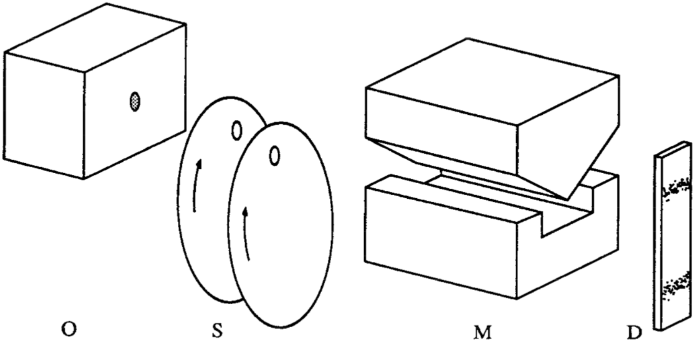
El formalismo cuántico

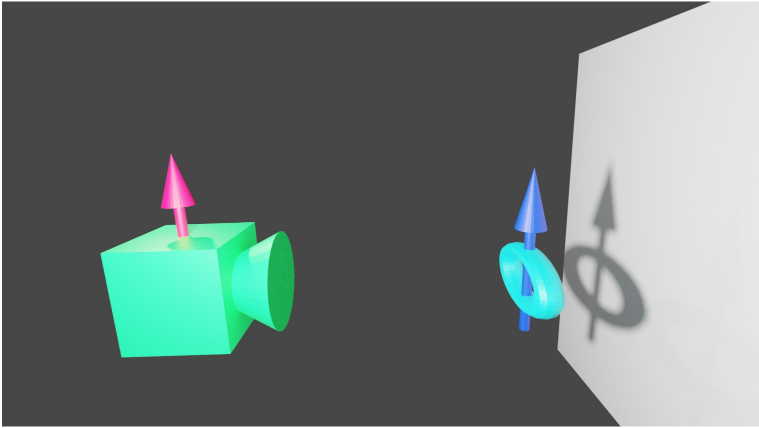
Federico Holik

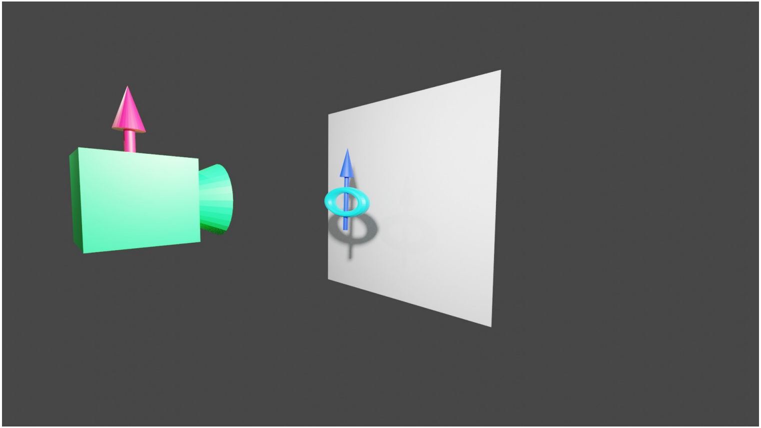
Curso UNAHUR
28/10/2025

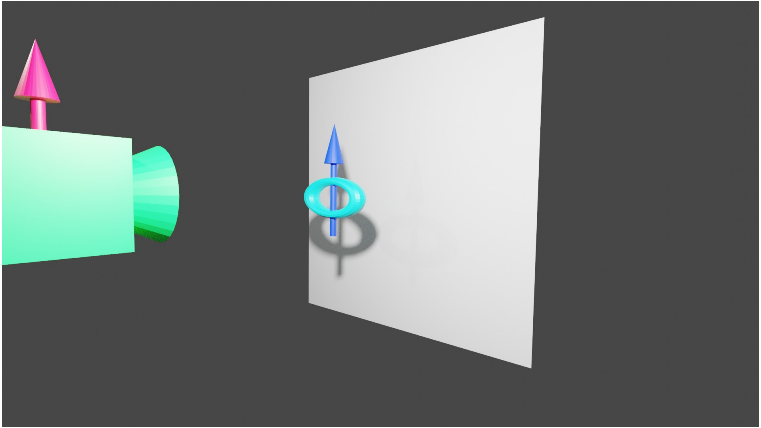
Outline

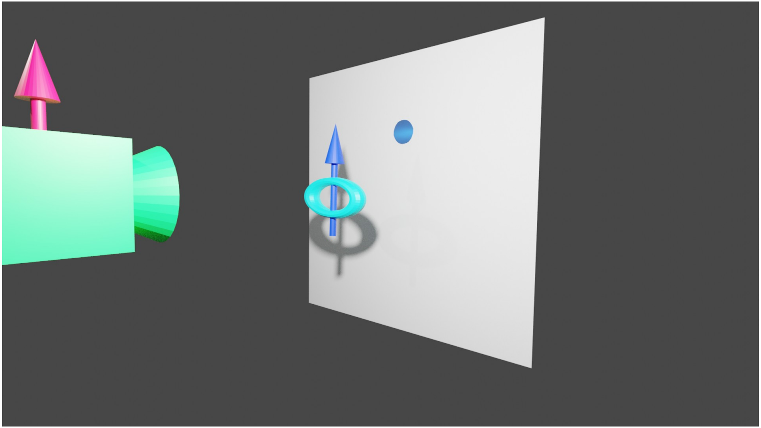


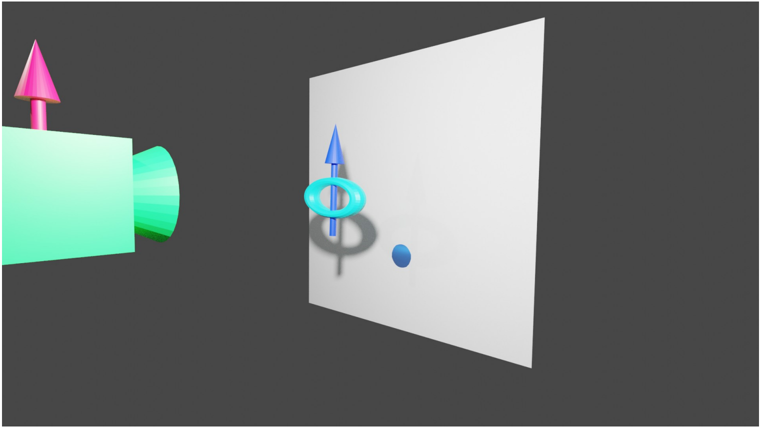
En el experimento de Stern-Gerlach se tiran átomos de plata de a uno y se los hace pasar por un imán inhomogéneo. Se observa que los átomos se distribuyen en la pantalla de detección de forma discreta (a diferencia de lo que se esperaría si fueran clásicos). Hamiltoniano: $\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \mu\mathbf{B}$.

