Лабораторная работа №1

1.1. Вероятностное пространство, формула Байеса

1. Определить зависимы или нет следующие события:

а) Несовместное события

Пусть A и B несовместны $\Rightarrow P(A \cap B) = \varnothing$, но для независимых событий: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cap B) = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$$ (если, конечно, A и B вообще могут случиться $P(A) \neq P(B) \neq 0$)

несовместное события зависимы

б) События, образующие σ-алгебру Σ в пространстве (Ω, Σ, P)

1) Вспомним, что для σ-алгебры выполняется: $A \in \Sigma$

Но при этом: $P(A \cap A^c) = \varnothing$, но $P(A) \cdot P(A^c) > 0$ $\Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \Sigma$

$\Rightarrow P(A) \cdot P(A^c) \neq 0 \Rightarrow$ события зависимы

2) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ← кубик броски, $\Sigma = 2^{\Omega}$ ← множество всех подмножеств

Введем события:

$A = \{1, 2\}$ – выпало число ≤ 2

$B = \{1, 3, 5\}$ – выпало нечетное число

$P(A) = \frac{1}{3}$ $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ← выпало 1

$\Rightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ A и B независимы

$\Rightarrow$ События, образующие σ-алгебру Σ в пространстве (Ω, Σ, P) могут быть и зависимы, и независимы.

с) События, имеющие одинаковую вероятность

Такие могут быть как зависимыми, так и нет, т.е. $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$ и также $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

1) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$; $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 3\}$; $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$ и $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$

$\Rightarrow$ независимы

2) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{3, 4, 5\}$; $P\{A \cap B\} = \frac{1}{6} \neq P(A) \cdot P(B)$

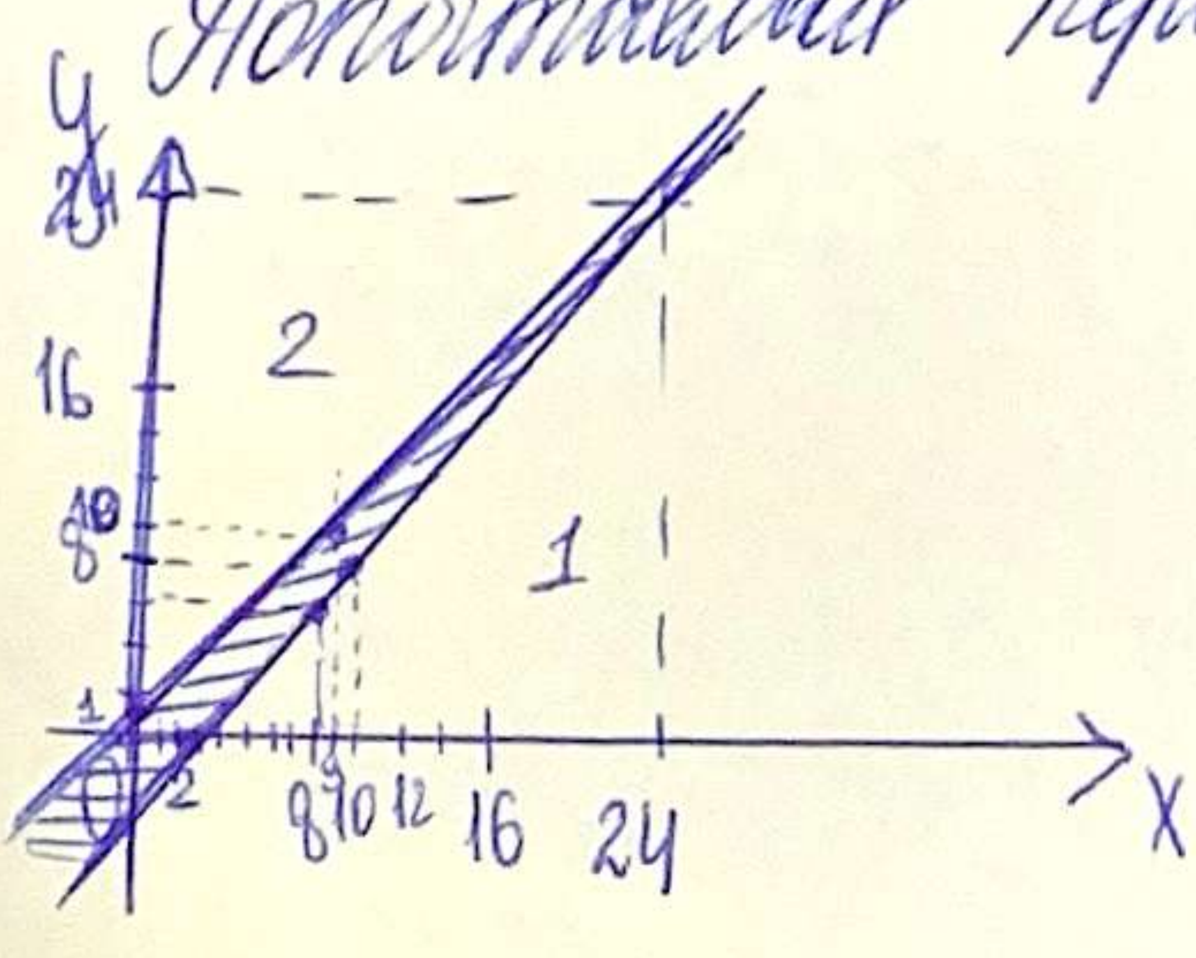
$P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ зависимы

