

BSDFの定義と反射率について

光のエネルギーとBSDFの定義と反射率について、引用している記事の内容から学習したことをまとめました。

光の性質二面性

光は波と粒子の二面性を持つ。

波として捉える場合は、光は電磁波の一種と考える。電磁波は電場と地場の変化によって作られる波であり、光のエネルギーを放出または伝達する。この現象を放射と呼ぶ。真空中を電場と磁場が垂直に絡まり合いながら進行していくものが光である。電場または磁場の山から山の長さが波長となる。太陽や電球などの光源から電磁波が発生し、大気中で散乱や吸収されながら進み、物体表面にぶつかって反射が起こる。光は媒質によって伝搬される。媒質となる物体を媒体と呼ぶ。

光は粒子としての側面も持つ。粒子的な側面を強調すると、光を光子と呼ぶ。金属に光を当てた時に、金属の表面から電子が飛び出す。この現象を光電効果と呼ぶ。飛び出した電子を光電子と呼ぶ。強い光を金属に当てても電子は飛び出さないが、波長の短い光を当てると電子が飛び出す。当てる光の波長を短くすると、飛び出す電子の数は変わらず、電子のエネルギーが大きくなる。光を強くしていくと、飛び出す電子の数が増え、電子のエネルギーは変化しない。

この現象は、光を波動として捉えたと説明ができず、光を粒子として捉えることで説明できる。つまり、光が粒子として金属に当たり、電子がはじき出されると考えるということである。

吸収と散乱

吸収とは、光が微小の粒子にぶつかった時に、直進する方向を変えることである。方向は媒体の材質に応じて変化する。

吸収とは光のエネルギーが物質との相互作用によって、他のエネルギーに変わることである。

光のエネルギー

光のもつ物理的なエネルギーは光学において放射量と呼ぶ。

人間は光の波長に応じて感度が異なり、波長のち外は色として知覚される。人間の眼を通した光の量を測光量といい、測光学(Photometry)の扱いになる。

光線

光線がある表面に当たると、以下のいずれかもしくは両方が発生する。

反射：光線が表面で反射し、異なる方向へ進行する。反射の法則に従えば反射角は入射角に等しくなる。

屈折：光線は表面で速度が代わり、屈折して一方の媒体から別の媒体へと通り抜ける。

記号

以降で使う、記号に関する表である。

記号	説明
x	位置
x'	入射光の位置
\vec{n}	x における法線（常に正規化されている）
$\vec{\omega}_o$	方向（表面から離れる方向）
$\vec{\omega}_i$	放射輝度（radiance）の入射方向（表面から離れる方向）
$d\vec{\omega}$	立体角の微分
L	放射輝度
$L(x, \vec{\omega})$	位置 x における $\vec{\omega}$ 方向の放射輝度
$L(x, \vec{\omega}')$	位置 x に $\vec{\omega}$ 方向から入射する放射輝度
L_i	放射する放射輝度
L_r	反射する放射輝度
L_t	透過する放射輝度
Φ	放射束
E	放射照度
f_r	双方向反射率分布関数（BRDF）
f_t	双方向透過率分布関数（BTDF）
ρ	反射率（reflectance）
Ω	方向を表す半球
η_i	入射側の屈折率
η_o	出射側の屈折率

