3.1. Milyen (teljesen zátójelezett) formulát rövidítenek az alábbiak?

$$(A \equiv B) \rightleftharpoons ((A \supset B) \wedge (B \supset A))$$

(a) $\neg X \vee \neg\neg Y$

(b) $Y \supset X \wedge \neg Z$

(c) $\neg\neg X \wedge Y \supset Z$

(d) $\neg(\neg X \wedge Y) \supset Z$

(e) $X \equiv Y$

(f) $X \supset Y \equiv \neg X \vee Y$

3.2. Távolítsuk el az összes elhagyható zárójelet az alábbi formulákból!

(a) $((X \wedge Y) \supset Z)$

(b) $(X \wedge (Y \supset Z))$

(c) $(\neg(X \wedge \neg Y) \supset (Z \vee \neg X))$

3.3. Adjuk meg az alábbi formulák következő szintaktikai tulajdonságait:

- logikai összetettség,
- közvetlen részformulái,
- részformuláinak halmaza!

(a) X

(b) $\neg\neg X$

(c) $X \vee X$

(d) $\neg X \vee Y$

(e) $X \vee Y \supset Z$

(f) $\neg(X \vee Y)$

(g) $(\neg(X \wedge \neg Y) \supset (Z \vee \neg X))$

(h) $\neg(X \supset Y \vee \neg Z) \wedge \neg Y \supset Z$

(i) $\neg(\neg\neg X \supset Y \vee \neg\neg Z)$

(j) $\neg X \wedge X \supset Y$

3.4. Adjuk meg a megjelölt logikai összekötőjel hatáskörét az alábbi formulákban, majd keressük meg a fő logikai összekötő jelet!

$$\neg X \wedge Z \overset{\text{①}}{\supset} Y \overset{\text{②}}{\vee} \neg W$$

$$\left(X \supset \overset{\text{⑥}}{\neg} Y\right) \supset \overset{\text{⑦}}{\neg} (Y \supset Z)$$

$$\overset{\text{③}}{\neg} (X \wedge Z) \supset Y$$

$$\left(X \supset Y \overset{\text{④}}{\vee} \neg Z\right) \wedge \neg Y \overset{\text{⑤}}{\supset} Z$$

$$\left(X \overset{\text{⑧}}{\vee} Y \supset \neg Z\right) \overset{\text{⑨}}{\supset} \neg Y \overset{\text{⑩}}{\wedge} Z$$

3.5. Adjuk meg a következő formulák értékét a megadott interpretációban:

$\lvert X \vee \neg X\rvert^{\mathcal{I}_1}$	$\mathcal{I}_1(X) = i$		
$\lvert X \vee \neg X\rvert^{\mathcal{I}_2}$	$\mathcal{I}_2(X) = h$		
$\lvert X \wedge \neg X\rvert^{\mathcal{I}_3}$	$\mathcal{I}_3(X) = i$		
$\lvert X \wedge \neg X\rvert^{\mathcal{I}_4}$	$\mathcal{I}_4(X) = h$		
$\lvert X \supset \neg X\rvert^{\mathcal{I}_5}$	$\mathcal{I}_5(X) = i$		
$\lvert X \supset \neg X\rvert^{\mathcal{I}_6}$	$\mathcal{I}_6(X) = h$		
$\lvert X \wedge \neg Z \supset \neg Y\rvert^{\mathcal{I}_7}$	$\mathcal{I}_7(X) = h$	$\mathcal{I}_7(Y) = h$	$\mathcal{I}_7(Z) = h$
$\lvert(\neg (X \wedge \neg Y) \supset (Z \vee \neg X))\rvert^{\mathcal{I}_8}$	$\mathcal{I}_8(X) = h$	$\mathcal{I}_8(Y) = i$	$\mathcal{I}_8(Z) = i$
$\lvert\neg (X \supset Y \vee \neg Z) \wedge \neg Y \supset Z\rvert^{\mathcal{I}_9}$	$\mathcal{I}_9(X) = i$	$\mathcal{I}_9(Y) = i$	$\mathcal{I}_9(Z) = h$
$\lvert\neg (\neg\neg X \supset Y \vee \neg\neg Z)\rvert^{\mathcal{I}_{10}}$	$\mathcal{I}_{10}(X) = h$	$\mathcal{I}_{10}(Y) = i$	$\mathcal{I}_{10}(Z) = h$
$\lvert\neg X \wedge X \supset Y\rvert^{\mathcal{I}_{11}}$	$\mathcal{I}_{11}(X) = i$	$\mathcal{I}_{11}(Y) = i$	$\mathcal{I}_{11}(Z) = i$

4.1. Határozzuk meg az alábbi formulák értékét a megadott interpretációban!

$$\mathcal{I}(X) = i, \qquad \mathcal{I}(Y) = h, \qquad \mathcal{I}(Z) = h, \qquad \mathcal{I}(W) = h$$

(a) $\neg(\neg(X \supset Y \vee \neg Z) \wedge \neg W \supset Z)$

(b) $\neg(X \wedge \neg Y) \supset Z \vee \neg X$

(c) $\neg X \wedge Z \supset Y \vee \neg W$

(d) $\neg\,(X \wedge Z) \supset Y$

(e) $(X \supset \neg Y) \supset \neg\,(Y \supset Z)$

(f) $(X \vee Y \supset \neg Z) \supset \neg Y \wedge Z$

4.2. Mely állítások igazak az alábbiak közül?

(a) Minden kielégíthető formula logikai törvény.

(b) Van olyan kielégíthető formula, mely törvény.

(c) Minden logikai törvény kielégíthető.

(d) Csak az a formula logikai törvény, mely kielégíthető.

(e) Ha egy formula ellentmondás, akkor kielégíthetetlen.

(f) Ha egy formula kielégíthetetlen, akkor negáltja kielégíthető.

