Az informatika logikai alapjai, 2021. ősz

Gyakorló feladatok a 2. ZH elé

3.P.1. Határozzuk meg, hogy az alábbi formulában az egzisztenciális kvantor az x változó mely előfordulásait köti!

$$\forall x(P(x) \supset \exists x(\neg Q(f(x)) \vee \forall x P(f(x))) \vee \forall x R(x))$$

Megoldás

Először határozzuk meg az egzisztenciális kvantor hatáskörét:

$$\exists x(\neg Q(f(x)) \vee \forall x P(f(x)))$$

A kvantor az x változónak a $\neg Q(f(x)) \vee \forall x P(f(x))$ formulabeli szabad előfordulásait köti.

- a $\neg Q(f(x))$ közvetlen részformulában x változó minden előfordulása szabad, mivel a $Q(f(x))$ atomi formulában minden változó előfordulás szabad,
- a $\forall x P(f(x))$ közvetlen részformulában az x változó minden előfordulása kötött.

Ezért a kvantor – bár hatáskörébe x változó több előfordulása is esik – a formulában egyetlen változó előfordulást köt.

$$\forall x(P(x) \supset \exists x(\neg Q(f(x)) \vee \forall x P(f(x))) \vee \forall x R(x))$$

3.P.3. Vizsgáljuk meg, hogy szabályos-e az univerzálisan kvantált x változó átnevezése y változóra az alábbi formulák esetén, és hajtsuk végre a szabályos átnevezést, amennyiben ez lehetséges!

(a) $\forall x(P(x,y) \vee \neg Q(y,x))$

(b) $\forall x \exists y Q(x,y)$

(c) $\forall x(Q(x,x) \supset \exists x \exists y R(x,y))$

Megoldás

(a) Az átnevezés nem szabályos, mert az y változó paramétere a formulának.

$$\mathrm{Par}(\forall x(P(x,y) \vee \neg Q(y,x))) = \{y\}$$

(b) Az átnevezés nem szabályos, mert található olyan y változót kötő kvantor, melynek hatásköre a $\exists y Q(x,y)$ formula, ahol az x változó előfordulása a tekintett univerzális kvantor által kötött.

(c) Az átnevezés szabályos, mivel y nem paraméter, és x változót csak a $Q(x,x)$ részformulában köti az univerzális kvantor, és ezen változó előfordulások nem esnek y-t kötő kvantor hatáskörébe.

Ellenőrzésként figyeljük meg, hogy a szabályosan végrehajtott változó átnevezés segítségével kongruens formula jön létre, tehát a kötési viszonyok megegyeznek.

$$\forall x(Q(x,x) \supset \exists x \exists y R(x,y)) \qquad \forall y(Q(y,y) \supset \exists x \exists y R(x,y))$$

3.P.8. Változó-tiszták-e az alábbi formulák? Amelyik nem, azt hozzuk a változóiban tiszta alakra!

(a) $\neg \exists z Q(z,z) \wedge P(f(y,z))$

(b) $\exists x \forall y(P(x) \wedge P(y)) \supset \forall x Q(x,x)$

(c) $\exists x R(x,y,z) \supset \forall x \forall y(P(y) \wedge R(x,y,z))$

2.8. FELADAT. Jelöljük be az egyes kvantorok hatáskörét!

a) $\forall x(\exists y Q(f(x), h(y,x,z)) \supset P(x))$
b) $\forall x(P(x) \lor \neg\exists x Q(x, g(x,x))) \land \exists x P(f(f(x)))$
c) $\exists x(P(x) \lor \forall y \neg Q(g(x,y), y) \land \exists x P(x))$
d) $\exists x \forall x P(x) \lor \neg P(x)$

MEGOLDÁS:

a) $\boxed{\forall x(\boxed{\exists y Q(f(x), h(y,x,z))} \supset P(x))}$

b) $\boxed{\forall x(P(x) \lor \neg\boxed{\exists x Q(x, g(x,x))})} \land \boxed{\exists x P(f(f(x)))}$

c) $\boxed{\exists x(P(x) \lor \boxed{\forall y \neg Q(g(x,y), y)} \land \boxed{\exists x P(x)})}$

d) $\boxed{\exists x \boxed{\forall x P(x)}} \lor \neg P(x)$

2.10. FELADAT. Változó-tiszták-e az alábbi formulák? Ha nem, hozzuk olyan alakra!

a) $\forall x P(x) \lor \forall x P(f(x)) \lor \forall x P(f(f(x))) \lor P(x)$
b) $\forall x(\forall y P(x,y,z) \supset Q(x,y))$
c) $\exists x \forall y(P(x) \lor Q(x, f(y))) \supset \forall y Q(x,y)$
d) $\forall x \exists y(P(x) \lor \forall y Q(g(x,y), y) \lor P(y))$
e) $P(c) \supset \exists x(P(x) \lor Q(x,y)) \lor P(y)$
f) $\neg\forall x(P(g(x,x)) \supset \exists x P(x) \lor \forall x Q(x,x)) \land P(x)$
g) $\exists x R(x,y,z) \supset \forall x \forall y(P(y) \land R(x,y,z))$

