eltávolító” szabályt (*e*-szabály). A bevezető szabály arra vonatkozik, hogyan igazolható egy összetett formula levezethetősége. Az eltávolító szabály pedig arra, hogyan lehet használni egy ilyen formulát más formulák levezetése során.

10.I.11. Szabály. [A természetes levezetés logikai szabályai.]

$$(\supset b)\quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B} \qquad\qquad (\supset e)\quad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \supset B}{\Gamma \vdash B}$$

$$(\wedge b)\quad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad\qquad (\wedge e)\quad \frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

$$(\vee b)\quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad\qquad (\vee e)\quad \frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$$

$$(\neg\, b)\quad \frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \qquad\qquad (\neg\, e)\quad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

10.I.12. Megjegyzés. A természetes levezetés technikájának szabályai szoros analógiát mutatnak a matematikai érvelés gyakorlatával, ami megkönnyíti a szekvenciák igazolását. A $(\neg\, b)$ szabály alkalmazását például a szokásos matematikai gyakorlatban *indirekt bizonyításnak* nevezzük. Hogy bebizonyítsuk $\neg A$-t, elegendő – feltéve hogy A teljesül – ellentmondásra jutni, vagyis megfelelő B-t kiválasztva A-ból levezetni B-t és $\neg B$-t is.

FELADATOK

10.I.1. Bizonyítsuk be a **10.I.2.** tételt!

10.I.2. Bizonyítsuk be a **10.I.6.** tételt!

10.I.3. Bizonyítsuk be, ha $\Gamma \vdash A$, és Γ minden formulája logikai törvény, akkor A is az! (Speciálisan, ha $\vdash A$, akkor $\vDash A$.)

10.I.4. Bizonyítsuk be természetes technikával, hogy

(a) $\vdash X \supset X$

(b) $\vdash X \supset (Y \supset X)$

(c) $\vdash X \supset \neg\neg X$

(d) $\vdash X \supset (\neg X \supset Y)$
(e) $\vdash \neg(X \wedge \neg X)$
(f) $\vdash X \wedge Y \supset Y \vee X$
(g) $\vdash X \vee Y \supset (\neg X \supset Y)$
(h) $\vdash X \wedge Y \supset \neg(X \supset \neg Y)$
(i) $\vdash X \vee \neg X$
(j) $\vdash (X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$

10.I.5. Bizonyítsuk be természetes technikával, hogy a

$$(\neg X \supset \neg Y) \wedge \neg(Y \supset X)$$

formula ellentmondás!

Megoldás

A formula pontosan akkor ellentmondás, ha negáltja logikai törvény, ezért a következő szekvenciát kell megalapozni:

$$\vdash \neg((\neg X \supset \neg Y) \wedge \neg(Y \supset X))$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg X \supset \neg Y, Y, \neg X \vdash Y \qquad \dfrac{\neg X \supset \neg Y, Y, \neg X \vdash \neg X \supset \neg Y \qquad \neg X \supset \neg Y, Y, \neg X \vdash \neg X}{\neg X \supset \neg Y, Y, \neg X \vdash \neg Y}}{\neg X \supset \neg Y, Y \vdash \neg\neg X}}{\neg X \supset \neg Y, Y \vdash X}}{\neg X \supset \neg Y \vdash Y \supset X}}{\neg X \supset \neg Y, \neg(Y \supset X) \vdash Y \supset X}}{(\neg X \supset \neg Y) \wedge \neg(Y \supset X) \vdash Y \supset X} \qquad \dfrac{\neg X \supset \neg Y, \neg(Y \supset X) \vdash \neg(Y \supset X)}{(\neg X \supset \neg Y) \wedge \neg(Y \supset X) \vdash \neg(Y \supset X)}}{\vdash \neg((\neg X \supset \neg Y) \wedge \neg(Y \supset X))}$$

Írhatjuk a következőképpen is:

1.	$\vdash \neg((\neg X \supset \neg Y) \wedge \neg(Y \supset X))$	$(\neg\, b) \to 2, 3.$
2.	$(\neg X \supset \neg Y) \wedge \neg(Y \supset X) \vdash Y \supset X$	$(\wedge\, e) \to 5.$
3.	$(\neg X \supset \neg Y) \wedge \neg(Y \supset X) \vdash \neg(Y \supset X)$	$(\wedge\, e) \to 4.$
4.	$\neg X \supset \neg Y,\ \neg(Y \supset X) \vdash \neg(Y \supset X)$	(azonosság) ✓
5.	$\neg X \supset \neg Y,\ \neg(Y \supset X) \vdash Y \supset X$	(bővítés) $\to 6.$
6.	$\neg X \supset \neg Y \vdash Y \supset X$	$(\supset b) \to 7.$
7.	$\neg X \supset \neg Y,\ Y \vdash X$	$(\neg\, e) \to 8.$
8.	$\neg X \supset \neg Y,\ Y \vdash \neg\neg X$	$(\neg\, b) \to 9, 10.$
9.	$\neg X \supset \neg Y,\ Y,\ \neg X \vdash Y$	(azonosság) ✓
10.	$\neg X \supset \neg Y,\ Y,\ \neg X \vdash \neg Y$	$(\supset e) \to 11, 12.$
11.	$\neg X \supset \neg Y,\ Y,\ \neg X \vdash \neg X \supset \neg Y$	(azonosság) ✓
12.	$\neg X \supset \neg Y,\ Y,\ \neg X \vdash \neg X$	(azonosság) ✓

10.I.6. Bizonyítsuk be természetes technikával, hogy a **7.I.4.** tételbeli formulák tautológiák!

10.I.7. Bizonyítsuk be természetes technikával, hogy a **7.I.12.** tételbeli következtetésformák helyesek!

10.I.8. Bizonyítsuk be természetes technikával, hogy

(a) $X \supset Y,\ \neg Y \vdash \neg X$

(b) $(X \supset X) \supset Y \vdash Y$

(c) $X \supset (Y \supset Z) \vdash X \wedge Y \supset Z$

(d) $X \vee Y \vee Z,\ Z \supset X,\ \neg Y \vdash X$

(e) $X \vee Y \supset Z \vdash (X \supset Z) \wedge (Y \supset Z)$

(f) $X \supset Y \vee Z \vdash (X \supset Y) \vee (X \supset Z)$

(g) $(X \supset Y) \vee (X \supset Z) \vdash X \supset Y \vee Z$

(e) $X \wedge (Y \vee Z) \vdash (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$

(h) $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vdash X \wedge (Y \vee Z)$

(i) $\neg X \vee Y,\ Z \supset \neg Y \vdash X \supset \neg Z$

(j) $(X \supset X) \supset X \vdash Y \supset X$

(k) $(X \supset X) \supset Y \vdash Y$

(l) $(\neg X \supset \neg Y) \supset Y \vdash \neg\neg X$

(m) $X \supset Y,\ \neg Z \supset \neg Y,\ Z \supset \neg U \vdash U \supset \neg X$

(n) $X \supset Y \wedge Z,\ Z \wedge U \supset W,\ X \wedge U \vdash W$

10.I.9. Bizonyítsuk be természetes technikával, hogy a **7.I.23.** feladatbeli következtetések helyesek!

10.I.10. Igazoljuk a természetes technika segítségével, hogy a következő formulák ekvivalensek!

$$(X \supset (Y \supset Z)) \sim ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$$

Megoldás

Mivel $A \sim B$ pontosan akkor, ha $\vDash A \equiv B$, azaz $\vDash (A \supset B) \wedge (B \supset A)$, tehát $\vDash A \supset B$ és $\vDash A \supset B$. Így az ekvivalencia igazolásához a következő két szekvenciát kell megalapozni:

$$\vdash (X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$$
$$\vdash ((X \supset Y) \supset (X \supset Z)) \supset (X \supset (Y \supset Z))$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(X \supset Y) \supset (X \supset Z), X, Y \vdash (X \supset Y) \supset (X \supset Z) \qquad \dfrac{(X \supset Y) \supset (X \supset Z), X, Y \vdash Y}{(X \supset Y) \supset (X \supset Z), X, Y \vdash X \supset Y}}{(X \supset Y) \supset (X \supset Z), X, Y \vdash X \supset Z} \qquad (X \supset Y) \supset (X \supset Z), X, Y \vdash X}{(X \supset Y) \supset (X \supset Z), X, Y \vdash Z}}{(X \supset Y) \supset (X \supset Z), X \vdash Y \supset Z}}{\dfrac{(X \supset Y) \supset (X \supset Z) \vdash X \supset (Y \supset Z)}{\vdash ((X \supset Y) \supset (X \supset Z)) \supset (X \supset (Y \supset Z))}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{X \supset (Y \supset Z), X \supset Y, X \vdash X \supset (Y \supset Z) \qquad X \supset (Y \supset Z), X \supset Y, X \vdash X}{X \supset (Y \supset Z), X \supset Y, X \vdash Y \supset Z} \qquad \dfrac{X \supset (Y \supset Z), X \supset Y, X \vdash X \supset Y \qquad X \supset (Y \supset Z), X \supset Y, X \vdash X}{X \supset (Y \supset Z), X \supset Y, X \vdash Y}}{X \supset (Y \supset Z), X \supset Y, X \vdash Z}}{X \supset (Y \supset Z), X \supset Y \vdash X \supset Z}}{\dfrac{X \supset (Y \supset Z) \vdash (X \supset Y) \supset (X \supset Z)}{\vdash (X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))}}$$

10.I.11. Készítsük el az $A \supset B, B \supset A \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ levezetését!

10.I.12. Készítsük el a természetes technika ekvivalencia jelre vonatkozó levezetési szabályait feltéve, hogy az $A \supset B, B \supset A \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ levezetés már ismert!

Megoldás

Az ekvivalencia jelet az $A \equiv B \leftrightharpoons (A \supset B) \wedge (B \supset A)$ rövidítésként vezettük be. A kérdés így tulajdonképpen, hogy az $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$ formula levezetése során milyen szekvenciák állnak elő levélelemként.

(a) Egy $\Gamma \vdash A \equiv B$ szekvencia levezetéséhez a $\Gamma \vdash (A \supset B) \wedge (B \supset A)$ szekvencia levezetését kell elkészíteni:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B} \qquad \dfrac{\Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash B \supset A}}{\Gamma \vdash (A \supset B) \wedge (B \supset A)}$$

(b) $A \equiv B, \Gamma \vdash C$ levezetéséhez az $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \Gamma \vdash C$ szekvencia levezetését kell elkészíteni:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B, \Gamma \vdash C}{A \wedge B, \Gamma \vdash C} \qquad \dfrac{\neg A, \neg B, \Gamma \vdash C}{\neg A \wedge \neg B, \Gamma \vdash C}}{(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B), \Gamma \vdash C} \qquad A \supset B, B \supset A \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)}{A \supset B, B \supset A, \Gamma \vdash C}}{(A \supset B) \wedge (B \supset A), \Gamma \vdash C}$$

A megoldást a következő szabályokban foglalhatjuk össze:

$$(\equiv b) \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash B;\ \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash A \equiv B}$$

$$(\equiv e) \qquad \dfrac{A, B, \Gamma \vdash C;\ \neg A, \neg B, \Gamma \vdash C}{A \equiv B, \Gamma \vdash C}$$

10.I.13. Bizonyítsuk be természetes technikával, hogy

(a) $\vdash (A \equiv B) \equiv (B \equiv A)$

(b) $\vdash ((A \equiv B) \equiv C) \equiv (A \equiv (B \wedge C))$

10.I.14. Bizonyítsuk be természetes technikával, hogy a **8.I.2.** tételbeli formulapárok ekvivalensek!

10.I.15. Készítsük el a természetes levezetés alábbi – rövidítésként bevezethető – logikai összekötő jelekre vonatkozó szabályait!

(a) kizáró vagy $A \otimes B \leftrightharpoons (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

(b) Sheffer-vonás $A \mid B \leftrightharpoons \neg A \vee \neg B$

(c) Peirce-vonás $A \downarrow B \leftrightharpoons \neg A \wedge \neg B$

10.I.16. Bizonyítsuk be a dedukció tételt, azaz azt, hogy $\Gamma, A \vdash B$ pontosan akkor, ha $\Gamma \vdash A \supset B$!

10.I.17. Bizonyítsuk be, hogy előfordulhat: bár $\Gamma \vdash A \vee B$, de sem $\Gamma \vdash A$, sem $\Gamma \vdash B$!

10.I.18. Legyen B részformulája A-nak. Jelölje A' azt a formulát, amelyet úgy kapunk A-ból, hogy B-t $\neg\neg B$-vel helyettesítjük benne. Igazoljuk, hogy $A \vdash A'$ és $A' \vdash A$!

10.I.19. Legyen B részformulája A-nak. Jelölje A' azt a formulát, amelyet úgy kapunk A-ból, hogy B-t egy tetszőleges C formulával helyettesítjük benne. Igazoljuk a következőt: ha $B \vdash C$ és $C \vdash B$, akkor $A \vdash A'$ és $A' \vdash A$ is!

10.I.20. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi szekvencia-átalakítások is helyesek a természetes levezetés technikájában!

(a) $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B \supset C}{\Gamma, A, B \vdash C}$

(b) $\dfrac{\Gamma, A \wedge B \vdash C}{\Gamma, A, B \vdash C}$

(c) $\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \neg B}{\Gamma, B \vdash A}$

(d) $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}$

(e) $\dfrac{\Gamma, A \vdash B; \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$

(f) $\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash C; \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \supset B \vdash C}$

(g) $\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \vee B; \quad \Gamma_2, A \vdash C; \quad \Gamma_3, B \vdash C}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash C}$

10.P. Elsőrendű logika

10.P.1. Definíció. Az A, B, C, x és t szimbólumok.

