

Отчет по курсовой работе. Вариант 10

Выполнил Бекух М.С., гр.22343

1. Постановка задачи

Решить задачу Коши для уравнения Хопфа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -5 < x < 10$$

$$u(x, 0) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right), \quad 0 < t < t_{max} = 1$$

Сравнить результаты, полученные при использовании двух различных численных схем.

2. Численный метод

Для начала вспомним аналитическое решение этого уравнения, которое решается методом характеристик:

$$u(x, t) = \exp\left(\frac{-(x - u * t)^2}{2}\right).$$

Как видно аналитическое решение представлено в неявном виде. Так же стоит вспомнить что для уравнения Хопфа имеет место быть процесс опрокидывания (градиентная катастрофа), который при наших ограничениях на t и x не достигается.

Для численного решения данного уравнения будем использовать две численные схемы: явную схему Лакса-Фридриха и Линеаризованную “Upwing” схему.

2.1. Схема Лакса-Фридриха (явная)

Преобразуем наше уравнение чтобы прийти к разностной схеме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (x_i, t^n) - \text{сетка по координате и времени},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0, \quad F(u) = \left(\frac{u^2}{2}\right) - \text{поток величины } u$$

$$u_i^n \approx u(x_i, t^n), \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F(u_{i+1}^n) - F(u_{i-1}^n)}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

$$\tilde{u}_n^i = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} - \text{средняя величина.}$$

Подставляя в уравнение Хопфа полученные величины получаем разностную схему:

$$u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{4\Delta x} (u_{i+1}^{n-2} - u_{i-1}^{n-2})$$

Критерий устойчивости данного метода — это критерий Куранта–Фридрихса–Леви (CFL):

$$CFL = \frac{\max|u| * \Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad \text{в нашем случае } \max|u| \approx 1$$

$$CFL \approx \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Данный параметр ограничивается не только сверху единицей, но и снизу, т.к. для рассматриваемой схемы значение CFL создает “численную вязкость” в правой части уравнения Хопфа. Выводится путем разложения схемы в ряд Тейлора. Тем самым, по сути, мы решаем уравнением Бюргерса, стараясь минимизировать вязкость:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu_{CFL} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \nu_{CFL} = \frac{\Delta x^2}{\Delta t} (1 - CFL^2)$$

При $CFL \rightarrow 0$, $\nu_{CFL} \approx \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$ — большая вязкость и фронт размывается.

Соответственно будем подбирать параметр CFL для наилучшей аппроксимации аналитического решения.

2.2 Линеаризованная “Upwing” схема (неявная)

Попробуем линеаризовать наши производные и попытаемся свести решение к методу прогонки для трех диагональной матрицы.

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} &= 0 \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x} u_i^n * u_i^{n+1} + \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_i^n\right) * u_i^{n+1} &= u_i^n \end{aligned}$$

Получаем трех диагональную матрицу с коэффициентами:

$$a_i = -\frac{\Delta t}{\Delta x} u_i^n; \quad b_i = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_i^n; \quad c_i = 0; \quad d_i = u_i^n.$$

Далее решаем уже отработанным методом, как для 10 задачи из курса.

Это неявная схема и она устойчива при любых входных условиях, однако мы так же можем привести параметр CFL и связать его с точностью через вязкость. Искусственная вязкость для нашего метода выводится достаточно легко путем разложения схемы в ряд Тейлора и получаем:

$$\nu_{CFL} = \frac{u\Delta x}{2} (1 - CFL^2), \quad \max|u| \approx 1$$

$$\nu_{CFL} \rightarrow 0, \quad \nu_{CFL} \approx \frac{\Delta x}{2}$$

Как видно, искусственная вязкость имеет определённый предел, что будет подтверждено численно в ходе результатов вычислений.

3. Результаты расчетов

Для начала приведем результаты расчета для первой схемы. Вместе с графиком численного решения так же привожу аналитическое решение, построенное как неявная функция благодаря функционалу питон. На рис.1 можно видеть размытие фронта, т.к. CFL достаточно мал, как раз то, что обсуждалось в предыдущем разделе.

