Diszkrét matematika 1.

1. gyakorlat

1. Tekintsük az alábbi halmazokat: $A = \mathbb{Z}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \ : \ x \text{ páros}\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x \text{ prím}\}$. Adja meg az alábbi halmazokat:

$$A \backslash B, \quad B \backslash A, \quad A \cap B, \quad C \backslash B, \quad (A \backslash B) \cup D, \quad B \triangle D$$

2. Legyen $A = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x \text{ páros}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x > 4\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x < 6\}$. Adja meg (és ábrázolja Venn-diagrammon) az alábbi halmazokat!

$$B \backslash C, \quad A \backslash (B \cap C), \quad B \triangle C, \quad (B \cup C) \backslash A$$

3. Írja fel az $A = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmazát!

4. Egyenlő-e az alábbi két halmaz?

(a) az 5-nél nagyobb egész számok halmaza és a 6-nál nem kisebb természetes számok halmaza,

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x < 1 \text{ és } x < x^2\}$ és
$B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 0 \text{ és } x = |x|\}$,

(c) $A = \mathbb{R}$ és $B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \sqrt{x^2} = x\}$.

5. Egy társaságban 27-en beszélnek angolul, 23-an németül, 12-en mindkét nyelvet beszélik, 8-an egyiket sem. Hány tagú a társaság?

6. Legyen A egy m elemű, B egy n elemű halmaz. Adja meg m és n függvényében legalább, ill. legfeljebb hány eleme lehet az alábbi halmazoknak!

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \times B, \quad A \backslash B, \quad A \triangle B$$

7. Jelölje X a 2008 szeptember elsején 20.00 és 22.00 között a „Vak késdobáló” elnevezésű vendéglátóipari egységben megjelent vendégek halmazát. Tekintsük X alábbi részhalmazait: N a nők halmaza, T a törzsvendégek (az egységet hetente legalább 4 alkalommal látogatók) halmaza, A az alkalmi turisták (az egységet ezidáig legfeljebb kétszer látogatók) halmaza, S a sört ivók halmaza, B a bort ivók halmaza. Fogalmazza meg halmazelméleti műveletekkel az alábbi állításokat!

(a) A bort ivó alkalmi turisták között nincs nő.

(b) A férfi törzsvendégek sört és bort is isznak.

(c) Nincs olyan sörivó nő, aki törzsvendég.

(d) Aki vagy csak sört, vagy csak bort iszik az alkalmi turista nő.

(e) Minden alkalmi turista sörivó.

8. Legyen $A = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Az alábbiak közül melyik állítás igaz?

$$\emptyset \in A, \quad \emptyset \subseteq A, \quad \{\emptyset\} \in A, \quad \{\emptyset\} \subseteq A,$$

$$\{\{\emptyset\}\} \in A, \quad \{\{\emptyset\}\} \subseteq A, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$$

9. Mit mondhatunk az A és B halmazokról, ha tudjuk, hogy

(a) $A \cup B = A \cap B$,

(b) $A \cup B = A$,

(c) $A \cap B = A$,

(d) $A \triangle B = A$,

(e) $A \triangle B = A \cup B$,

(f) $A \triangle B = A \cap B$,

(g) $A \triangle B = \emptyset$,

(h) $A \triangle B \subseteq A$,

(i) $A \setminus B = A$,

(j) $A \cup B \subseteq A$,

(k) $A \setminus B = B \setminus A$,

(l) $A \cup B = \overline{A}$,

(m) $(A \cup B) \setminus B = A$.

10. Igazolja az alábbi összefüggéseket!

(a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,

(b) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$,

(c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

11. Legyen $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Sorolja fel az $A \times B$ halmaz elemeit!

12. Legyen $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Legyen R a következő reláció:

$$R = \{(a, b) \in A \times B \ :\ a|b\}.$$

Sorolja fel R elemeit, adja meg a reláció értelmezési tartományát és értékkészletét!

13. Jelölje E egy adott társaságban jelenlévő emberek halmazát. Azt mondjuk, hogy a relációban áll b-vel (ahol $a, b \in E$), ha a ugyanabban a hónapban született, mint b. Vizsgálja meg a relációt reflexívitás, szimmetria, antiszimmetria és tranzitívitás szempontjából!

14. Vizsgálja meg, hogy az alábbi relációk közül melyik féligrendezés, rendezés, ill. ekvivalencia reláció! Ekvivalencia reláció esetén adja meg a relációhoz tartozó osztályozást!

(a) $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, 3|(a-b)\}$,

(b) $R = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, ab \geq 0\}$,

(c) $R = \{(a,b) \in (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \,:\, ab > 0\}$,

(d) $R = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, a+1 \geq b\}$,

(e) $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, a|b\,\}$,

(f) $R = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, |a| = |b|\,\}$,

(g) $R = \{(a,a),\, (b,b),\, (c,c)\}$ a $H = \{a,b,c\}$ halmazon,

(h) $R = \{(c,a),\, (c,b),\, (c,c),\, (b,b),\, (b,a),\, (a,a)\}$ a $H = \{a,b,c\}$ halmazon,

(i) $R = \{(a,b) \in H \times H \,:\,$ a és b nem relatív prímek$\}$, ahol
$H = \{2,4,5,12,13,15\}$.