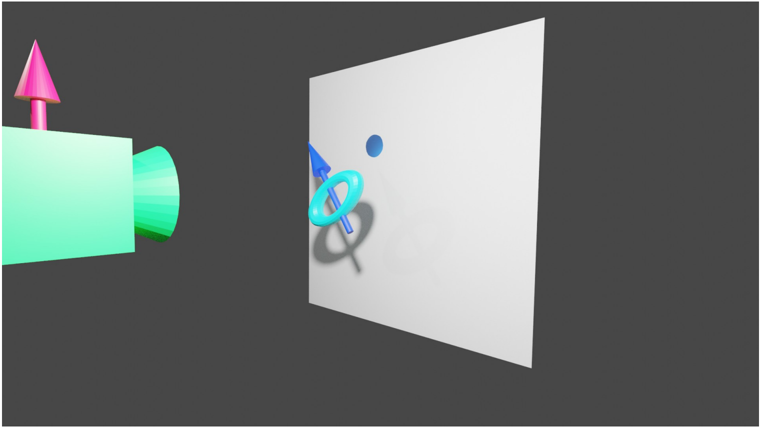


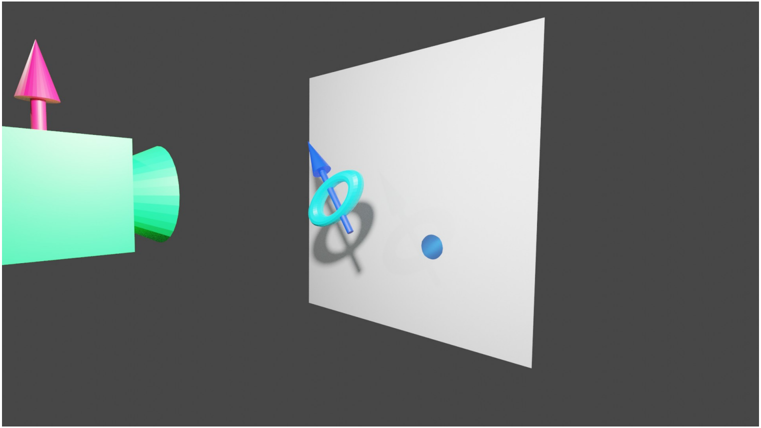


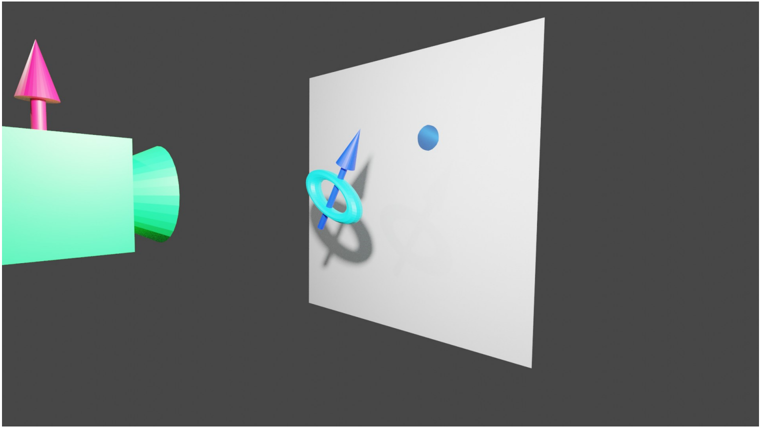


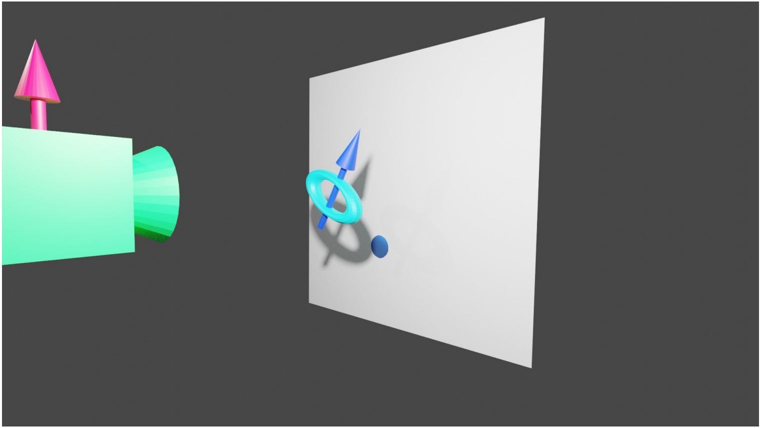












Primera aproximación a la probabilidad cuántica

- Un estado cuántico se puede pensar como una familia de distribuciones de probabilidad.
- En el caso del qubit, tendríamos una "moneda" para cada dirección.
- ¡Pero cuidado!: Las distintas distribuciones de probabilidad, guardan relaciones de compatibilidad entre sí.
- Por ejemplo, en el caso del qubit, si los ángulos difieren poco, las probabilidades también (todo debe empalmar suavemente).
- Además, sabemos que en cuántica pasan cosas como: $\Delta P \Delta Q \geq \frac{\hbar}{2}$.
- Buscamos una representación matemática que permita describir todo esto.

Primera aproximación a la probabilidad cuántica

- Un estado cuántico se puede pensar como una familia de distribuciones de probabilidad.
- En el caso del qubit, tendríamos una "moneda" para cada dirección.
- ¡Pero cuidado!: Las distintas distribuciones de probabilidad, guardan relaciones de compatibilidad entre sí.
- Por ejemplo, en el caso del qubit, si los ángulos difieren poco, las probabilidades también (todo debe empalmar suavemente).
- Además, sabemos que en cuántica pasan cosas como: $\Delta P \Delta Q \geq \frac{\hbar}{2}$.
- Buscamos una representación matemática que permita describir todo esto.

Primera aproximación a la probabilidad cuántica

- Un estado cuántico se puede pensar como una familia de distribuciones de probabilidad.
- En el caso del qubit, tendríamos una "moneda" para cada dirección.
- ¡Pero cuidado!: Las distintas distribuciones de probabilidad, guardan relaciones de compatibilidad entre sí.
- Por ejemplo, en el caso del qubit, si los ángulos difieren poco, las probabilidades también (todo debe empalmar suavemente).
- Además, sabemos que en cuántica pasan cosas como: $\Delta P \Delta Q \geq \frac{\hbar}{2}$.
- Buscamos una representación matemática que permita describir todo esto.

Primera aproximación a la probabilidad cuántica

- Un estado cuántico se puede pensar como una familia de distribuciones de probabilidad.