2. a) $A+C=E$ d) $G+E=E$
b) $AC=K$ e) $GE=G$
c) $EF=G$ f) $BD=H$
g) $E+K=E$

3. 1 выстрел, вращающаяся круговая мишень; 2 непересекающихся сектора с углом 20°.
A – попадание в закрашенную область
Ответ: $\frac{1}{9}$
$$P(A)=\frac{20\cdot 2}{360}=\frac{40}{360}=\frac{1}{9}$$

4. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу независимо друг от друга и равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из них придется ожидать освобождения причала, если время стоянки 1 пар. – час, а 2 – 2 часа.
Чтобы одному из пароходов пришлось ждать (или):
① 1 пароход приедет первым и второй будет ждать около часа
② 2 пароход приедет первым и первый будет ждать около 2 часов
Попытаемся перенести задачу на график.



Пусть x – время прибытия 1 пар.; y – прибытие второго.
Чтобы ожидание было: $\begin{cases} y \le x+1 \\ x \le y+2 \end{cases}$
$$\Rightarrow \begin{cases} y \le x+1 \\ y \ge x-2 \end{cases}$$

Определим площадь 2 треугольников (белых), найдем отношения к общей площади и вычтем из целой вероят.

$S_1=\frac{1}{2}\cdot 22\cdot 22=11\cdot 22=242$
$S_2=\frac{1}{2}\cdot 23\cdot 23=264{,}5$
$\Big\} S=506{,}5 \Rightarrow P_{\text{не встр}}=\frac{506{,}5}{576}$

$S_{\text{пол}}=24\cdot 24=576$
$$P_{\text{встр}}=1-\frac{506{,}5}{576}=\frac{576-506{,}5}{576}=\frac{69{,}5}{576}\approx 0{,}12$$
Ответ: 0,12.

5. Самолет, по которому ведется стрельба, состоит из трех различных по уязвимости частей:
а) кабина летчика и двигатель - одно попадание (p_1)
б) топливные баки - два попадания (p_2)
в) планер - три попадания (p_3)
Известно, что в самолет попало m снарядов. Найти условную вероятность $P(A|m)$ события A - "Самолет поражен" - при $m = 1, 2, 3, 4$.

① $m = 1 \Rightarrow P(A|m) = \underline{p_1}$ (поражена кабина летчика и двигатель)

② $m = 2$
$\bar{A}$ - непоражение, если два попадания в планер (p_3) или одно в баки (p_2) и одно в планер (p_3)
$\Rightarrow P(\bar{A}|m) = p_3^2 + p_2 p_3 \cdot C_2^1 \Rightarrow P(A|m) = \underline{1 - p_3^2 - 2p_2 p_3}$

③ $m = 3$
$\bar{A}$ - непоражение, если 1 попадание в баки (p_2) и 2 попадание в планер (p_3)
$P(\bar{A}|m) = C_3^1 p_2 \cdot p_3^2 = 3p_2 p_3^2 \Rightarrow P(A|m) = \underline{1 - 3p_2 p_3^2}$

④ $m = 4$
Нет случаев, когда $P(\bar{A}|m) > 0 \Rightarrow \underline{P(A|m) = 1}$

1.2. Случайный вектор и числовые характеристики

2. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано следующей таблицей:

ξ / η	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/12$	$7/24$
1	$1/3$	$1/6$	0

а) Найти маргинальное распределение ξ и η:

ξ	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$P(\xi = -1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{7}{24} = \frac{5+7}{24} = \frac{1}{2}$$

$$P(\xi = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

η	-1	0	1
P	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$

$P(\eta=-1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{11}{24}$

$P(\eta=0)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$

$P(\eta=1)=\frac{7}{24}$

в) Вычислить E, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (ξ,η)

Составим таблицу распределения случайной величины $\xi\eta$:

$\xi\eta$	-1	0	1
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$P(\xi\eta=-1)=\frac{7}{24}+\frac{1}{3}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$

$P(\xi\eta=0)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$P(\xi\eta=1)=\frac{1}{8}$

$cov(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E\xi E\eta$

$E(\xi\eta)=-1\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{8}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$

$E(\xi)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$

$E(\eta)=-\frac{11}{24}+\frac{7}{24}=\frac{-1}{6}$

$\Rightarrow cov(\xi,\eta)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot 0=-\frac{1}{2}$

$cov(\xi,\eta)=-\frac{1}{2}$

(отрицательная ковариация указывает на то, что две переменные имеют тенденцию двигаться в противоположных направлениях)

$D\xi=(-1-0)^2\cdot\frac{1}{2}+(1-0)^2\cdot\frac{1}{2}=1$

$D\eta=\left(-1-\left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2\cdot\frac{11}{24}+\left(0-\left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2\cdot\frac{7}{24}=\frac{13}{18}$

$\Rightarrow cov(\xi,\eta)=\begin{pmatrix} D\xi & cov(\xi,\eta) \\ cov(\xi,\eta) & D\eta \end{pmatrix} \Rightarrow cov(\xi,\eta)=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{13}{18} \end{pmatrix}$

(показывает силу лин. связи)

Найдем коэффициент корреляции r для наших случайных величин:

$r(\xi,\eta)=\frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{\frac{13}{18}}}=\frac{-1\sqrt{18}}{2\cdot\sqrt{13}}=\frac{-3\sqrt{2}}{2\sqrt{13}}$

$R(\xi,\eta)=\begin{pmatrix} 1 & r(\xi,\eta) \\ r(\xi,\eta) & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(\xi,\eta)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3\sqrt{2}}{2\sqrt{13}} \\ \frac{-3\sqrt{2}}{2\sqrt{13}} & 1 \end{pmatrix}$

c) Исследовать ξ и η на независимость и некоррелированность:

$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = -\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ величина коррелирована.

Вспомним, что две коррелированные величины также и зависимы (а вот обратное не всегда)

1. Пусть $f_\xi(x,y) = \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1+x^2)}$. Является ли данная функция плотностью распределения случайного вектора?

1. Проверка неотрицательности:

$e^{-2|y|} > 0$ ($e^x > 0 \ \forall x$)

$(1+x^2) > 0$

$\pi > 0$

$\Rightarrow \frac{e^{-2|y|}}{(1+x^2)\pi} > 0 \Rightarrow$ подходит под условие неотрицательности

2. Условие нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1+x^2)}\,dx\,dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|y|}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\pi\cdot 1 = 1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|\cdot 2}\,dy = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-|y|\cdot 2}\,dy + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2|y|}\,dy = \cancel{\frac{1-e^{2y}}{2}\Big|_{-\infty}^{0} + 1-e} = \lim_{a\to-\infty}\left(\int\limits_{a}^{0} e^{-2|y|}\,dy\right) +$$

$$+\lim_{a\to+\infty}\left(\int\limits_{0}^{a} e^{-2|y|}\,dy\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1-e^{2a}}{2}\right) + \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{2e^{2a}}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

$\Rightarrow$ условие нормировки также выполняется

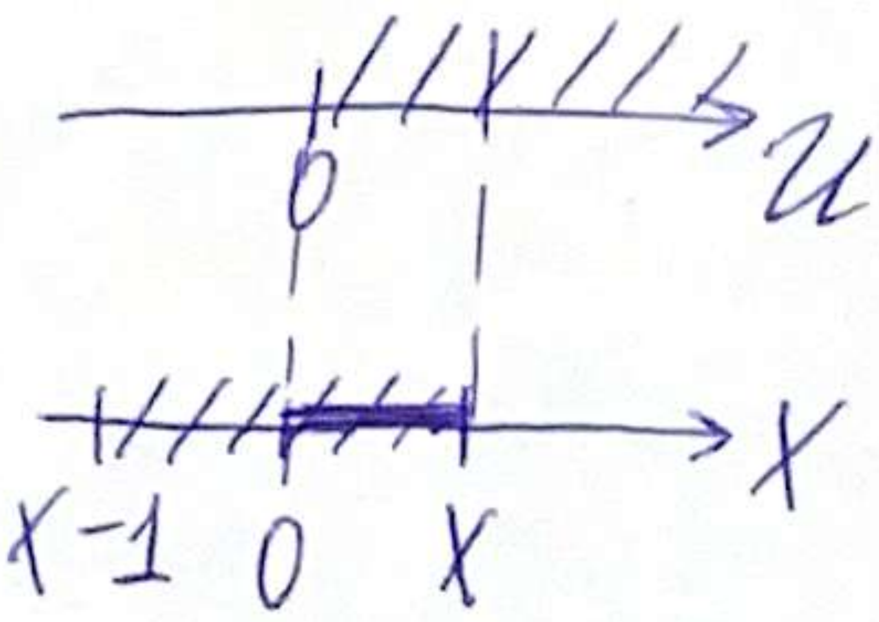
$\Rightarrow$ данная функция является плотностью распределения случайного вектора.