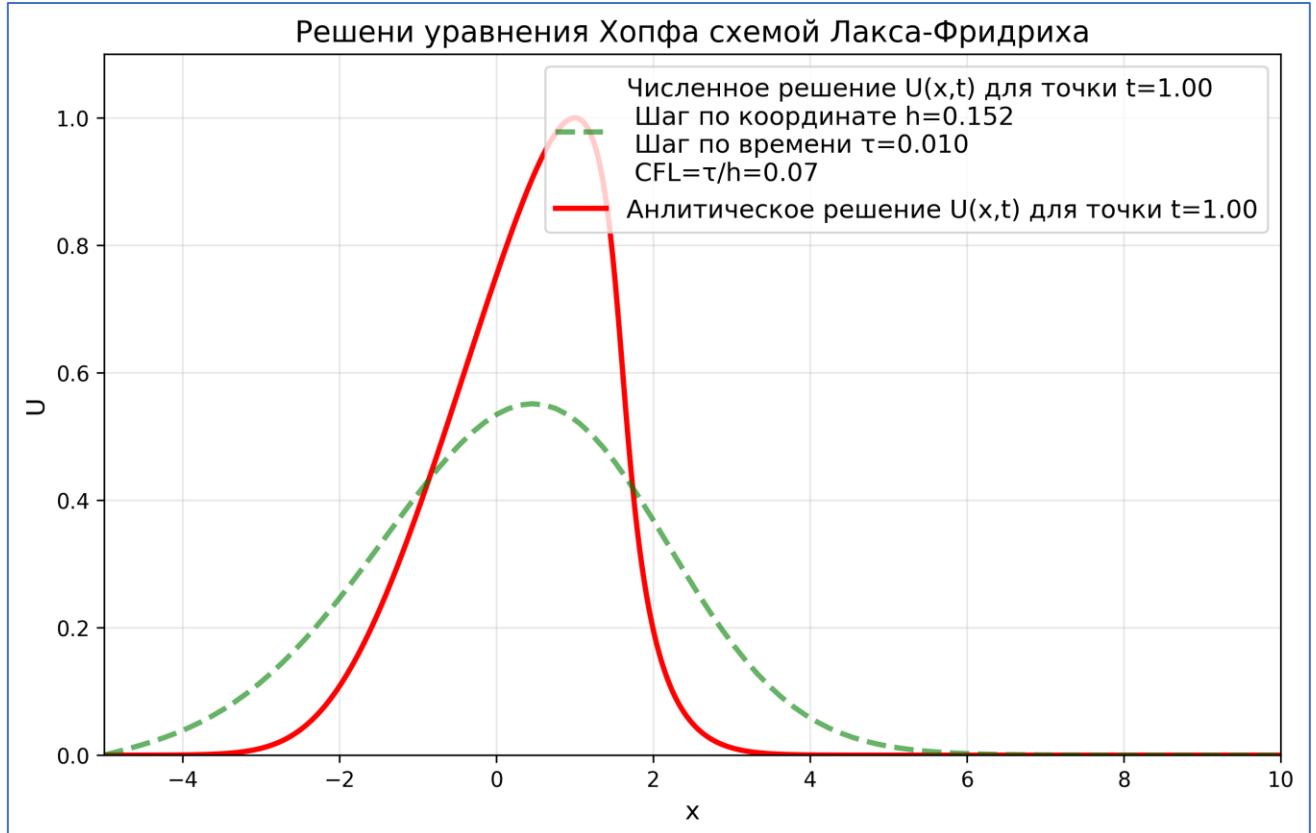


Рис.1 Решение уравнения Хопфа схемой Лакса-Фридриха в точке $t=1$ сек. с параметром $CFL=0.07$ и аналитическое решение.

Так же привожу решение для параметра $CFL=0.6-0.8$, где численная вязкость стремится к нулю(рис.2 и рис.3).