- A *predikátumkalkulus alapsémái*:

  1. $A \supset (B \supset A)$
  2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
  3. $A \supset (B \supset A \wedge B)$
  4. $A \wedge B \supset A$
  5. $A \wedge B \supset B$
  6. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$
  7. $A \supset A \vee B$
  8. $B \supset A \vee B$
  9. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$
  10. $\neg\neg A \supset A$
  11. $\forall x A(x) \supset A(x)_t^x$
  12. $\forall x(C \supset A(x)) \supset (C \supset \forall x A(x))$, $x \notin \mathrm{Par}(C)$
  13. $A(x)_t^x \supset \exists x A(x)$
  14. $\forall x(A(x) \supset C) \supset (\exists x A(x) \supset C)$, $x \notin \mathrm{Par}(C)$

- A *predikátumkalkulus levezetési szabályai*:

$$\frac{A \quad A \supset B}{B} \qquad \textit{modus ponens}$$

$$\frac{A}{\forall x A} \qquad \textit{általánosítási szabály}$$

Ha az A, B és C szimbólumokat egy elsőrendű logikai nyelv formuláival helyettesítjük, x a nyelv változója, t pedig ezzel megegyező típusú term, akkor alapsémákból alapformulákat kapunk, a levezetési szabályok segítségével pedig egy vagy két formulából levezetünk egy újat.

10.P.2. Tétel.

- A predikátumkalkulus minden alapformulája logikai törvény.
- $A, A \supset B \vDash B$.
- Ha $\Gamma \vDash A(x)$ és $x \notin \mathrm{Par}(\Gamma)$, akkor $\Gamma \vDash \forall x A(x)$.

10.P.3. Definíció. A predikátumkalkulusban a *formulafa* és magasságának induktív definíciója:

- minden A formula 1 magasságú formulafa, melyben A alsó formula, és nincs nála feljebb levő formula;
- ha $\mathcal{F}_1$ m_1 és $\mathcal{F}_2$ m_2 magasságú olyan formulafák, melyben az alsó formulák A és $A \supset B$ alakúak, akkor az
$$\frac{\mathcal{F}_1 \quad \mathcal{F}_2}{B}$$
alakzat is formulafa. A nyert formulafában B alsó formula, melynél $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ minden formulája feljebb van. A formulafa magassága pedig $\max\{m_1, m_2\} + 1$;
- ha $\mathcal{F}$ m magasságú olyan formulafa, amelyben az alsó formula A, akkor az
$$\frac{\mathcal{F}}{\forall x A}$$
alakzat is formulafa. $\forall x A$ alsó formula, melynél $\mathcal{F}$ minden formulája feljebb van, és a formulafa magassága $m + 1$.

10.P.4. Definíció. A *levezetésfa* egy formulafa, melyben ha A-ból az általánosítás szabályával akarjuk a $\forall x A$-t nyerni, akkor x nem paraméter egyetlen, a $\forall x A$-nál feljebb levő hipotézisben sem.

10.P.5. Definíció. A Γ véges formulahalmazból a B formula *levezethető*, azaz $\Gamma \vdash B$, ha van olyan levezetésfa, melyben B alsó formula, és a hipotésisek mind elemei Γ-nak.

10.P.6. Tétel. [A predikátumkalkulus helyessége.]
Ha $\Gamma \vdash B$, akkor $\Gamma \vDash B$.

10.P.7. Tétel. [A predikátumkalkulus teljessége.]
Ha $\Gamma \vDash B$, akkor $\Gamma \vdash B$.

10.P.8. Szabály. [A természetes levezetés kvantoros szabályai.]

$$(\forall\, b) \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A} \quad (x \notin \mathrm{Par}(\Gamma)) \qquad (\forall\, e) \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash [A(x \parallel t)]}$$

$$(\exists\, b) \quad \frac{\Gamma \vdash [A(x \parallel t)]}{\Gamma \vdash \exists x A} \qquad (\exists\, e) \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \exists x A \vdash B} \quad (x \notin \mathrm{Par}(\Gamma, B))$$

10.P.9. Megjegyzés. Az $(\exists\ e)$ szabály megfelelője a matematikai bizonyítások során a *konkretizálás szabálya.* Akkor alkalmazzuk, ha bizonyos szituációban a $\exists xA$-ból le kell vezetni B-t. Mivel a feltétel szerint van olyan elem, melyre A teljesül, így ki lehet egy ilyet választani, és elég abból a feltevésből, hogy erre teljesül A, levezetni B-t.

FELADATOK

10.P.1. Jellemezzük az alábbi formulafát!

$$\dfrac{\dfrac{Q(x) \supset P}{\forall x(Q(x) \supset P)} \qquad \forall x(Q(x) \supset P) \supset (\exists x Q(x) \supset P)}{\exists x Q(x) \supset P}$$

Megoldás
magassága: 3
alsó formulája: $\exists xQ(x) \supset P$
alapformula: $\forall x(Q(x) \supset P) \supset (\exists xQ(x) \supset P)$
hipotézis: $Q(x) \supset P$
A formulafa nem levezetésfa, hisz x paraméter a hipotézisben.

10.P.2. Bizonyítsuk be a természetes levezetés segítségével, hogy a

$$\forall xP(x) \vee \exists x\neg Q(x) \supset \exists x(Q(x) \supset P(x))$$

formula logikai törvény!

Megoldás

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall xP(x), Q(x) \vdash \forall xP(x)}{\forall xP(x), Q(x) \vdash P(x)}}{\forall xP(x) \vdash Q(x) \supset P(x)}}{\forall xP(x) \vdash \exists x(Q(x) \supset P(x))} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q(x), Q(x), \neg P(x) \vdash Q(x) \qquad \neg Q(x), Q(x), \neg P(x) \vdash \neg Q(x)}{\neg Q(x), Q(x) \vdash \neg\neg P(x)}}{\neg Q(x), Q(x) \vdash P(x)}}{\neg Q(x) \vdash Q(x) \supset P(x)}}{\neg Q(x) \vdash \exists x(Q(x) \supset P(x))}}{\exists x\neg Q(x) \vdash \exists x(Q(x) \supset P(x))}}{\dfrac{\forall xP(x) \vee \exists x\neg Q(x) \vdash \exists x(Q(x) \supset P(x))}{\vdash \forall xP(x) \vee \exists x\neg Q(x) \supset \exists x(Q(x) \supset P(x))}}$$

Mivel a levezetési fa minden ágán olyan jobb oldali formula található, mely a hipotézishalmaznak (a bal oldali formulasorozatnak) is eleme, így igazoltuk, hogy a formula logikai törvény.

10.P.3. Bizonyítsuk be természetes technikával, hogy ha $x \notin \mathrm{Par}(Q)$, akkor

(a) $\vdash \exists x P(x) \supset \neg\forall x \neg P(x)$

(b) $\vdash \neg\forall x \neg P(x) \supset \exists x P(x)$

(c) $\vdash \neg\exists x P(x) \supset \forall x \neg P(x)$

(d) $\vdash \forall x \neg P(x) \supset \neg\exists x P(x)$

(e) $\vdash Q \supset \forall x P(x) \equiv \forall x(Q \supset P(x))$

(f) $\vdash Q \supset \exists x P(x) \equiv \exists x(Q \supset P(x))$

(g) $\vdash \forall x P(x) \supset Q \equiv \exists x(P(x) \supset Q)$

(h) $\vdash \exists x P(x) \supset Q \equiv \forall x(P(x) \supset Q)$

(i) $\vdash Q \vee \forall x P(x) \equiv \forall x(Q \vee P(x))$

(j) $\vdash Q \wedge \exists x P(x) \equiv \exists x(Q \vee P(x))$

(k) $\vdash \exists x(R(x) \wedge P(x)) \supset \exists x R(x) \wedge \exists x P(x)$

(l) $\vdash \exists x(R(x) \vee P(x)) \equiv \exists x R(x) \vee \exists x P(x)$

(m) $\vdash \forall x R(x) \vee \forall x P(x) \supset \forall x(R(x) \vee P(x))$

(n) $\vdash \forall x(R(x) \wedge P(x)) \equiv \forall x R(x) \wedge \forall x P(x)$

10.P.4. Bizonyítsuk be természetes technikával, hogy az alábbi következményrelációk fennállnak!

(a) $\forall x \forall y Q(x,y) \ \vDash \ \forall x Q(x,x)$

(b) $\exists x Q(x,x) \ \vDash \ \exists x \exists y Q(x,y)$

(c) $\exists y \forall x Q(x,y) \ \vDash \ \forall x \exists y Q(x,y)$

(d) $\forall x(P(x) \supset R(x)), P(c) \ \vDash \ R(c)$

(e) $\forall x(P(x) \supset R(x)), \exists x P(x) \ \vDash \ \exists x R(x)$

(f) $\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x)), \exists x(R(x) \wedge P(x)) \ \vDash \ \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$

(g) $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)), \forall x(P(x) \supset R(x)) \ \vDash \ \neg\forall x(R(x) \supset Q(x))$

(h) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)), \forall x(P(x) \supset R(x)) \ \vDash \ \exists x(R(x) \wedge P(x))$

(i) $\forall x P(x) \vee \forall x R(x), \exists x R(x), \forall x(R(x) \supset P(x)) \ \vDash \ \forall x R(x)$

(j) $\forall x(P(x) \supset R(x)), \forall x(P(x) \supset Q(x)), \exists x P(x) \vDash \exists x(R(x) \wedge Q(x))$

10.P.5. Bizonyítsuk be természetes technikával, hogy a **7.P.17.** feladatbeli következtetések helyesek!

10.P.6. Bizonyítsuk be a **10.P.2.** tételt!

10.P.7. Bizonyítsuk be a **10.P.6.** tételt!

10.P.8. Bizonyítsuk be a dedukciótételt a predikátumkalkulusban is, azaz $\Gamma, A \vdash B$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \vdash A \supset B$!

10.P.9. Igazoljuk, hogy az $A(x)$ formula pontosan akkor vezethető le a predikátumkalkulusban, ha a $\forall x A(x)$ formula is az!

10.P.10. Bizonyítsuk be, hogy helyes a

$$\frac{\Gamma, [A(x \parallel t)], \forall x A \vdash B}{\Gamma, \forall x A \vdash B}$$

szekvencia-átalakítás a természetes levezetés technikájában!

10.P.11. Bizonyítsuk be, hogy a természetes levezetés technikájában alkalmazható az ún. helyettettesítés szabálya:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{[\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n \parallel t_1, t_2, \ldots, t_n)] \vdash [A(x_1, x_2, \ldots, x_n \parallel t_1, t_2, \ldots, t_n)]}$$

10.P.12. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \approx B$, akkor $\vdash A \equiv B$!

10.P.13. Álljon elő C' a C formulából úgy, hogy C-ben kölcsönösen kicseréljük egymással a $\wedge$ és $\vee$ összekötő jeleket, továbbá a $\forall$ és $\exists$ kvantorokat. Mutassuk meg, hogy

(a) ha $\vdash A \supset B$, akkor $\vdash B' \supset A'$;

(b) ha $\vdash A \equiv B$, akkor $\vdash A' \equiv B'$!

10.P.14. Igazoljuk természetes technikával, hogy a következő formulák ekvivalensek!

$$\neg\exists x \neg P(x) \;\sim\; \forall x P(x)$$

Megoldás

Mivel $A \sim B$ pontosan akkor, ha $\vDash A \equiv B$, azaz $\vDash (A \supset B) \wedge (B \supset A)$, tehát $\vDash A \supset B$ és $\vDash B \supset A$. Így az ekvivalencia igazolásához a következő két szekvenciát kell megalapozni:

$$\vdash \neg\exists x \neg P(x) \supset \forall x P(x) \qquad \vdash \forall x P(x) \supset \neg\exists x \neg P(x)$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists x\neg P(x), \neg P(x) \vdash \neg P(x)}{\neg\exists x\neg P(x), \neg P(x) \vdash \exists x\neg P(x)} \qquad \neg\exists x\neg P(x), \neg P(x) \vdash \neg\exists x\neg P(x)}{\neg\exists x\neg P(x) \vdash \neg\neg P(x)}}{\neg\exists x\neg P(x) \vdash P(x)}}{\neg\exists x\neg P(x) \vdash \forall x P(x)}}{\vdash \neg\exists x\neg P(x) \supset \forall x P(x)}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P(x), \neg P(x), \neg Q \vdash \neg P(x) \qquad \dfrac{\forall x P(x), \neg P(x), \neg Q \vdash \forall x P(x)}{\forall x P(x), \neg P(x), \neg Q \vdash P(x)}}{\forall x P(x), \neg P(x) \vdash \neg\neg Q}}{\forall x P(x), \neg P(x) \vdash Q}}{\forall x P(x), \exists x\neg P(x) \vdash Q} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P(x), \neg P(x), Q \vdash \forall x P(x)}{\forall x P(x), \neg P(x), Q \vdash P(x)} \qquad \forall x P(x), \neg P(x), Q \vdash \neg P(x)}{\forall x P(x), \neg P(x) \vdash \neg Q}}{\forall x P(x), \exists x\neg P(x) \vdash \neg Q}}{\forall x P(x) \vdash \neg\exists x\neg P(x)}}{\vdash \forall x P(x) \supset \neg\exists x\neg P(x)}
$$

Figyeljük meg, hogy a második levezetésfában Q, illetve $\neg Q$ ellentmondásra azért van szükség, mert ha itt rögtön a $P(x)$, illetve $\neg P(x)$ ellentmondást szeretnénk bizonyítani, az x változó paraméter lenne, ezért a bal oldali $\exists x\neg P(x)$ formulában nem volna lehetőség alkalmazni az egzisztenciális kvantor eltávolítására vonatkozó szabályt!