(g) Ha egy formula kielégíthető, akkor negáltja ellentmondás.

(h) Egy formula akkor és csak akkor kielégíthető, ha negáltja ellentmondás.

(i) Egy formula pontosan akkor törvény, ha negáltja ellentmondás.

(j) Ha egy formula negáltja kielégíthető, akkor az ellentmondás.

(k) Minden formula vagy kielégíthető, vagy ellentmondás.

(l) Minden formula vagy nem logikai törvény vagy ellentmondás.

4.3. Milyen szemantikai tulajdonságoknak tesznek eleget az alábbi formulák:

- kielégíthető,
- törvény,
- ellentmondás.

Döntsük el igazságtáblával!

(a) $\neg X \wedge \neg Y \supset (X \vee Y)$

(b) $\neg\,(X \supset Y) \supset \neg\,(X \wedge \neg Y)$

(c) $\neg\,(X \supset \neg Y) \wedge (\neg Z \supset Y)$

(d) $\neg\,(X \wedge \neg\,(Y \wedge \neg(Z \vee \neg X)))$

(e) $X \supset (Y \supset (Z \supset \neg X))$

4.4. Adjunk meg egy-egy olyan interpretáció (amennyiben lehetséges) melyben az alábbi formulák igazak!

(a) $(X \supset Y \vee Z) \wedge \neg\,(\neg X \vee Y) \wedge (Z \supset W \vee Y)$

(b) $\neg\,(X \wedge Y \supset Z) \wedge (\neg W \supset \neg Z) \wedge (Y \supset \neg W)$

(c) $(X \vee Y \supset \neg Y \wedge Z) \wedge (Z \supset X) \wedge (Z \vee Y)$

(d) $\neg\,(X \vee Y \supset Z) \wedge (Z \vee Y) \wedge (W \vee X) \wedge (Y \vee Z \supset \neg W)$

4.5. Határozzuk meg a szemantikai definíciók mentém, hogy az alábbi formulák közül melyek törvények!

(a) $\neg(X \supset Y) \supset X \wedge \neg Y$

(b) $X \supset (\neg Y \supset Z \supset (\neg U \supset (W \supset \neg X)))$

(c) $((X \supset Y) \wedge (X \supset \neg Y)) \supset \neg X$

(d) $\neg X \vee (Y \wedge Z) \supset (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z)$

4.6. Határozzuk meg a szemantikai definíciók mentém, hogy az alábbi formulák közül melyek ellentmondások!

(a) $(\neg X \supset \neg Y) \supset \neg(Y \supset X)$

(b) $(X \wedge Y \supset Z) \wedge \neg(Y \supset (X \supset Z))$

(c) $((X \supset Y) \wedge (Y \supset Z)) \wedge (X \wedge \neg Z)$

4.7. Ekvivalensek-e az alábbi formulák? Bizonyítsuk igazságtáblával!

(a) $(X \vee Y) \wedge X \quad \overset{?}{\sim}_0 \quad X$

(b) $(X \wedge Y) \vee X \quad \overset{?}{\sim}_0 \quad X$

(c) $X \vee Y \supset Z \quad \overset{?}{\sim}_0 \quad (\neg X \wedge \neg Y) \vee Z$

(d) $(X \supset Y) \supset Z \quad \overset{?}{\sim}_0 \quad (Y \supset X) \supset Z$

(e) $X \supset (Y \supset Z) \quad \overset{?}{\sim}_0 \quad X \supset (Z \supset Y)$

(f) $X \supset (Y \supset Z) \quad \overset{?}{\sim}_0 \quad (X \supset Y) \supset Z$

4.8. Ekvivalensek-e az alábbi formulák? Bizonyítsuk a szemantikai definíciók segítségével!

(a) $X \vee Y \supset Z \quad \overset{?}{\sim}_0 \quad Z \vee Y \supset X$

(b) $(X \supset Y) \vee (Z \supset W) \quad \overset{?}{\sim}_0 \quad \neg(X \wedge Z) \vee \neg(\neg Y \wedge \neg W)$

4.9. Létezik-e olyan interpretáció, melyben az alábbi formulahalmaz minden formulája igaz?

$$\{X \vee Y \vee Z, \neg X \supset \neg Z, X \vee Y \supset \neg X \wedge Z\}$$

5.1. Legyenek P_1, P_2, valamint K egy következtetés premisszáit illetve konklúzióját leíró formulák. Mely állítások igazak az alábbiak közül?

(a) Ha a következtetés helyes akkor $P_1 \wedge P_2 \supset K$ logikai törvény.

(b) Ha $P_1 \wedge P_2 \supset K$ logikai törvény, akkor a következtetés helyes.

(c) A következtetés pontosan akkor helyes, ha $P_1 \wedge P_2 \wedge \neg K$ ellentmondás.

(d) A következtetés pontosan akkor helyes, ha $\{P_1, P_2, \neg K\}$ formulahalmaz összes formulája egyetlen interpretációban sem igaz.

(e) Ha a következtetés helytelen, $P_1 \wedge P_2 \supset \neg K$ logikai törvény.

(f) Ha a következtetés helytelen, $P_1 \wedge P_2 \supset \neg K$ kielégíthető.

(g) Ha $P_1 \wedge P_2$ ellentmondás, akkor a következtetés helyes.

(h) Ha K ellentmondás, akkor a következtetés helyes.

(i) Ha K ellentmondás, akkor a következtetés csak akkor helyes, ha $P_1 \wedge P_2$ ellentmondás.