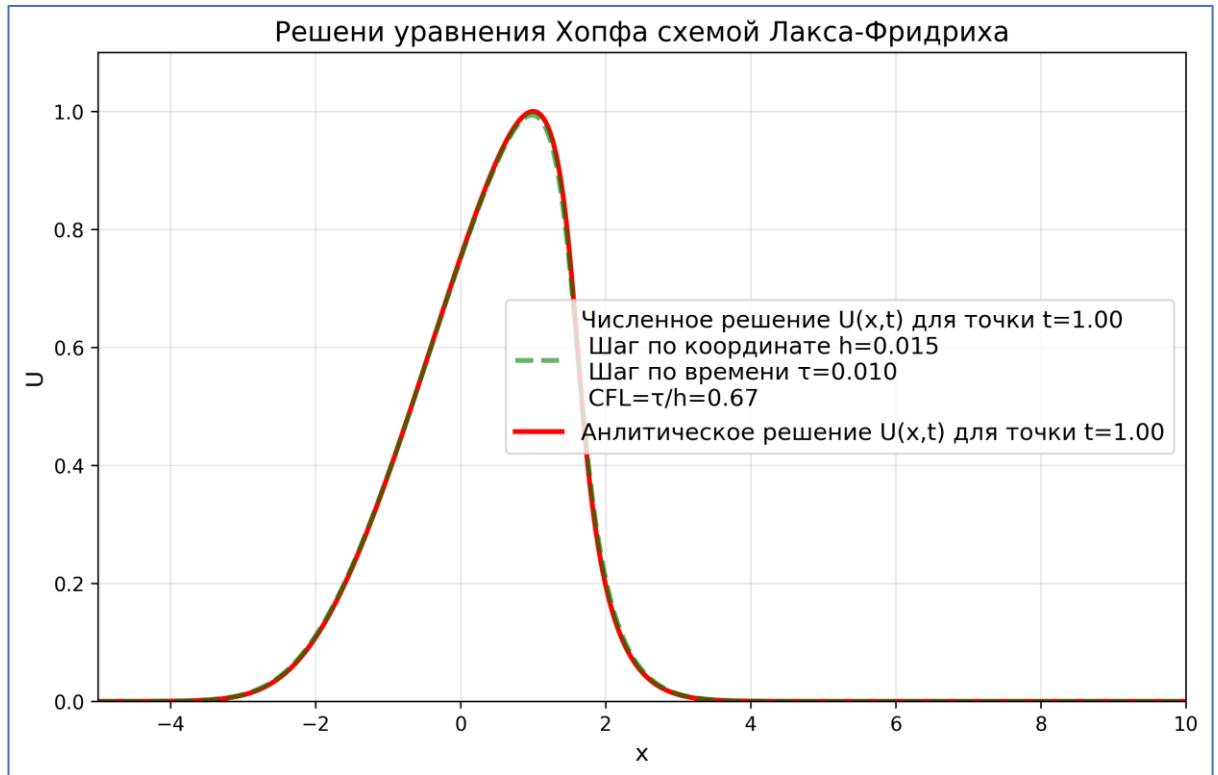


Рис.2 Решение уравнения Хопфа схемой Лакса-Фридриха в точке $t=1$ сек. с параметром $CFL=0.67$ и аналитическое решение.

