

## DISZKRÉT MATEMATIKA 1.

## 10. gyakorlat

1. Adja meg egy  $n$  elemű halmaz részhalmazainak számát!
2. Hány olyan 1000-nél kisebb természetes szám van, amely sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel, sem 11-gyel nem osztható?
3. Egy 40 fős turista csoport tagjai számára az utazás egyik napjára a szervezők háromféle programot ajánlottak: egy múzeum, egy vár és egy kilátó meglátogatását. A csoportból 8 fő kivételével mindenki résztvett valamelyik programon. Hárman mindhárom programon jelen voltak, a várlátogatáson összesen 15 fő vett részt, a kilátót 18-an látták. 4 olyan ember volt, aki a múzeumot és a várat is megnézte, 5 olyan, aki a múzeumot és a kilátót is, míg azok, akik a kilátót és a várat is látták 6-an vannak. Hányan voltak a múzeumban?
4. Egy szállodában, ahol a szobák száma megszámlálhatóan végtelen, teltház van (a szobák egyágyasak). Ha egy új vendég érkezik, hogyan tud neki szobát biztosítani a portás úgy, hogy egyik régi vendéget sem küldi el? Mit tegyen a portás, ha 100 új vendég érkezik? És ha megszámlálhatóan végtelen sok?
5. Mutassa meg, hogy az alábbi halmazok számossága megegyezik!
  - (a)  $\mathbb{N}$  és  $A = \{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$ ,
  - (b)  $\mathbb{N}$  és  $B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ páros}\}$ ,
  - (c)  $\mathbb{N}$  és  $\mathbb{Z}$ ,
  - (d)  $\mathbb{Q}$  és  $\mathbb{N}$ ,
  - (e)  $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$  és  $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\}$ ,
  - (f)  $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$  és  $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\}$ ,
  - (g)  $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$  és  $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ ,
  - (h)  $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$  és  $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ ,
  - (g)  $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$  és  $\mathbb{R}$ .
6. *Hanoi-tornyai.* Adott  $n$  darab ( $n \in \mathbb{N}$ ) különböző nagyságú korong, melyek egy rúdon helyezkednek el, alulról felfelé csökkenő mérettel. Át kell raknunk a korongokat egy másik rúdra úgy, hogy az átrakáshoz egy harmadik rudat is használhatunk, egyszerre csak 1 korongot mozgathatunk és a

följebb elhelyezkedő korong mindig kisebb kell, hogy legyen, mint a lejjebb elhelyezkedők. Legkevesebb hány lépés szükséges a korongok áthelyezéséhez?

**7.** Egy edényben valaki elhelyez egy baktériumot, amely osztódással szaporodik: percenként duplájára nő a baktériumok száma. Hány baktérium lesz az edényben az  $n$ -edik perc végére, ha minden egyes perc végén még 4 baktériumot tesz az illető az edénybe?

**8.** Legyen  $x_0 = 1$  és

$$x_{n+1} = 3x_n + 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Adja meg zárt alakban  $x_n$ -et!

**9.** Legyen  $x_0 = 2$  és

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Adja meg zárt alakban  $x_n$ -et!

**10.** Egy 15 lépcsőfokból álló lépcsőn valaki úgy megy fel, hogy egyszerre mindig egyet, vagy kettőt lép. Hányféleképpen juthat fel a lépcsőn? Hányféleképpen juthat fel, ha  $n$  lépcsőfokból áll a lépcső?

**11.** Hányféleképpen lehet lefedni egy  $16 \times 2$ -es téglalapot  $2 \times 1$ -es dominókkal?

**12.** Legyen  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  és

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Adja meg zárt alakban  $x_n$ -et!

**13.** Legyen  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  és

$$x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Adja meg zárt alakban  $x_n$ -et!