5.2. Található-e olyan interpretáció, mely az alábbi formulahalmazok valamelyikének minden formuláját kielégíti?

(a) $\{\ X \supset Y \vee Z,\ \ \neg(\neg X \vee Y),\ \ Z \supset U \vee Y\ \}$

(b) $\{\ \neg(X \wedge Y \supset Z),\ \ \neg U \supset \neg Z,\ \ Y \supset \neg U\ \}$

5.3. Döntsük el táblázat segítségével, hogy az alábbi következtetések helyesek-e!

Premisszál:

P_1 $(X \vee \neg Y) \supset Z$

P_2 $\neg X \vee \neg Z$

Következtetések:

a.) $Y \vee Z$

b.) $\neg Y \supset \neg Z$

5.4. Formalizáljuk az alábbi mondatokat! Döntsük el táblázat segítségével, hogy az alábbi következtetések helyesek-e!

Premisszál:

P_1 *Ha Zoltán hazudik, akkor János csak akkor füllent, ha Imre igazat mond.*

P_2 *János füllent, de ha Zoltán hazudik, akkor Imre nem mond igazat.*

Következtetések:

a.) *Ha Imre nem mond igazat, akkor János füllent.*

b.) *Ha János füllent, akkor Imre nem mond igazat.*

5.5. Döntsük el a szemantikai definíciók segítségével, hogy az alábbi következtetések helyesek-e!

Premisszál:

P_1 $(X \vee \neg Y) \wedge (Z \supset W)$

P_2 $\neg(Y \vee Z \supset X \vee U)$

Következtetések:

a.) $K \supset X$

b.) $\neg W \supset Z$

5.6. Formalizáljuk az alábbi mondatokat! Döntsük el a szemantikai definíciók segítségével, hogy az alábbi következtetések helyesek-e!

Premisszál:

P_1 *Csak akkor megyek boltba, ha elfogyott a tej vagy kevés a kenyér.*

P_2 *Nem igaz az, hogy nem megyek boltba vagy elfogyott a tej.*

P_3 *Amennyiben kevés a kenyér, úgy liszt sincs már vagy elfogyott a tej.*

Következtetések:

a.) *Csak abban az esetben megyek boltba, amennyiben liszt már nincs, de nem fogyott el a tej.*

b.) *Ha nem fogy el a tej, akkor kevés a kenyér.*

c.) *Ha elmegyek a boltba, akkor liszt már nincs.*

5.7. Formalizáljuk az alábbi mondatokat! Döntsük el a szemantikai definíciók segítségével, hogy az alábbi következtetések helyesek-e!

Premisszál:

P_1 *Nem igaz az, hogy ha rossz időt jósoltak mára de süt a nap, akkor esik az eső.*

P_2 *Ha nem fúj a szél, nem is esik az eső.*

P_3 *Csak akkor süt a nap, ha a szél nem fúj.*

Következtetések:

a.) *Ha rossz időt jósoltak mára, akkor nem fúj a szél, és az eső sem esik.*

b.) *Csak akkor nem fúj a szél, ha nem jósoltak rossz időt mára.*

Tekintsük az aritmetika (Ar) nyelvét és *természetes interpretációját* informálisan a következő képpen:

$$Ar = \langle \{szt\}, \{P\}, \{f, g, h\}, \{nulla\} \rangle$$

Jelentse szt a nem negatív egész számokat!
A nyelv szinbólumai és az interpretáció informális leírása:

Pr	ν_1	interpretáció
P	(szt, szt)	egyenlőség predikátum

Fn	ν_2	interpretáció
f	(szt, szt)	rákövetkező egész
g	(szt, szt, szt)	összeadás
h	(szt, szt, szt)	szorzás

$Cnst$	ν_3	interpretáció
$nulla$	(szt)	0

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} 0 &\rightleftharpoons nulla \\ x = y &\rightleftharpoons P(x, y) \\ \mathtt{s}x &\rightleftharpoons f(x) \\ x + y &\rightleftharpoons g(x, y) \\ x * y &\rightleftharpoons h(x, y) \end{aligned}$$

Formalizáljuk az Ar nyelv *természetes interpretációjában* az alábbi állításokat! Vezessünk be új jelöléseket ahol ez szükséges.

1. Az x és y számok nem egyenlőek.
2. Az x szám kisebb vagy egyenlő mint az y.
3. Az x szám kisebb mint az y.
4. Az x szám osztja az y számot.
5. Az x prím szám.
6. Végtelen sok prím szám van.
7. Véges sok prím szám van.
8. Az ikerprímek száma végtelen.
9. Minden nem negatív szám felírható négy nem negatív szám négyzetének összegeként!
10. Ha $x > y$ akkor $x + z > y + z$.

Tekintsük az aritmetika (Ar) nyelvének olyan interpretációját, mely az előbbitől csak annyiban különbözik, hogy az szt fajtához az egész számok halmazát rendeli! Hogyan formalizálhatók ekkor a fenti mondatok?
Tekintsük a geometria ($Geom$) nyelvét és *természetes interpretációját* informálisan a következő képpen:

$$Geom = \langle \{pt, et, st\}, \{P, Q, R\}, \emptyset, \emptyset \rangle$$

Legyen a fajták jelentése a következő:

Srt	változók	interpretáció
pt	$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$	a 3 dimenziós Euklideszi tér pontjai
et	$e, f, g, \ldots$	a 3 dimenziós Euklideszi tér egyenesei
st	$\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \ldots$	a 3 dimenziós Euklideszi tér síkjai

A nyelv szinbólumai és az interpretáció informális leírása:

Pr	ν_1	interpretáció
P	(pt, pt)	két pont egyebeesik
Q	(pt, et)	az egyenes tartalmazza a pontot
R	(pt, st)	a sík tartalmazza a pontot

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \mathcal{B} &\rightleftharpoons P(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \\ \mathcal{A} \in e &\rightleftharpoons Q(\mathcal{A}, e) \\ \mathcal{A} \in \mathtt{a} &\rightleftharpoons R(\mathcal{A}, \mathtt{a}) \end{aligned}$$

Formalizáljuk a geometria ($Geom$) nyelv *természetes interpretációjában* az alábbi állításokat! Vezessünk be új jelöléseket ahol ez szükséges.