11. Szekventkalkulus

11.I. Ítéletlogika

11.I.1. Definíció. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m$ $(n, m \geq 0)$ ítéletlogikai formulák. Ekkor a

$$\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m \vee \bot$$

formulát *szekventnek* nevezzük. Jelölése

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \rightarrow B_1, B_2, \ldots, B_m$$

vagy rövidebben $\Gamma \rightarrow \Delta$, ahol Γ az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ és Δ a $B_1, B_2, \ldots, B_m$ formulák multihalmazai.

11.I.2. Szabály. A, B, Γ és Δ szimbólumok.

A *szekventkalkulus*

- *alapsémája*

$$A, \Gamma \rightarrow \Delta, A$$

- *levezetési szabályai*

$$(\wedge \rightarrow) \quad \frac{A, B, \Gamma \rightarrow \Delta}{(A \wedge B), \Gamma \rightarrow \Delta} \qquad (\rightarrow \wedge) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A;\ \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, (A \wedge B)}$$

$$(\vee \rightarrow) \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta;\ B, \Gamma \rightarrow \Delta}{(A \vee B), \Gamma \rightarrow \Delta} \qquad (\rightarrow \vee) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, (A \vee B)}$$

$$(\supset\rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A;\ B, \Gamma \rightarrow \Delta}{(A \supset B), \Gamma \rightarrow \Delta} \qquad (\rightarrow\supset) \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, (A \supset B)}$$

$$(\neg \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Delta} \qquad (\rightarrow \neg) \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg A}$$

Ha az A és B szimbólumokat egy ítéletlogikai nyelv formuláival, a Γ és Δ szimbólumokat pedig formulák multihalmazaival helyettesítjük, az alapsémából *alapszekventeket* kapunk, a levezetési szabály segítségével pedig egy vagy két (vonal feletti) szekventből *levezetünk* egy (vonal alatti) harmadikat.

11.I.3. Tétel. Minden alapszekvent ítéletlogikai törvény.

11.I.4. Tétel. A szekventkalkulus egy levezetési szabályában a vonal alatti alakú szekvent pontosan akkor ítéletlogikai törvény, ha a vonal feletti szekvent vagy szekventek is ítéletlogikai törvények.

11.I.5. Definíció. Egy szekvent a szekventkalkulusban *bizonyítható*, ha

- vagy alapszekvent,
- vagy van olyan levezetési szabály, melyben vonal alatti alakú szekvent, és a megfelelő vonal feletti szekvent vagy szekventek bizonyíthatóak.

11.I.6. Tétel. [A szekventkalkulus helyessége.]
Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n \to B_1, B_2, \ldots, B_m$ szekvent bizonyítható a szekventkalkulusban, akkor a $\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m \vee \bot$ formula logikai törvény.

11.I.7. Tétel. [A szekventkalkulus teljessége.]
Ha az A ítéletlogikai formula törvény, akkor a $\to A$ szekvent bizonyítható a szekventkalkulusban.

FELADATOK

11.I.1. Adjuk meg az alábbi szekventeknek megfelelő formulákat! Egyszerűsítsünk, ahol ez lehetséges!

(a) $\to (X \supset Y)$

(b) $X \to Y$

(c) $X \wedge Y \to Y \wedge Z$

(d) $(X \supset Y) \to$

(e) $X \vee Y \to Y \vee Z$

(f) $X, Y \to Y, Z$

11.I.2. Bizonyítsuk be a **11.I.3**. tételt!

11.I.3. Bizonyítsuk be a **11.I.4**. tételt!

11.I.4. Bizonyítsuk be a **11.I.6**. tételt!

11.I.5. Bizonyítsuk be a **11.I.7**. tételt!

11.I.6. Bizonyítsuk be, hogy A pontosan akkor kielégíthetetlen, ha az $A \to$ szekvent bizonyítható!

11.I.7. Bizonyítsuk be, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash B$ pontosan akkor, ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n \to B$ szekvent bizonyítható!

11.I.8. Bizonyítsuk be szekventkalkulus segítségével, hogy a

$$(\neg Y \supset \neg X) \supset (X \supset Y)$$

formula logikai törvény!

Megoldás

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{X \to Y, X}{X, \neg X \to Y} \qquad \dfrac{X, Y \to Y}{X \to Y, \neg Y}}{\neg Y \supset \neg X, X \to Y}}{\neg Y \supset \neg X \to X \supset Y}}{\to (\neg Y \supset \neg X) \supset (X \supset Y)}$$

11.I.9. Bizonyítsuk be szekventkalkulus segítségével, hogy az

$$(X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \supset (X \wedge Y) \vee Z$$

formula logikai törvény!

Megoldás

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(X \vee Z), Y \to Z, Y \qquad (X \vee Z), Z \to Z, Y}{(X \vee Z), (Y \vee Z) \to Z, Y}}{((X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)) \to Z, Y} \qquad \dfrac{\dfrac{(X \vee Z), Z \to Z, X \qquad \dfrac{Y, X \to Z, X \qquad Y, Z \to Z, X}{(X \vee Z), Y \to Z, X}}{(X \vee Z), (Y \vee Z) \to Z, X}}{((X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)) \to Z, X}}{((X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)) \to (X \wedge Y), Z}}{((X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)) \to ((X \wedge Y) \vee Z)}}{\to (((X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)) \supset ((X \wedge Y) \vee Z))}$$

11.I.10. Bizonyítsuk be a szekventkalkulusban az alábbi szekventeket! Mit bizonyítottunk ezzel a szekvent által jelölt formuláról?

(a) $\to X \supset X$

(b) $\to X \supset (Y \supset X)$

(c) $\to X \supset (\neg X \supset Y)$

(d) $\to ((Y \supset X) \wedge (Z \supset X)) \supset ((Y \vee Z) \supset X)$

(e) $\to (X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$

11.I.11. Bizonyítsuk be szekventkalkulus segítségével, hogy az implikáció öndisztributív!

$$X \supset (Y \supset Z) \;\sim\; (X \supset Y) \supset (X \supset Z)$$

Megoldás

Az öndisztributivitási tulajdonság bizonyításához két állítást kell igazolni:

$$\vDash (X \supset (Y \supset Z)) \;\supset\; ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{X \supset (Y \supset Z), X \to Z, X \qquad \dfrac{X, Y \to Z, X \qquad \dfrac{X, Y, Z \to Z \qquad X, Y \to Z, Y}{X, Y, Y \supset Z \to Z}}{X \supset (Y \supset Z), X, Y \to Z}}{X \supset (Y \supset Z), X \supset Y, X \to Z}}{X \supset (Y \supset Z), X \supset Y \to X \supset Z}}{X \supset (Y \supset Z) \to (X \supset Y) \supset (X \supset Z)}}{\to (X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))}$$

$$\vDash ((X \supset Y) \supset (X \supset Z)) \;\supset\; (X \supset (Y \supset Z))$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Y, X \to Z, Y}{X, Y \to Z, X \supset Y} \qquad \dfrac{X, Y, Z \to Z \qquad X, Y \to Z, X}{X, Y, X \supset Z \to Z}}{(X \supset Y) \supset (X \supset Z), X, Y \to Z}}{(X \supset Y) \supset (X \supset Z), X \to Y \supset Z}}{(X \supset Y) \supset (X \supset Z) \to X \supset (Y \supset Z)}}{\to ((X \supset Y) \supset (X \supset Z)) \supset (X \supset (Y \supset Z))}$$

11.I.12. Bizonyítsuk be a szekventkalkulusban az alábbi ekvivalenciákat!

(a) $\neg X \wedge \neg Y \;\sim\; \neg(X \vee Y)$

(b) $\neg X \vee \neg Y \;\sim\; \neg(X \wedge Y)$

(c) $\neg(X \supset Y) \;\sim\; (X \wedge \neg Y)$

(d) $X \supset Y \;\sim\; \neg X \vee Y$

(e) $(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \;\sim\; X$

(f) $X \vee (\neg X \wedge Y) \;\sim\; X \vee Y$

11.I.13. Bizonyítsuk be, hogy a következő formula ellentmondás:

$$(\neg X \supset \neg Y) \wedge \neg(Y \supset X)$$

Megoldás

Amennyiben egy A formula ellentmondás, akkor $\neg A$ logikai törvény. Ezt igazolni szekventkalkulus segítségével a $\to \neg A$ szekvent bizonyításával tudjuk, ahol a negációra vonatkozó szabály miatt $A \to$ bizonyítására egyszerűsödik a feladat.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Y \to X, Y}{Y, \neg Y \to X} \qquad \dfrac{Y, X \to X}{Y \to X, \neg X}}{\neg X \supset \neg Y, Y \to X}}{\neg X \supset \neg Y \to Y \supset X}}{\neg X \supset \neg Y, \neg(Y \supset X) \to}}{(\neg X \supset \neg Y) \wedge \neg(Y \supset X) \to}$$

11.I.14. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formulák ellentmondásosak!

(a) $X \wedge \neg Y \wedge (\neg Y \supset \neg X)$

(b) $X \wedge \neg(Y \supset (X \wedge Y))$

11.I.15. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik törvény, melyik ellentmondás, és melyik kielégíthető, de nem törvény!

(a) $X \supset \neg(\neg Y \wedge (\neg Y \supset \neg X))$

(b) $(\neg X \supset \neg(X \vee Y)) \wedge ((X \wedge Y) \supset \neg Y) \supset (\neg Y \supset Y)$

(c) $(X \supset Y) \wedge X \wedge \neg Y$

(d) $(X \vee Y) \wedge (X \supset Y) \wedge \neg Y \supset Z$

11.I.16. Bizonyítsuk be a következő formulahalmaz kielégíthetetlenségét, azaz igazoljuk, hogy nem létezik olyan interpretáció, melyben a formula valamennyi formulája igaz!

$$\{\neg X \supset Y \vee Z,\ \neg(X \vee Y),\ (Z \supset \neg U \vee Y) \wedge U\}$$

Megoldás

$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ pontosan akkor kielégíthetetlen, ha $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ ellentmondás. Tehát az $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to$ szekventet kell bizonyítani, ahol a bal oldalon található konjunkcióra vonatkozó szabály miatt az $A_1, A_2, \ldots, A_n \to$ szekvent bizonyítására redukálható a feladat. Esetünkben a következő szekventet kapjuk:

$$\neg X \supset Y \vee Z,\ \neg(X \vee Y),\ (Z \supset \neg U \vee Y) \wedge U \to$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$Z \supset \neg U \vee Y, U, X \to X, Y$}
\UnaryInfC{$Z \supset \neg U \vee Y, U \to X, Y, \neg X$}
\AxiomC{$U, Y \vee Z, Y \to X, Y$}
\AxiomC{$U, Y \vee Z \to X, Y, U$}
\UnaryInfC{$U, Y \vee Z, \neg U \to X, Y$}
\BinaryInfC{$U, Y \vee Z, \neg U \vee Y \to X, Y$}
\AxiomC{$U, Y \to X, Y, Z$}
\AxiomC{$U, Z \to X, Y, Z$}
\BinaryInfC{$U, Y \vee Z \to X, Y, Z$}
\BinaryInfC{$Z \supset \neg U \vee Y, U, Y \vee Z \to X, Y$}
\BinaryInfC{$\neg X \supset Y \vee Z, Z \supset \neg U \vee Y, U \to X, Y$}
\UnaryInfC{$\neg X \supset Y \vee Z, Z \supset \neg U \vee Y, U \to X \vee Y$}
\UnaryInfC{$\neg X \supset Y \vee Z, (Z \supset \neg U \vee Y) \wedge U \to X \vee Y$}
\UnaryInfC{$\neg X \supset Y \vee Z, \neg(X \vee Y), (Z \supset \neg U \vee Y) \wedge U \to$}
\end{prooftree}
$$

11.I.17. Készítsük el a szekventkalkulus ekvivalenciajelre vonatkozó levezetési szabályait!

Megoldás

Az ekvivalenciajelet az $A \equiv B \leftrightharpoons (A \supset B) \wedge (B \supset A)$ rövidítésként vezettük be. A kérdés így tulajdonképpen az, hogy az $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$ formula levezetése során milyen szekventek állnak elő levélelemként.

(a) Egy $\Gamma \to \Delta, A \equiv B$ szekvent levezetéséhez, a

$$\Gamma \to \Delta, (A \supset B) \wedge (B \supset A)$$

szekvent levezetését kell elkészíteni:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \supset B} \qquad \dfrac{\Gamma, B \to \Delta, A}{\Gamma \to \Delta, B \supset A}}{\Gamma \to \Delta, (A \supset B) \wedge (B \supset A)}$$

A levezetés eredményeképp megkaptuk, hogy a szekvent jobb oldalán található ekvivalencia levezetéséhez elegendő a $\Gamma, A \to \Delta, B$ és $\Gamma, B \to \Delta, A$ szekventek levezetését megkonstruálni.

