Prenexizálás

2.13. feladat. Határozzuk meg az alábbi formulák prenex alakját!

$$a)\ \forall x P(x)\ \supset\ \neg\exists x P(x)\ \vee\ Q(x,c)$$

Megoldás:

$$\forall x P(x)\ \supset\ \neg\exists x P(x)\ \vee\ Q(x,c)$$

1. Már az elején csináljuk meg a helyesen zárójelezett alakot, hogy kisebb legyen a hibalehetőség. Figyeljünk oda az összekötőjelek hatáskörére.
   Helyes:
   $(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}), \neg(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}), \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}), \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}), \circ \in \{\supset, \wedge, \vee\}$
   Helytelen:
   $\neg(A)$, $\exists x(A)$, $\forall x(A)$, $(\neg A)$, $(\exists x A)$, $(\forall x A)$, ha A atomi formula, továbbá $((A \supset B) \vee C)$

$$(\forall x P(x)\ \supset (\neg\exists x P(x)\ \vee\ Q(x,c)))$$

2. Változótiszta alakra hozás: ellenkező esetben a prenexizálás után egy-egy kvantor leköthet egy szabad változót, így más lesz a jelentése (Legegyszerűbb, ha minden kvantoros előtagot különbözőre nevezünk egymástól és a szabad változóktól, így tuti a tiszta alak, **de figyelni kell, melyik kvantor melyik változót köti**):

$$(\forall \boldsymbol{y} P(\boldsymbol{y}) \supset (\neg\exists \boldsymbol{z} P(\boldsymbol{z}) \vee\ Q(x,c)))$$

3. Használjuk a $\forall x A \supset B \sim \exists x(A \supset B)$ átalakítást. (Ha az implikációs formula bal oldali közvetlen részformuláját köti a kvantor, akkor vált. Ha a jobb oldalit, akkor nem változik)
   $A \rightleftharpoons P(y)$
   $B \rightleftharpoons \left(\neg\exists z P(z) \vee\ Q(x,c)\right)$

$$\exists y(P(y)\ \supset (\neg\exists z P(z) \vee\ Q(x,c)))$$

4. Használjuk a $\neg\exists x A \sim \forall x \neg A$ átalakítást. (Ha egy kvantoros formula negálva van, akkor a kvantor kihozása szintén változást eredményez):

$$\exists y(P(y)\ \supset (\forall z \neg P(z) \vee\ Q(x,c)))$$

5. Használjuk a $\exists x A \vee B \sim \exists x(A \vee B)$ átalakítást. (Ha egy diszjunkciós vagy egy koncjunkciós formulából hozzuk ki a kvantort, függetlenül attól, hogy mely közvetlen részformuláját köti, a kvantor nem változik)

$$\exists y(P(y)\ \supset\ \forall z(\neg P(z)\ \vee\ Q(x,c)))$$

6. Ismét az egész formulával dolgozunk, az implikáció jobb oldalával. A fentiek szerint az implikáció jobb oldali közvetlen részformuláját kötő kvantor a kihozása után sem változik.
   $A \rightleftharpoons P(y)$
   $B \rightleftharpoons (\neg P(z)\ \vee\ Q(x,c))$
   Kész a **Prenex alakú formula**:

$$\exists y \forall z(P(y)\ \supset (\neg P(z) \vee\ Q(x,c)))$$

$$h)\ \forall x(\exists y Q(x,y) \supset \forall x P(x)) \supset \neg(\forall x P(x) \lor \forall x R(x))$$

1. Helyesen zárójelezett alak, itt csak a külső zárójel hiányzik:

$$(\forall x(\exists y Q(x,y) \supset \forall x P(x)) \supset \neg(\forall x P(x) \lor \forall x R(x)))$$

2. Változótiszta alak:

$$(\forall \boldsymbol{x}(\exists \boldsymbol{y} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \supset \forall \boldsymbol{z} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})) \supset \neg(\forall \boldsymbol{x'} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x'}) \lor \forall \boldsymbol{y'} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y'})))$$

3. Haladjunk belülről kifelé (nem kötelező)

$$(\forall x \forall y(Q(x,y) \supset \forall z P(z)) \supset \neg(\forall x' P(x') \lor \forall y' R(y')))$$

$$\exists x A \supset B \sim \forall x(A \supset B)$$
$$A \rightleftharpoons Q(x,y)$$
$$B \rightleftharpoons \forall z P(z)$$

Implikációs előtagból hoztuk ki, ezért átvált.