1. Az e egyenes az $\mathtt{a}$ síkban van.
2. Az e és f egyenesek egybeesnek.
3. Az $\mathtt{a}$ és $\mathtt{b}$ síkok egybeesnek.
4. Az e és f egyenes párhuzamos.
5. Az e és f egyenes kitérő.
6. Az e és f egyenes pontosan egy ponton keresztezik egymást.
7. Az e egyenes egy pontban döfi az $\mathtt{a}$ síkot.
8. Az $\mathtt{a}$ és $\mathtt{b}$ síkok párhuzamosak.
9. Bármely két nem egybeeső pontra pontosan egy egyenes illeszthető.
10. Bármely ponton át pontosan egy, a pontot nem tartalmazó egyenessel párhuzamos egyenes húzható.

Legyen L_1 elsőrendű matematikai logikai nyelv definiálva a következőképpen:

$$L_1 = \langle \{\pi_1\}, \{P, Q, R\}, \{f, g\}, \{c\} \rangle$$

- $x, y, z, \ldots$ változók π_1 fajtájúak
- $\nu_1(P) = (\pi_1), \quad \nu_1(Q) = (\pi_1, \pi_1), \quad \nu_1(R) = (\pi_1, \pi_1)$
- $\nu_2(f) = (\pi_1, \pi_1), \quad \nu_2(g) = (\pi_1, \pi_1)$
- $\nu_3(c) = (\pi_1)$

7.1. Az alábbi kifejezések közül melyek π_1 fajtájú termjei az L_1 nyelvnek?

(a) c

(b) x

(c) $F(x)$

(d) $f(c, x)$

(e) $c(x)$

(f) $f(c)$

(g) $f(g(x))$

(h) $f(g(x, y), z)$

(i) $P(x)$

(j) $Q(x)$

(k) $\neg f(c)$

(l) $g(c, f(x))$

7.2. Az alábbi kifejezések közül melyek formulái az L_1 nyelvnek?

(a) $P(c)$

(b) $Q(x)$

(c) $\neg P(\neg f(x))$

(d) $R(f(x), g(x))$

(e) $\exists x f(x)$

(f) $\forall \neg P(x) \wedge f(x)$

(g) $\exists c(P(c) \vee R(f(c), y))$

(h) $\neg \exists x R(P(c), f(x))$

(i) $P(x) \supset \exists x Q(x, x)$

(j) $\exists f(x) P(f(x))$

(k) $\neg f(c) \wedge \forall y Q(y, y)$

(l) $P(x \wedge y)$

Legyen L_2 elsőrendű matematikai logikai nyelv definiálva a következőképpen:

$$L_2 = \langle \{\pi_1, \pi_2\}, \{P, Q, R\}, \{f, g, h\}, \{c, \epsilon\} \rangle$$

- $x, y, z, \ldots$ változók π_1 fajtájúak, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ változók π_2 fajtájúak
- $\nu_1(P) = (\pi_1), \quad \nu_1(Q) = (\pi_1, \pi_2), \quad \nu_1(R) = (\pi_2, \pi_2)$
- $\nu_2(f) = (\pi_1, \pi_2), \quad \nu_2(g) = (\pi_1, \pi_1, \pi_2), \quad \nu_2(h) = (\pi_2, \pi_2, \pi_1)$
- $\nu_3(c) = (\pi_1), \quad \nu_3(\epsilon) = (\pi_2)$

8.1. Keressük ki az alábbi kifejezések közül az L_2 nyelv π_1 valamint π_2 fajtájú termjeit!

(a) $f(c, x)$
(b) $h(f(x), g(x, y))$
(c) $f(g(x, x))$
(d) $f(h(\epsilon, \epsilon))$
(e) $f(\epsilon)$
(f) $g(Q(c), R(\epsilon))$
(g) $g(f(x), f(c))$
(h) $f(f(g(x, y)))$
(i) $g(c, f(x))$

8.2. Az alábbi kifejezések közül melyek formulái az L_2 nyelvnek?

(a) $\exists \epsilon R(\epsilon, \alpha)$
(b) $\exists x Q(x, f(x)) \supset \forall x P(h(f(x), \epsilon))$
(c) $\neg P(x) \vee f(x)$
(d) $Q(f(x), \epsilon) \supset \neg R(\epsilon, \alpha)$
(e) $\neg Q(x, Q(x))$
(f) $\exists \neg x P(x)$
(g) $f(x, g(c, x))$
(h) $\forall Q(x, \alpha) \supset P(x)$

8.3. Legyenek az alábbi kifejezések valamely alkalmas elsőrendű nyelv elemei! ($P, Q, R, \ldots$ predikátum szimbólumok, $f, g, h, \ldots$ függvény szimbólumok, $a, b, c, \ldots$ konstansok szimbólumok és $x, y, z, \ldots$ változók.)

- határozzuk meg a formulák logikai- és a termek funkcionális összetettségét,
- adjuk meg a közvetlen részkifejezéseiket!

(a) $P(x) \vee Q(x, y) \supset P(f(x)) \wedge Q(f(x), y)$
(b) $\forall x(P(x) \vee Q(x, y) \supset P(x) \wedge Q(x, y))$
(c) $f(g(x, y))$
(d) $g(f(x), f(x))$
(e) $\neg P(g(f(x), f(x)))$

8.4. Legyenek az alábbi kifejezések (a megelőző feladathoz hasonló módon) valamely alkalmas elsőrendű nyelv formlái!

- határozzuk meg az egyes változó előfordulások státuszát,
- készítsük el (ha szükséges) a formulák változóiban tiszta alakját!

