Gentzen kalkulus szabályainak magyarázata

A $\Gamma \to \Delta$ alakú szekventekben a két oldalhoz rendelhetünk igazságértékeket. A $\to$ bal oldalán vannak az igaz formulák, a jobb oldalán a hamisak. Az egész eljárás egy logikai következményreláció fennállásának vizsgálata. Tehát indirekte bizonyítjuk, hogy a bal oldalnak következménye a jobb oldal. Azaz feltesszük, hogy létezik olyan interpretáció, amelyben a bal oldalon lévő formulák mindegyike igaz, és a jobb oldalon lévő formulák mindegyike hamis. Ha ellentmondásra jutunk (ezek az axióma sémák), azaz, ha egy formula mindkét oldalon szerepel, akkor rossz volt az indirekt feltevésünk, a következtetés helyes. Ezek után a szabályok teljesen egyértelműek.

- Bal oldalon konjunkció: $(A \wedge B)$ igaz pontosan akkor, ha mindkét tagja igaz. Tehát $(A \wedge B)$ helyett felvesszük A-t és B-t az igaz formulák közé, azaz a bal oldalra.

- Jobb oldalon konjunkció: $(A \wedge B)$ hamis pontosan akkor, ha az egyik tagja hamis. Tehát két lehetséges eset van, ezért fog itt kettéágazni a levezetés. Az egyik ágon $(A \wedge B)$ helyett felvesszük A-t a hamis oldalra, azaz a jobb oldalra. A másik ágon B-t vesszük fel a jobb oldalra.

- Bal oldalon diszjunkció: $(A \vee B)$ igaz pontosan akkor, ha az egyik tagja igaz. Tehát két lehetséges eset van, ezért fog itt kettéágazni a levezetés. Az egyik ágon $(A \vee B)$ helyett felvesszük A-t az igaz oldalra, azaz a bal oldalra. A másik ágon B-t vesszük fel a bal oldalra.

- Jobb oldalon konjunkció: $(A \vee B)$ hamis pontosan akkor, ha mindkét tagja hamis. Tehát $(A \vee B)$ helyett felvesszük A-t és B-t a hamis formulák közé, azaz a jobb oldalra.

- Bal oldalon implikáció: $(A \supset B)$ igaz pontosan akkor, ha A hamis, vagy B igaz. Tehát itt is ketté fog ágazni a levezetés, az egyik ágon A kerül a hamis formulák közé (azaz a jobb oldalra), a másik ágon B kerül az igaz formulák közé (azaz a bal oldalra).

- Jobb oldalon implikáció: $(A \supset B)$ hamis pontosan akkor, ha A igaz és B hamis. Tehát A kerül az igaz oldalra, vagyis a bal oldalra, B pedig a hamis oldalra, vagyis a jobb oldalra.

- A negációs szabályok egyértelműek.

- Bal oldalon univerzális kvantor: $\forall x A$ igaz pontosan akkor, ha x-et tetszőleges t termre cserélve A-ban igaz formulát kapunk. A $\forall x A$ formula is ott marad a bal oldalon, mert tetszőleges helyettesítést meg kell engedni (ha esetleg az első választás rossz).

- Jobb oldalon univerzális kvantor: $\forall x A$ hamis pontosan akkor, ha létezik olyan változó, amire lecserélve x-et A-ban hamis formulát kapunk. Azaz van egy olyan konkrét y, hogy $A(x||y)$ hamis lesz. Tehát $A(x||y)$ megy a hamis oldalra, ami a jobb oldal. Itt a $\forall x A$ formula eltűnik, mivel nekünk csak egy ilyen konkrét y kell.

- Bal oldalon egzisztenciális kvantor: $\exists x A$ igaz pontosan akkor, ha létezik olyan változó, amire x-et lecserélve A-ban igaz formulát kapunk. Azaz itt is van egy konkrét y, hogy $A(x||y)$ igaz, tehát megy a bal oldalra. Itt sincs több lehetőség, $\exists x A$ eltűnik.

- Jobb oldalon egzisztenciális kvantor: $\exists x A$ hamis pontosan akkor, ha x-et tetszőleges t termre cserélve A-ban hamis formulát kapunk. Azaz $A(x||t)$ hamis, jobb oldalra kerül. Mivel tetszőleges termre cserélhetünk, itt is meg kell hagyni $\exists x A$-t, hogy több választásunk legyen, ha kell.

Arra is figyelni kell, hogy abban két kvantoros átalakításban, amelyikben y változó van, a választott y nem lehet szabad egyik oldalon sem. (persze csak mielőtt beírnánk az x helyére). Ezért ezt a két kvantoros szabályt célszerű hamarabb alkalmazni, mint a másik kettőt.

Jegyezzük meg azt is, hogy a logikai törvények az üres formulahalmaznak következményei, ezért, ha $\rightarrow A$ levezethető, akkor $\models A$ (és persze ez oda-vissza teljesül).

Ha pedig az egyik ág végén nem axiómaséma jön ki, akkor abból elő tudunk állítani egy olyan interpretációt, melyben a bal oldalon lévő formulák igazak, a jobb oldalon lévők pedig hamisak.