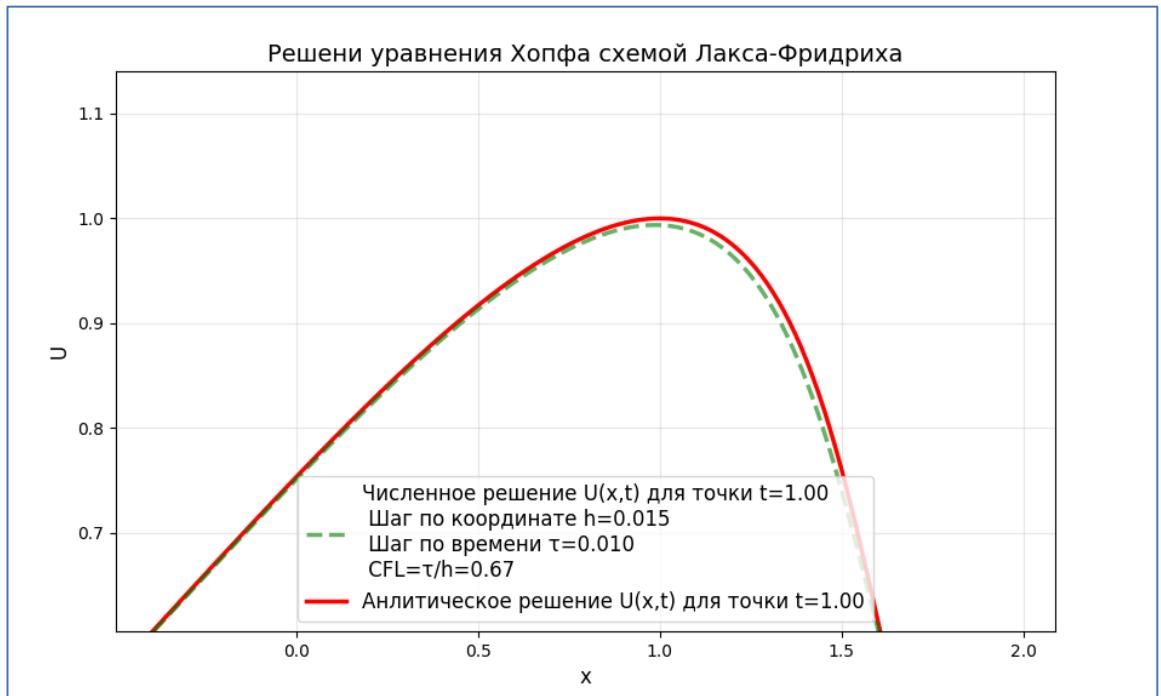


Рис.3 Решение уравнения Хопфа схемой Лакса-Фридриха в точке $t=1$ сек. с параметром $CFL=0.67$ и аналитическое решение (вблизи).

Так же на рис.4 представлено решение с тем же параметром, но для другой точки по времени $t=0.44$ сек.

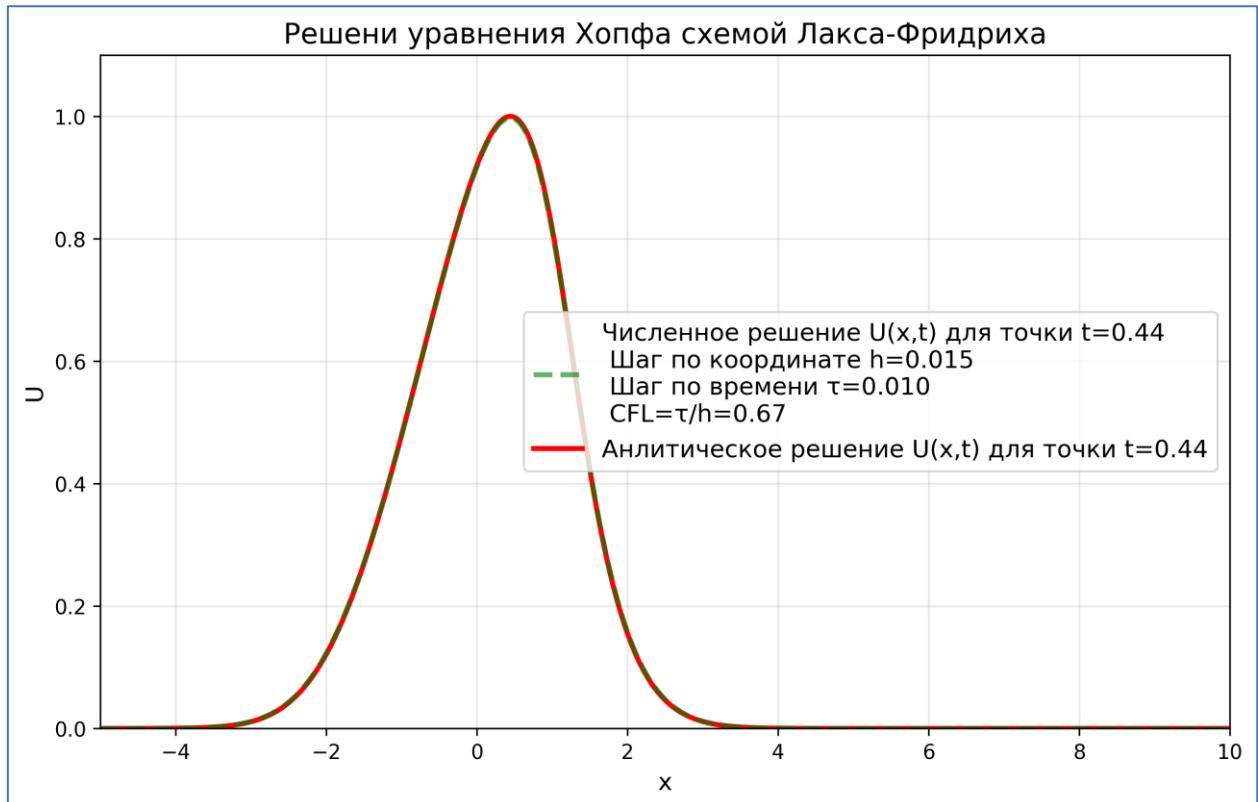


Рис.4 Решение уравнения Хопфа схемой Лакса-Фридриха в точке $t=0.44$ сек. с параметром $CFL=0.67$ и аналитическое решение.