$$(\forall x \forall y \forall z(Q(x,y) \supset P(z)) \supset \neg(\forall x' P(x') \lor \forall y' R(y')))$$

$$A \supset \forall x B \sim \forall x(A \supset B)$$
$$A \rightleftharpoons Q(x,y)$$
$$B \rightleftharpoons P(z)$$

Implikációs utótagból hoztuk ki, ezért változatlan.

$$(\forall x \forall y \forall z(Q(x,y) \supset P(z)) \supset \neg\forall x'(P(x') \lor \forall y' R(y')))$$

$$\forall x A \lor B \sim \forall x(A \lor B)$$
$$A \rightleftharpoons P(x')$$
$$B \rightleftharpoons \forall y' R(y')$$

Diszjunkcióból hoztuk ki, ezért változatlan.

$$(\forall x \forall y \forall z(Q(x,y) \supset P(z)) \supset \neg\forall x' \forall y'(P(x') \lor R(y')))$$

$$A \lor \forall x B \sim \forall x(A \lor B)$$
$$A \rightleftharpoons P(x')$$
$$B \rightleftharpoons R(y')$$

Diszjunkcióból hoztuk ki, ezért változatlan.

$$(\forall x \forall y \forall z(Q(x,y) \supset P(z)) \supset \exists x' \exists y' \neg(P(x') \lor R(y')))$$

$$\neg\forall x \forall y A \sim \exists x \exists y \neg A$$
$$A \rightleftharpoons (P(x') \lor R(y'))$$

Negáció mögül hoztuk ki mindkét kvantort, ezért mindkettő átvált.

$$\exists x \exists y \exists z((Q(x,y) \supset P(z)) \supset \exists x' \exists y' \neg(P(x') \lor R(y')))$$

$$\forall x \forall y \forall z A \supset B \sim \exists x \exists y \exists z(A \supset B)$$
$$A \rightleftharpoons (Q(x,y) \supset P(z))$$
$$B \rightleftharpoons \exists x' \exists y' \neg(P(x') \lor R(y'))$$

Implikációs előtagból hoztuk ki, ezért mindhárom kvantor átvált.

$$\exists x \exists y \exists z \exists x' \exists y'((Q(x,y) \supset P(z)) \supset \neg(P(x') \lor R(y')))$$

$$A \supset \exists x \exists y B \sim \exists x \exists y(A \supset B)$$
$$A \rightleftharpoons (Q(x,y) \supset P(z))$$
$$B \rightleftharpoons \neg(P(x') \lor R(y'))$$

Implikációs utótagból hoztuk ki, ezért mindkét kvantor változatlan.

4. Prenex alak:

$$\exists x \exists y \exists z \exists x' \exists y'((Q(x,y) \supset P(z)) \supset \neg(P(x') \lor R(y')))$$

Összefoglalva:

1. Helyesen zárójelezett alak, ha $\supset$, $\wedge$, illetve $\vee$ összekötőjelekkel dolgozunk, az összekötőjel hatáskörét zárójelezzük, mert huncut módon nem mindig teszik ki a zárójeleket, mivel elhanyagolhatóak.
2. Változótiszta alak! (Figyeljünk a kötésekre és szabad változó nem nevezhető át)
3. A fő cél, hogy minden kvantor kikerüljön a formula elé.
4. Két esetben változik a kvantor:
   - Implikáció bal oldali közvetlen részformuláját köti
   - A kvantoros formula negálva van
   - Minden egyéb esetben változatlan
5. ~~$(\exists xA \circ \exists xB)$ esetben, mindkét kvantor ki kell hozni, nem egy kvantor lesz belőle!,~~
   $\forall xA \wedge \forall xB \sim \forall x(A \wedge B)$
   $\exists xA \vee \exists xB \sim \exists x(A \vee B)$
6. Lépésenként haladjunk, mert az egyszerűsítés a vesztünket okozhatja!

Konjunktív/Diszjunktív normálformula

Bevezetés

A, B, C,… legyenek atomi formulák:

A és $\neg A$ minden, tehát **literál**, **elemi konjunkció** és **diszjunkció**, továbbá **konjunktív** és **diszjunktív normálformula**.

$(A \wedge B)$, $(\neg A \wedge B)$, $(A \wedge \neg B)$ és $(\neg A \wedge \neg B)$ **elemi konjunkció**, továbbá **diszjunktív és konjunktív normálformula**, de $\neg(A \wedge B)$ egyik sem!