放射束

光の基本単位は光子で、放射エネルギー Q は、光子が集まったエネルギーである．このエネルギーを単位時間あたりで表したものが放射束． ϕ で表記する．

$$\Phi = \frac{\Delta Q}{\Delta d} = \frac{dQ}{dt}$$

単位は、[W] である．

放射照度

放射照度 E は単位面積あたりの放射束．ある面積 A に到達する放射束を Φ とすると、放射照度 E は次のようになる．

$$E = \frac{\Phi}{A}$$

単位は、 $[\text{W}\cdot\text{m}^{-2}]$ である。ある位置 x に入ってくる放射照度は次のようになる。

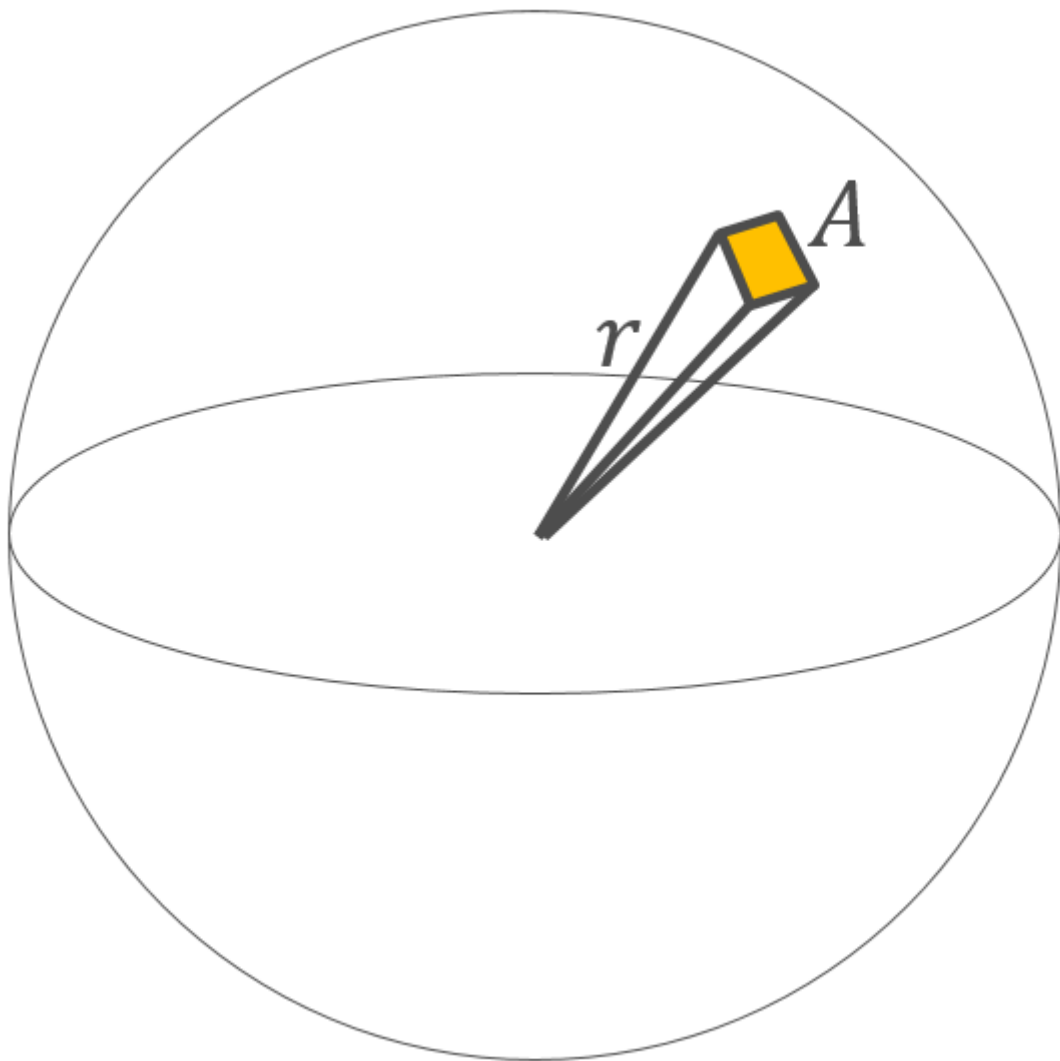
$$E(x) = \frac{d\Phi}{dA}$$

立体角

立体角は、方向と光線の角度的な大きさを表す。立体角の単位はステラジアン[sr]である。立体角は平面角を3次元に拡張したものと考えることができる。面角 θ は、円上に張られた弧の長さ l を円の半径 r で割ったもの。