(a) $P(x) \vee Q(x,y) \supset P(f(x)) \wedge Q(f(x),y)$

(b) $P(x) \vee Q(x,y) \supset P(z)) \wedge Q(z,y)$

(c) $\forall x \exists y (P(x) \vee Q(x,y) \supset P(f(x))) \wedge Q(f(x),c)$

(d) $\forall y \exists x (P(y) \vee Q(y,x) \supset P(f(y))) \wedge Q(f(x),c)$

(e) $\forall x (P(x) \supset \exists x Q(x,f(x))) \vee Q(x,c)$

(f) $\forall y (P(y) \supset \exists x Q(y,f(y))) \vee Q(y,c)$

(g) $P(x) \supset \exists x P(x) \vee Q(x,y)$

(h) $P(x) \supset \exists y P(y) \vee Q(y,x)$

- Található-e a fenti formulák közt olyan, mely kongruens az alábbiak egyikével?

i. Kongruens-e (a) vagy (b) formulávak: $P(y) \vee Q(y,x) \supset P(f(y)) \wedge Q(f(y),x)$?

ii. Kongruens-e (c) vagy (d) formulávak: $\forall y \exists x (P(y) \vee Q(y,x) \supset P(f(y))) \wedge Q(f(y),c)$?

iii. Kongruens-e (e) vagy (f) formulávak: $\forall x (P(x) \supset \exists y Q(y,f(y))) \vee Q(y,c)$?

iv. Kongruens-e (g) vagy (h) formulávak: $P(x) \supset \exists y P(y) \vee Q(y,x)$?

Legyen L_2 elsőrendű matematikai logikai nyelv definiálva a következőképpen:

$$L_2 = \langle \{\pi_1, \pi_2\}, \{P, Q, R\}, \{f, g, h\}, \{c, \epsilon\} \rangle$$

- $x, y, z, \ldots$ változók π_1 fajtájúak, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ változók π_2 fajtájúak
- $\nu_1(P) = (\pi_1)$, $\nu_1(Q) = (\pi_1, \pi_2)$, $\nu_1(R) = (\pi_2, \pi_2)$
- $\nu_2(f) = (\pi_1, \pi_2)$, $\nu_2(g) = (\pi_1, \pi_1, \pi_2)$, $\nu_2(h) = (\pi_2, \pi_2, \pi_1)$
- $\nu_3(c) = (\pi_1)$, $\nu_3(\epsilon) = (\pi_2)$

9.1. Készítsünk interptetációt L_2 elsőrendű matematikai logikai nyelvhez, amely eleget tesz az alábbiaknak!

- π_1 fajtájú indivídumok halmaza: $\{1, 2\}$
- π_2 fajtájú indivídumok halmaza: $\{a, b\}$

9.2. Készítsünk olyan interpretációt az *Ar* nyelvhez, mely a *természetes interperetáció*tól annyiban különbözik, hogy univerzumát az egész számok adják!

9.3. Formalizáljuk alkalmas elsőrendű nyelven az alábbi mondatokat. Készítsük el a nyelvek egy-egy interpretációját!

(a)
- Mindenki, aki az első padban ül, kabátot visel.
- Csak azok nem ültek az ablak mellé, akiknek kék szemük van.
- Senki nem ül ablak mellett, aki kabátot visel.

(b)
- Minden olyan nap, amikor esik az eső, és hideg van, fáradt vagyok.
- Minden téli hónapra eső nap hideg van.
- Van olyan hideg nap, mely nem téli hónapra esik.

Legyen L elsőrendű matematikai logikai nyelv definiálva a következőképpen:

$$L = \langle \{\pi\}, \{P, Q\}, \{f, g\}, \{c\} \rangle$$

- $x, y, z, \dots$ változók π fajtájúak
- $\nu_1(P) = (\pi), \quad \nu_1(Q) = (\pi, \pi)$
- $\nu_2(f) = (\pi, \pi), \quad \nu_2(g) = (\pi, \pi, \pi)$
- $\nu_3(c) = (\pi)$

Legyen I az L elsőrendű matematikai logikai nyelv egy interpretációja:

$$I = \langle I_{Srt}, I_{Pr}, I_{Fn}, I_{Cnst} \rangle$$

- $I_{Srt}(\pi) = \{1, 2, 3, 4\}$
- $I_{Pr}(P) = P^I, \quad I_{Pr}(Q) = Q^I$
- $I_{Fn}(f) = f^I, \quad I_{Fn}(g) = g^I$
- $I_{Cnst}(c) = 2$

$$\begin{aligned} f^I(\alpha) &= 5 - \alpha \\ g^I(\alpha, \beta) &= |\alpha - \beta| + 1 \\ P^I(\alpha) &= \begin{cases} i & \text{ha } \alpha = 1 \text{ vagy } \alpha = 4 \\ h & \text{egyébként} \end{cases} \\ Q^I(\alpha, \beta) &= \begin{cases} i & \text{ha } \alpha > \beta \\ h & \text{egyébként} \end{cases} \end{aligned}$$

10.1. Határozzuk meg az alábbi L_1 nyelvű termek értékét I_1 interpretációban a megadott változókiértékelés mellett!

- $\kappa(x) = 1, \kappa(y) = 3$

  (a) $|c|^{I,\kappa}$
  (b) $|y|^{I,\kappa}$
  (c) $|f(c)|^{I,\kappa}$
  (d) $|f(g(c,c))|^{I,\kappa}$
  (e) $|g(f(x), f(y))|^{I,\kappa}$
  (f) $|f(g(x, g(y, c)))|^{I,\kappa}$

- $\kappa(x) = 2, \kappa(y) = 4$

  (a) $|y|^{I,\kappa}$
  (b) $|g(f(x), f(y))|^{I,\kappa}$
  (c) $|f(g(x, g(y, c)))|^{I,\kappa}$