(b) Egy $A \equiv B, \Gamma \to \Delta$ szekvent levezetéséhez, az

$$(A \supset B) \wedge (B \supset A), \Gamma \to \Delta$$

szekvent levezetését kell elkészíteni:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B, \Gamma \to \Delta \qquad B, \Gamma \to \Delta, B}{B, B \supset A, \Gamma \to \Delta} \qquad \dfrac{A, \Gamma \to \Delta, A \qquad \Gamma \to \Delta, A, B}{B \supset A, \Gamma \to \Delta, A}}{A \supset B, B \supset A, \Gamma \to \Delta}}{(A \supset B) \wedge (B \supset A), \Gamma \to \Delta}$$

A levezetés eredményeképp megkaptuk, hogy a szekvent bal oldalán található ekvivalencia levezetéséhez elegendő az $A, B, \Gamma \to \Delta$ és $\Gamma \to \Delta, A, B$ szekventek levezetését megkonstruálni. A további két levélszekvent alapszekvent.

A megoldást a következő szabályokban foglalhatjuk össze:

$$(\to\equiv) \qquad \dfrac{\Gamma, A \to \Delta, B; \;\; \Gamma, B \to \Delta, A}{\Gamma \to \Delta, A \equiv B}$$

$$(\equiv\to) \qquad \dfrac{A, B, \Gamma \to \Delta; \;\; \Gamma \to \Delta, A, B}{A \equiv B, \Gamma \to \Delta}$$

11.I.18. Készítsük el a szekventkalkulus alábbi, rövidítésként bevezethető logikai összekötő jelekre vonatkozó szabályait!

(a) kizáró vagy $A \otimes B \leftrightharpoons (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

(b) Sheffer-vonás $A \mid B \leftrightharpoons \neg A \vee \neg B$

(c) Peirce-vonás $A \downarrow B \leftrightharpoons \neg A \wedge \neg B$

11.I.19. Bizonyítsuk be a szekventkalkulussal, hogy a **7.I.23.** feladatbeli következtetések helyesek!

11.I.20. Írjunk olyan programot, mely számára megadva egy szekventet, eldönti, hogy az a szekventkalkulusban bizonyítható-e, és ha igen, megadja a szekventkalkulusbeli levezetést!

11.P. Elsőrendű logika

11.P.1. Szabály. A, x, t, Γ és Δ szimbólumok.

A szekventkalkulus *elsőrendű levezetési szabályai*:

$$(\forall \to) \quad \frac{[A(x \parallel t)], \forall x A, \Gamma \to \Delta}{\forall x A, \Gamma \to \Delta}$$

$$(\to \forall) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A}{\Gamma \to \Delta, \forall x A} \quad (x \notin \mathrm{Par}(\Gamma, \Delta))$$

$$(\exists \to) \quad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\exists x A, \Gamma \to \Delta} \quad (x \notin \mathrm{Par}(\Gamma, \Delta))$$

$$(\to \exists) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, [A(x \parallel t)], \exists x A}{\Gamma \to \Delta, \exists x A}$$

Az elsőrendű szekventkalkulusban az A szimbólumot egy elsőrendű logikai nyelv formulájával, a Γ és Δ szimbólumokat a nyelv formulái multihalmazaival helyettesítjük. x a nyelv változója és t a változóval megegyező típusú term.

11.P.2. Tétel. Minden alapszekvent elsőrendű logikai törvény.

11.P.3. Tétel. A szekventkalkulus egy levezetési szabályában a vonal alatti alakú szekvent pontosan akkor elsőrendű logikai törvény, ha a vonal feletti alakú szekvent vagy szekventek is elsőrendű logikai törvények.

11.P.4. Tétel. [Az elsőrendű szekventkalkulus helyessége és teljessége.] Az elsőrendű szekventkalkulus helyes és teljes kalkulus, azaz egy A elsőrendű logikai formula akkor és csak akkor törvény, ha a $\rightarrow A$ szekvent bizonyítható a kalkulusban.

FELADATOK

11.P.1. Határozzuk meg, hogy az alábbi szekventek mely formulákat jelölik!

(a) $\rightarrow \forall x P(x) \supset \exists x P(x)$

(b) $\exists x(P(x) \wedge \neg P(x)) \rightarrow$

(c) $\neg\forall x \exists y Q(x,y), \forall x P(x) \rightarrow \exists x \exists y(\neg Q(x,y) \supset P(x))$

(d) $\forall x P(x), \exists x \exists y Q(x,y) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x,c)), \neg\forall x Q(x,x)$

11.P.2. Bizonyítsuk be szekventkalkulus segítségével, hogy a következő formula logikai törvény!

$$\forall x P(x) \vee \exists x \neg Q(x) \supset \exists x(Q(x) \supset P(x))$$

Megoldás

A bizonyítás az alábbi levezetés segítségével kapható:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q(p), P(p), \forall x P(x) \rightarrow \exists x(Q(x) \supset P(x)), P(p)}{P(p), \forall x P(x) \rightarrow \exists x(Q(x) \supset P(x)), Q(p) \supset P(p)}}{P(p), \forall x P(x) \rightarrow \exists x(Q(x) \supset P(x))}}{\forall x P(x) \rightarrow \exists x(Q(x) \supset P(x))} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q(x), \rightarrow \exists x(Q(x) \supset P(x)), P(x), Q(x)}{Q(x), \neg Q(x) \rightarrow \exists x(Q(x) \supset P(x)), P(x)}}{\neg Q(x) \rightarrow \exists x(Q(x) \supset P(x)), Q(x) \supset P(x)}}{\neg Q(x) \rightarrow \exists x(Q(x) \supset P(x))}}{\exists x \neg Q(x) \rightarrow \exists x(Q(x) \supset P(x))}}{\dfrac{\forall x P(x) \vee \exists x \neg Q(x) \rightarrow \exists x(Q(x) \supset P(x))}{\rightarrow \forall x P(x) \vee \exists x \neg Q(x) \supset \exists x(Q(x) \supset P(x))}}$$

Mivel a levezetésfa minden levele alapszekvent: $(P(p) \rightarrow P(p)$, illetve $Q(x) \rightarrow Q(x))$, így az állítás bizonyítást nyert.

11.P.3. Bizonyítsuk be a **11.P.2.** tételt!

11.P.4. Bizonyítsuk be a **11.P.3.** tételt!

11.P.5. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi szekventek bizonyíthatók a szekventkalkulusban! Mit bizonyítottunk ezzel a szekvent által meghatározott formulákról?

(a) $\rightarrow \exists x P(x) \supset \neg\forall x \neg P(x)$

(b) $\rightarrow \neg\forall x \neg P(x) \supset \exists x P(x)$

(c) $\rightarrow \exists x(R(x) \wedge P(x)) \supset \exists x R(x) \wedge \exists x P(x)$

(d) $\rightarrow \exists x(R(x) \vee P(x)) \supset \neg(\neg\exists x R(x) \wedge \forall x \neg P(x))$

(e) $\rightarrow \forall x(R(x) \wedge \neg P(x)) \supset \neg(\forall x R(x) \supset \exists x P(x))$

11.P.6. Bizonyítsuk be a szekventkalkulus segítségével, hogy az alábbi formulák ekvivalensek!

$$\forall x P(x) \supset \exists x Q(x) \;\sim\; \exists x(P(x) \supset Q(x))$$

Megoldás

Az ekvivalencia bizonyításához két állítást kell igazolni:

$$\vDash (\forall x P(x) \supset \exists x Q(x)) \supset \exists x(P(x) \supset Q(x))$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x), Q(x) \rightarrow \exists x(P(x) \supset Q(x)), Q(x)}{Q(x) \rightarrow \exists x(P(x) \supset Q(x)), P(x) \supset Q(x)}}{Q(x) \rightarrow \exists x(P(x) \supset Q(x))}}{\exists x Q(x) \rightarrow \exists x(P(x) \supset Q(x))} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \rightarrow \exists x(P(x) \supset Q(x)), P(x), Q(x)}{\rightarrow \exists x(P(x) \supset Q(x)), P(x), P(x) \supset Q(x)}}{\rightarrow \exists x(P(x) \supset Q(x)), P(x)}}{\rightarrow \exists x(P(x) \supset Q(x)), \forall x P(x)}}{\forall x P(x) \supset \exists x Q(x) \rightarrow \exists x(P(x) \supset Q(x))}}{\rightarrow (\forall x P(x) \supset \exists x Q(x)) \supset \exists x(P(x) \supset Q(x))}$$

$$\vDash \exists x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x P(x) \supset \exists x Q(x))$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q(x), \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x), Q(x)}{Q(x), \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)} \qquad \dfrac{P(x), \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x), P(x)}{\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x), P(x)}}{P(x) \supset Q(x), \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)}}{\exists x(P(x) \supset Q(x)), \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)}}{\exists x(P(x) \supset Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \supset \exists x Q(x)}}{\rightarrow \exists x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x P(x) \supset \exists x Q(x))}$$

11.P.7. Bizonyítsuk be a szekventkalkulusban az alábbi ekvivalenciákat, ha $x \notin \mathrm{Par}(A)$!

(a) $A \supset \forall x P(x) \ \sim\ \forall x(A \supset P(x))$

(b) $A \supset \exists x P(x) \ \sim\ \exists x(A \supset P(x))$

(c) $\forall x P(x) \supset A \ \sim\ \exists x(P(x) \supset A)$

(d) $\exists x P(x) \supset A \ \sim\ \forall x(P(x) \supset A)$

(e) $A \vee \forall x P(x) \ \sim\ \forall x(A \vee P(x))$

(f) $A \wedge \exists x P(x) \ \sim\ \exists x(A \wedge P(x))$

(g) $A \vee \neg\forall x P(x) \ \sim\ \exists x\neg(\neg A \wedge P(x))$

(h) $\neg(A \wedge \exists x\neg P(x)) \ \sim\ \forall x(\neg A \vee P(x))$

11.P.8. Bizonyítsuk be a szekventkalkulus segítségével a következmény-reláció fennállását!

(a) $\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x)), \exists x(R(x) \wedge P(x)) \ \vDash\ \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$

(b) $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)), \forall x(P(x) \supset R(x)) \ \vDash\ \neg\forall x(R(x) \supset Q(x))$

(c) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)), \forall x(P(x) \supset R(x)) \ \vDash\ \exists x(R(x) \wedge Q(x))$

11.P.9. Bizonyítsuk be a szekventkalkulus segítségével, hogy a **7.P.17.** feladatbeli következtetések helyesek!

11.P.10. Adjunk javaslatot arra, hogy

(a) hogyan válasszunk a $(\forall \rightarrow)$ és a $(\rightarrow \exists)$ levezetési szabályok alkalmazásakor termet;

(b) milyen sorrendben alkalmazzuk az alkalmazható szabályokat!

Indokoljunk!

12. Rezolúciós kalkulus

12.I. Ítéletlogika

12.I.1. Definíció. Az ítéletlogikában egy atomi formula (propozícionális betű) vagy annak negáltja közös néven nulladrendű *literál*. *Pozitív literál* egy atomi formula; *negatív literál* egy negált atomi formula.

12.I.2. Definíció. Egy nulladrendű *literál alapja* a literálban szereplő propozícionális betű. Ha két literálban a propozícionális betű ugyanaz, *azonos alapú literáloknak* nevezzük őket. Egy pozitív és egy negatív literál *komplemens literálpárt* alkot, ha azonos alapú literálok.

12.I.3. Definíció. Nulladrendű literálok diszjunkcióját *nulladrendű klóznak* nevezzük. Az egyetlen literálból álló klóz az *egységklóz*.

12.I.4. Megjegyzés. Egy klózban egy literál legfeljebb egyszer szerepel, mivel a diszjunkció idempotens, azaz $L \vee L \sim L$. Egy klózt ezért a benne szereplő literálok halmazaként is megadhatunk.

12.I.5. Definíció. Legyenek C_1 és C_2 pontosan egy komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Ha $C_1 = C_1' \vee L_1$ és $C_2 = C_2' \vee L_2$, ahol L_1 és L_2 a komplemens literálpár, akkor a (C_1, C_2) klózpár tagjai *rezolválhatók* egymással, és a $C_1' \vee C_2'$ klózt a (C_1, C_2) klózpár *rezolvensének* nevezzük. Ha $C_1 = L_1$ és $C_2 = L_2$, rezolvensük az *üres klóz* (jelölése $\square$).

12.I.6. Tétel. Ha $C_1 = C_1' \vee L_1$ és $C_2 = C_2' \vee L_2$ nulladrendű egymással rezolválható klózok, melyekben L_1 és L_2 az egyetlen komplemens literálpár, akkor $C_1, C_2 \vDash C_1' \vee C_2'$, azaz a rezolvens a rezolvált klózok logikai következménye.

12.I.7. Definíció. Egy S klózhalmazból a C klóz *rezolúciós levezetése* egy olyan véges $k_1, k_2, \ldots, k_m$ $(m \geq 1)$ klózsorozat, ahol a klózsorozat utolsó tagja, k_m, éppen a C klóz, és minden $j = 1, 2, \ldots..., m$-re

1. vagy $k_j \in S$,
2. vagy van olyan $1 \leq s, t < j$, hogy k_j a (k_s, k_t) klózpár rezolvense.

12.I.8. Tétel. Ha az S klózhalmazból van egy C klóznak rezolúciós levezetése, akkor $S \vDash C$.

12.I.9. Tétel. [A rezolúciós kalkulus helyessége.]
Ha egy S klózhalmazból levezethető az üres klóz, akkor S kielégíthetetlen.

12.I.10. Tétel. [A rezolúciós kalkulus teljessége.]
Ha az S véges klózhalmaz kielégíthetetlen, akkor S-ből levezethető az üres klóz.