$(A \vee B)$, $(\neg A \vee B)$, $(A \vee \neg B)$ és $(\neg A \vee \neg B)$ **elemi diszjunkció**, továbbá **diszjunktív és konjunktív normálformula**, de $\neg(A \vee B)$ egyik sem!

$(A \vee B) \wedge (C \vee D)$ **konjunktív normálformula,**
de $(A \vee B) \wedge \neg(C \vee D)$ nem!

$(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$ **diszjunktív normálformula,**
de $(A \wedge B) \vee \neg(C \wedge D)$ nem!

A fentiek csak példák, lehetne még kismillió egyet felsorolni.

Feladat

1.19. feladat. Hozzuk KNF és DNF formára a következő formulákat!

$$a) \neg(X \wedge Y \supset \neg X) \wedge \neg(X \wedge Y \supset \neg Y)$$

1. Már az elején csináljuk meg a helyesen zárójelezett alakot, ahogy a prenexizálásnál említettem:

$$(\neg((X \wedge Y) \supset \neg X) \wedge \neg((X \wedge Y) \supset \neg Y))$$

2. Implikációk eltávolítása: $(A \supset B) \sim_0 (\neg A \vee B)$, az imlikáció helyett diszjunkció, továbbá a bal oldali közvetlen részformula negálása:
$A_1 \rightleftharpoons (X \wedge Y)$
$B_1 \rightleftharpoons \neg X$
$A_2 \rightleftharpoons (X \wedge Y)$
$B_2 \rightleftharpoons \neg Y$

$$(\neg(\neg(X \wedge Y) \vee \neg X) \wedge \neg(\neg(X \wedge Y) \vee \neg Y))$$

3. Negáció bevitele: $\neg(A \vee B) \sim_0 (\neg A \wedge \neg B)$, konjunkciónál és diszjunkciónál az összekötőjel „megfordul” és mindkét közvetlen részformula negálása:
$A_1 \rightleftharpoons \neg(X \wedge Y)$
$B_1 \rightleftharpoons \neg X$
$A_2 \rightleftharpoons \neg(X \wedge Y)$
$B_2 \rightleftharpoons \neg Y$

$$((\neg\neg(X \wedge Y) \wedge \neg\neg X) \wedge (\neg\neg(X \wedge Y) \wedge \neg\neg Y))$$

4. Egyszerűsítés: $\neg\neg A \sim_0 A$, remélem ez egyértelmű. Ahol lehet, előbb mindig egyszerűsítsünk, ne vigyük be a negációt feleslegesen. Mivel csak konjunkció szerepel a zárójelek már elhagyhatók:

$$X \wedge Y \wedge X \wedge X \wedge Y \wedge Y$$

5. Az eredmény egy elemi konjunkció, ami azt eredményezi, hogy egyben DNF és KNF.
További egyszerűsítés, ez már nem elvárás a vizsgán: $A \wedge A \sim_0 A$ (diszjunkcióra is érvényes), $A_1 \rightleftharpoons X$, $A_2 \rightleftharpoons Y \Longrightarrow X \wedge Y$

De Morgan azonosság

1. Alap eset:

$$(X \ \wedge \ Y) \vee Z$$

   1.1. Legegyszerűbb megoldás szerintem: zárójelen belüli összekötőjel legyen összeadás, kívüli szorzás:
   $\wedge \rightleftharpoons +$
   $\vee \rightleftharpoons \cdot$

$$(X + \ Y) \cdot Z$$

   1.2. Végezzük el (tudjuk, hogy nem szükséges a zárójel, de azért tegyük ki):

$$(X \cdot Z) + (\ Y \cdot Z)$$

   1.3. Helyettesítsünk vissza:

$$(X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$$

2. A kapott eredmény egy KNF (Vizsgán nehogy szorzást meg összeadást írjatok!)

Összefoglalás:

1. Zárójelek
2. Implikációs előtag negálódik, és diszjunktív lesz, továbbá:
   $\neg(A \supset B) \sim_0 \neg(\neg A \vee B) \sim_0 (\neg\neg A \wedge \neg B) \sim_0 (A \wedge \neg B)$
3. Negáció bevitele: Jel fordul, közvetlenek negálódnak
4. Egyszerűsítés: ok
5. De Morgan: $(+) \cdot$
6. Ha valami még nem jó, akkor alkalmazni a 2-5 pontok valamelyikét.

Köszönöm a figyelmet!