10.2. Határozzuk meg az alábbi L_1 nyelvű formulák értékét I_1 interpretációban κ változókiértékelés mellett! $\kappa(x) = 1, \kappa(y) = 3$

(a) $|P(y)|^{I,\kappa}$
(b) $|\forall x P(x)|^{I,\kappa}$
(c) $|Q(x, y)|^{I,\kappa}$
(d) $|Q(x, y) \supset \neg Q(f(x), f(y))|^{I,\kappa}$
(e) $|\forall x(Q(f(x), y) \supset \neg Q(x, f(y)))|^{I,\kappa}$
(f) $|\exists y(Q(f(c), y) \supset \neg Q(c, f(y)))|^{I,\kappa}$
(g) $|\exists x P(x) \supset \forall x \neg Q(x, f(x))|^{I,\kappa}$
(h) $|\forall x \exists y \neg Q(x, f(y))|^{I,\kappa}$
(i) $|\exists x \forall y \neg Q(x, f(y))|^{I,\kappa}$
(j) $|\forall x \forall y(Q(x, f(y)) \vee Q(f(y), x))|^{I,\kappa}$

11.1. Készítsünk olyan változókiértékeléseket L nyelv I interpretációjához, melyben az alábbi formulák igazak, vagy igazoljuk, hogy nincs ilyen változókiértékelés!

(a) $|\exists x Q(x, f(y))|^{I,\kappa_1} = i$

(b) $|\forall x(Q(x, f(y)) \vee P(y))|^{I,\kappa_2} = i$

(c) $|\exists x \neg(Q(x, f(y)) \vee P(y))|^{I,\kappa_3} = i$

(d) $|\neg Q(y, f(c)) \wedge \neg Q(f(c), y)|^{I,\kappa_4} = i$

(e) $|\neg Q(x, f(x)) \wedge \neg Q(f(x), x)|^{I,\kappa_5} = i$

11.2. Konstruáljuk meg (ha ez lehetséges) az L nyelv olyan interpretációit és ezekben olyan változókiértékelést, melyen az alábbi formulák igazak!

(a) $\forall x \forall y(Q(x, y) \supset \neg Q(y, x))$

(b) $\forall x(P(x) \vee Q(x, c)) \supset \exists x \neg Q(x, c)$

(c) $\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y, x) \supset \neg P(y))$

(d) $Q(x, f(x)) \wedge \neg Q(y, f(y))$

(e) $\forall x \exists y Q(y, x) \wedge \neg \exists y \forall x Q(y, x)$

(f) $\neg \forall x \forall y(Q(x, y) \supset \neg Q(y, x))$

(g) $\neg(\forall x(P(x) \vee Q(x, c)) \supset \exists x \neg Q(x, c))$

(h) $\exists x \exists y \neg(P(x) \wedge Q(y, x) \supset \neg P(y))$

(i) $Q(x, f(x)) \vee \neg Q(y, f(y))$

(j) $\forall x \exists y Q(y, x) \vee \neg \exists y \forall x Q(y, x)$

11.3. Legyenek az alábbi kifejezések valamely alkalmas egy fajtájú elsőrendű nyelv formulái! ($P, Q, R, \ldots$ predikátum szimbólumok, $f, g, h, \ldots$ függvény szimbólumok, $a, b, c, \ldots$ konstansok szimbólumok és $x, y, z, \ldots$ változók.) Mely formulák tautologikusan igazak az alábbiak közül?

(a) $Q(x, c) \vee \neg Q(y, c)$

(b) $\forall x P(x) \supset \forall y P(y)$

(c) $\neg(\forall x P(x) \vee \exists y Q(y, c)) \supset (\neg \forall x P(x) \wedge \neg \exists y Q(y, c))$

(d) $\neg \forall x Q(x, c) \supset \exists x \neg Q(x, c)$

(e) $(\forall x P(x) \supset \exists y R(y)) \vee \exists x \neg P(x)$

(f) $(\forall x P(x) \supset \exists y R(y)) \vee \neg \forall x P(x)$

11.4. Legyenek az alábbi kifejezések valamely alkalmas egy fajtájú elsőrendű nyelv formulái! ($P, Q, R, \ldots$ predikátum szimbólumok, $f, g, h, \ldots$ függvény szimbólumok, $a, b, c, \ldots$ konstansok szimbólumok és $x, y, z, \ldots$ változók.) Mely szemantikai tulajdonságoknak tesznek eleget az alábbi formulák?

- logikai törvény,
- kielégíthető,
- ellentmondás.

(a) $\neg \forall x Q(x, c) \supset \exists x \neg Q(x, c)$

(b) $P(c) \supset \exists x P(x)$

(c) $\forall x \exists y Q(x, y) \supset \exists y \forall x Q(x, y)$

(d) $\forall x \exists y Q(x, y) \supset \exists y \forall x Q(y, x)$

(e) $\forall x P(x) \vee \forall x R(x) \supset \forall x(P(x) \vee R(x))$

(f) $\exists x P(x) \wedge \exists x R(x) \supset \exists x(P(x) \wedge R(x))$

(g) $\forall x(P(x) \supset R(x)) \supset (\neg \forall x P(x) \vee \forall x R(x))$

(h) $\exists x \neg Q(x, c) \supset \neg \forall y Q(y, c)$

(i) $\forall x P(x) \supset \exists y(Q(y,y) \lor P(y))$

(j) $\exists y \forall x Q(x,y) \supset \forall x \exists y Q(x,y)$

(k) $\exists y \forall x Q(y,x) \supset \forall x \exists y Q(x,y)$

(l) $\exists x P(x) \lor \exists x R(x) \supset \exists x(P(x) \lor R(x))$

(m) $\exists x(P(x) \land R(x)) \supset \exists x P(x) \land \exists x R(x)$

(n) $(\exists x P(x) \supset \forall x Q(x)) \supset \forall x(P(x) \supset R(x))$

12.1. Legyenek az alábbi kifejezések valamely alkalmas egy fajtájú elsőrendű nyelv formulái! ($P, Q, R, \ldots$ predikátum szimbólumok, $f, g, h, \ldots$ függvény szimbólumok, $a, b, c, \ldots$ konstansok szimbólumok és $x, y, z, \ldots$ változók.) Mely formulák ekvivalensek az alábbi formulasorozatokban?