Теперь рассмотрим вторую схему, для начала покажем, что действительно даже при около нулевом CFL пакет имеет предельную вязкость (см. рис.5).

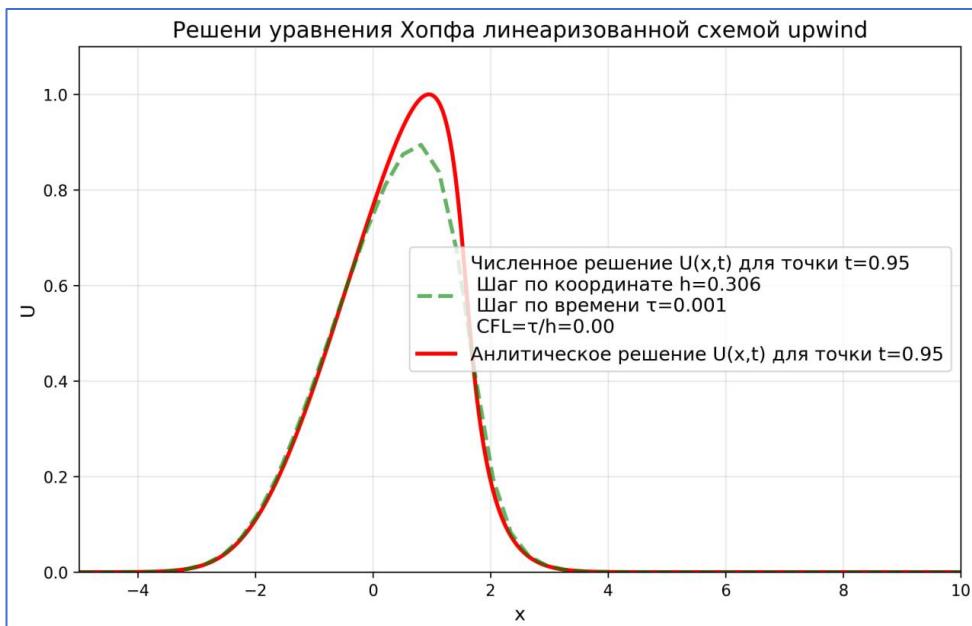


Рис.5 Решение уравнения Хопфа схемой Upwing в точке $t=0.95$ сек. с параметром $CFL=0$ и аналитическое решение.

Типовые значения CFL для хорошей точности в пределах от 1 до 3, см. рис.6.