12.I.11. Megjegyzés. Ha egy S klózhalmazból levezethető az üres klóz, akkor azt is szoktuk mondani, hogy S-nek van *rezolúciós cáfolata.*

12.I.12. Szabály. Arra, hogy egy A formula logikai törvény voltát, vagy az $A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash B$ következményreláció fennállását igazoljuk.

1. Egy A formula pontosan akkor törvény, ha $\neg A$ ellentmondásos; $A_1, A_2, \ldots A_n \vDash B$ pontosan akkor, ha $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ ellentmondásos. Legyen

   $$D \leftrightharpoons \begin{cases} \neg A & \text{az első esetben,} \\ A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B & \text{a második esetben.} \end{cases}$$

   D ellentmondásosságát kellene igazolnunk.

2. D-nek megkonstruáljuk a K konjunktív normálformáját. K nulladrendű klózok konjunkciója.

3. Legyen S ezen klózok halmaza. K pontosan akkor ellentmondásos, ha S kielégíthetetlen.

4. Keressük S-ből az üres klóz egy levezetését.

Ha véges számú rezolúciós lépés után megkapjuk az üres klózt, akkor D ellentmondásos, tehát az első esetben $\vDash A$, a második feladat esetében $A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash B$ igazolt.

12.I.13. Definíció. Egy S nulladrendű klózhalmazból való *lineáris rezolúciós levezetés* egy olyan $k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_{m-1}, l_{m-1}, k_m$ rezolúciós levezetés, amelyben minden $j = 2, 3, \ldots, m$-re k_j a (k_{j-1}, l_{j-1}) klózpár rezolvense. A k_j klózokat *centrális klózoknak*, az l_j klózokat *mellékklózoknak* nevezzük.

12.I.14. Tétel. A lineáris rezolúciós kalkulus teljes.

12.I.15. Definíció. Egy S klózhalmazból való *lineáris inputrezolúciós levezetés* egy olyan $k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_{m-1}, l_{m-1}, k_m$ lineáris rezolúciós levezetés, amelyben minden $j = 1, 2, \ldots, m-1$-re $l_j \in S$, azaz a lineáris inputrezolúciós levezetésben a mellékklózok S-nek elemei.

12.I.16. Definíció. Egy S klózhalmazból való *egységrezolúciós levezetés* olyan $k_1, k_2, \ldots, k_m$ rezolúciós levezetés, melyben minden $j = 1, 2, \ldots, m$-re, ha $k_j \notin S$, akkor k_j két olyan, őt a levezetésben megelőző k_s és k_t $(1 \leq s, t < j)$ klóznak a rezolvense, amelyek közül az egyik egységklóz.

12.I.17. Megjegyzés. A lineáris inputrezolúció és az egységrezolúció nem teljes stratégia (ha S nem tartalmaz egységklózt, a levezetés során nem mindig kapjuk meg az üresklózt, illetve a levezetést el sem lehet kezdeni, annak ellenére, hogy van az üres klóznak rezolúciós levezetése).

FELADATOK

12.I.1. Rezolválhatók-e az alábbi klózpárok? Ha igen, határozzuk meg a rezolvensüket!

(a) $X \vee Y \vee \neg Z$ és $\neg Y \vee W$

(b) $X \vee Y \vee \neg Z$ és $Y \vee \neg W$

(c) $X \vee Y \vee \neg Z$ és $\neg Y \vee Z$

(d) $X \vee Y \vee \neg Z$ és Z

(e) $\neg Z$ és Z

12.I.2. Melyik klózhalmazból van az üres klóznak rezolúciós levezetése?

(a) $\{\neg X,\ X \vee \neg Y,\ Y\}$

(b) $\{\neg X \vee Y,\ X \vee \neg Y,\ \neg X \vee \neg Y\}$

(c) $\{\neg X \vee Y,\ X \vee Y,\ \neg Y\}$

(d) $\{X \vee Y,\ \neg X \vee Y,\ X \vee \neg Y,\ \neg X \vee \neg Y\}$

(e) $\{X \vee Y,\ \neg Y \vee Z,\ \neg X \vee Z,\ \neg Z\}$

12.I.3. Bizonyítsuk be a **12.I.6**. tételt!

12.I.4. Bizonyítsuk be a **12.I.8**. tételt!

12.I.5. Bizonyítsuk be a **12.I.9**. tételt!

12.I.6. Bizonyítsuk be a **12.I.10**. tételt!

12.I.7. Rezolúcióval igazoljuk, hogy az

$$\{X \supset Y,\ Y \supset Z,\ X \vee U,\ U \supset (V \supset Z),\ \neg Z\}$$

formulahalmaznak logikai következménye a $\neg X$ formula!

Megoldás

Igazolnunk kell, hogy a

$$D = (X \supset Y) \wedge (Y \supset Z) \wedge (X \vee U) \wedge (U \supset (V \supset Z)) \wedge \neg Z \wedge \neg\neg X$$

ellentmondásos. Konjunktív normálformára hozunk:

$$(\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge (X \vee U) \wedge (\neg U \vee \neg V \vee Z) \wedge \neg Z \wedge X.$$

A klózhalmaz:

$$S = \{\neg X \vee Y, \neg Y \vee Z, X \vee U, \neg U \vee \neg V \vee Z, \neg Z, X\}.$$

Rezolúciós levezetéssel megpróbáljuk levezetni az üres klózt:

$$\begin{array}{lll}
1. & \neg X \vee \underline{Y} & [\in S] \\
2. & \underline{\neg Y} \vee Z & [\in S] \\
3. & \neg X \vee \underline{Z} & [1,\ 2 \text{ rezolvense}] \\
4. & \underline{\neg Z} & [\in S] \\
5. & \underline{\neg X} & [3,\ 4 \text{ rezolvense}] \\
6. & \underline{X} & [\in S] \\
7. & \square & [5,\ 6 \text{ rezolvense}]
\end{array}$$

Az S klózhalmaznak megszerkesztettük a rezolúciós cáfolatát, tehát D ellentmondásos, $\neg X$ pedig következménye a megadott formulahalmaznak. Szemléltethetjük a rezolúciós levezetést gráffal is:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg X, \underline{Y}\} \arrow[dr] & \{\underline{\neg Y}, Z\} \arrow[d] & \{X, U\} & \{\neg U, \neg V, Z\} & \{\underline{\neg Z}\} \arrow[ddll] & \{\underline{X}\} \arrow[dddll] \\
 & \{\neg X, \underline{Z}\} \arrow[dr] & & & & \\
 & & \underline{\neg X} \arrow[dr] & & & \\
 & & & \square & &
\end{tikzcd}$$

12.I.8. Igazoljuk rezolúcióval, hogy

(a) $X,\ Y,\ Z \supset U,\ Z \ \vDash\ X \wedge Y \wedge U$

(b) $X \vee Y,\ X \supset Z \vee U,\ Z \supset V \wedge W,\ W \wedge \neg S \supset \neg V \ \vDash \neg U \supset Y$

(c) $X,\ Y,\ X \wedge Y \supset Z,\ X \supset W \ \vDash\ Z \wedge W$

12.I.9. Vizsgáljuk meg rezolúcióval, hogy a **7.I.23.** feladatbeli következtetések helyesek-e!

12.I.10. Cáfoljuk rezolúcióval az alábbi klózhalmazokat! Próbáljunk lineáris és lineáris inputrezolúciós levezetéseket is adni!

(a) $\{X \vee Y,\ X \vee \neg Y,\ \neg X \vee Y,\ \neg X \vee \neg Y\}$

(b) $\{X \vee Y,\ \neg X,\ \neg Y \vee Z,\ \neg Y \vee \neg Z \vee W,\ X \vee \neg W\}$

12.I.11. Írjunk programot, amelyik megkap egy véges klózhalmazt, és ha van rezolúciós cáfolata, keres egyet!

12.I.12. Írjunk programot, amelyik egy véges klózhalmaz rezolúciós cáfolatát lineáris rezolúcióval keresi!

12.P. Elsőrendű logika

12.P.1. Definíció. Egy elsőrendű logikai nyelvben egy atomi formula vagy annak a negáltja közös néven *elsőrendű literál*. *Pozitív literál* egy atomi formula; *negatív literál* egy negált atomi formula.

12.P.2. Definíció. Egy elsőrendű *literál alapja* a literálban szereplő atom. Ha két literálban az atomi formula ugyanaz, *azonos alapú literáloknak* nevezzük őket. Egy pozitív és egy negatív literál *komplemens literálpárt* alkot, ha azonos alapú literálok.

12.P.3. Definíció. *Elsőrendű klóznak* nevezünk egy olyan zárt univerzális Skolem-formulát, amelynek a magja elsőrendű literálok diszjunkciója. Jelölje C^M a klóz magját. Általában csak a klóz magját szoktuk leírni, mikor klózról beszélünk.

12.P.4. Definíció. Legyenek C_1 és C_2 változó-tiszta klózok és magjaik rendre $C_1^M = C_1^{M'} \vee L_1^1 \vee \ldots \vee L_1^k$ és $C_2^M = C_2^{M'} \vee L_2^1 \vee \ldots \vee L_2^l$ $(k, l \geq 1)$ alakúak, ahol az $\{L_1^i \,|\, i = 1, \ldots, k\}$ és az $\{L_2^j \,|\, j = 1, \ldots, l\}$ literálhalmazok közül az egyik csupa pozitív, a másik pedig csupa negatív literált tartalmaz. Ha az $\{L_1^i \,|\, i = 1, \ldots, k\} \cup \{L_2^j \,|\, j = 1, \ldots, l\}$ halmazban levő literálok alapjai illeszthetők egymáshoz, legyen θ a legáltalánosabb illesztő helyettesítésük. Ekkor a C_1 és C_2 klózok *rezolválhatók* egymással, és *elsőrendű rezolvensük* a $C_1^{M'}\theta \vee C_2^{M'}\theta$ magú klóz. Ha $C_1^M = L_1^1 \vee \ldots \vee L_1^k$ és $C_2^M = L_2^1 \vee \ldots \vee L_2^l$, rezolvensük az *üres klóz* (jelölése $\square$).

12.P.5. Tétel. Ha a C_1 és C_2 klózok elsőrendű rezolvense a C klóz, akkor $C_1, C_2 \vDash C$, azaz a rezolvens a rezolvált klózok logikai következménye.

12.P.6. Definíció. Egy S elsőrendű klózhalmazból a C klóz *elsőrendű rezolúciós levezetése* elsőrendű klózoknak egy olyan véges $k_1, k_2, \dots, k_m$ ($m \geq 1$) sorozata, ahol a klózsorozat utolsó tagja, k_m, éppen a C klóz, és minden $j = 1, 2, \dots, m$-re

1. vagy $k_j \in S$,
2. vagy van olyan $1 \leq s, t < j$, hogy k_j a k_s és a k_t klózok elsőrendű rezolvense.

12.P.7. Tétel. Ha az S klózhalmazból van egy C klóznak elsőrendű rezolúciós levezetése, akkor $S \vDash C$.

12.P.8. Tétel. [A rezolúciós kalkulus helyessége.]
Ha egy S elsőrendű klózhalmazból van az üres klóznak elsőrendű rezolúciós levezetése, akkor S kielégíthetetlen.

12.P.9. Tétel. [A rezolúciós kalkulus teljessége.]
Ha egy S elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen, akkor S-ből van az üres klóznak elsőrendű rezolúciós levezetése.

12.P.10. Szabály. Arra, hogy egy A formula logikai törvény voltát, vagy az $A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B$ következményreláció fennállását igazoljuk.

1. Egy A formula pontosan akkor törvény, ha $\neg A$ ellentmondásos; $A_1, A_2, \dots A_n \vDash B$ pontosan akkor, ha $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$ ellentmondásos. Legyen

$$D \leftrightharpoons \begin{cases} \neg A & \text{az első esetben,} \\ A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B & \text{a második esetben.} \end{cases}$$

   D ellentmondásosságát kellene igazolnunk.

2. D-nek megkonstruáljuk a K univerzális Skolem-normálformáját. Skolem tétele szerint D akkor és csak akkor ellentmondásos, ha K ellentmondásos.
3. Egy K univerzális Skolem-normálforma felírható elsőrendű klózok konjunkciójaként (visszafele alkalmazzuk a konjunkcióra vonatkozó kétoldali kvantorkiemelési szabályt). Legyen S ezen klózok halmaza. K pontosan akkor ellentmondásos, ha az S elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen.
4. Keressük S-ből az üres klóz elsőrendű rezolúciós levezetését.

Ha véges számú rezolúciós lépés után megkapjuk az üres klózt, akkor D ellentmondásos, tehát az első esetben $\vDash A$, a második feladat esetében pedig $A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash B$ bizonyított.

12.P.11. Megjegyzés. A rezolúciós stratégiákat ugyanúgy definiáljuk, mint az ítéletlogikai rezolúciós kalkulusban.

FELADATOK

12.P.1. Rezolválhatók-e az alábbi klózpárok? Ha igen, határozzuk meg a rezolvensüket!

(a) $\neg P(x) \vee Q(x,b)$ és $P(a) \vee Q(a,b)$

(b) $\neg P(x) \vee \neg Q(x,x)$ és $Q(f(a),a)$

(c) $P(x) \vee R(x)$ és $\neg P(f(y)) \vee Q(y,a)$

(d) $\neg P(x) \vee \neg P(f(a))$ és $P(f(y))$

(e) $P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$ és $\neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$

12.P.2. Írjunk programot, amelyik eldönti, hogy két elsőrendű klóz rezolválható-e, és ha igen előállítja a rezolvensüket!