(a) i. $\forall x((P(x) \supset Q(x)) \wedge (Q(x) \supset R(x)))$
  ii. $\forall x(P(x) \supset R(x))$
  iii. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \supset R(x))$

(b) i. $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
  ii. $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$
  iii. $\neg\exists x(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$

(c) i. $\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
  ii. $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
  iii. $\neg\forall x(P(x) \supset \neg Q(x))$

(d) i. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
  ii. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
  iii. $\neg\exists x P(x) \supset \neg\exists x \neg Q(x)$

(e) i. $\exists x P(x) \vee \forall x Q(x)$
  ii. $\exists x(P(x) \vee Q(x))$

12.2. Formalizáljuk alkalmas elsőrendű logikai nyelven az alábbi kijelentéseket, és keressük meg az ekvivalens állításokat!

(a) i. *Mindenki aki alaposan felkészül, jó jegyet fog szerezni.*
  ii. *Csak azok szereznek jó jegyet, akik alaposan felkészültek.*
  iii. *Csak azok készültek fel alaposan, akik jó jegyet fognak szerezni.*

(b) i. *Minden nap esett az eső, vagy egyetlen nap sem volt szél.*
  ii. *Nem igaz az, hogy ugyan volt nem esős nap, de nem minden nap telt el szél nélkül.*
  iii. *Ha volt szeles nap, akkor nem volt esős nap sem.*

(c) i. *Minden kosaras apja sportol.*
  ii. *Nem igaz, hogy nincs olyan kosaras akinek nem sportoló az apja.*
  iii. *Akinek az apja nem sportoló az nem kosaras.*

13.1. Mely alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek a megadott ítéletlogikai formulák?

- literál
- elemi konjunkció
- elemi diszjunkció
- konjunktív normál forma
- diszjunktív normál forma

(a) $\neg\neg X$

(b) $\neg X \vee \neg Y$

(c) $X \supset \neg Y$

(d) $\neg Y$

(e) $(X \vee Y) \vee Z$

(f) $(X \wedge Y) \wedge \neg Z$

(g) $\neg(X \wedge Y) \wedge Z$

(h) $(X \supset \neg Y) \supset Z$

(i) X

(j) $(X \vee Y) \wedge Z$

(k) $(X \supset Y) \wedge Z$

(l) $\neg(X \vee Y) \vee \neg(Y \vee Z)$

(m) $(\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Z)$

13.2. Készítsen az alábbi formulával ekvivalens ugyanakkor kisebb logikai összetettségű formulát (alkalmazza az egyszerűsítési szabályokat)!

(a) $\neg\neg\neg X$

(b) $(X \vee \neg Y \vee \neg X) \supset Y$

(c) $(X \wedge \neg Y \wedge \neg X) \supset Y$

(d) $(X \vee Y) \wedge (Z \wedge Y)$

(e) $(X \wedge Y) \vee (Z \vee Y)$

(f) $\neg(\neg X \vee \neg Y)$

(g) $\neg(\neg X \wedge \neg Y)$

(h) $\neg X \supset \neg Y$

(i) $\neg X \supset \neg Y$

(j) $\neg(X \wedge Y) \supset (X \wedge Y)$

13.3. Határozza meg a következő ítéletlogikai formulák diszjunktív normál formáját (alkalmazza a disztributivitási szabályokat)!

(a) $X \wedge (Y \vee Z)$

(b) $(X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (U \vee \neg W)$

(c) $(X \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee \neg U \vee W) \wedge (S \vee \neg T)$

13.4. Határozza meg a következő ítéletlogikai formulák konjunktív normál formáját (alkalmazza a disztributivitási szabályokat)!

(a) $X \vee (\neg Y \wedge \neg Z)$

(b) $(X \wedge (\neg Y \vee \neg Z)) \vee (U \wedge \neg W)$

(c) $(X \vee \neg Y) \vee ((\neg Z \vee \neg U \vee W) \wedge (S \vee \neg T))$

13.5. Határozza meg a következő ítéletlogikai formulák konjunktív és diszjunktív normál formáját! Egyszerűsítsen ahol ez lehetséges!

(a) $X \supset (Y \supset (Z \supset U))$

(b) $((X \supset Y) \supset Z) \supset U$

(c) $\neg(X \vee Y) \supset \neg(X \wedge \neg Z)$

(d) $\neg(X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (U \vee \neg W)$

(e) $(X \wedge (\neg Y \vee \neg Z)) \supset \neg(U \supset \neg W)$

(f) $(X \vee Z) \wedge (Z \supset \neg X)$

(g) $\neg((X \vee Z) \supset (Z \supset \neg X))$

(h) $(X \wedge \neg Y) \vee \neg((\neg Z \supset \neg U \vee W) \supset (S \vee \neg T))$

13.6. Legyenek az alábbi kifejezések valamely alkalmas egy fajtájú elsőrendű nyelv formulái! ($P, Q, R, \ldots$ predikátum szimbólumok és $x, y, z, \ldots$ változók.)! Adja meg a formulák prenex alakját!