$$\theta = \frac{l}{r}$$

これを3次元で考えると、半径 r の球面上の面積 A に対応する立体角 ω は $\omega = A/r^2$ となる。



[基礎からはじめる物理ベースレンダリング](#)より。

放射強度

放射強度 I は、単位立体角（ ω ）あたりの放射束である。

$$I(\vec{\omega}) = \frac{d\Phi}{d\vec{\omega}}$$

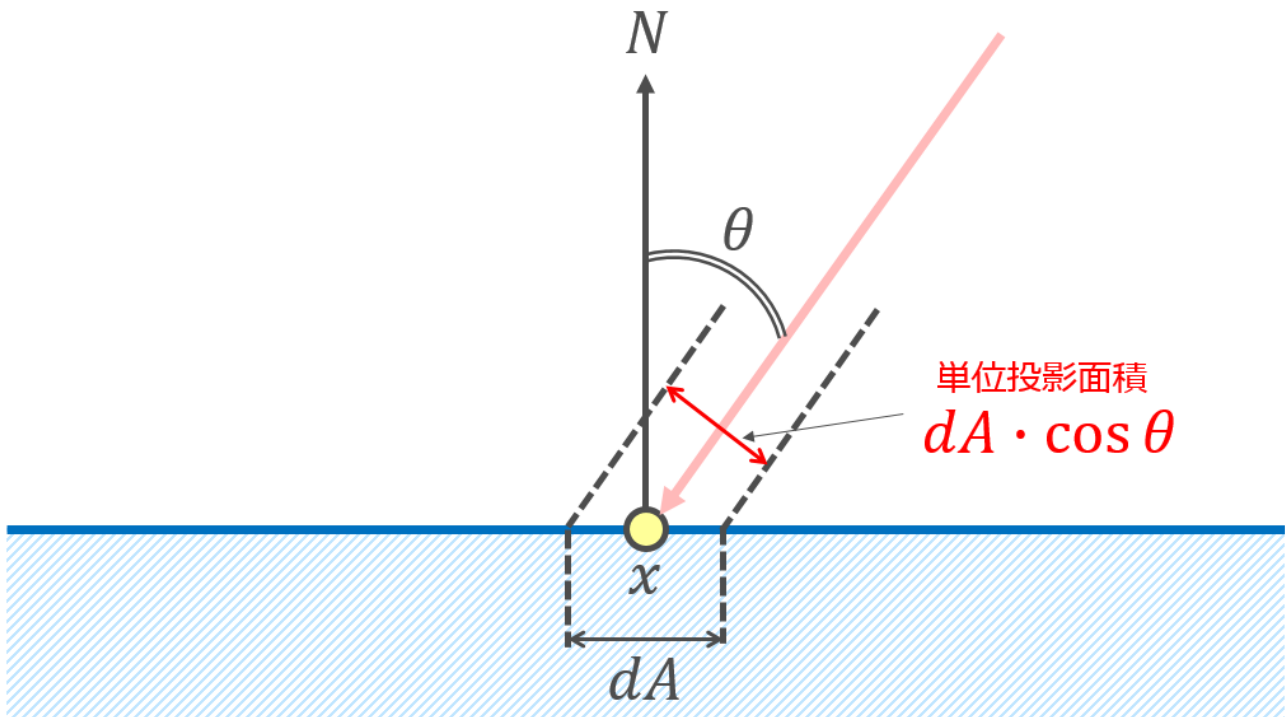
単位は、 $[\text{W} \cdot \text{sr}^{-1}]$ である。放射強度は一定の方向に、どの程度の放射束が放出されているのかを表す。

放射輝度

放射輝度 L は、単位立体角あたり、単位投影面積あたりの放射束である。単位投影面積 $\cos \theta dA$ は、光が進む方向に直交する面へ単位面積を投影したもので、放射輝度はこの単位投影面積で放射強度を割った値である。

$$L(x, \vec{\omega}_i) = \frac{d^2\Phi}{\cos \theta dA d\vec{\omega}_i}$$

単位は、 $[\text{W} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}]$ である。



基礎からはじめる物理ベースレンダリングより。

物体表面における入射してくる放射輝度がわかっているならば、半球面上のすべての方向 Ω と物体表面の領域 A で積分することにより、放射束を計算することができる。

$$\Phi = \int_A \int_{\Omega_i} L(x, \vec{\omega}_i) (\vec{\omega}_i \cdot \vec{n}) d\vec{\omega}_i dx$$

