

Compuertas Lógicas y Circuitos Cuánticos

Federico Holik

I F L P



CONICET

U N L P

Curso UNAHUR

04/11/2025

- 1 Observables y Valores Medios
- 2 Entrelazamiento
- 3 Compuertas Lógicas Cuánticas y Circuitos

- 1 Observables y Valores Medios
- 2 Entrelazamiento
- 3 Compuertas Lógicas Cuánticas y Circuitos

Estados, Observables y Evolución Dinámica

Magnitud	Matemática	Símbolo
Estado	Vector	$ \psi\rangle$
Observable	Matriz Hermítica	$A = A^\dagger$
Valores posibles	Autovalores	$A \psi\rangle = \lambda \psi\rangle$
Evolución Dinámica	Matriz Unitaria	$ \psi(t)\rangle = U \psi(0)\rangle$

$$A = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

Principio de Superposición: $|\psi\rangle = \alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle$ (con $\| |\psi\rangle \| = 1$)

$$U^{-1} = U^\dagger$$

Medir el espín en \hat{x} :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Medir el espín en \hat{y} :

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Medir el espín en \hat{z} :

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

El *producto escalar* viene dado por:

$$\langle\psi|\phi\rangle = (\alpha_1^* \quad \alpha_2^*) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \alpha_1^* \beta_1 + \alpha_2^* \beta_2 \quad (6)$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad |\phi\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

El *producto escalar* viene dado por:

$$\langle\psi|\phi\rangle = (\alpha_1^* \quad \dots \quad \alpha_n^*) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \alpha_1^* \beta_1 + \alpha_2^* \beta_2 + \dots + \alpha_n^* \beta_n$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad |\phi\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

El *producto escalar* viene dado por:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \alpha_1^*\beta_1 + \alpha_2^*\beta_2 + \dots + \alpha_n^*\beta_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \beta_i$$

Magnitudes Físicas de Crucial Relevancia

Probabilidad de Transición: $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$

Valor Medio de A : $\langle\psi|A|\psi\rangle$

- 1 Observables y Valores Medios
- 2 Entrelazamiento
- 3 Compuertas Lógicas Cuánticas y Circuitos

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad |\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} \quad (7)$$

El producto tensorial viene dado por:

$$|\psi\rangle \otimes |\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' \\ \alpha\beta' \\ \beta\alpha' \\ \beta\beta' \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$|1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$B_2 = \{|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (13)$$

Cualquier estado de dos qubits se escribe como combinación lineal de vectores de la base de arriba:

$$|\psi_2\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2|10\rangle + \alpha_3|01\rangle + \alpha_4|11\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

Normalización: $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 = 1$ (recordar que $\alpha_i \in \mathbb{C}$)

$$|\psi_1\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle \quad (14)$$

$$|\psi_2\rangle = \alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle \quad (15)$$

$$|\psi_3\rangle = \alpha_3|0\rangle + \beta_3|1\rangle \quad (16)$$

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle = & (17) \\ & \alpha_1\alpha_2\alpha_3|000\rangle + \alpha_1\beta_2\alpha_3|010\rangle + \beta_1\alpha_2\alpha_3|100\rangle + \beta_1\beta_2\alpha_3|110\rangle \\ & + \alpha_1\alpha_2\beta_3|001\rangle + \alpha_1\beta_2\beta_3|011\rangle + \beta_1\alpha_2\beta_3|101\rangle + \beta_1\beta_2\beta_3|111\rangle \end{aligned}$$

$$B_3 = \{|000\rangle, |100\rangle, |010\rangle, |001\rangle, |110\rangle, |101\rangle, |011\rangle, |111\rangle\}$$

$$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_3 = \{|000\rangle, |100\rangle, |010\rangle, |001\rangle, |110\rangle, |101\rangle, |011\rangle, |111\rangle\}$$

$$|\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{pmatrix}$$

Normalización:

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 = 1$$

(recordar que $\alpha_i \in \mathbb{C}$)

Base Computacional N Qubits: 2^N elementos

$$B_N = \{|00\dots0\rangle, |10\dots0\rangle, |01\dots0\rangle, \dots, |0\dots11\rangle, |11\dots1\rangle\}$$

$$B_N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Estado entrelazado

- Supongamos que tengo dos qubits.
- Puedo preparar el estado $|00\rangle$.
- Puedo preparar el estado $|11\rangle$.
- Por el principio de superposición, puedo preparar:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Entrelazamiento