(a) $\neg\exists x P(x) \wedge \neg\forall x Q(x)$

(b) $\neg\exists x P(x) \supset \neg\forall x Q(x)$

(c) $\exists x P(x) \supset \neg\forall x \neg Q(x)$

(d) $\forall x(P(x) \wedge \neg\exists x Q(x)) \vee (\forall x Q(x) \supset R(x))$

(e) $\neg\forall x(P(x) \wedge \neg\exists x Q(x)) \vee (\forall x Q(x) \supset R(x))$

(f) $\forall x P(x) \supset (\forall x R(x) \supset \exists x Q(x))$

(g) $\neg\exists x \neg\forall y \neg T(x, y)$

(h) $\neg\forall x(\exists y T(x, y) \supset \forall x R(x) \vee P(x))$

(i) $\forall x \exists y T(x, y) \supset Q(x) \vee R(y)$

(j) $P(x) \supset (\forall y Q(y) \supset \neg\exists x T(x, y))$

14.1. Formalizálja a következő állításokat alkalmas elsőrendű logikai nyelven!

- *Ha akad, aki elvégezze a munkát, akkor mindenki elégedett lehet.*
- *Aki elégedett lehet, az nyugodtan alszik.*
- *János elvégzi a munkát.*

Az előbbi állításokat premisszaként tekintve, mely következtetések helyesek az alábbiak közül?

(a) *Mindenki nyugodtan alszik.*

(b) *Ha János nem végzi el a munkát, nem alhat nyugodtan.*

14.2. Formalizálja a következő állításokat alkalmas elsőrendű logikai nyelven!

- *Ha egy részecske nyugalmi tömege 0 és a részecske bozon, akkor ez a részecske foton.*
- *A Higgs részecske nem foton, de bozon.*
- *Nem minden 0 nyugalmi tömegű részecskére igaz, hogy foton.*

Az előbbi állításokat premisszaként tekintve, mely következtetések helyesek az alábbiak közül?

(a) *Léteznek nem 0 nyugalmi tömegű részecskék és nem minden részecske bozon.*

(b) *Nem igaz az, hogy minden részecske 0 nyugalmi tömegű és bozon.*

14.3. Formalizálja a következő állításokat alkalmas elsőrendű logikai nyelven!

- *Nem igaz az, hogy ha van, aki nem kelt korán, akkor van olyan is, aki nem tanult.*
- *Mindenki, aki hamar nyugovóra tért, korán kelt.*

Az előbbi állításokat premisszaként tekintve, mely következtetések helyesek az alábbiak közül?

(a) *Nem igaz az, hogy ha mindenki tanult, akkor mindenki hamar nyugovóra is tért.*

(b) *Nem mindenki tért hamar nyugovóra.*

15.1. Adjon meg az alábbi szekventekkel ekvivalens formulákat! Egyszerűsítsen ahol ez lehetséges!

(a) $\rightarrow (X \supset Y)$

(b) $X \rightarrow Y$

(c) $X \wedge Y \rightarrow Y \wedge Z$

(d) $(X \supset Y) \rightarrow$

(e) $X \vee Y \rightarrow Y \vee Z$

(f) $X, Y \rightarrow Y, Z$

15.2. Bizonyítsuk be Gentzen-kalkulus segítségével hogy az alábbi ítéletlogikai formulák logikai törvények!

(a) Predikátumkalkulus axiómája

$$(X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$$

(b) De'Morgan törvényei

i. $\neg X \wedge \neg Y \supset \neg(X \vee Y)$

ii. $\neg(X \vee Y) \supset \neg X \wedge \neg Y$

iii. $\neg X \vee \neg Y \supset \neg(X \wedge Y)$

iv. $\neg(X \wedge Y) \supset \neg X \vee \neg Y$

(c) Implikáció átalakítás

i. $(X \supset Y) \supset \neg X \vee Y$

ii. $\neg X \vee Y \supset (X \supset Y)$

iii. $\neg(X \supset Y) \supset X \wedge \neg Y$

iv. $X \wedge \neg Y \supset \neg(X \supset Y)$

(d) Pierce törvénye

$$((X \supset Y) \supset X) \supset X$$

(e) Reduktio ad absurdum

$$(X \supset Y) \wedge (X \supset \neg Y) \supset \neg X$$

(f) Előtag felcserélése implikációban

$$(X \supset (Y \supset Z)) \supset (Y \supset (X \supset Z))$$

(g) Az implikáció öndisztributivitása

i. $(X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$

ii. $(X \supset Y) \supset (X \supset Z)) \supset (X \supset (Y \supset Z))$

(h) Az implikáció tranzitivitása

$$((A \supset B) \wedge (B \supset C)) \supset (A \supset C)$$

(i) Kontrapozíció

i. $(X \supset Y) \supset (\neg Y \supset \neg X)$

ii. $(\neg Y \supset \neg X) \supset (X \supset Y)$

(j) Konjunkció disztributivitás

i. $(X \vee Y) \wedge Z \supset (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$

ii. $(X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \supset (X \vee Y) \wedge Z$

(k) Diszjunkció disztributivitás

i. $(X \wedge Y) \vee Z \supset (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$

ii. $(X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \supset (X \wedge Y) \vee Z$

15.3. Bizonyítsuk be Gentzen-kalkulus segítségével hogy az alábbi elsőrendű formulák logikai törvények!

(a) De'Morgan kvantoros törvényei

i. $(\neg\forall x P(x) \supset \exists x \neg P(x)) \wedge (\exists x \neg P(x) \supset \neg\forall x P(x))$

ii. $(\neg\exists x P(x) \supset \forall x \neg P(x)) \wedge (\forall x \neg P(x) \supset \neg\exists x P(x))$

(b) Kétoldali kvantorkiemelés

i. $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \supset \exists x (P(x) \vee Q(x))$

ii. $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \supset \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

iii. $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \supset \forall x (P(x) \wedge Q(x))$

iv. $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \supset \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$