- En el caso del qubit, tendríamos una “moneda” para cada dirección.
- ¡Pero cuidado!: Las distintas distribuciones de probabilidad, guardan relaciones de compatibilidad entre sí.
- Por ejemplo, en el caso del qubit, si los ángulos difieren poco, las probabilidades también (todo debe empalmar suavemente).
- Además, sabemos que en cuántica pasan cosas como: $\Delta P \Delta Q \geq \frac{\hbar}{2}$.
- Buscamos una representación matemática que permita describir todo esto.

Primera aproximación a la probabilidad cuántica

- Un estado cuántico se puede pensar como una familia de distribuciones de probabilidad.
- En el caso del qubit, tendríamos una “moneda” para cada dirección.
- ¡Pero cuidado!: Las distintas distribuciones de probabilidad, guardan relaciones de compatibilidad entre sí.
- Por ejemplo, en el caso del qubit, si los ángulos difieren poco, las probabilidades también (todo debe empalmar suavemente).
- Además, sabemos que en cuántica pasan cosas como: $\Delta P \Delta Q \geq \frac{\hbar}{2}$.
- Buscamos una representación matemática que permita describir todo esto.

Primera aproximación a la probabilidad cuántica

- Un estado cuántico se puede pensar como una familia de distribuciones de probabilidad.
- En el caso del qubit, tendríamos una “moneda” para cada dirección.
- ¡Pero cuidado!: Las distintas distribuciones de probabilidad, guardan relaciones de compatibilidad entre sí.
- Por ejemplo, en el caso del qubit, si los ángulos difieren poco, las probabilidades también (todo debe empalmar suavemente).
- Además, sabemos que en cuántica pasan cosas como: $\Delta P \Delta Q \geq \frac{\hbar}{2}$.
- Buscamos una representación matemática que permita describir todo esto.

¿Cómo calculo la probabilidad?

En cuántica, podemos preparar estados de superposición. Por ejemplo, una superposición entre espín "arriba" ($|0\rangle$) y "abajo" ($|1\rangle$):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

la probabilidad de obtener $|0\rangle$ en una medición es $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$
y la probabilidad de obtener $|1\rangle$ en una medición es $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$.