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

Estado entrelazado

- Supongamos que tengo dos qubits.
- Puedo preparar el estado $|00\rangle$.
- Puedo preparar el estado $|11\rangle$.
- Por el principio de superposición, puedo preparar:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Entrelazamiento

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

Estado entrelazado

- Supongamos que tengo dos qubits.
- Puedo preparar el estado $|00\rangle$.
- Puedo preparar el estado $|11\rangle$.
- Por el principio de superposición, puedo preparar:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Entrelazamiento

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

Estado entrelazado

- Supongamos que tengo dos qubits.
- Puedo preparar el estado $|00\rangle$.
- Puedo preparar el estado $|11\rangle$.
- Por el principio de superposición, puedo preparar:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Entrelazamiento

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

Estado entrelazado

- Supongamos que tengo dos qubits.
- Puedo preparar el estado $|00\rangle$.
- Puedo preparar el estado $|11\rangle$.
- Por el principio de superposición, puedo preparar:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Entrelazamiento

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

- 1 Observables y Valores Medios
- 2 Entrelazamiento
- 3 Compuertas Lógicas Cuánticas y Circuitos

Compuertas Lógicas Cuánticas: Hadamard

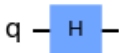
Compuerta: U . Matriz cuadrada (con entradas complejas) de $n \times n$.
 $UU^\dagger = U^\dagger U = I$.

$$|\psi\rangle \longrightarrow U|\psi\rangle$$

$$\rho \longrightarrow U\rho U^\dagger$$

Compuertas Lógicas Cuánticas: Hadamard

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (18)$$



Acción:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle$$

$$H^2 = I$$

Notación: $|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle|0\rangle = |00\rangle$

(y lo mismo para $|01\rangle$, $|10\rangle$ y $|11\rangle$).

$$(\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle) \otimes (\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle) = \\ \alpha_1\alpha_2|00\rangle + \alpha_1\beta_2|01\rangle + \beta_1\alpha_2|10\rangle + \beta_1\beta_2|11\rangle$$

Compuertas Lógicas Cuánticas: Hadamard

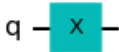
Notación: $|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle|0\rangle = |00\rangle$
(y lo mismo para $|01\rangle$, $|10\rangle$ y $|11\rangle$).

Acción:

$$\begin{aligned}(H \otimes H)(|0\rangle \otimes |0\rangle) &= H|0\rangle \otimes H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)\end{aligned}$$

Notar que cada resultado $|ij\rangle$ ($i, j = 0, 1$) ocurre con probabilidad $\frac{1}{4}$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$



Acción:

$$X|0\rangle = |1\rangle$$

$$X|1\rangle = |0\rangle$$

$$X^2 = I$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

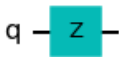


Acción:

$$Y|0\rangle = i|1\rangle$$

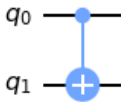
$$Y|1\rangle = -i|0\rangle$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (21)$$



Compuertas Lógicas Cuánticas: Cnot

$$Cnot = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$



Compuertas Lógicas Cuánticas: Cnot

Notación: $|0\rangle \otimes |0\rangle := |00\rangle$

Base del espacio de dos qubits ($\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$): $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$

$$Cnot = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

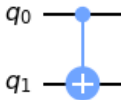


Table de verdad del Cnot (en la base computacional)

Input 1	Input 2	Output 1	Output 2
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$

Compuertas Lógicas Cuánticas: Cnot

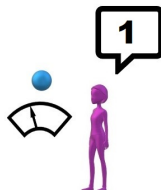
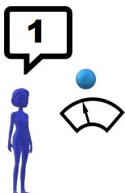
Aplico primero Hadamard al primer qubit:

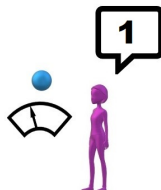
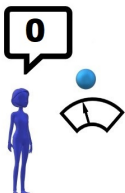
$$(H|0\rangle)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$

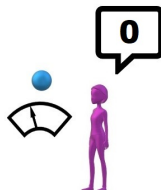
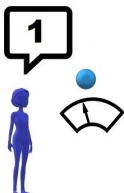
Luego, aplico Cnot (que combina a los dos qubits):

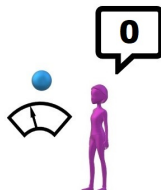
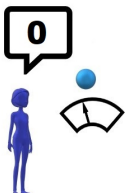
$$Cnot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Cnot|00\rangle + Cnot|10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

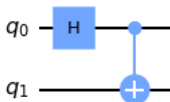
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \neq |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle \implies \text{No separable} = \text{¡Entrelazado!}$$











Si preparamos al sistema en el estado:

$$Cnot(H|0\rangle|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

(en la base computacional) sólo vamos a observar 00 y 11.

