Approximations- und Online-Algorithmen

thgoebel@ethz.ch

ETH Zürich, FS 2022

This documents is a **short** summary for the course *Approximations- und Online-Algorithmen* at ETH Zurich. It is intended as a document for quick lookup, e.g. during revision, and as such does not replace attending the lecture, reading the slides or reading a proper book.

We do not guarantee correctness or completeness, nor is this document endorsed by the lecturers. Feel free to point out any errata, either by mail or on Github.

Contents

Part I.
Approximations-Algorithmen

1. Approximations-Algorithmen

TODO. Siehe das Skript von letzem Jahr.

Part II.
Online-Algorithmen

2. Einführung und das Paging-Problem

Konzepte

- Online-Problem, Online-Algorithmus, kompetitiver Faktor
- Skirental-Problem
- Paging-Problem

Motivation Probleme lösen und Entscheidungen fällen ohne alle für eine optimale Lösung relevanten Informationen zu haben. Stattdessen werden die Informationen stückweise zur Laufzeit bekannt.

Beispiel: Skirental-Problem Unendlich langer Urlaub, nur an schönen Tagen Ski fahren. Skier mieten für 1 CHF pro Tag, oder kaufen für k CHF. Erst am Tag selbst wird bekannt ob ein Tag schön ist.

Optimale Lösung: Sei s die Anzahl schöner Tag. Miete bei $s < k$, kaufe bei $s > k$, bei $s = k$ egal.

Problem: s nicht bekannt, erst am Tag selber wird bekannt ob ein Tag schön ist.

Szenario	Worst Case	Approximationsgüte
An Tag 1 kaufen	Ab Tag 2 schlechtes Wetter	$\frac{k}{1}$
Immer mieten	An $x >> k$ Tagen schönes Wetter	$\frac{x}{k}$
An $k-1$ Tagen mieten, dann kaufen	Ab Tag $k+1$ schlechtes Wetter	$\frac{2k-1}{k} = 2 - \frac{1}{k}$

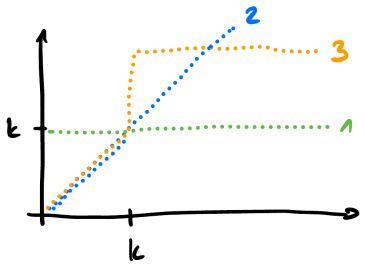

Figure 1: Skirental Szenarios

Online-Problem Ein *Online-Minimierungsproblem* ist $\Pi = (I, O, cost, \min)$. Eine Eingabe $I = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{I}$ ist eine Folge von *Anfragen*, jeweils für *Zeitschritt* i. Eine akzeptierte Lösung $O = (y_1, ..., y_n)$ ist eine Folge von *Antworten*.

Beim analogen Maximierungsproblem spricht man statt von $cost(I, O)$ oft vom *Gewinn* $gain(I, O)$.

Online-Algorithmus Sei Π ein Online-Optimierungsproblem. Ein *Online-Algorithmus* $\mathcal{A}$ berechnet die Ausgabe $\mathcal{A}(I) = (y_1, ..., y_n)$ wobei y_i nur von $(x_1, ..., x_i)$ abhängt. $\mathcal{A}(I)$ ist eine zulässig Lösung für I.

Kompetitive Faktor (aka. competitive ratio, Wettbewerbsgüte, kompetitive Güte)
Ein Online-Algorithmus $\mathcal{A}$ ist *c-kompetitiv* falls gilt:

$$\exists \alpha \geq 0 \quad \forall I \ : \quad cost(\mathcal{A}(I)) \leq c \cdot cost(Opt(I)) + \alpha$$
$$\frac{cost(\mathcal{A}(I))}{cost(Opt(I))} + \alpha' \leq c$$

für ein Minimierungsproblem und α konstant. *Opt* ist ein optimaler Offline-Algorithmus, d.h. mit vollständiger Information.

Das kleinste c für das dies gilt heisst *kompetitiver Faktor*.
A heisst *strikt c-kompetitiv* falls $\alpha = 0$.
$\mathcal{A}$ heisst *optimal* falls er strikt 1-kompetitiv ist ($\alpha = 0, c = 1$).