MEGOLDÁS:

a) A formula nincs változó-tiszta alakban, ugyanis különböző kvantorok ugyanazt a változó-nevet kötik, sőt a kötött illetve szabad változó-nevek halmazának metszete sem üres.

$\forall \underbrace{xP(x)} \lor \forall \underbrace{xP(f(x))} \lor \forall \underbrace{xP(f(f(x)))} \lor P(\overset{\uparrow}{x})$ (kötöttségek bejelölése)

$\forall \underbrace{\ P(\ )} \lor \forall \underbrace{\ P(f(\ ))} \lor \forall \underbrace{\ P(f(f(\ )))} \lor P(\overset{\uparrow}{x})$ (váz meghatározása)

$\forall \underbrace{yP(y)} \lor \forall \underbrace{zP(f(z))} \lor \forall \underbrace{vP(f(f(v)))} \lor P(\overset{\uparrow}{x})$ (új változó-nevek beírása)

b) $\forall x(\forall v P(x,v,z) \supset Q(x,y))$
c) $\exists z \forall y(P(z) \lor Q(z, f(y))) \supset \forall v Q(x,v)$
d) $\forall x \exists y(P(x) \lor \forall z Q(g(x,z), z) \lor P(y))$
e) $P(c) \supset \exists x(P(x) \lor Q(x,y)) \lor P(y)$
(az y paraméter két helyen is szerepel, de ettől még a formula változó-tiszta)
f) $\neg\forall y(P(g(y,y)) \supset \exists z P(z) \lor \forall v Q(v,v)) \land P(x)$
g) $\exists x R(x,y,z) \supset \forall v \forall w(P(w) \land R(v,w,z))$

2.26.1 Tekintsük az L=< LC, {x,y,z,…}, {P(-,-), Q(-,-)}, Term, Form> elsőrendű nyelvet, ahol P(x,y) és Q(x,y) jelentse rendre azt, hogy x szereti y-t illetve azt, hogy x és y rokonok. Formalizáljuk az alábbi állításokat.

a) Mindenki szeret valakit.
b) Van olyan, aki mindenkit szeret.
c) Vannak, akik rokonok és szeretik egymást.
d) Mindenki szereti a rokonait.
e) Valaki szereti a rokonait.
f) Van olyan, aki csak a rokonait szereti.
g) A rokonok szeretik egymást.

MEGOLDÁS:

a) $\forall x \exists y P(x,y)$
b) $\exists x \forall y P(x,y)$
c) $\exists x \exists y (Q(x,y) \wedge P(x,y))$
d) $\forall x \forall y (Q(x,y) \supset P(x,y))$
e) $\exists x \forall y (Q(x,y) \supset P(x,y))$
f) $\exists x \forall y (P(x,y) \supset Q(x,y))$
g) $\forall x \forall y (Q(x,y) \supset P(x,y) \wedge P(y,x))$
(x és y szeretik egymást $=$ x szereti y-t és y szereti x-et)

2.26.3 Tekintsük az L=< LC, {x,y,z,…}, {f(-), g(-), P(-), Q(-)}, Term, Form> elsőrendű nyelvet, ahol P(x) és Q(x) jelentse rendre azt, hogy x férfi illetve azt, hogy x nő, f(x) és g(x) pedig jelölje x apját és x anyját. Formalizáljuk az alábbi állításokat.

a) Egyaránt vannak férfiak és nők.
b) Mindenki vagy nő vagy férfi.
c) Aki férfi, az nem nő.
d) Bárkinek az apja férfi, az anyja pedig nő.
e) A férfiak anyja nő.
f) Vannak nők, akiknek az anyja férfi.