Si preparamos al sistema en el estado:

$$|Singlete\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle)$$

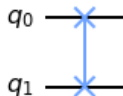
(en la base computacional) sólo vamos a observar 01 y 10.

Ahora vemos ejemplos de cómo programar circuitos:



Compuertas Lógicas Cuánticas: Swap

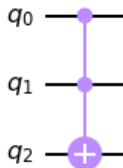
$$Swap = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$



$$Swap|00\rangle = |00\rangle \quad Swap|01\rangle = |10\rangle \quad Swap|10\rangle = |01\rangle \quad Swap|11\rangle = |11\rangle$$

Compuertas Lógicas Cuánticas: Toffoli

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

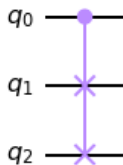


Input 1	Input 2	Input 3	Output 1	Output 2	Output 3
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$

$$|x, y, z\rangle \longrightarrow |x, y, xy \oplus z\rangle$$

Compuertas Lógicas Cuánticas: Controlled-SWAP (Fredkin)

$$Fredkin = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$



Cuando la gente se comunica, puede usar “lógica cuántica” en distintos sentidos (algunos, bastante establecidos en comunidades).

- “Quantum Logic”: lógica cuántica de Birkhoff y von Neumann (et alia).
- “Quantum Logic”: el conjunto de compuertas lógicas cuánticas y sus propiedades en el contexto de la computación cuántica.

Cuando la gente se comunica, puede usar “lógica cuántica” en distintos sentidos (algunos, bastante establecidos en comunidades).

- “Quantum Logic”: lógica cuántica de Birkhoff y von Neumann (et alia).
- “Quantum Logic”: el conjunto de compuertas lógicas cuánticas y sus propiedades en el contexto de la computación cuántica.

En el sentido de “compuertas lógicas cuánticas”



ARTICLE

DOI: 10.1038/s41467-017-00580-x

OPEN

Single-photon three-qubit quantum logic using spatial light modulators

Kumel H. Kagalwala¹, Giovanni Di Giuseppe ^{1,2}, Ayman F. Abouraddy¹ & Bahaa E.A. Saleh¹

The information-carrying capacity of a single photon can be vastly expanded by exploiting its multiple degrees of freedom: spatial, temporal, and polarization. Although multiple qubits can be encoded per photon, to date only two-qubit single-photon quantum operations have been realized. Here, we report an experimental demonstration of three-qubit single-photon, linear, deterministic quantum gates that exploit photon polarization and the two-dimensional spatial-parity-symmetry of the transverse single-photon field. These gates are implemented using a polarization-sensitive spatial light modulator that provides a robust, non-interferometric, versatile platform for implementing controlled unitary gates. Polarization here represents the control qubit for either separable or entangling unitary operations on the two spatial-parity target qubits. Such gates help generate maximally entangled three-qubit Greenberger-Horne-Zeilinger and W states, which is confirmed by tomographical

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 37, No. 4, October, 1936

THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS

BY GARRETT BIRKHOFF AND JOHN VON NEUMANN

(Received April 4, 1936)

1. Introduction. One of the aspects of quantum theory which has attracted the most general attention, is the novelty of the logical notions which it presupposes. It asserts that even a complete mathematical description of a physical system \mathcal{S} does not in general enable one to predict with certainty the result of an experiment on \mathcal{S} , and that in particular one can never predict with certainty both the position and the momentum of \mathcal{S} (Heisenberg's Uncertainty Principle). It further asserts that most pairs of observations are incompatible, and cannot be made on \mathcal{S} simultaneously (Principle of Non-commutativity of Observations).

The object of the present paper is to discover what logical structure one may hope to find in physical theories which, like quantum mechanics, do not conform to classical logic. Our main conclusion, based on admittedly heuristic arguments, is that one can reasonably expect to find a calculus of propositions which is formally indistinguishable from the calculus of linear subspaces with