5. Найти плотность распределения суммы двух независимых случайных величин ξ и η, если $\xi \sim Exp_2$ и $\eta \sim U_{0,1}$

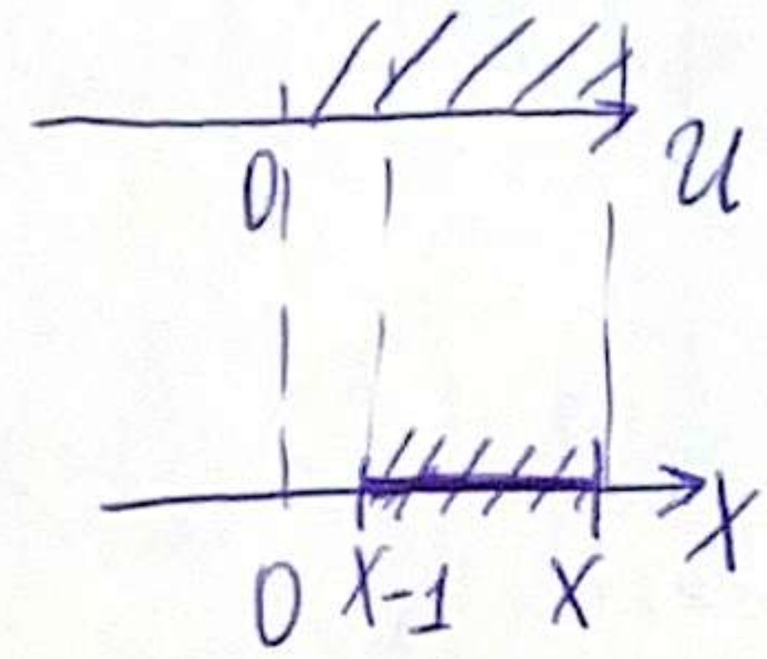
$f_\xi(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 2e^{-2x}, x\geq 0\end{cases}$ и $f_\eta(x)=\begin{cases}0, x\notin[0;1]\\ 1; x\in[0;1]\end{cases}$

$$f_{\xi+\eta}(x)=\int \underbrace{f_\xi(u)}_{u\geq 0}\underbrace{f_\eta(x-u)}_{x-u\in[0;1]}du \to \begin{aligned}&0\leq x-u\leq 1\\ &-x\leq -u\leq 1-x\\ &x\geq u\geq x-1\\ &x-1\leq u\leq x\end{aligned}$$

Рассмотрим 2 случая:

① 

$$\int_0^x 2e^{-2u}du=\int_0^x e^{-2u}d(2u)=-\int_0^x e^{-2u}d(-2u)=$$
$$=|v=-2u|=-\int_0^x e^v dv=-e^v\Big|_0^x=-e^{-2u}\Big|_0^x=$$
$$=-e^{-2x}+e^0=1-e^{-2x}$$

② 

$$\int_{x-1}^x 2e^{-2u}du=-e^{-2u}\Big|_{x-1}^x=-e^{-2x}+e^{-2(x-1)}=$$
$$=-e^{-2x}+e^{2-2x}=e^2\cdot e^{-2x}-e^{-2x}=e^{-2x}(e^2-1)$$

$$\Rightarrow f_{\xi+\eta}(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, x\in[0;1]\\ e^{-2x}(e^2-1), x\geq 1\\ 0, x<0\end{cases}$$

4. Пусть $\xi\sim U_{-\pi,\pi}$; $\eta_1=\cos\xi$; $\eta_2=\sin\xi$

а) Вычислить мат. ожидание, ковариационную и корреляционную матрицу вектора (ξ,η)