Wir sprechen hierbei von *kompetitiver Analyse*. Der kompetitiver Faktor ist vergleichbar mit der Approximationsgüte von Approximationsalgorithmen.

Ein Online-Algorithmus heisst *kompetitiv* wenn sein kompetititver Faktor nicht von der Länge der Eingabe abhängt (d.h. es keine Startkosten gibt die amortisiert werden müssen). Die Konstante α ist wichtig da sie erlaubt auf kurze Eingaben schlecht zu sein (und erst auf lange besser zu werden). [1]

Untere Schranken beweisen Für einen strikt kompetititven Algorithmus: Finde eine Instanz I mit $\frac{\mathcal{A}(I)}{Opt(I)} > c \implies$ <u>nicht</u> strikt-kompetitiv.

Für einen nicht-strikt kompetititven Algorithmus: Finde eine unendliche Folge $I_1, I_2, ...$ von Instanzen so dass $\frac{\mathcal{A}(I_i)}{Opt(I_i)} > c$ und $Opt(I_i) \overset{i \to \infty}{\longrightarrow} \infty$.

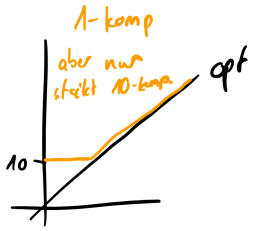

Figure 2: *Opt* in schwarz. $\mathcal{A}$ in orange, 1-kompetitiv und strikt-10-kompetitiv.

2.1. Das Paging-Problem

Paging

- Eingabe: $I = (x_1, ..., x_n)$ mit Speicher-Indizes $x_i \in \mathbb{N}$
- Hauptspeicher mit m Seiten: $(s_1, ..., s_m)$
- Cache-Speicher mit k Seiten: $B = (s_{j_1}, ..., s_{j_k})$, initialisiert mit $(s_1, ..., s_k)$ [2]
- Zeitschritt i:
  - Index x_i wird angefragt
  - Falls x_i im Cache (d.h. $s_{x_i} \in B$): return $y_i = 0$

[1] Warum brauchen wir bei der Approximationsgüte keine vergleichbare Konstante?
[2] Der Vorsprung eines selbstgewählten Startinhalts kann in α versteckt werden.

  - Andernfalls: return $y_i = j$, und setze $B = B \backslash \{s_j\} \cup \{s_{x_i}\}$, d.h. lösche Seite s_j aus dem Cache. [3]

- $cost(\mathcal{A}(I)) := |\{i \mid y_i > 0\}|$
- goal := min

Strategien bei *Seitenfehlern (page faults)* zum *Verdrängen* von Seiten: First-in-First-Out (FIFO, wie eine Queue), Last-in-First-Out (LIFO, wie ein Stack), Least-Recently-Used (LRU), Longest-Forward-Distance (LFD, offline-only!).

Satz Ein Online-Algorithmus für Paging der FIFO nutzt ist strikt-k-kompetitiv.

Beweis: Gruppiere Zeitschritte in *Phasen*. Phase 1 endet nach dem ersten Seitenfehler. Phase $P \geq 2$ endet nach $1 + (P-1)k$ Seitenfehlern, d.h. alle k Fehler endet eine Phase und beginnt eine neue.

In Phase 1 machen *Opt* und $Fifo$ je genau einen Fehler (warum?).

Sei s die Seite die den letzten Seitenfehler von Phase $P-1$ verursacht (d.h. sie kommt neu in den Cache, und wird dank FIFO als letztes in Phase P verdrängt werden).
$\Longrightarrow$ Zu Beginn von Phase P ist s im Cache von *Opt* und von $Fifo$.
$\Longrightarrow$ Es gibt $\leq k-1$ Seiten die im Cache von *Opt* sind, aber nicht in dem von $Fifo$.
Während Phase P macht $Fifo$ genau k Fehler.
$\Longrightarrow$ Während P muss *Opt* mindestens einen Seitenfehler machen.
$\Longrightarrow$ $Fifo$ ist k-kompetitiv.

LRU ist in der Theorie ebenfalls k-kompetitiv, in der Praxis allerdings tendenziell besser als FIFO.

[3] Zusätzliches, proaktives Entfernen bringt keinen Vorteil.