

1. Adja meg a következő formulák alábbi szintaktikai tulajdonságait!

(a) $\neg(X \supset Y) \wedge (X \vee Z)$

- közvetlen részformulái:

$\neg(X \supset Y), (X \vee Z)$

- az „ \neg ” jel hatásköre:

$\neg(X \supset Y)$

(b) $\neg X \supset \neg Y \wedge Z$

- fő logikai összekötőjele:

\supset

- logikai összetettsége:

4

2. Konstruáljon meg egy olyan interpretációt, melyben az alábbi formulahalmaz minden formulája igaz, vagy igazolja, hogy nincs ilyen interpretáció!

$$\{ \neg Z \supset (X \vee Y), \neg Z \vee \neg W, (W \vee X) \wedge \neg Y \}$$

$$|(W \vee X) \wedge \neg Y|^{\mathcal{I}} = i \Rightarrow |W \vee X|^{\mathcal{I}} = i \text{ és } |\neg Y|^{\mathcal{I}} = i \Rightarrow |Y|^{\mathcal{I}} = h$$

$$|\neg Z \supset (X \vee Y)|^{\mathcal{I}} = i \text{ és } |Y|^{\mathcal{I}} = h \Rightarrow |\neg Z \supset X|^{\mathcal{I}} = i$$

$$|\neg Z \supset X|^{\mathcal{I}} = i \text{ és } |\neg Z \vee \neg W|^{\mathcal{I}} = i \Rightarrow |X \vee \neg W|^{\mathcal{I}} = i$$

$$|X \vee \neg W|^{\mathcal{I}} = i \text{ és } |W \vee X|^{\mathcal{I}} = i \Rightarrow |X|^{\mathcal{I}} = i$$

$$|\neg Z \vee \neg W|^{\mathcal{I}} = i \Rightarrow |Z|^{\mathcal{I}} = h \text{ vagy } |W|^{\mathcal{I}} = h$$

Egy lehetséges megoldás: $\mathcal{I}(X) = i, \mathcal{I}(Y) = h, \mathcal{I}(Z) = h, \mathcal{I}(W) = h$.

3. Formalizálja a következő állításokat ítéletlogikai nyelven! Ekvivalensek-e az így kapott formulák? Válaszát röviden indokolja!

(a) Csak akkor van meleg odakinn, ha nem ment el az áram vagy leolvadt a hűtő.

(b) Leolvad a hűtő, ha elmegy az áram és meleg van odakinn.

$M \Leftrightarrow$ Meleg van odakinn. $A \Leftrightarrow$ Elment az áram. $L \Leftrightarrow$ Leolvad a hűtő.

(a) $M \supset \neg A \vee L$

(b) $A \wedge M \supset L$

A formulák ekvivalensek:

M	A	L	M	\supset	$\neg A \vee L$	$A \wedge M$	\supset	L
i	i	i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	h	h	h	i	h	h
i	h	i	i	i	i	h	i	i
i	h	h	i	i	i	h	i	i
h	i	i	i	h	i	h	i	i
h	i	h	i	h	h	h	i	i
h	h	i	i	i	i	h	i	i
h	h	h	i	i	i	h	i	i

4. Mely szemantikai tulajdonságokkal rendelkezik az alábbi formula? Válaszát röviden indokolja!

$$(\neg Z \supset \neg X \wedge Y) \supset (X \vee \neg Y \supset Z)$$

- (a) ítéletlogikai törvény,
(b) kielégíthető,
(c) ellentmondás.

Tegyük fel, hogy van olyan \mathcal{I} interpretáció, mely esetén a formula hamis:

$$|(\neg Z \supset \neg X \wedge Y) \supset (X \vee \neg Y \supset Z)|^{\mathcal{I}} = h \Rightarrow |\neg Z \supset \neg X \wedge Y|^{\mathcal{I}} = i \text{ és } |X \vee \neg Y \supset Z|^{\mathcal{I}} = h$$

$$|X \vee \neg Y \supset Z|^{\mathcal{I}} = h \Rightarrow |X \vee \neg Y|^{\mathcal{I}} = i \text{ és } |Z|^{\mathcal{I}} = h$$

$$|\neg Z \supset \neg X \wedge Y|^{\mathcal{I}} = i \text{ és } |Z|^{\mathcal{I}} = h \Rightarrow |\neg X \wedge Y|^{\mathcal{I}} = i$$

$$|\neg X \wedge Y|^{\mathcal{I}} = i \Rightarrow |X|^{\mathcal{I}} = h \text{ és } |Y|^{\mathcal{I}} = i \Rightarrow |X \vee \neg Y|^{\mathcal{I}} = h$$

$$\text{Ellentmondás: } |X \vee \neg Y|^{\mathcal{I}} = i \text{ és } |X \vee \neg Y|^{\mathcal{I}} = h$$

*Szemantikai tulajdonságok: **ítéletlogikai törvény, kielégíthető, nem ellentmondás.***

5. Legyen adott a következő három premissza:

$$X \vee Y \supset Z, \quad X \vee W, \quad Y \vee \neg W$$

Mely alábbi formulák lesznek logikai következményei a premisszáknak? Válaszát röviden indokolja!

- (a) $Z \supset W$
(b) $\neg X \vee Z$

(a) Tegyük fel, hogy van olyan \mathcal{I} interpretáció ahol a premisszák igazak, de a konklúzió hamis.

$$|X \vee Y \supset Z|^{\mathcal{I}} = i, |X \vee W|^{\mathcal{I}} = i, |Y \vee \neg W|^{\mathcal{I}} = i, |Z \supset W|^{\mathcal{I}} = h$$

$$|Z \supset W|^{\mathcal{I}} = h \Rightarrow |Z|^{\mathcal{I}} = i \text{ és } |W|^{\mathcal{I}} = h$$

$$|X \vee W|^{\mathcal{I}} = i \text{ és } |W|^{\mathcal{I}} = h \Rightarrow |X|^{\mathcal{I}} = i$$

*A következő interpretáció: $\mathcal{I}(X) = i, \mathcal{I}(Z) = i, \mathcal{I}(W) = h$ és $\mathcal{I}(Y) = i$ megfelel a fenti feltételeknek, ezért **a következtetés nem helyes.***

(b) Tegyük fel, hogy van olyan \mathcal{I} interpretáció ahol a premisszák igazak, de a konklúzió hamis.

$$|X \vee Y \supset Z|^{\mathcal{I}} = i, |X \vee W|^{\mathcal{I}} = i, |Y \vee \neg W|^{\mathcal{I}} = i, |\neg X \vee Z|^{\mathcal{I}} = h$$

$$|\neg X \vee Z|^{\mathcal{I}} = h \Rightarrow |\neg X|^{\mathcal{I}} = h \text{ és } |Z|^{\mathcal{I}} = h \Rightarrow |X|^{\mathcal{I}} = i$$

$$|X \vee Y \supset Z|^{\mathcal{I}} = i \text{ és } |X|^{\mathcal{I}} = i \Rightarrow |Z|^{\mathcal{I}} = i$$

*Ellentmondás: $|Z|^{\mathcal{I}} = i$ és $|Z|^{\mathcal{I}} = h$, ezért **a következtetés helyes.***