BRDF

物体表面における透過現象のモデル化として、双方向反射率分布関数（bidirectional reflectance distribution function：BRDF）が考えられる。

BRDF f_r は、反射される放射輝度と放射照度の関係を以下のように定義する。

$$f_r(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o) = \frac{dL_r(x, \vec{\omega}_o)}{dE_i(x, \vec{\omega}_i)} = \frac{dL_r(x, \vec{\omega}_o)}{L_i(x, \vec{\omega}_i)(\vec{\omega}_i \cdot \vec{n})d\vec{\omega}_i}$$

BRDFは、点 x に $\vec{\omega}_i$ 方向から入射した光のどれだけが、 $\vec{\omega}_o$ 方向に反射されるかを表す割合．単位は $[\text{sr}^{-1}]$ である．BRDFでは、入射方向を実際の光の向きとは逆向きに定義する．

物体表面上のある位置に入射する放射輝度がわかっていれば、それがあらゆる方向に反射していく放射輝度を計算することができる．これは、入射する放射輝度 L_i を積分することによって求められる．

$$L_r(x, \vec{\omega}_o) = \int_{\Omega} f_r(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o) dE(x, \vec{\omega}_i) = \int_{\Omega} f_r(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o) L_i(x, \vec{\omega}_i) (\vec{\omega}_i \cdot \vec{n}) d\vec{\omega}_i$$

BRDFの相反性

光が進む方向に依存しないというヘルムホルツ（Helmholtz）の相反性（reciprocity）の法則を満たしている必要がる．光が入射する方向と出射する方向が入れ替わってもBRDFの結果は変わらない．

$$f_r(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o) = f_r(x, \vec{\omega}_o, \vec{\omega}_i)$$

BRDFの エネルギー保存則

物体表面は、それが受けた以上の光を反射することはできず、以下の式を満たさなければならない．

$$\int_{\Omega} f_r(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o) (\vec{\omega}_i \cdot \vec{n}) d\vec{\omega}_i \leq 1, \forall \vec{\omega}_i \in \Omega$$

BTDF

物体表面における透過現象のモデル化としてBidirectional Transmittance Distribution Function (BTDF, 双向透過率分布関数)が考えられる．これはBRDFの透過版であり、透過する放射輝度 dL_t を用いて下記のように表される．

$$f_t(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o) = \frac{dL_t(x, \vec{\omega}_o)}{dE_i(\vec{x}, \vec{\omega}_i)}$$

単位は $[\text{sr}^{-1}]$ である．

このBRDFが相反性を持つのに対して、BTDFはヘルムホルツの相反性を持たない．屈折率の高い物質に光が半球上の全方向から入射することを考えた場合、それらの光は界面を挟んで反対側では半球よりも小さな範囲へと透過する．そのため明らかに光の密度、つまり放射輝度に変化が生じる．これより透過の場合には入射方向、出射方向を入れ替えても相反性が成り立たない．そこで、入射側と出射側の屈折率をそれぞれ η_i , η_o で表すとBTDFは次の関係を持ちます

$$\frac{f_t(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o)}{\eta_o^2} = \frac{f_t(x, \vec{\omega}_o, \vec{\omega}_i)}{\eta_i^2}$$

エネルギー保存則については、BRDFと同様である．

BSDF

BRDFとBTDF両方を合わせたものをBidirectional Scattering Distribution Function (BSDF, 双方向散乱分布関数)と呼ぶ．

$$f_s(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o) = f_r(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o) + f_t(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o)$$

反射率

反射率の定義は、物体表面に入射する放射束と反射される放射束の比で表す。反射率は0~1の値になる。

$$\rho(x) = \frac{d\phi_r(x)}{d\phi_i(x)}$$

BRDFを元にした反射率

ある微小面積 dA に立体角 $\vec{\omega}_i$ の範囲を通過して光が入射するとき入射する放射束 $d\phi_i$ は次の式で表すことができる。

$$d\phi_i = dA \cdot \int_{\omega_i} L_i(\vec{\omega}_i) |\vec{\omega}_i \cdot \vec{n}| d\vec{\omega}_i$$