MEGOLDÁS:

a) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
b) $\forall x ((Q(x) \vee P(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee \neg P(x)))$
c) $\forall x (P(x) \supset \neg Q(x))$
d) $\forall x (P(f(x)) \wedge Q(g(x)))$
e) $\forall x (P(x) \supset Q(g(x)))$
f) $\exists x (Q(x) \wedge P(g(x)))$

2.17 Tekintsük az L=< LC, {x,y,z,…}, {P(-,-), Q(-)}, Term, Form> elsőrendű nyelvet és azt az interpretációt, ahol az univerzum az ábécé ékezet nélküli betűi U={a,b,c,…,z}, P(u,v) teljesül ha u és v ugyanaz a betű, vagy ha u megelőzi v-t az ábécérendben, Q(u) pedig akkor teljesül, ha u magánhangzó. Határozzuk meg az alábbi formulák értékét ebben az interpretációban.

a) $\exists x(Q(x) \wedge \forall y(Q(y) \supset P(x,y)))$
b) $\forall x(Q(x) \wedge \forall y(Q(y) \supset P(x,y)))$

c) $\exists x(Q(x) \wedge \forall y(Q(y) \supset P(y,x)))$
d) $\forall x(Q(x) \wedge \exists y(Q(y) \supset P(x,y)))$

Megoldás. a) Akkor teljesül, ha van olyan u betű, hogy u magánhangzó és minden v betűre, ha v magánhangzó, akkor P(u,v) teljesül (azaz v vagy ugyanaz a betű mint u, vagy u megelőzi v-t az ábécében). Ha u-nak az „a" betűt választjuk, akkor minden OK.

b) Nem igaz, hiszen x helyére nem írhatom pl. „b"-t.

c) igaz, d) hamis.

2.24. FELADAT. Milyen szemantikai tulajdonsággal rendelkeznek az alábbi formulák? (logikai törvény, ellentmondás, kielégíthető)

a) $\forall x Q(x,y) \supset \forall x Q(x,x)$
b) $\forall x \forall y(Q(x,y) \supset (P(y) \supset Q(x,y)))$
c) $\forall x \exists y Q(x,y) \supset \exists y \forall x Q(x,y)$
d) $\exists x \neg(P(x) \supset (\exists y Q(x,y) \supset P(x)))$
e) $\forall x(P(x) \supset Q(x,x)) \wedge \forall x \exists y(\neg Q(x,y) \wedge Q(y,x))$
f) $\exists x \exists y \exists z(Q(x,y) \wedge Q(x,y) \supset Q(x,z))$

MEGOLDÁS: A d) formula logikai ellentmondás, míg az a), b), c), e) és f) formulák kielégíthetőek, melyek közül a b) és f) logikai törvény is egyben.

2.25. FELADAT. Logikai következményei-e a premisszáknak a felsorolt formulák?

2.25.1. RÉSZFELADAT. Premisszák: $\exists x A(x)$, $\forall x B(x)$ és $\exists x C(x)$.

a) $\forall x(A(x) \wedge B(x))$
b) $\forall x(\neg C(x) \supset B(x))$
c) $\exists x(A(x) \wedge C(x))$
d) $\exists x(A(x) \wedge \exists x C(x))$

Megoldás. a) Vegyük azt az interpretációt, amikor az univerzum a pozitív egész számok, A(u) jelenti, hogy u páros, B(u) jelenti, hogy u pozitív, és C(u) jelenti, hogy u páratlan. Ekkor a premisszák igazak, a konklúzió mégsem teljesül.

b) Vizsgáljuk a konklúziót. Tegyük fel, hogy hamis. Ekkor léterzik az univerzumban olyan u elem, hogy az implikáció nem teljeül, azaz nemC(u) igaz és B(u) hamis. Ez ellentmond a második premisszának, miszerint B mindenre igaz, így u-ra is. A feltevésünk, hogy a konklúzió hamis ellentmondásra vezetett, vagyis a konklúzió nem lehet hamis, ha a premisszák teljesülnek. Azaz a következtetés helyes.

c) Az a) ellenpélda ide is jó.

d) Következik.

2.25.2. RÉSZFELADAT. Premisszák: $\neg\exists x(F(x) \supset K(x))$ valamint $\exists x(A(x) \wedge \neg K(x))$.

a) $\forall x(A(x) \supset F(x))$
b) $\exists x(F(x) \wedge A(x))$
c) $\exists x(A(x) \wedge \neg F(x))$
d) $\forall x A(x) \vee \forall y F(y)$

Megoldás. a) következik, b) következik, c) nem következik, d) következik.