12.P.3. Az alábbi klózhalmazok közül melyekből van az üres klóznak rezolúciós levezetése?

(a) $\{\neg Q(x,y) \vee \neg P(x),\ Q(x,y) \vee \neg P(x),\ P(a)\}$

(b) $\{P(x),\ \neg R(x) \vee P(a),\ \neg Q(x) \vee R(x),\ Q(a) \vee R(x)\}$

(c) $\{P(a),\ \neg P(b),\ \neg P(x) \vee \neg P(y) \vee \neg S(x,f(y),z) \vee P(z),$
$S(x,f(x),b)\}$

(d) $\{\neg P(x) \vee Q(f(x),x),\ P(g(a)),\ \neg Q(x,y)\}$

(e) $\{P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y)),\ \neg P(f(g(a))) \vee Q(y)\}$

(f) $\{\neg P(x) \vee Q(y,y) \vee Q(x,y),\ \neg P(x) \vee \neg Q(y,y) \vee \neg Q(x,y),$
$P(x)\}$

12.P.4. Bizonyítsuk be a **12.P.7**. tételt!

12.P.5. Elsőrendű rezolúciós kalkulussal igazoljuk, hogy a

$$\exists x \exists y \forall z (R(x,y) \supset R(y,z) \wedge R(z,z))$$

formula logikai törvény!

Megoldás

Negáljuk a formulát:

$$\Dashv \neg\exists x\exists y\forall z(R(x,y) \supset R(y,z) \wedge R(z,z))$$

Literál alakra hozunk:

$$\Dashv \neg\exists x\exists y\forall z(\neg R(x,y) \vee (R(y,z) \wedge R(z,z)))$$

$$\Dashv \forall x\forall y\exists z\neg(\neg R(x,y) \vee (R(y,z) \wedge R(z,z)))\ \text{(kvantoros De Morgan)}$$

$$\Dashv \forall x\forall y\exists z(R(x,y) \wedge (\neg R(y,z) \vee \neg R(z,z)))\ \text{(De Morgan)}$$

Csökkentjük a kvantorok hatáskörét (egy- illetve kétoldali kvantorkiemelés)

$$\Dashv \forall x\forall y R(x,y) \wedge (\forall y\underset{\substack{\uparrow\\ f(y)}}{\exists z}\neg R(y,z) \vee \underset{\substack{\uparrow\\ a}}{\exists z}\neg R(z,z))$$

Skolemizálás után:

$$\Dashv \forall x\forall y R(x,y) \wedge \forall y(\neg R(y,f(y)) \vee \neg R(a,a))$$

Változótiszta klózokat állítunk elő:

$$\Dashv \forall x\forall y R(x,y) \wedge \forall y'(\neg R(y',f(y')) \vee \neg R(a,a))$$

A klózhalmaz:

$$S = \{R(x,y), \neg R(y',f(y')) \vee \neg R(a,a)\}$$

Rezolúciós levezetéssel megpróbáljuk levezetni az üres klózt:

1.	$\underline{R(x,y)}$	$[\in S]$
2.	$\underline{\neg R(y',f(y'))} \vee \neg R(a,a)$	$[\in S]$
3.	$\underline{\neg R(a,a)}$	[1, 2 rezolvense, $\theta_1 = \{x/y', y/f(y')\}$]
4.	$\square$	[1, 3 rezolvense, $\theta_2 = \{x/a, y/a\}$]

Az S klózhalmaznak megszerkesztettük a rezolúciós cáfolatát.

12.P.6. Elsőrendű rezolúciós kalkulussal igazoljuk, hogy az alábbi formulák logikai törvények!

(a) $(\exists x P(x) \supset \forall x Q(x)) \supset \forall x(P(x) \supset Q(x))$

(b) $\exists x\forall y R(x,y) \supset \forall y\exists x R(x,y)$

(c) $\exists x\forall y R(x,y) \wedge \forall x\forall y(\neg R(x,y) \vee Q(x,y)) \supset \exists x\forall y Q(x,y)$

(d) $\forall x\forall y((R(x,y) \supset \neg Q(y,x)) \wedge \exists z Q(z,x)) \supset \exists x\exists y\neg R(x,y)$

(e) $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \wedge \exists x Q(x) \wedge \forall x(Q(x) \supset \neg P(x)) \supset \forall x Q(x)$

12.P.7. Bizonyítsuk rezolúcióval az alábbi következtetés helyességét!

Mindenki, aki tud olvasni, az írástudó. A delfinek nem írástudók. Vannak intelligens delfinek. Tehát vannak olyan intelligens lények, akik nem tudnak olvasni.

Megoldás

Definiálunk egy elsőrendű logikai nyelvet.

> Az $x, y, z, \ldots$ változók objektumtartománya legyen az élőlények halmaza.
> Jelentse:
> $O(x)$ – x tud olvasni
> $T(x)$ – x írástudó
> $D(x)$ – x delfin
> $I(x)$ – x intelligens

Formalizáljuk a feladatot

$$\begin{array}{l} \forall x(O(x) \supset T(x)) \\ \forall x(D(x) \supset \neg T(x)) \\ \underline{\exists x(D(x) \wedge I(x))} \\ \exists x(I(x) \wedge \neg O(x)) \end{array}$$

Be kell bizonyítanunk, hogy

$$\begin{aligned} &\forall x(O(x) \supset T(x)) \wedge \forall x(D(x) \supset \neg T(x)) \wedge \exists x(D(x) \wedge I(x)) \wedge \\ &\quad \wedge \neg \exists x(I(x) \wedge \neg O(x)) \end{aligned}$$

kielégíthetetlen.

Literál alakra hozunk:

$$\begin{aligned} &\forall x(\neg O(x) \vee T(x)) \wedge \forall x(\neg D(x) \vee \neg T(x)) \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ a}}{\exists x}(D(x) \wedge I(x)) \wedge \\ &\quad \wedge \forall x(\neg I(x) \vee O(x))) \end{aligned}$$

Mivel a kvantorok hatáskörét nem lehet csökkenteni, máris skolemizálunk:

$$\begin{aligned} &\forall x(\neg O(x) \vee T(x)) \wedge \forall x(\neg D(x) \vee \neg T(x)) \wedge D(a) \wedge I(a) \wedge \\ &\quad \wedge \forall x(\neg I(x) \vee O(x))) \end{aligned}$$

Változótiszta alakra hozunk:

$$\begin{aligned} &\forall x(\neg O(x) \vee T(x)) \wedge \forall y(\neg D(y) \vee \neg T(y)) \wedge D(a) \wedge I(a) \wedge \\ &\quad \wedge \forall z(\neg I(z) \vee O(z))) \end{aligned}$$

A klózok magjainak halmaza:

$$S = \{\neg O(x) \vee T(x), \neg D(y) \vee \neg T(y), D(a), I(a), \neg I(z) \vee O(z)\}$$

Rezolúciós levezetés:

1.	$\underline{\neg D(y)} \vee \neg T(y)$	$[\in S]$
2.	$\underline{D(a)}$	$[\in S]$
3.	$\underline{\neg T(a)}$	[1, 2 rezolvense, $\theta_1 = \{y/a\}$]
4.	$\underline{\neg O(x)} \vee \underline{T(x)}$	$[\in S]$
5.	$\underline{\neg O(a)}$	[3, 4 rezolvense, $\theta_2 = \{x/a\}$]
6.	$\underline{I(a)}$	$[\in S]$
7.	$\underline{\neg I(z)} \vee O(z)$	$[\in S]$
8.	$\underline{O(a)}$	[6, 7 rezolvense, $\theta_3 = \{z/a\}$]
9.	$\square$	[5, 8 rezolvense]

Sikerült megszerkesztenünk az S halmaz rezolúciós cáfolatát, tehát a *következtetésünk helyes.*

Grafikusan

$$
\begin{tikzcd}
\{\neg O(x), \underline{T(x)}\} \arrow[dd, "\{x/a\}"] & \{\underline{\neg D(y)}, \neg T(y)\} \arrow[d, "\{y/a\}"'] & \{\underline{D(a)}\} \arrow[dl] & \{\underline{I(a)}\} \arrow[d] & \{\underline{\neg I(z)}, O(z)\} \arrow[dl, "\{z/a\}"] \\
 & \{\underline{\neg T(a)}\} \arrow[dl] & & \{\underline{O(a)}\} \arrow[ddl] & \\
\{\underline{\neg O(a)}\} \arrow[drr] & & & & \\
 & & \square & &
\end{tikzcd}
$$

12.P.8. Vizsgáljuk meg rezolúcióval, hogy a **7.P.17.** feladatbeli következtetések helyesek-e!

12.P.9. Határozzuk meg az alábbi klózhalmazok valamely rezolúciós cáfolatát! Próbáljunk lineáris és lineáris inputrezolúciós levezetéseket is adni!

(a) $\{\neg P(x),\ P(x) \vee \neg Q(x),\ P(x) \vee \neg R(x),\ Q(x) \vee R(x)\}$

(b) $\{\neg P(x,y), P(x,y) \vee \neg Q(x,z) \vee \neg P(z,y),\ \neg Q(x,y) \vee P(x,y),$
$Q(a,b),\ Q(b,c)\}$

13. A logikai programozás alapjai

13.P. Elsőrendű logika

13.P.1. Definíció. Egy elsőrendű *Horn-formula* olyan univerzális Skolem-forma, amelynek magja legfeljebb egy pozitív literált tartalmazó klózok, ún. *Horn-klózok* konjunkciója.

- A pontosan egy pozitív literált tartalmazó Horn-klózok a *definit klózok*:

  - *szabály*

    $$\forall x_1 \ldots \forall x_k \quad (\underbrace{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n}_{\substack{\vee \\ \text{test}}} \quad \supset \underset{\substack{\downarrow \\ \text{fej}}}{B})$$

    $$\sim \forall x_1 \ldots \forall x_k \, (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B)$$

    zárt formula, ahol A_j $(j = 1, \ldots, n)$, B atomi formulák.

  - *tény*

    $$\forall x_1 \ldots \forall x_k \, B$$

    zárt formula, ahol B atomi formula.

- A *célformula* egy csak negatív literált tartalmazó Horn-klóz (a *célklóz*) negáltja:

  $$\exists x_1 \ldots \exists x_k \, (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n)$$
  $$\sim \neg \forall x_1 \ldots \forall x_k \, (\neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \ldots \vee \neg C_n),$$

  ahol A_j $(j = 1, \ldots, n)$ atomi formulák.

- A feladat:

  - Legyenek $H_1, \ldots, H_m$ definit klózok, C pedig egy célformula. Döntsük el, hogy a

    $$H_1 \wedge \ldots \wedge H_m \supset C$$

    formula logikai törvény-e.

– Legyen $C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$ a célformula magja. Keressünk egy

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \\ t_1 & \ldots & t_k \end{pmatrix}$$

termhelyettesítést, amelyre a

$$H_1 \wedge \ldots \wedge H_m \supset (C_1 \wedge \ldots \wedge C_n)\,\theta$$

formula logikai törvény. Amennyiben létezik ilyen θ helyettesítés, az eredmény a θ *válaszhelyettesítés*.

A megoldást megkaphatjuk lineáris rezolúcióval.

13.P.2. Tétel.

1. Két Horn-klóz rezolvense Horn-klóz.
2. Célklóz és definit klóz rezolvense célklóz.

13.P.3. Tétel. Elsőrendű Horn-formulák esetén az elsőrendű lineáris inputrezolúció teljes stratégia.

13.P.4. Definíció. Az *SLD*[23] *rezolúció* egy rezolúciós stratégia, amely

(D) definit klózokat használ;

(L) lineáris inputstratégiával dolgozik;

(S) a célklózban a feldolgozandó literált és a rezolválás során felhasználandó definit-klózt egy rögzített (S) stratégia alapján választja ki.

Az alkalmazott (S) stratégia alapján beszélhetünk mélységi, szélességi, illetve más (pl. heurisztikán alapuló) keresésről.

13.P.5. Definíció. *SLD levezetés* célklózoknak egy sorozata, melynek első eleme az eredeti célklóz, és minden újabb elemét az aktuális célklóz és egy definit-klóz SLD rezolvense adja meg. Minden lépéshez illesztő helyettesítés is tartozhat.

13.P.6. Algoritmus. Az SLD algoritmus lépései a mélységi-bejárás stratégia (S) szerint (a teljes levezetési fát felépíti):

1. Legyen az aktuális célklóz az eredeti célklóz (ez lesz a levezetési fa gyökere).

[23] *L*inear resolution for *D*efinite clauses with *S*election function

2. Ha az aktuális célklóz az üres klóz, akkor megkaptuk a rezolúciós cáfolatot. A célklóz sikeres minősítést kap, az algoritmus jelzi, hogy van sikeres levezetés, a 6. lépés következik.

3. Kiválasztjuk a célklózból a „balról első” literált (S stratégia).

4. Kiválasztjuk hozzá a megfelelő fejjel rendelkező soron következő (induláskor első) definit-klózt (S stratégia). Ha már nincs több adott fejjel rendelkező elem, a 6. lépés következik.

5. Ha a kiválasztott célklózbeli literál és a definit-klóz fejének az illesztése sikeres, akkor előállítjuk a rezolvenst, ez lesz az aktuális célklóz és a 2. pont következik. Különben ez a választás „kudarcos” minősítést kap, és újból a 4. pont következik.

6. Ha az aktuális célklóz a gyökér, az algoritmus befejeződik. Különben visszalépünk az aktuális célklózból az előző célklózra (ez lesz az új aktuális célklóz), és a 3. lépéssel folytatjuk.