反射する放射束のうち立体角 $\vec{\omega}_o$ を通過する量 $d\phi_r$ は次の式で表すことができる。

$$d\phi_r = dA \cdot \int_{\omega_o} L_r(\vec{\omega}_o) |\vec{\omega}_o \cdot \vec{n}| d\vec{\omega}_o$$

位置 x における入射する放射輝度 $L_i(\vec{\omega}_i)$ とBRDF $f_r(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o)$ を使うと、反射する放射束は下記のように表すことができる。

$$d\phi_r = dA \cdot \int_{\omega_o} \int_{\omega_i} f_r(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o) L_i(\vec{\omega}_i) |\vec{\omega}_i \cdot \vec{n}| d\vec{\omega}_i |\vec{\omega}_o \cdot \vec{n}| d\vec{\omega}_o$$

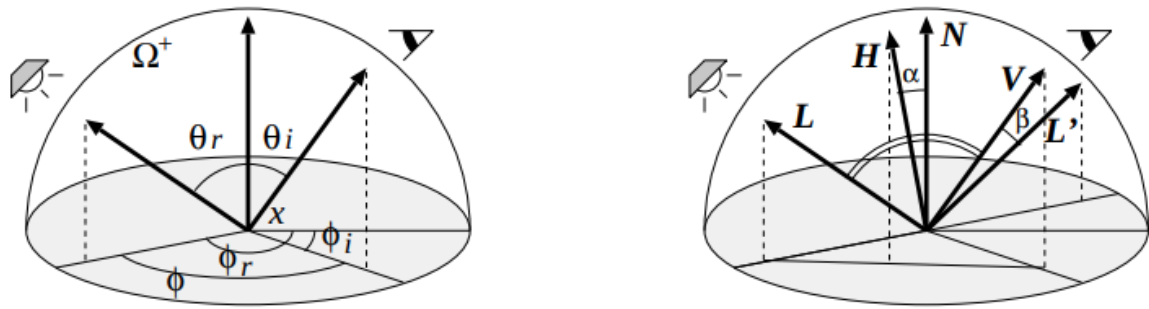
以上のことから、一般的な反射率は、立体角 $\vec{\omega}_i$ の範囲を通過した光が、物体における位置 x で反射し、立体角 $\vec{\omega}_o$ を通過するものとして、下記の式で表すことができる。

$$\rho(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o) = \frac{\int_{\omega_o} \int_{\omega_i} f_r(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o) L_i(\vec{\omega}_i) |\vec{\omega}_i \cdot \vec{n}| d\vec{\omega}_i |\vec{\omega}_o \cdot \vec{n}| d\vec{\omega}_o}{\int_{\omega_i} L_i(\vec{\omega}_i) |\vec{\omega}_i \cdot \vec{n}| d\vec{\omega}_i}$$

各種反射率に関しては、[双方向\(反射率|透過率|散乱\)分布関数 \(B\(R|T|S\)DF\)](#)にまとまっている。

角度パラメータ

なお、ここまでは、ベクトル $\vec{\omega}_i$ 、 $\vec{\omega}_o$ で方向を表した。しかし一般的には、4つのパラメータで表すことが多い。



(a) 照明・観測方向を表す角度パラメータ (b) 反射モデルに用いられるベクトル

図 1 反射を表現する際に用いられる角度パラメータとベクトル

反射・散乱の計測とモデル化より.

上記のように4つの角度パラメータにおける, 各波長のBRDFの値を表すフォーマットとして, [ASTM](#)のフォーマットがある.

引用/参考

[島津](#)

[基礎からはじめる物理ベースレンダリング](#)

[PBR guide](#)

[双方向\(反射率|透過率|散乱\)分布関数 \(B\(R\)T\(S\)DF\)](#)

[反射・散乱の計測とモデル化](#)

[Reflectance Data by Cornell Univ.](#)