$\xi\sim U_{-\pi,\pi}\Rightarrow f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, x\in[-\pi,\pi]\\ 0, x\notin[-\pi,\pi]\end{cases}$

$\eta=(\eta_1;\eta_2)\Rightarrow\eta=(\cos\xi;\sin\xi)$

$$E(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=0$$

$$E(\eta_1)=E(\cos\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$E(\eta_2)=E(\sin\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$D(\xi)=E\xi^2-(E\xi)^2$$

$$E\xi^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi^3}{3}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$D(\xi)=\frac{\pi^2}{3}-0^2=\frac{\pi^2}{3}$$

$$D(\eta_1)=E\eta_1^2-(E\eta_1)^2 \qquad D(\eta_2)=E\eta_2^2-(E\eta_2)^2$$

$$E\eta_1^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2x\,dx=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{4\pi}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi=\frac{1}{2}$$

$$D(\eta_1)=\frac{1}{2}-0^2=\frac{1}{2}$$

$$E\eta_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2x\,dx=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{4\pi}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi=\frac{1}{2}$$

$$D(\eta_2)=\frac{1}{2}-0^2=\frac{1}{2}$$

$\operatorname{cov}(\xi,\eta_1)=E(\xi\eta_1)-E\xi E\eta_1$ (аналогично для $\operatorname{cov}(\xi,\eta_2)$ и $\operatorname{cov}(\eta_1,\eta_2)$)

$$E(\xi\eta_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\,dx=0 \qquad E(\xi\eta_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\,dx=1$$

$$E(\eta_1\eta_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cdot\cos x\,dx=0$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta_1)=0-0\cdot0=0 \quad \Big| \quad \operatorname{cov}(\xi,\eta_2)=1-0\cdot0=1$$

$$\operatorname{cov}(\eta_1,\eta_2)=0-0\cdot0=0$$

ковариационная матрица

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(\xi,\eta)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} D\xi & \operatorname{cov}(\xi,\eta_1) & \operatorname{cov}(\xi,\eta_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

$D\eta_1$ $\qquad$ $D\eta_2$

$r(\xi,\eta_1)=\dfrac{cov(\xi,\eta_1)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta_1}}$ (аналогично для $r(\xi,\eta_2)$ и $r(\eta_1,\eta_2)$

$r(\xi,\eta_1)=\dfrac{0}{\sqrt{\frac{\pi^2}{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}}=0$ | $r(\xi,\eta_2)=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\pi\cdot 1}=\dfrac{\sqrt{6}}{\pi}$

$r(\eta_1,\eta_2)=\dfrac{0}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}}=0$

$\Rightarrow$ Корреляционная матрица $R(\xi,\eta)=\begin{array}{c} \quad\quad r(\xi,\eta_1)\ r(\xi,\eta_2) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{\pi} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{\pi} & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array}$

в) Исследовать ξ и η на независимость и некоррелированность

$cov(\xi,\eta_1)=0$

$cov(\xi,\eta_2)=1\neq 0 \Rightarrow$ коррелированы $\Rightarrow$ зависимы

$cov(\eta_1,\eta_2)=0$

некоррелированные

• $\eta_1^2+\eta_2^2=\cos^2\xi+\sin^2\xi=1 \Rightarrow \eta_1$ и η_2 зависимы

• $\eta_1=\cos\xi \Rightarrow$ зависимы (η_1 и ξ)

3. Пусть имеются два одинаковых тетраэдра с числами 1,2,3,4 на гранях. Подкидываем оба и смотрим на выпавшие числа ξ_1 и ξ_2. Зададим следующие случайные величины: $\varphi_1=\xi_1+\xi_2$ $\quad \varphi_2=\begin{cases}1, & (\xi_1\vdots\xi_2)\vee(\xi_2\vdots\xi_1)\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

а) Составить таблицу совместного распределения φ_1 и φ_2

φ_2/φ_1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{2}{16}$	0
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{1}{16}$

$\xi_1+\xi_2=6$: 3 и 3; 4 и 2; 2 и 4;

$\xi_1+\xi_2=7$: 4 и 3; 3 и 4

$\xi_1+\xi_2=8$: 4 и 4;

$\xi_1+\xi_2=2$: 1 и 1

$\xi_1+\xi_2=3$: 1 и 2; 2 и 1;

$\xi_1+\xi_2=4$: 2 и 2; 3 и 1; 1 и 3;