13.P.7. Megjegyzés.

- A *deklaratív programozási nyelvek* nem algoritmikus nyelvek, a programozó csak a megoldandó feladatot írja le, azt nem, hogy a megoldást hogyan kell előállítani. A feladatot a rendszer oldja meg. Nincs utasításfogalom, a tárhely értékeit nem lehet módosítani.

- A *logikai programozási nyelvek*, mint például a *Prolog*, relációkat adnak meg a *tudásbázisukkal*, és relációkat kérdeznek le. A válaszadás „hogyanja” a rendszer feladata. Egy Prolog tudásbázis tényekből és szabályokból (definit klózokból) áll. (Egy *adatbázis* csak tényeket tartalmaz.) A Prolog program tartalmaz továbbá egy célformulát (csak negatív literált tartalmazó Horn-klózt), ami a kérdést írja le. A szintaxis a következő:

  – szabály: $B\texttt{:-}A_1, \ldots, A_n$.

  – tény: B.

  – célformula: `?-` $C_1, \ldots, C_n$.

- Prologban a predikátumszimbólumok és konstansszimbólumok kötelezően kisbetűvel, míg a változónevek nagybetűvel kezdődnek.

- A választ a Prolog rendszer SLD rezolúcióval adja meg. Az SLD levezetés egy lépése a következő, ha az aktuális célformula

$$?\text{-}\ C_1, \ldots, C_p, \ldots, C_n.$$

1. Kiválasztunk egy atomot a célformulából az S stratégia szerint (mélységi bejárás esetén az első atomot), legyen ez C_p.
2. Választunk egy definit klózt a tudásbázisból az S stratégia szerint, legyen ez
$$B :\text{-}\ A_1, \ldots, A_k.$$
3. Átnevezzük a változókat, hogy különbözzenek a célformulában szereplőktől:
$$B' :\text{-}\ A'_1, \ldots, A'_k.$$
4. Megkeressük C_p és B' legáltalánosabb illesztő helyettesítését, ha illeszthetők. Legyen ez θ, tehát
$$C_p\,\theta = B'\,\theta.$$
Ha nem illeszthető a két atom, a 2. lépéssel folytatjuk.
5. Az új aktuális célformula:
$$?\text{-}\ C_1\,\theta, \ldots, C_{p-1}\,\theta, A'_1\,\theta, \ldots, A'_k\,\theta, C_{p+1}\,\theta, \ldots, C_n\,\theta.$$

FELADATOK

13.P.1. Bizonyítsuk be a **13.P.2.** tétel állításait!

13.P.2. Egy város tömegközlekedése leírására használhatunk elsőrendű logikát. $Szomszédos(n, x, y)$ jelentse azt, hogy x megálló után y következik az n vonalon.

(a) Adjunk meg elsőrendű formulákat, amelyek a következő predikátumokat definiálhatják:

- $Közel(x, y)$ – x és y megállók közel vannak egymáshoz (ugyanazon a vonalon eljuthatok x-ből y-ba, és legfeljebb egy megálló van köztük).
- $Vonalon(n, x)$ – x megálló az n vonalon van.
- $Közös(x, m, n)$ – x az m és n vonalak közös megállója.

Megoldás

- $\forall x \forall y(\exists m Szomsz\acute{e}dos(m,x,y) \vee \exists z \exists n(Szomsz\acute{e}dos(n,x,z) \wedge$
  $\wedge\, Szomsz\acute{e}dos(n,z,y)) \supset K\ddot{o}zel(x,y))$
- $\forall x \forall n(\exists y Szomsz\acute{e}dos(n,x,y) \vee \exists z Szomsz\acute{e}dos(n,z,x)) \supset$
  $\supset V onalon(n,x))$
- $\forall x \forall m \forall n(V onalon(m,x) \wedge V onalon(n,x) \supset K\ddot{o}z\ddot{o}s(x,m,n))$

(b) Alakítsuk a fenti formulákat klózokká.

Megoldás

- $\forall x \forall y(\exists m Szomsz\acute{e}dos(m,x,y) \vee \exists z \exists n(Szomsz\acute{e}dos(n,x,z) \wedge$
  $\wedge\, Szomsz\acute{e}dos(n,z,y)) \supset K\ddot{o}zel(x,y))$
  $\sim \forall x \forall y(\exists m \exists z \exists n(Szomsz\acute{e}dos(m,x,y) \vee (Szomsz\acute{e}dos(n,x,z) \wedge$
  $\wedge\, Szomsz\acute{e}dos(n,z,y))) \supset K\ddot{o}zel(x,y))$
  $\sim \forall x \forall y \forall m \forall z \forall n(Szomsz\acute{e}dos(m,x,y) \vee (Szomsz\acute{e}dos(n,x,z) \wedge$
  $\wedge\, Szomsz\acute{e}dos(n,z,y)) \supset K\ddot{o}zel(x,y))$
  $\sim \forall x \forall y \forall m \forall z \forall n(\neg(Szomsz\acute{e}dos(m,x,y) \vee (Szomsz\acute{e}dos(n,x,z) \wedge$
  $\wedge\, Szomsz\acute{e}dos(n,z,y))) \vee K\ddot{o}zel(x,y))$
  $\sim \forall x \forall y \forall m \forall z \forall n(\neg Szomsz\acute{e}dos(m,x,y) \wedge (\neg Szomsz\acute{e}dos(n,x,z) \vee$
  $\vee \neg Szomsz\acute{e}dos(n,z,y))) \vee K\ddot{o}zel(x,y))$
  $\sim \forall x \forall y \forall m \forall z \forall n((\neg Szomsz\acute{e}dos(m,x,y) \vee K\ddot{o}zel(x,y)) \wedge$
  $\wedge\, (\neg Szomsz\acute{e}dos(n,x,z) \vee \neg Szomsz\acute{e}dos(n,z,y) \vee$
  $\vee\, K\ddot{o}zel(x,y)))$
  $\sim \forall x \forall y \forall m(\neg Szomsz\acute{e}dos(m,x,y) \vee K\ddot{o}zel(x,y)) \wedge$
  $\wedge \forall x \forall y \forall z \forall n(\neg Szomsz\acute{e}dos(n,x,z) \vee \neg Szomsz\acute{e}dos(n,z,y) \vee$
  $\vee\, K\ddot{o}zel(x,y))$
  Két Horn-klóz konjunkcióját kaptuk.
- $\forall x \forall n(\exists y Szomsz\acute{e}dos(n,x,y) \vee \exists z Szomsz\acute{e}dos(n,z,x) \supset$
  $\supset V onalon(n,x))$
  $\sim \forall x \forall n(\neg(\exists y Szomsz\acute{e}dos(n,x,y) \vee \exists z Szomsz\acute{e}dos(n,z,x)) \vee$
  $\vee\, V onalon(n,x))$
  $\sim \forall x \forall n((\forall y \neg Szomsz\acute{e}dos(n,x,y) \wedge \forall z \neg Szomsz\acute{e}dos(n,z,x)) \vee$
  $\vee\, V onalon(n,x))$
  $\sim \forall x \forall n \forall y \forall z((\neg Szomsz\acute{e}dos(n,x,y) \vee V onalon(n,x)) \wedge$
  $\wedge\, (\neg Szomsz\acute{e}dos(n,z,x) \vee V onalon(n,x)))$
  $\sim \forall x \forall n \forall y(\neg Szomsz\acute{e}dos(n,x,y) \vee V onalon(n,x)) \wedge$
  $\wedge \forall x \forall n \forall z(\neg Szomsz\acute{e}dos(n,z,x) \vee V onalon(n,x))$
  Két Horn-klóz konjunkcióját kaptuk.

- $\forall x \forall m \forall n(Vonalon(m,x) \wedge Vonalon(n,x) \supset Közös(x,m,n))$
  $\sim \forall x \forall m \forall n(\neg Vonalon(m,x) \vee \neg Vonalon(n,x) \vee Közös(x,m,n))$
  Egy Horn-klózt kaptuk.

(c) Adjuk meg a fenti szabályokat tartalmazó Prolog programot.

Megoldás

```
kozel(X,Y) :- szomszedos(N,X,Y).
kozel(X,Y) :- szomszedos(N,X,Z), szomszedos(N,Z,Y).
vonalon(N,X) :- szomszedos(N,X,Y).
vonalon(N,X) :- szomszedos(N,Y,X).
kozos(X,M,N) :- vonalon(M,X), vonalon(N,X).
```

(d) $Gyalog(x,y)$ jelentse azt, hogy az x megállóból könnyen eljuthatunk gyalog az y megállóba. Egészítsük ki az előző pontbeli programot a következő (esetleg rekurzív) szabályokkal:

- $Elér(n,x,y)$ – x-ből eljuthatunk y-ba az n vonalon.
- $Átszáll(m,x,n,y)$ – m vonal x megállójából átszállhatunk az n vonalra az y megállóban.
- $Eljut(x,y)$ – x megállóból eljuthatunk y-ba, esetleg átszállással.

Megoldás

```
eler(N,X,Y) :- szomszedos(N,X,Y).
eler(N,X,Y) :- szomszedos(N,X,Z),eler(N,Z,Y).
atszall(M,X,N,X) :- kozos(X,M,N).
atszall(M,X,N,Y) :- vonalon(M,X), vonalon(N,Y), gyalog(X,Y).
eljut(X,Y) :- eler(N,X,Y).
eljut(X,Y) :- eler(M,X,Z), atszall(M,Z,N,V), eljut(V,Y).
```

(e) A kolozsvári tömegközlekedésről ismerjük a következőket:

Megállók a 25-ös vonalon:
Monostor VÁ, MacDonalds1, Big, Agronómia, Mócok útja, Unió utca, Vasútigazgatóság, Szentpéteri, Mărăşti piac, Mărăşti tér, Kampusz, Iulius Mall, Györgyfalvi, Merkur, Interservisan, Méhes-utca, Kispiac, Katedrális, Zöld cukrászda, Gyerekkorház, Sörgyár, Kálvária, Tavasz utca, MacDonalds2, Monostor VÁ.

Megállók a 35-ös vonalon:
Hajnal negyed VÁ, Csillagvizsgáló1, Tordai út1, Kispiac, Katedrális, Piac1, Horea út, Vasútállomás, Rendőrség, Piac2, Opera, Tordai út2, Csillagvizsgáló2, Hajnal negyed VÁ.

Közeli megállópárok:
Katedrális – Vasútigazgatóság, Kispiac – Opera, Katedrális – Opera.

Írjuk meg a Prolog programrészletet ezekkel a tényekkel, az (a) és (c) pontban megadott predikátumokat használva.

Megoldás

```
szomszedos(25, monostor, macDonalds1).
szomszedos(25, macDonalds1, big).
szomszedos(25, big, agronomia).
...
szomszedos(25, vasutigazgatosag, szentpeteri).
...
szomszedos(25, marastiter, kampusz).
...
szomszedos(25, kispiac, katedralis).
szomszedos(25, katedralis, zoldcuki).
...
szomszedos(25, macDonalds2, monostor).
szomszedos(35, csillagvizsgalo1, tordaiut1).
szomszedos(35, tordaiut1, kispiac).
szomszedos(35, kispiac, katedralis).
szomszedos(35, katedralis, piac1).
...
gyalog(katedralis, vasutig).
gyalog(kispiac, opera).
gyalog(katedralis, opera).
...
```

(f) Az előző pontokban összeállított Prolog program tényeiből és szabályaiból SLD rezolúció segítségével lássuk be, hogy

1. a Kispiac és Katedrális megállók közel vannak egymáshoz;
2. a Kispiac és Piac1 megállók közel vannak egymáshoz;
3. a Big megállóból eljuthatunk az Agronómia megállóba;
4. a Big megállóból eljuthatunk a Kampusz megállóba;
5. az Interservisan megállóból eljuthatunk az állomásra;
6. a Csillagvizsgáló megállóból eljuthatunk a Kampusz megállóba.