2.14. FELADAT. Mely formulá(k) az eredeti formula prenex alakja(i)?

2.14.1. RÉSZFELADAT. Eredeti formula: $\neg R(\beta, y) \wedge \exists\beta\exists x R(\beta, x)$

a) $\exists\beta\exists x(\neg R(\beta, y) \wedge R(\beta, x))$
b) $\exists\beta\exists x(\neg R(\alpha, y) \wedge R(\beta, x))$
c) $\exists\gamma\forall x(\neg R(\beta, y) \wedge R(\gamma, x))$
d) $\exists\alpha\exists x(\neg R(\beta, y) \wedge R(\alpha, x))$
e) $\exists x\exists\gamma(\neg R(\beta, y) \wedge R(\gamma, x))$
f) $\exists\gamma(\neg R(\beta, y) \wedge \exists x R(\gamma, x))$

MEGOLDÁS: A feladat megoldásához szükség lesz az eredeti formula vázára:

$$\neg R(\overset{\uparrow}{\beta}, \overset{\uparrow}{y}) \wedge \exists\ \exists\ R(\ ,\ )$$

a) $\exists\ \exists\ (\neg R(\ , \overset{\uparrow}{y}) \wedge R(\ ,\ ))$ (szabad változó kötött lett $\Rightarrow$ nem)

b) $\exists\ \exists\ (\neg R(\overset{\uparrow}{\alpha}, \overset{\uparrow}{y}) \wedge R(\ ,\ ))$ (szabad változó neve megváltozott $\Rightarrow$ nem)

c) $\exists\gamma\underline{\underline{\forall x}}(\neg R(\beta, y) \wedge R(\gamma, x))$ (nem megfelelő az x-et kötő kvantor $\Rightarrow$ nem)

d) $\exists\ \exists\ (\neg R(\overset{\uparrow}{\beta}, \overset{\uparrow}{y}) \wedge R(\ ,\ ))$ (igen)

e) $\exists\ \exists\ (\neg R(\overset{\uparrow}{\beta}, \overset{\uparrow}{y}) \wedge R(\ ,\ ))$ (**azonos** kvantorok felcserélhetőek $\Rightarrow$ igen)

f) $\exists\gamma(\neg R(\beta, y) \wedge \underline{\underline{\exists x}} R(\gamma, x))$ (az x-et kötő kvantor nincs kiemelve $\Rightarrow$ nem prenex)

Tehát a d) és e) formulák az eredeti formula prenex alakjai.

2.14.3. RÉSZFELADAT. Eredeti formula: $\exists x(\forall y Q(x,y) \vee \exists z P(z)) \supset \exists x P(x)$

a) $\forall x \exists y \forall z \exists x((Q(x,y) \vee P(z)) \supset P(x))$
b) $\forall x \exists y \forall z \exists u(Q(x,y) \vee P(z)) \supset P(u)$
c) $\forall x \exists y \exists u((Q(x,y) \vee \forall z P(z)) \supset P(u))$
d) $\exists y \forall x \forall z \exists u((Q(x,y) \vee P(z)) \supset P(u))$
e) $\forall x \exists y \forall z \exists u((Q(x,y) \vee P(z)) \supset P(u))$
f) $\forall x \exists y \forall z((Q(x,y) \vee P(z)) \supset P(x))$
g) $\forall y \exists x \forall w \exists z((Q(y,x) \vee P(w)) \supset P(z))$
h) $\forall x \exists y \forall z \exists u((Q(y,x) \vee P(z)) \supset P(u))$

MEGOLDÁS:

a) Változnak a kötöttségi viszonyok (nem változótiszta) $\Rightarrow$ nem.
b) A kvantorok az implikációs előtagra vonatkoznak (hiányzik a zárójel) $\Rightarrow$ nem.
c) Nem prenex (a z-t kötő kvantor nem lett kiemelve) $\Rightarrow$ nem.
d) Egymás hatáskörében lévő **eltérő** kvantorok nem felcserélhetőek $\Rightarrow$ nem.
e) Igen.
f) Változnak a kötöttségi viszonyok (nem változótiszta) $\Rightarrow$ nem.
g) Igen.
h) Változnak a kötöttségek, és az x ill. y-t kötő kvantorok sem megfelelőek $\Rightarrow$ nem.

Tehát az e) és g) formulák az eredeti prenex alakjai.

12.I.2. Melyik klózhalmazból van az üres klóznak rezolúciós levezetése?