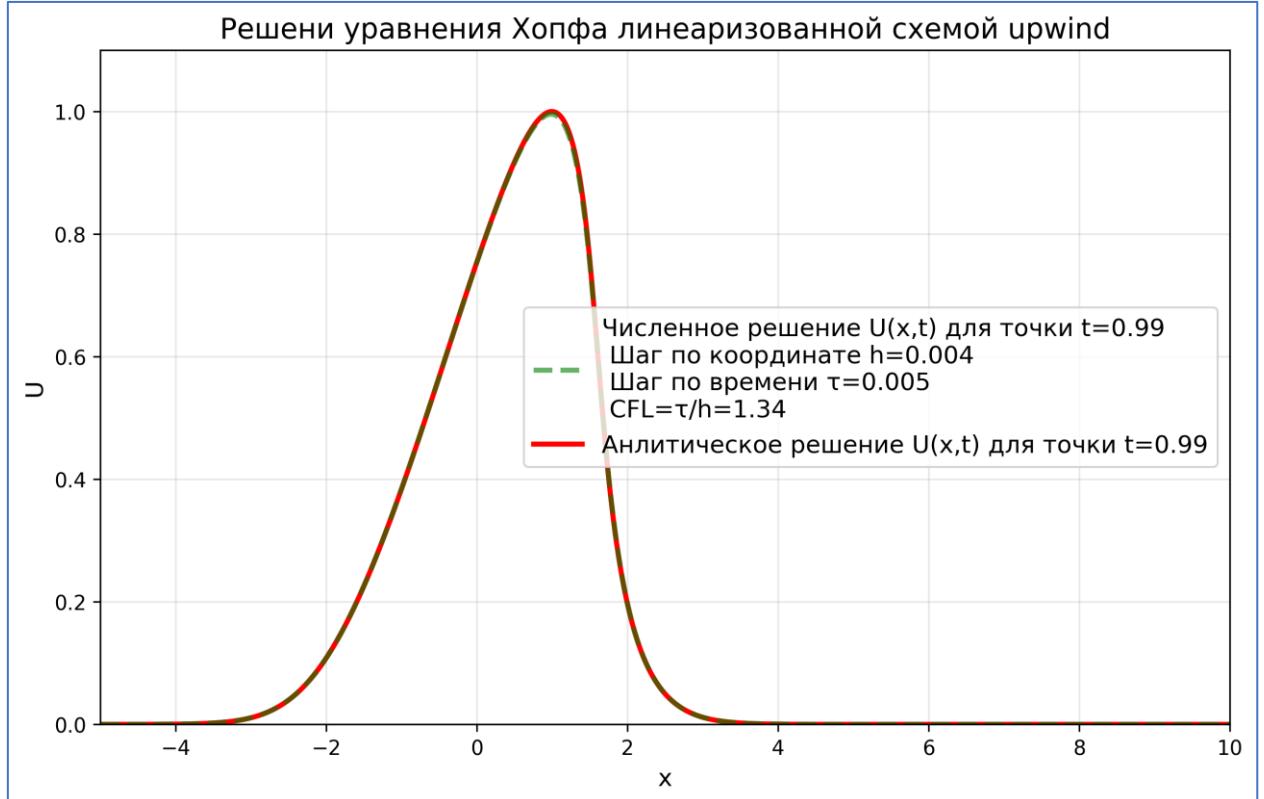


Рис.6 Решение уравнения Хопфа схемой Upwing в точке $t=0.99$ сек. с параметром $CFL=1.3$ и аналитическое решение.

Так же приведу примеры того, как ведут себя обе схемы одновременно при одинаковых CFL. При $CFL=0.03$ пакет построенный по схеме Лакса-Фридриха расплылся, что как раз говорит о высокой численной вязкости, пакет, построенный по неявной схеме держится хорошо(см.рис.7).

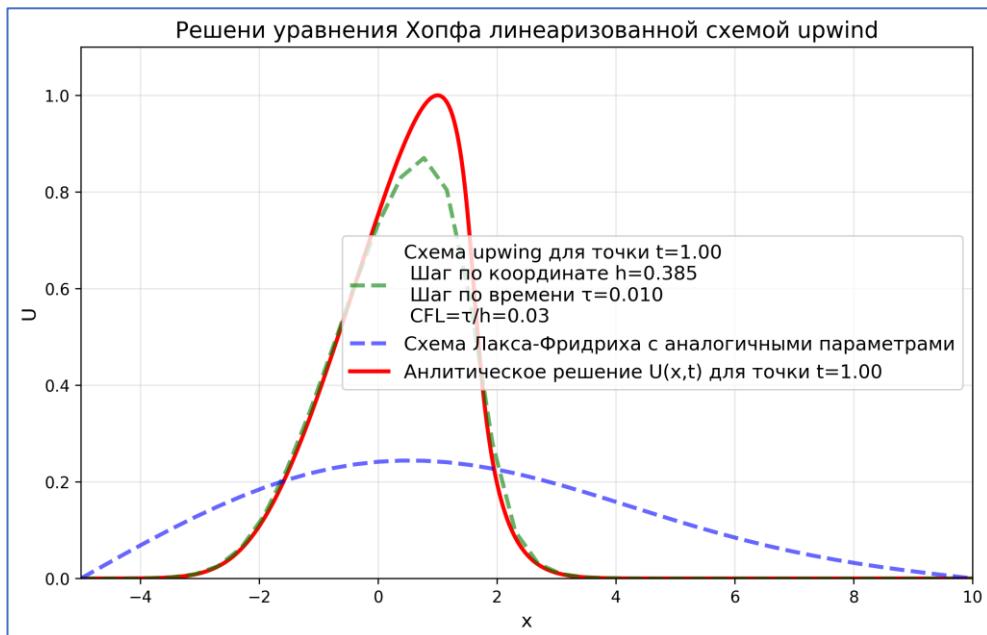


Рис.7 Решение уравнения Хопфа двумя схемами в точке $t=1$ сек. с параметром $CFL=0.03$ и аналитическое решение.