Megoldás

A programunk:

```
szomszedos(25, monostor, macDonalds).
szomszedos(25, macDonalds, big).
szomszedos(25, big, agronomia).
...
szomszedos(25, vasutigazgatosag, szentpeteri).
...
szomszedos(25, marastiter, kampusz).
...
szomszedos(25, kispiac, katedralis).
szomszedos(25, katedralis, zoldcuki).
...
szomszedos(25, macDonalds2, monostor).
szomszedos(35, csillagvizsgalo1, tordaiut1).
szomszedos(35, tordaiut1, kispiac).
szomszedos(35, kispiac, katedralis).
szomszedos(35, katedralis, piac1).
...
gyalog(katedralis, vasutig).
gyalog(kispiac, opera).
gyalog(katedralis, opera).
...
kozel(X,Y) :- szomszedos(N,X,Y).
kozel(X,Y) :- szomszedos(N,X,Z), szomszedos(N,Z,Y).
vonalon(N,X) :- szomszedos(N,X,Y).
vonalon(N,X) :- szomszedos(N,Y,X).
kozos(X,M,N) :- vonalon(M,X), vonalon(N,X).
```

```
eler(N,X,Y) :- szomszedos(N,X,Y).
eler(N,X,Y) :- szomszedos(N,X,Z),eler(N,Z,Y).
atszall(M,X,N,X) :- kozos(X,M,N).
atszall(M,X,N,Y) :- vonalon(M,X), vonalon(N,Y), gyalog(X,Y).
eljut(X,Y) :- eler(N,X,Y).
eljut(X,Y) :- eler(M,X,Z), atszall(M,Z,N,V), eljut(V,Y).
```

1. Célformula:

```
?- kozel(kispiac,katedralis).
```

SLD rezolúciós levezetésben a stratégiának megfelelően a célformula első atomját próbáljuk illeszteni a programban megadott tényekkel és szabályokkal, fentről lefele haladva:

illesztés: `kozel(X,Y).`
új cél:
`?- szomszedos(N,kispiac,katedralis).`
illesztés: `szomszedos(25,kispiac,katedralis).`
új cél:
`?- szomszedos(25,kispiac,katedralis).`
`true.`

2. Célformula

```
?- kozel(kispiac,piac1).
```

illesztés: `kozel(X,Y).`
új cél:
`?- szomszedos(N,kispiac,piac1).`
nem illeszthető
back-tracking
új cél:
`?- kozel(kispiac,piac1).`
illesztés: `kozel(X,Y).` következő szabály
új cél:
`?- szomszedos(N,kispiac,Z), szomszedos(N,Z,piac1).`
illesztés: `szomszedos(25,kispiac,katedralis).`
új cél:
`?- szomszedos(25,katedralis,piac1).`
nem illeszthető, back-tracking
új cél:
`?- szomszedos(N,kispiac,Z), szomszedos(N,Z,piac1).`

illesztés: `szomszedos(35,kispiac,katedralis).`
új cél:
```
?- szomszedos(35,katedralis,piac1).
true.
```

(g) Az (f) pontban összeállított Prolog program alapján SLD rezolúciót alkalmazva válaszoljunk a következő kérdésekre:

1. Közel van-e a Piac2 és a Vasútigazgatóság megálló?
2. Közel van-e a Csillagvizsgáló és a Kampusz megálló?
3. Egy vonalon van-e a Csillagvizsgáló és a Kampusz megálló?
4. Eljuthatunk-e az állomásról a Kampuszba?

(h) Mit jelentenek a (g) pontban kapott negatív eredmények? Valóban nincsenek tömegközlekedési eszközök, amelyekkel eljuthatnánk egyik megállóból a másikba? Mit jelent itt a *procedurális tagadás* fogalma?

(i) Az előző pontokban összeállított Prolog program tényeiből és szabályaiból SLD rezolúció segítségével keressük meg, hogy melyik vonalon tudunk eljutni

1. a Tordai úti megállóból a Kispiac megállóba;
2. a Kispiac megállóból a Katedrális megállóba;
3. a Csillagvizsgáló1 megállóból a Katedrális megállóba;
4. a Katedrális megállóból a állomásra;
5. a Csillagvizsgáló megállóból a Kampuszba.

Megoldás

1. `?- eler(N,tordaiut1,kispiac).`

illesztés: `eler(N,X,Y).`
új cél:
```
?- szomszedos(N,tordaiut1,kispiac).
```
illesztés: `szomszedos(35,tordaiut,kispiac).`
új cél:
```
?- szomszedos(35,tordaiut1,kispiac).
N = 35.
```

2. `?- eler(N,kispiac,katedralis).`

illesztés: `eler(N,X,Y).`
új cél:

```
?- szomszedos(N,kispiac,katedralis).
```

illesztés: `szomszedos(25,kispiac,katedralis).`
új cél:

```
?- szomszedos(25,kispiac,katedralis).
N = 25;
```

még nem ellenőrzött minden esetet, így back-tracking
új cél:

```
?- szomszedos(N,kispiac,katedralis).
```

illesztés: `szomszedos(35,kispiac,katedralis).`
új cél:

```
?- szomszedos(35,kispiac,katedralis).
N = 35.
```

(j) Egészítsük ki a feladatot más predikátumokkal, hogy megkereshessük az összes megállót egy vonalról, megtaláljuk, milyen vonalakon tudunk eljutni átszállással egy megállóból egy másikba, stb.

(k) Készítsünk adatbázist saját városunk tömegközlekedéséről! Fogalmazzunk meg hasonló feladatokat! Rezolúció segítségével vezessük le a célformulákat!

13.P.3. Rokoni kapcsolatok leírására használjuk a $Férfi(x)$, $Nő(x)$ és $Szülője(x, y)$ (jelentése x szülője y-nak) predikátumokat.

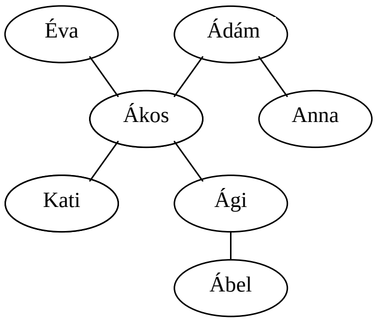
(a) Adjunk meg elsőrendű formulákat, amelyek a következő predikátumokat definiálják:

- $Anyja(x, y)$ – x anyja y-nak;
- $Apja(x, y)$ – x apja y-nak;
- $Testvérek(x, y)$ – x és y testvérek;
- $Nagyszülője(x, y)$ – x nagyszülője y-nak;
- $Őse(x, y)$ – x őse y-nak;
- $Leszármazottja(x, y)$ – x leszármazottja y-nak;

(b) Alakítsuk a fenti formulákat klózokká!

(c) Írjuk meg a rokoni kapcsolatokat leíró Prolog programot!

(d) Adjuk meg Prologban a következő ábráról leolvasható tényeket:



(e) Írjunk Prolog célformulákat a következő feladatok megoldására:

1. Keressük meg Anna szüleit!
2. Kik Ákos gyerekei?
3. Ki Ákos édesanyja?
4. Kati és Ági testvérek-e?
5. Kati és Anna testvérek-e?
6. Kik Ábel testvérei?
7. Őse-e Éva Áginak?
8. Őse-e Anna Áginak?
9. Kik Ábel ősei?
10. Kik Ádám ősei?
11. Ki kinek a testvére?

(f) Mutassuk meg, hogy az SLD rezolúció a (c) és (d) pontokban leírt Prolog program alapján hogyan keresi meg a célformulában megfogalmazott kérdésre a választ!

(g) Más rokoni kapcsolatokra is írjuk meg a Prolog szabályokat (pl. nagyszülő, nagynéni, unokatestvér, sógor, anyós, stb.) Van-e szükségünk más tényekre is ahhoz, hogy ezeket a szabályokat megírhassuk?

(h) Készítsünk adatbázist saját családunkról, fogalmazzunk feladatokat ezekkel az adatokkal kapcsolatban, és SLD rezolúció segítségével vezessük is le a válaszokat!

13.P.4. Tekintsük a következő logikai programot:

```
diff(1,0).
diff(x,1).
diff(X+Y,DX+DY) :- diff(X,DX), diff(Y,DY).
diff(X*Y,X*DY+Y*DX) :- diff(X,DX), diff(Y,DY).
diff(sin(X),cos(X)*DX) :- diff(X,DX).
```

(a) Melyik állítások igazak?

1. `x` változószimbólum.
2. `x` konstansszimbólum.
3. `X, Y, DX` és `DY` változószimbólumok.
4. `X, Y, DX` és `DY` konstansszimbólumok.
5. `diff` függvényszimbólum.
6. `diff` predikátumszimbólum.
7. `sin` és `cos` függvényszimbólumok.
8. `sin` és `cos` predikátumszimbólumok.
9. `+` és `*` függvényszimbólumok.
10. `+` és `*` predikátumszimbólumok.

(b) Milyen feladatot oldhat meg a program? Mi a fenti szimbólumok matematikai jelentése?

(c) Mutassuk meg, hogy az SLD rezolúció hogyan keresi meg a következő célformulákban megfogalmazott kérdésekre a választ!

```
1. ?- diff(x+sin(x),C).
2. ?- diff(x*sin(x),C).
3. ?- diff(x*sin(x)+1),C).
4. ?- diff(x*(sin(x)+1)),C).
5. ?- diff(sin(sin(x)),C).
6. ?- diff(sin(x+sin(x)),C).
```

(d) Mi lesz a következő célformulákra adott válasz? Indokoljuk a levezetés lépéseivel!

```
1. ?- diff(1+sin(x),0+cos(x)*1).
2. ?- diff(1+sin(x),0+cos(x)).
3. ?- diff(1+cos(x),0-sin(x)*1).
4. ?- diff(sin(x+1),cos(x+1)*1).
```

13.P.5.

(a) Írjunk logikai programot, amely egyszerűsít egy kifejezést, elhagyva a fölösleges 1-es szorzótényezőket, 0-ás összeadandókat, illetve a fölösleges zárójeleket.

(b) SLD rezolúció segítségével vezessük le a következő kérdésekre adott válaszokat:

```
1. ?- egyszerusit(1*A+B,X).
2. ?- egyszerusit(1*(A+B)+0),X)).
3. ?- egyszerusit((1*A+(B+0))*1,X).
4. ?- egyszerusit(1*(A+B)+(C+0),X).
```

13.P.6. Jelölje `[t1,t2,...,tn]` a `t1, t2, ..., tn` elemeket tartalmazó listát. `t1` elem a lista *feje*, míg `[t2,...,tn]` a lista *toldaléka*. Az üres listának nincs eleme, jele `[]`. Egy `l` listát megadhatunk `[t1|told]` alakban is, ahol `t1` a lista feje, míg a `told` lista az `l` lista toldaléka.

(a) Az

```
eleme(X,[X|Told]).
eleme(X,[Y|Told]) :- eleme(X,Told).
```

Prolog program megkeres egy elemet egy listában. SLD rezolúció segítségével vezessük le a következő kérdésekre adott választ:

```
1. ?- eleme(a,[a,b,c,d]).
2. ?- eleme(c,[a,b,c,d]).
3. ?- eleme(e,[a,b,c,d]).
4. ?- eleme(X,[a,b,c,d]).
```

(b) Mi történik, ha az (a) pontban megadott programban felcseréljük a szabályok sorrendjét? Próbáljuk meg így is megszerkeszteni a levezetést!

(c) Mire használható a következő szabály:

```
miez(X,[X|Told],Told).
miez(X,[Y|Told],[Y|Told1]) :- miez(X,Told,Told1).
```

Alkalmazzuk a fenti szabályokat `X` meghatározására (adjuk meg az SLD rezolúciós levezetést):

```
1. ?- miez(a,[a,b,c,d],X).
2. ?- miez(c,[a,b,c,d],X).
3. ?- miez(X,[a,b,c,d],[b,c,d]).
4. ?- miez(X,[a,b,c,d],[a,c,d]).
5. ?- miez(d,X,[a,b,c]).
```

(d) Lista hosszának meghatározása (feltételezzük, hogy rendelkezésünkre áll egy `x` szám `s(x)` rákövetkezőjét kiszámító program):

```
hossz([],0).
hossz([X|Told],s(N)) :- hossz(Told,N).
```

Határozzuk meg az `[a,b,c,d]` lista hosszát!

(e) Írjunk Prolog programot, amely

1. beszúr egy elemet egy lista elejére;
2. összefűz két listát;
3. meghatározza egy lista utolsó elemét;
4. beszúr egy elemet egy lista végére;
5. megfordítja egy lista elemeinek a sorrendjét.

Megfelelően megválasztott célformulákkal ellenőrizzük a programok helyességét!

13.P.7. Írjunk olyan Prolog programot, mely képes listaként megadni a Pascal háromszög n. sorát (soronkénti rekurzióval). Feltételezzük, hogy rendelkezésünkre áll az *Ar* nyelv* += predikátuma, melyet a programban $\mathtt{f}(x, y, z) \leftrightharpoons x + y = z$ jelölünk! Hogy kérdezhető le a 10. sor?

Megoldás

```
pascal(0,[1]).
pascal(N,[1|X]) :-
  f(N,-1,M), pascal(M,[1|Y]), kovsor(1,Y,X).
kovsor(1,[],[1]).
kovsor(X,[Y|L],[Z|M]) :-
  f(X,Y,Z), kovsor(Y,L,M).

?- pascal(10,X).
```

Irodalom

[1] Bratko, Ivan, *Prolog Programming for Artificial Intelligence*, Addison-Wesley, 2000.

[2] Chang, Chin-Liang – Lee, Richard Char-Tung, *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*, Academic Press, NewYork and London, 1973.

[3] Dragálin Albert – Búzási Szvetlána, *Bevezetés a matematikai logikába*, Egyetemi jegyzet, Debrecen, 1986.

[4] Ferenczi Miklós, *Matematikai logika*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2002.

[5] Fitting, Melvin, *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*, Springer-Verlag, 1990.

[6] Gallier, Jean, *Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving*, Wiley, 1986.
(http://www.cis.upenn.edu/~jean/gbooks/logic.html)

[7] Lavrov, I.A. – Makszimova L.L., *Halmazelméleti, matematikai logikai és algoritmuselméleti feladatok*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[8] Nilsson, Ulf – Maluszyński, Jan, *Logic, Programming and Prolog*, John Wiley & Sons Ltd., ^{2}1995.
(http://www.scribd.com/doc/12884757/Logic-Programming-and-Prolog-2d-Ed-Ulf-Nilsson-Jan-Maluszynski)

[9] Pásztorné Varga Katalin – Várterész Magda, *A matematikai logika alkalmazásszemléleltű tárgyalása*, Panem, Budapest, 2003.

[10] Ruzsa Imre – Máté András: *Bevezetés a modern logikába*, Osiris Kiadó, Budapest, 1997.

[11] Smullyan, Raymond, *First Order Logic*, Springer-Verlag, 1968.

[12] Szendrei Ágnes, *Diszkrét matematika – Logika, algebra, kombinatorika*, Polygon Kiadó, Szeged, 1994.

Tárgymutató

Ítéletlogika

Elsőrendű logika