(a) $\{\neg X,\ X \vee \neg Y,\ Y\}$
(b) $\{\neg X \vee Y,\ X \vee \neg Y,\ \neg X \vee \neg Y\}$
(c) $\{\neg X \vee Y,\ X \vee Y,\ \neg Y\}$
(d) $\{X \vee Y,\ \neg X \vee Y,\ X \vee \neg Y,\ \neg X \vee \neg Y\}$
(e) $\{X \vee Y,\ \neg Y \vee Z,\ \neg X \vee Z,\ \neg Z\}$

12.I.7. Rezolúcióval igazoljuk, hogy az

$$\{X \supset Y,\ Y \supset Z,\ X \vee U,\ U \supset (V \supset Z),\ \neg Z\}$$

formulahalmaznak logikai következménye a $\neg X$ formula!

Megoldás

Igazolnunk kell, hogy a

$$D = (X \supset Y) \wedge (Y \supset Z) \wedge (X \vee U) \wedge (U \supset (V \supset Z)) \wedge \neg Z \wedge \neg\neg X$$

ellentmondásos. Konjunktív normálformára hozunk:

$$(\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge (X \vee U) \wedge (\neg U \vee \neg V \vee Z) \wedge \neg Z \wedge X.$$

A klózhalmaz:

$$S = \{\neg X \vee Y, \neg Y \vee Z, X \vee U, \neg U \vee \neg V \vee Z, \neg Z, X\}.$$

Rezolúciós levezetéssel megpróbáljuk levezetni az üres klózt:

1.	$\neg X \vee \underline{Y}$	[$\in S$]
2.	$\underline{\neg Y} \vee Z$	[$\in S$]
3.	$\neg X \vee \underline{Z}$	[1, 2 rezolvense]
4.	$\underline{\neg Z}$	[$\in S$]
5.	$\underline{\neg X}$	[3, 4 rezolvense]
6.	$\underline{X}$	[$\in S$]
7.	$\square$	[5, 6 rezolvense]

Az S klózhalmaznak megszerkesztettük a rezolúciós cáfolatát, tehát D ellentmondásos, $\neg X$ pedig következménye a megadott formulahalmaznak. Szemléltethetjük a rezolúciós levezetést gráffal is:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg X, \underline{Y}\} \arrow[dr] & \{\underline{\neg Y}, Z\} \arrow[d] & \{X, U\} & \{\neg U, \neg V, Z\} & \{\underline{\neg Z}\} \arrow[ddll] & \{\underline{X}\} \arrow[dddll] \\
& \{\neg X, \underline{Z}\} \arrow[dr] & & & & \\
& & \underline{\neg X} \arrow[dr] & & & \\
& & & \square & &
\end{tikzcd}$$

12.P.6 Igazoljuk, a szemantikus táblák módszerével, hogy a következő formulák logikai törvények.

(a) $(\exists x P(x) \supset \forall x Q(x)) \supset \forall x (P(x) \supset Q(x))$

(b) $\exists x \forall y R(x,y) \supset \forall y \exists x R(x,y)$

a)

$$\neg\big[(\exists x P(x) \supset \forall x Q(x)) \supset \forall x (P(x) \supset Q(x))\big]$$

$$\exists x P(x) \supset \forall x Q(x),\ \neg\forall x (P(x) \supset Q(x))$$

$$\exists x P(x) \supset \forall x Q(x),\ \exists x \neg(P(x) \supset Q(x))$$

$$\exists x P(x) \supset \forall x Q(x),\ \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\neg\exists x P(x),\ \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) \qquad\qquad \forall x Q(x),\ \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\forall x \neg P(x),\ \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) \qquad\qquad \forall x Q(x),\ P(a_1) \wedge \neg Q(a_1)$$

$$\forall x \neg P(x),\ P(a_1) \wedge \neg Q(a_1) \qquad\qquad \forall x Q(x),\ P(a_1),\ \neg Q(a_1)$$

$$\forall x \neg P(x),\ P(a_1),\ \neg Q(a_1) \qquad\qquad \forall x Q(x),\ Q(a_1),\ P(a_1),\ \neg Q(a_1)$$

$$\forall x \neg P(x),\ \neg P(a_1),\ P(a_1),\ \neg Q(a_1)$$

b)

$$\neg(\exists x \forall y R(x,y) \supset \forall y \exists x R(x,y))$$

$$\exists x \forall y R(x,y),\ \neg\forall y \exists x R(x,y)$$

$$\exists x \forall y R(x,y),\ \exists y \forall x \neg R(x,y)$$

$$\forall y R(a_1,y),\ \forall x \neg R(x,a_2)$$

$$\forall y R(a_1,y),\ R(a_1,a_2),\ R(a_1,a_1),\ \forall x \neg R(x,a_2),\ \neg R(a_1,a_2),\ \neg R(a_2,a_2)$$

!