- Los resultados posibles vienen dados por $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Un estado probabilístico del dado viene dado por una asignación de probabilidades a los distintos resultados de Ω: p_i, $i = 1, ..., 6$.
- Si el dado no está cargado, tenemos $p_i = \frac{1}{6}$ para todo i (pero, para un dado real, probablemente, no sea así).

- Los resultados posibles vienen dados por $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Un estado probabilístico del dado viene dado por una asignación de probabilidades a los distintos resultados de Ω: p_i, $i = 1, ..., 6$.
- Si el dado no está cargado, tenemos $p_i = \frac{1}{6}$ para todo i (pero, para un dado real, probablemente, no sea así).

Modelo de probabilidad finito: un dado.

- Los resultados posibles vienen dados por $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Un estado probabilístico del dado viene dado por una asignación de probabilidades a los distintos resultados de Ω: p_i, $i = 1, ..., 6$.
- Si el dado no está cargado, tenemos $p_i = \frac{1}{6}$ para todo i (pero, para un dado real, probablemente, no sea así).

Los eventos van a ser representados por subconjuntos de Ω
Ejemplos:

- "El resultado es par" $\longrightarrow \{2, 4, 6\}$.
- "El resultado es impar" $\longrightarrow \{1, 3, 5\}$.
- "El resultado es mayor a 2" $\longrightarrow \{3, 4, 5, 6\}$.
- "El resultado es menor o igual que 3" $\longrightarrow \{1, 2, 3\}$.
- "El resultado no es ni 1 ni 5" $\longrightarrow \{2, 3, 4, 6\}$.

Los eventos van a ser representados por subconjuntos de Ω
Ejemplos:

- "El resultado es par" $\longrightarrow \{2, 4, 6\}$.
- "El resultado es impar" $\longrightarrow \{1, 3, 5\}$.
- "El resultado es mayor a 2" $\longrightarrow \{3, 4, 5, 6\}$.
- "El resultado es menor o igual que 3" $\longrightarrow \{1, 2, 3\}$.
- "El resultado no es ni 1 ni 5" $\longrightarrow \{2, 3, 4, 6\}$.

Los eventos van a ser representados por subconjuntos de Ω
Ejemplos:

- "El resultado es par" $\longrightarrow \{2, 4, 6\}$.
- "El resultado es impar" $\longrightarrow \{1, 3, 5\}$.
- "El resultado es mayor a 2" $\longrightarrow \{3, 4, 5, 6\}$.
- "El resultado es menor o igual que 3" $\longrightarrow \{1, 2, 3\}$.
- "El resultado no es ni 1 ni 5" $\longrightarrow \{2, 3, 4, 6\}$.

Los eventos van a ser representados por subconjuntos de Ω
Ejemplos:

- "El resultado es par" $\longrightarrow \{2, 4, 6\}$.
- "El resultado es impar" $\longrightarrow \{1, 3, 5\}$.
- "El resultado es mayor a 2" $\longrightarrow \{3, 4, 5, 6\}$.
- "El resultado es menor o igual que 3" $\longrightarrow \{1, 2, 3\}$.
- "El resultado no es ni 1 ni 5" $\longrightarrow \{2, 3, 4, 6\}$.

Los eventos se pueden combinar

- "El resultado es par y mayor a 2" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cap \{3,4,5,6\} = \{4,6\}$.
- "El resultado es impar o menor que 2" $\longrightarrow$ $\{1,3,5\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3,5\}$
- "El resultado no es par" $\longrightarrow$ $(\{2,4,6\})^c = \{1,3,5\}$.
- "El resultado es par o es impar" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cup \{1,3,5\} = \Omega := \mathbf{1}$.
- "El resultado es par y es impar" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cap \{1,3,5\} = \emptyset := \mathbf{0}$.
- Si $X \subseteq Y$, decimos que $X \leq Y$. Ejemplo: $\{2\} \leq \{2,4,6\}$ (se lee: "El evento "el resultado es 2", implica al evento "el resultado es par").

Conclusión:
Hay una estructura lógica dando vueltas detrás de la noción de probabilidad.

Los eventos se pueden combinar

- "El resultado es par y mayor a 2" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cap \{3,4,5,6\} = \{4,6\}$.
- "El resultado es impar o menor que 2" $\longrightarrow$ $\{1,3,5\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3,5\}$
- "El resultado no es par" $\longrightarrow$ $(\{2,4,6\})^c = \{1,3,5\}$.
- "El resultado es par o es impar" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cup \{1,3,5\} = \Omega := \mathbf{1}$.
- "El resultado es par y es impar" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cap \{1,3,5\} = \emptyset := \mathbf{0}$.
- Si $X \subseteq Y$, decimos que $X \leq Y$. Ejemplo: $\{2\} \leq \{2,4,6\}$ (se lee: "El evento "el resultado es 2", implica al evento "el resultado es par").

Conclusión:
Hay una estructura lógica dando vueltas detrás de la noción de probabilidad.