Так же на привожу пример того, как себя ведут оба метода при допустимых значениях CFL для обоих (см. рис.8). Видно, что вязкость неявного метода гораздо меньше и он ведет себя гораздо точнее при CFL около 1.

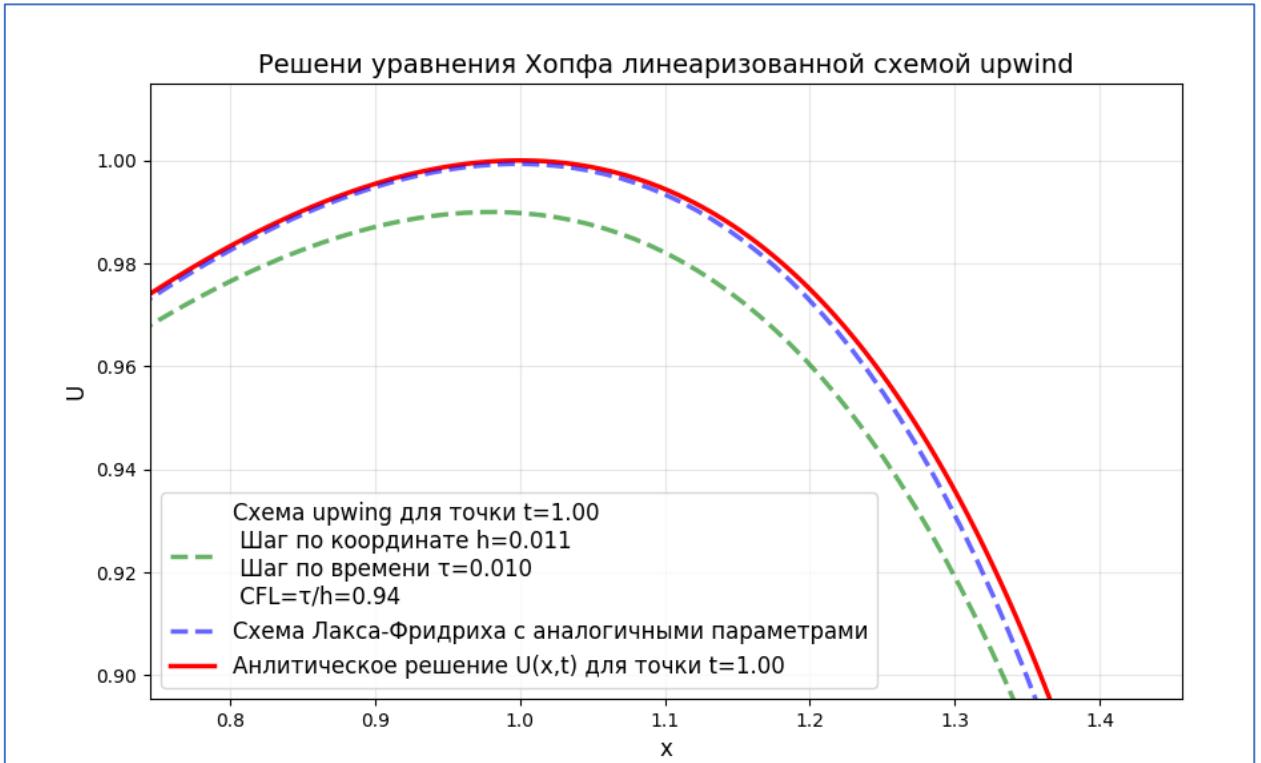


Рис.8 Решение уравнения Хопфа двумя схемами в точке $t=1$ сек. с параметром $CFL=0.94$ и аналитическое решение.

4. Выводы

Были опробованы две численные схемы, явная и неявная. В курсовой применялись методы, частично изложенные в курсе. Были выведены критерии точности CFL и обоснованы для каждой схемы. Так же получены результаты, которые демонстрируют принцип работы каждой схемы. Точность каждой схемы может доводиться до высоких значений.