Diszkrét matematika 1.

2. gyakorlat

1. Döntse el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények!

(a) $F \subset \{1,3,5\} \times \{2,4,6,8\}, \quad F = \{(1,4),(3,6),(1,2),(5,8)\}$,

(b) $F \subset \{a,b,c,d\} \times \{a,b,c\}, \quad F = \{(a,a),(b,c),(c,a),(d,b)\}$,

(c) $F = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b = 2a\}$,

(d) $F = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : b = a+3\}$,

(e) $F = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |b| = |a|\}$.

2. Döntse el, hogy az alábbi függvények közül melyik szürjektív („ráképezés”), ill. injektív (kölcsönösen egyértelmű). Amennyiben a függvény invertálható adja meg az inverzét! (A feladatokban $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmazát jelöli.)

(a) $F \subset \{1,2,3\} \times \{2,4,7,8\}, \quad F = \{(1,4),(2,8),(3,7)\}$,

(b) $F \subset \{1,3,5\} \times \{2,4,6\}, \quad F = \{(1,4),(3,6),(5,4)\}$,

(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n+4$,

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+3)^2 - 1$,

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 1$,

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x+2| - 3$,

(g) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\sqrt{x} - 1$,

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$,

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } x < 0 \\ x^2, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

(j) $f : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x-3}$,

(k) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \log_2 x$,

(l) $f : [0, 2\pi] \to [-1,1], \quad f(x) = \sin x$,

(m) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x < 0 \\ \sqrt{2x+1}, & \text{ha } 0 \le x \le 4 \\ \frac{x}{2}+1 & x > 4 \end{cases}$$

(n) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x < 0 \\ (x+1)^2, & \text{ha } x \ge 0 \end{cases}$$

(o) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+1}, & \text{ha } x \ne -1 \\ 1, & \text{ha } x = -1 \end{cases}$$

3. Adja meg az $f \circ g$ függvényt, ha

(a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ és $g(x) = x + 3$,

(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 3$,

(c) $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$,

(d) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ és $g(x) = x^3$.

4. Bizonyítsa be teljes indukcióval az alábbi állításokat!

(a) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(d) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(e) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(f) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(g) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(h) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(i) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = \dfrac{n+2}{2n+2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(j) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(k) $6|(n^3 - n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(l) $6|(n^3 + 5n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(m) $5|(2^{4n+1} + 3) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(n) $3|(n^3 + 5n + 6) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(o) $9|(10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(p) $4|(7^n + 10n - 5) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(q) $\dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{7n}{15}$ egész szám minden $n \in \mathbb{N}$ esetén,

(r) $(n+1)! > 2^{n+3}$, ha $n \geq 5$,

(s) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{n+1} - 1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(t) $\dbinom{2n}{n} < 4^{n-1}$, ha $n \geq 5$,

(u) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(v) $n^3 < 2^{n+1}$, ha $n > 8$,

(w) $\displaystyle\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

5. Tegyük fel, hogy $n \geq 4$ idős hölgy mindegyike tud egy pletykát (mindenki különbözőt). A hölgyek mindegyikének van telefonja, és ha két hölgy felhívja egymást, akkor az összes addig tudomásukra jutott pletykát elmondják egymásnak. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy $2n - 4$ telefonhívással megoldható, hogy mindannyian ismerjék az összes pletykát!