Los eventos se pueden combinar

- "El resultado es par y mayor a 2" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cap \{3,4,5,6\} = \{4,6\}$.
- "El resultado es impar o menor que 2" $\longrightarrow$ $\{1,3,5\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3,5\}$
- "El resultado no es par" $\longrightarrow$ $(\{2,4,6\})^c = \{1,3,5\}$.
- "El resultado es par o es impar" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cup \{1,3,5\} = \Omega := \mathbf{1}$.
- "El resultado es par y es impar" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cap \{1,3,5\} = \emptyset := \mathbf{0}$.
- Si $X \subseteq Y$, decimos que $X \leq Y$. Ejemplo: $\{2\} \leq \{2,4,6\}$ (se lee: "El evento "el resultado es 2", implica al evento "el resultado es par").

Conclusión:
Hay una estructura lógica dando vueltas detrás de la noción de probabilidad.

Los eventos se pueden combinar

- "El resultado es par y mayor a 2" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cap \{3,4,5,6\} = \{4,6\}$.
- "El resultado es impar o menor que 2" $\longrightarrow$ $\{1,3,5\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3,5\}$
- "El resultado no es par" $\longrightarrow$ $(\{2,4,6\})^c = \{1,3,5\}$.
- "El resultado es par o es impar" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cup \{1,3,5\} = \Omega := \mathbf{1}$.
- "El resultado es par y es impar" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cap \{1,3,5\} = \emptyset := \mathbf{0}$.
- Si $X \subseteq Y$, decimos que $X \leq Y$. Ejemplo: $\{2\} \leq \{2,4,6\}$ (se lee: "El evento "el resultado es 2", implica al evento "el resultado es par").

Conclusión:
Hay una estructura lógica dando vueltas detrás de la noción de probabilidad.

Los eventos se pueden combinar

- "El resultado es par y mayor a 2" $\longrightarrow$ $\{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 6\}$.
- "El resultado es impar o menor que 2" $\longrightarrow$ $\{1, 3, 5\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 5\}$
- "El resultado no es par" $\longrightarrow$ $(\{2, 4, 6\})^c = \{1, 3, 5\}$.
- "El resultado es par o es impar" $\longrightarrow$ $\{2, 4, 6\} \cup \{1, 3, 5\} = \Omega := \mathbf{1}$.
- "El resultado es par y es impar" $\longrightarrow$ $\{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset := \mathbf{0}$.
- Si $X \subseteq Y$, decimos que $X \leq Y$. Ejemplo: $\{2\} \leq \{2, 4, 6\}$ (se lee: "El evento "el resultado es 2", implica al evento "el resultado es par").

Conclusión:
Hay una estructura lógica dando vueltas detrás de la noción de probabilidad.

- "El resultado es par y mayor a 2" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cap \{3,4,5,6\} = \{4,6\}$.
- "El resultado es impar o menor que 2" $\longrightarrow$ $\{1,3,5\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3,5\}$
- "El resultado no es par" $\longrightarrow$ $(\{2,4,6\})^c = \{1,3,5\}$.
- "El resultado es par o es impar" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cup \{1,3,5\} = \Omega := \mathbf{1}$.
- "El resultado es par y es impar" $\longrightarrow$ $\{2,4,6\} \cap \{1,3,5\} = \emptyset := \mathbf{0}$.
- Si $X \subseteq Y$, decimos que $X \leq Y$. Ejemplo: $\{2\} \leq \{2,4,6\}$ (se lee: "El evento "el resultado es 2", implica al evento "el resultado es par").

Conclusión:
Hay una estructura lógica dando vueltas detrás de la noción de probabilidad.

Calcular probabilidades nuevas a partir de otras

- $p(\{1\} \vee \{2\}) = p(\{1\}) + (\{2\}) = p_1 + p_2$
  Ej.:$p(\{1\} \vee \{2\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; $p(X \vee Y) = p(X) + p(Y)$, siempre que $X \cap Y = 0$.
- $p(\{2,4,6\}) = p(\{2\} \vee \{4\} \vee \{6\}) =$
  $p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = P_2 + p_4 + p_6$.
- $p(\{2,4,6\} \vee \{1,3,5\}) = p(\{2,4,6\}) + p(\{1,3,5\}) = 1$.
- $p(\{1,3,5\}) = p(\neg\{2,4,6\}) = 1 - p(\{2,4,6\})$
  $p(\neg X) = 1 - p(X)$.
- $p(\{1,3,5\} \vee \{1,2,3\}) = p(\{1,3,5\}) + p(\{1,2,3\}) - p(\{1,3\})$
  $p(X \vee Y) = p(X) + p(Y) - p(X \wedge Y)$.

Calcular probabilidades nuevas a partir de otras

- $p(\{1\} \vee \{2\}) = p(\{1\}) + (\{2\}) = p_1 + p_2$
  Ej.:$p(\{1\} \vee \{2\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; $p(X \vee Y) = p(X) + p(Y)$, siempre que $X \cap Y = 0$.
- $p(\{2,4,6\}) = p(\{2\} \vee \{4\} \vee \{6\}) =$
  $p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = P_2 + p_4 + p_6$.
- $p(\{2,4,6\} \vee \{1,3,5\}) = p(\{2,4,6\}) + p(\{1,3,5\}) = 1$.
- $p(\{1,3,5\}) = p(\neg\{2,4,6\}) = 1 - p(\{2,4,6\})$
  $p(\neg X) = 1 - p(X)$.
- $p(\{1,3,5\} \vee \{1,2,3\}) = p(\{1,3,5\}) + p(\{1,2,3\}) - p(\{1,3\})$
  $p(X \vee Y) = p(X) + p(Y) - p(X \wedge Y)$.