$\xi_1+\xi_2=5$: $\underbrace{2 \text{ и } 3;\ 3 \text{ и } 2}_{\varphi_2=0}$; $\underbrace{4 \text{ и } 1;\ 1 \text{ и } 4}_{\varphi_2=1}$;

b) Найти маргинальное распределения φ_1 и φ_2

φ_1	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$P(\varphi_1=2)=\frac{1}{16}$

$P(\varphi_1=5)=\frac{4}{16}$

φ_2	0	1
P	$\frac{4}{16}$	$\frac{12}{16}$

$P(\varphi_2=0)=\frac{2}{16}+\frac{2}{16}=\frac{4}{16}$

$P(\varphi_2=1)=\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{3}{16}+\frac{2}{16}+\frac{3}{16}+\frac{1}{16}=\frac{6}{16}+\frac{6}{16}=\frac{12}{16}$

c) Вычислить математическое ожидание, ковариационную и корреляционную матрицу вектора $(\varphi_1;\varphi_2)$

Составим таблицу распределения случайной величины $\varphi_1\varphi_2$:

$\varphi_1\varphi_2$	0	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{1}{16}$

$cov(\varphi_1;\varphi_2)=E(\varphi_1\varphi_2)-E\varphi_1 E\varphi_2$

$E(\varphi_1\varphi_2)=\frac{2}{16}+\frac{6}{16}+\frac{12}{16}+\frac{10}{16}+\frac{18}{16}+\frac{8}{16}=\frac{20}{16}+\frac{18}{16}+\frac{18}{16}=\frac{56}{16}$

$E\varphi_1=\frac{2}{16}+\frac{6}{16}+\frac{12}{16}+\frac{20}{16}+\frac{18}{16}+\frac{14}{16}+\frac{8}{16}=\frac{20}{16}+\frac{38}{16}+\frac{22}{16}=\frac{42}{16}+\frac{38}{16}=\frac{80}{16}=\frac{10}{2}=5$

$E\varphi_2=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

$cov(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{56}{16}-\frac{80}{16}\cdot\frac{12}{16}=\frac{56}{16}-\frac{12\cdot 5}{16}=\frac{-4}{16}=-\frac{1}{4}$

(Ковариационная матрица) $\Rightarrow cov(\varphi_1,\varphi_2)=\begin{pmatrix} D\varphi_1 & cov(\varphi_1,\varphi_2) \\ cov(\varphi_2,\varphi_1) & D\varphi_2 \end{pmatrix}$

$D\varphi_1=(2-5)^2\cdot\frac{1}{16}+(3-5)^2\cdot\frac{2}{16}+(4-5)^2\cdot\frac{3}{16}+(5-5)^2\cdot\frac{4}{16}+(6-5)^2\cdot\frac{3}{16}+(7-5)^2\cdot\frac{2}{16}+(8-5)^2\cdot\frac{1}{16}=\frac{9}{16}+\frac{4\cdot 2}{16}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}+\frac{4\cdot 2}{16}+\frac{9}{16}=\frac{17}{16}+\frac{6}{16}+\frac{17}{16}=\frac{40}{16}=\frac{10}{4}=2{,}5$

$D\varphi_2=\left(0-\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{4}{16}+\left(1-\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{12}{16}=\frac{9}{16}\cdot\frac{4}{16}+\frac{1}{16}\cdot\frac{12}{16}=\frac{36+12}{16\cdot 16}=\frac{48}{16\cdot 16}=\frac{3}{16}$

$\Rightarrow cov(\varphi_1,\varphi_2)=\begin{pmatrix} \frac{10}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$

Найдем коэффициент корреляции r для наших случайных величин φ_1 и φ_2:

$r(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{cov(\varphi_1,\varphi_2)}{\sqrt{D\varphi_1}\sqrt{D\varphi_2}}=\frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{10}{4}}\cdot\sqrt{\frac{3}{16}}}=\frac{-1\sqrt{4\cdot 16}}{4\cdot\sqrt{10\cdot 3}}=\frac{-4\cdot 2}{4\sqrt{10\cdot 3}}=\frac{-2}{\sqrt{30}}$

$$R(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} 1 & r(\varphi_1,\varphi_2) \\ r(\varphi_1,\varphi_2) & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(\varphi_1,\varphi_2) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} & 1 \end{pmatrix}$$

d) Исследовать φ_1 и φ_2 на независимость и некоррелированность.

$cov(\varphi_1, \varphi_2) = -\frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow$ величины <u>коррелированы</u>.

Две коррелированные величины также <u>зависимы</u>.