Calcular probabilidades nuevas a partir de otras

- $p(\{1\} \vee \{2\}) = p(\{1\}) + (\{2\}) = p_1 + p_2$
  Ej.:$p(\{1\} \vee \{2\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; $p(X \vee Y) = p(X) + p(Y)$, siempre que $X \cap Y = 0$.
- $p(\{2,4,6\}) = p(\{2\} \vee \{4\} \vee \{6\}) =$
  $p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = P_2 + p_4 + p_6$.
- $p(\{2,4,6\} \vee \{1,3,5\}) = p(\{2,4,6\}) + p(\{1,3,5\}) = 1$.
- $p(\{1,3,5\}) = p(\neg\{2,4,6\}) = 1 - p(\{2,4,6\})$
  $p(\neg X) = 1 - p(X)$.
- $p(\{1,3,5\} \vee \{1,2,3\}) = p(\{1,3,5\}) + p(\{1,2,3\}) - p(\{1,3\})$
  $p(X \vee Y) = p(X) + p(Y) - p(X \wedge Y)$.

Calcular probabilidades nuevas a partir de otras

- $p(\{1\} \vee \{2\}) = p(\{1\}) + (\{2\}) = p_1 + p_2$
  Ej.:$p(\{1\} \vee \{2\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; $p(X \vee Y) = p(X) + p(Y)$, siempre que $X \cap Y = 0$.
- $p(\{2, 4, 6\}) = p(\{2\} \vee \{4\} \vee \{6\}) =$
  $p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = P_2 + p_4 + p_6$.
- $p(\{2, 4, 6\} \vee \{1, 3, 5\}) = p(\{2, 4, 6\}) + p(\{1, 3, 5\}) = 1$.
- $p(\{1, 3, 5\}) = p(\neg\{2, 4, 6\}) = 1 - p(\{2, 4, 6\})$
  $p(\neg X) = 1 - p(X)$.
- $p(\{1, 3, 5\} \vee \{1, 2, 3\}) = p(\{1, 3, 5\}) + p(\{1, 2, 3\}) - p(\{1, 3\})$
  $p(X \vee Y) = p(X) + p(Y) - p(X \wedge Y)$.

Calcular probabilidades nuevas a partir de otras

- $p(\{1\} \vee \{2\}) = p(\{1\}) + (\{2\}) = p_1 + p_2$
  Ej.:$p(\{1\} \vee \{2\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; $p(X \vee Y) = p(X) + p(Y)$, siempre que $X \cap Y = 0$.
- $p(\{2, 4, 6\}) = p(\{2\} \vee \{4\} \vee \{6\}) =$
  $p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = P_2 + p_4 + p_6$.
- $p(\{2, 4, 6\} \vee \{1, 3, 5\}) = p(\{2, 4, 6\}) + p(\{1, 3, 5\}) = 1$.
- $p(\{1, 3, 5\}) = p(\neg\{2, 4, 6\}) = 1 - p(\{2, 4, 6\})$
  $p(\neg X) = 1 - p(X)$.
- $p(\{1, 3, 5\} \vee \{1, 2, 3\}) = p(\{1, 3, 5\}) + p(\{1, 2, 3\}) - p(\{1, 3\})$
  $p(X \vee Y) = p(X) + p(Y) - p(X \wedge Y)$.

Medidas de probabilidad

$$\mu : \Sigma \to [0,1] \tag{2}$$

tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Para cualquier familia de conjuntos disjuntos de a dos $\{A_i\}_{i \in I}$

$$\mu(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_i \mu(A_i)$$

Caso clásico

Σ es un algebra de Boole y satisface $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ (*principio de inclusión-exclusión*). También tenemos: $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$

¿Cómo calculo la probabilidad?

Si estoy en el estado:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{3}$$

la probabilidad de obtener $|0\rangle$ en una medición es $|\alpha|^2 \in [0, 1]$.
y la probabilidad de obtener $|1\rangle$ en una medición es $|\beta|^2 \in [0, 1]$.
α y β son números complejos.

- Estados $\iff$ Vectores de longitud 1 (flechitas).
- Estados de superposición $\iff$ Combinaciones lineales de vectores (longitud total $= 1$).
- Evolución dinámica $\iff$ Multiplicar por una matriz (unitaria) adecuada (es como *rotar* vectores).
- Probabilidad de observar algo $\iff$ Módulo del coeficiente de la combinación lineal al cuadrado.

Lo que vamos a ver en estos días

- Estados $\Longleftrightarrow$ Vectores de longitud 1 (flechitas).
- Estados de superposición $\Longleftrightarrow$ Combinaciones lineales de vectores (longitud total $= 1$).
- Evolución dinámica $\Longleftrightarrow$ Multiplicar por una matriz (unitaria) adecuada (es como *rotar* vectores).
- Probabilidad de observar algo $\Longleftrightarrow$ Módulo del coeficiente de la combinación lineal al cuadrado.

- Estados $\Longleftrightarrow$ Vectores de longitud 1 (flechitas).
- Estados de superposición $\Longleftrightarrow$ Combinaciones lineales de vectores (longitud total $= 1$).
- Evolución dinámica $\Longleftrightarrow$ Multiplicar por una matriz (unitaria) adecuada (es como *rotar* vectores).
- Probabilidad de observar algo $\Longleftrightarrow$ Módulo del coeficiente de la combinación lineal al cuadrado.

Lo que vamos a ver en estos días

- Estados $\iff$ Vectores de longitud 1 (flechitas).
- Estados de superposición $\iff$ Combinaciones lineales de vectores (longitud total $= 1$).
- Evolución dinámica $\iff$ Multiplicar por una matriz (unitaria) adecuada (es como *rotar* vectores).
- Probabilidad de observar algo $\iff$ Módulo del coeficiente de la combinación lineal al cuadrado.

Un *espacio vectorial sobre los números reales* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "$+$" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{R}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Un *espacio vectorial sobre los números reales* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{R}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Espacios vectoriales: axiomas

Un *espacio vectorial sobre los números reales* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{R}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Un *espacio vectorial sobre los números reales* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{R}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Un *espacio vectorial sobre los números reales* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{R}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Un *espacio vectorial sobre los números reales* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{R}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Un *espacio vectorial sobre los números reales* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{R}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Un *espacio vectorial sobre los números reales* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{R}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

$z \in \mathbb{C} \longrightarrow z = a + bi, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$
$\bar{z} = a - bi$
$i^2 = -1$
$|z|^2 = a^2 + b^2 = z\bar{z} = (a + bi)(a - bi)$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
Otra forma de describir a un complejo es dando un módulo ($|z| \in \mathbb{R}$) y una fase $\theta \in [0, 2\pi)$:
$z = |z| \exp^{i\theta}$
$|\exp^{i\theta}| = 1 \;\; \forall \theta \in [0, 2\pi]$

Espacios vectoriales: axiomas

Un *espacio vectorial sobre los números complejos* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{C}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a + b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Un *espacio vectorial sobre los números complejos* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{C}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Un *espacio vectorial sobre los números complejos* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{C}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Un *espacio vectorial sobre los números complejos* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{C}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Espacios vectoriales: axiomas

Un *espacio vectorial sobre los números complejos* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{C}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Un *espacio vectorial sobre los números complejos* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{C}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Un *espacio vectorial sobre los números complejos* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{C}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a + b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Un *espacio vectorial sobre los números complejos* es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío, dotado de una suma "+" y un producto por escalares con las siguientes propiedades.

- Para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (asociatividad).
- Para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (conmutatividad).
- Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |v\rangle = |v\rangle$ (existe el nulo de la suma).
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, existe $|v\rangle' \in \mathbb{V}$ tal que $|v\rangle + |v\rangle' = \mathbf{0}$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$.
- Para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $1|v\rangle = |v\rangle$.
- Para todo $a \in \mathbb{C}$ y para todos $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$, $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
- Para todos $a, b \in \mathbb{C}$ y para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

Conceptos fundamentales: combinación lineal

Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, sean $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$, ..., $|v_n\rangle$, vectores de $\mathbb{V}$. Decimos que $|v\rangle$ es *combinación lineal* de $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$, ..., $|v_n\rangle$, si existen a_1, a_2, ..., a_n (elementos del cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), de forma tal que:

$$|v\rangle = a_1|v_1\rangle + a_2|v_2\rangle + ... + a_n|v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i|v_i\rangle$$

Conceptos fundamentales: generadores

Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, decimos que el conjunto $C = \{|v_1\rangle, |v\rangle, ..., |v_n\rangle\}$ *genera* a $\mathbb{V}$ si todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$ puede escribirse como combinación lineal de elementos de C.
Es decir, para todo vector $|v\rangle$ existen escalares a_1, a_2, ..., a_n, tales que:

$$|v\rangle = a_1|v_1\rangle + a_2|v_2\rangle + ... + a_n|v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i|v_i\rangle$$

Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, decimos que el conjunto $C = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_n\rangle\}$ es *linealmente independiente* si siempre que:

$$a_1|v_1\rangle + a_2|v_2\rangle + ... + a_n|v_n\rangle = \mathbf{0}$$

implica que $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Conceptos fundamentales: base y dimensión

Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, decimos que el conjunto $B = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_n\rangle\}$ es una *base*, si B es linealmente independiente y genera a $\mathbb{V}$. La *dimensión* de un espacio vectorial viene dada por el número de elementos de cualquiera de sus bases.

Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{C}$, decimos que una función $f : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ es una *transformación lineal* (u *operador lineal*), si para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$f(\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle) = \alpha f(|v\rangle) + \beta f(|w\rangle) \tag{4}$$

Conceptos fundamentales: transformación lineal (más general)

Dados dos espacios vectoriales $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ sobre $\mathbb{C}$, decimos que una función $f : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es una *transformación lineal* (u *operador lineal*), si para todo $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{V}$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$f(\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle) = \alpha f(|v\rangle) + \beta f(|w\rangle) \tag{5}$$

Observación: una transformación lineal f queda definita por los valores que toma en una base. Esto es así, porque si $B = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, ..., |v_n\rangle\}$ es una base de $\mathbb{V}$, entonces, para todo $|v\rangle \in \mathbb{V}$, tenemos que

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |v_i\rangle \tag{6}$$

con $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Entonces, dado que f es lineal, tenemos que:

$$f(\alpha|v\rangle) = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i |v_i\rangle) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(|v_i\rangle) \tag{7}$$

Ejemplo de una f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$R_\theta(|v_1\rangle + |v_2\rangle) = R_\theta|v_1\rangle + R_\theta|v_2\rangle$

Sea

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{9}$$

Definimos $f_{R_\theta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

$$f_{R_\theta}(|v\rangle) = R_\theta|v\rangle \tag{10}$$

en otras palabras:

$$f_H\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \cos(\theta)x + \sin(\theta)y \end{pmatrix} \tag{11}$$

i_1	i_2	V
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$f(01) = 1$

$f(00) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 0$

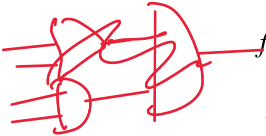
Sea

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{12}$$

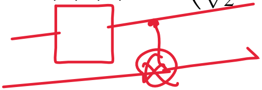
Definimos $f_H : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ de la siguiente forma:

$$f_H\left(|v\rangle\right) = H|v\rangle \tag{13}$$

en otras palabras:



$$f_H\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{14}$$



$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad B_1 = \{ |0\rangle, |1\rangle \}$

$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad B_2 = \{ |+\rangle, |-\rangle \}$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{15}$$

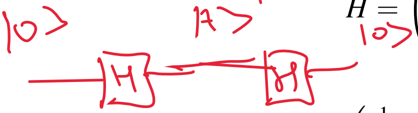
$$f_H(|0\rangle) = H|0\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = |+\rangle \tag{16}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$

$$f_H(|1\rangle) = H|1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = |-\rangle \tag{17}$$

$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$

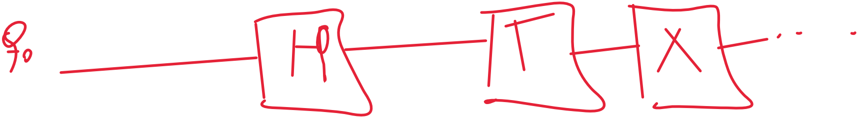
$H^2 = H \cdot H = I$ $\qquad H^2 = I$



$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$f_H(|+\rangle) = H|+\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \tag{19}$$

$$f_H(|-\rangle) = H|-\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \tag{20}$$



$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$f_H\left(|+\rangle\right) = H|+\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \tag{22}$$

$$f_H\left(|-\rangle\right) = H|-\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \tag{23}$$

¿Por qué es importante la multiplicación matricial?

En este curso, el estado de un qubit cambia en el tiempo de acuerdo a la ecuación:

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle \tag{24}$$

donde

$$U(t) = \exp^{\frac{-i}{\hbar}At} \tag{25}$$

H, X, T, U

donde A va a ser lo que se conoce como el Hamiltoniano del sistema. Para cada t, la matriz U es unitaria:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I \tag{26}$$

$= H\rangle$

(es decir, $U^\dagger = U^{-1}$)

$= |0\rangle$

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Compuerta: U. Matriz cuadrada (con entradas complejas) de $n \times n$.
$UU^\dagger = U^\dagger U = I$.

$$|\psi\rangle \longrightarrow U|\psi\rangle$$

$$\rho \longrightarrow U\rho U^\dagger$$

$a \cdot 1 = a$

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A \cdot I_n = A$

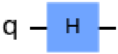
$H \cdot H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

compuesta

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{27}$$

$H|0\rangle = |+\rangle$

$H|+\rangle = 0$



$H|+\rangle = \underbrace{HH}_{I}|0\rangle = I|0\rangle = |0\rangle$

Acción:
$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle$
$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle$
$H^2 = I$

t

$|0\rangle \; - \boxed{H} - \boxed{I} - \boxed{X} -$

$|0\rangle \quad H|0\rangle \quad IH|0\rangle \quad XIH|0\rangle$

Notación: $|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle|0\rangle = |00\rangle$
(y lo mismo para $|01\rangle$, $|10\rangle$ y $|11\rangle$).

Acción:

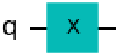
$$(H \otimes H)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = H|0\rangle \otimes H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) =$$

$$= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

Notar que cada resultado $|ij\rangle$ $(i, j = 0, 1)$ ocurre con probabilidad $\frac{1}{4}$.

in	
0	1
1	0

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$



Acción:
$X|0\rangle = |1\rangle$
$X|1\rangle = |0\rangle$
$X^2 = I$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X|0\rangle = |1\rangle$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Acción:
$Y|0\rangle = i|1\rangle$
$Y|1\rangle = -i|0\rangle$

$Y(\alpha|0\rangle +$

Compuertas Lógicas Cuánticas: Z

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{30}$$