Organización y Arquitectura de Computadoras
Tarea 3: Lógica Digital

Facultad de Ciencias, UNAM

José Ethan Ortega González: 316088327
Etzael Iván Sosa Hedding: 316259305

1. Da la dualidad de $x \cdot y = x + y$ y verifica la igualdad respecto a esta.

Solución:

Por el teorema de dualidad, el dual de $\cdot$ es $+$, por lo tanto, el dual de $x \cdot y$ es $x + y$. Un argumento similar se puede seguir para el dual de $x + y$.

2. Demuestra si la siguiente igualdad es valida: $x(\overline{x} + y) = xy$.

Solución:

La demostración es la siguiente:

$$\begin{aligned}
x(\overline{x} + y) &= (x\overline{x}) + xy && \text{Por Distributividad} \\
&= 0 + xy && \text{Por Complemento} \\
&= xy && \text{Por Identidad}
\end{aligned}$$

3. Demuestra si la siguiente igualdad es valida: $(x + y)(\overline{x} + z)(y + z) = (x + y)(\overline{x} + z)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
(x+y)(\overline{x}+z)(y+z) &= [(x+y)\overline{x} + (x+y)z](y+z)C && \\
&= [(x\overline{x} + y\overline{x}) + (xz + yz)](y+z) && \text{Por Distributividad} \\
&= [0 + y\overline{x} + xz + yz](y+z) && \text{Por Complemento} \\
&= (y\overline{x} + xz + yz)(y+z) && \text{Por Identidad} \\
&= y\overline{x}(y+z) + xz(y+z) + yz(y+z) && \text{Por Distributividad} \\
&= y\overline{x}y + y\overline{x}z + xzy + xzz + yzy + yzz && \text{Por Distributividad} \\
&= yy\overline{x} + y\overline{x}z + xzy + xzz + yyz + yzz && \text{Por Conmutatividad} \\
&= y\overline{x} + y\overline{x}z + xzy + xz + yz && \text{Por Idempotencia} \\
&= \overline{x}zy + xzy + y\overline{x} + xz + yz && \text{Por Conmutatividad} \\
&= (\overline{x} + x)zy + y\overline{x} + xz + yz && \text{Por Distributividad} \\
&= zy + y\overline{x} + xz + yz && \text{Por Complemento} \\
&= yz + y\overline{x} + xz + yz && \text{Por Conmutatividad} \\
&= yz + y\overline{x} + xz && \text{Por Idempotencia} \\
&= yz + y\overline{x} + xz + 0 && \text{Por Identidad} \\
&= yz + y\overline{x} + xz + (x\overline{x}) && \text{Por Complemento} \\
&= (\overline{x}x) + \overline{x}y + zx + zy && \text{Por Conmutatividad} \\
&= \overline{x}(x+y) + z(x+y) && \text{Por Distributividad} \\
&= (x+y)(\overline{x}+z) && \text{Por Distributividad}
\end{aligned}$$

4. Demuestra si la siguiente igualdad es valida: $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

Solución:
No es valida, mostremos un contraejemplo. Cuando $x = 0, y = 1$, por un lado tenemos lo siguiente:

$$\overline{x \cdot y} = \overline{0 \cdot 1} = \overline{0} = 1$$

Por el otro, tenemos lo siguiente:

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{0} \cdot \overline{1} = 1 \cdot 0 = 0$$

5. Verifica la siguiente igualdad usando los postulados de Huntington.

$$F(x, y, z) = x + x(\overline{x} + y) + \overline{x}y = x + y$$

Solución:
La solución es la siguiente:

$$\begin{aligned}
x + x(\overline{x} + y) + \overline{x}y = x + y &= x + x\overline{x} + xy + \overline{x}y = x + y && \text{P4a} \\
&= x + 0 + xy + \overline{x}y = x + y && \text{P5b} \\
&= x + xy + \overline{x}y = x + y && \text{P2a} \\
&= x + y(x + \overline{x}) = x + y && \text{P4a} \\
&= x + y \cdot 1 = x + y && \text{P5a} \\
&= x + y = x + y && \text{P2b}
\end{aligned}$$

6. Obtén los maxitérminos y mintérminos de la siguiente función.

$$F(x, y, z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot x + \overline{z} \cdot x + z \cdot x + y \cdot \overline{y} + \overline{z}$$

Solución:
La solución es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot x + \overline{z} \cdot x + z \cdot x + y \cdot \overline{y} + \overline{z} &= x \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{z} \cdot x + z \cdot x + y \cdot \overline{y} + \overline{z} && \text{Por Conmutatividad} \\
&= 0 \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{z} \cdot x + z \cdot x + 0 + \overline{z} && \text{Por Complemento} \\
&= \overline{z} \cdot x + z \cdot x + 0 + \overline{z} && \text{Por Aniquilación} \\
&= \overline{z} \cdot x + z \cdot x + \overline{z} && \text{Por Identidad} \\
&= x \cdot \overline{z} + x \cdot z + \overline{z} && \text{Por Conmutatividad} \\
&= x(\overline{z} + z) + \overline{z} && \text{Por Distributividad} \\
&= x \cdot 1 + \overline{z} && \text{Por Complemento} \\
&= x + \overline{z} && \text{Por Identidad}
\end{aligned}$$

La tabla de la expresión al reducirla es la siguiente:

x	z	$\overline{z}$	$x+\overline{z}$
0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- **Minitérminos:** Recordemos que los minitérminos se fijan en las filas que se evalúan a 1 y se niegan los 0. Así, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\overline{x}\cdot\overline{z}+x\cdot\overline{z}+x\cdot z &= \overline{z}\cdot\overline{x}+\overline{z}\cdot x+x\cdot z && \text{Por Conmutatividad}\\
&= \overline{z}(\overline{x}+x)+xz && \text{Por Distributividad}\\
&= \overline{z}\cdot 1+xz && \text{Por Complemento}\\
&= \overline{z}+xz
\end{aligned}$$

- **Maxitérminos:** Recordemos que los maxitérminos se fijan en las filas que se evalúan a 0 y se niegan los 1. Así, tenemos lo siguiente:

$$x+\overline{z}$$

7. Simplifica la siguiente función usando su tabla de verdad asociada.

$$F(x,y,z)=\overline{xyz}+\overline{xy}z+\overline{x}y\overline{z}+x\overline{yz}+\overline{x}yz+x\overline{y}z+xyz$$

Solución:

La tabla es la siguiente:

x	y	z	$\overline{xyz}$	$\overline{xy}z$	$\overline{x}y\overline{z}$	$x\overline{yz}$	$\overline{x}yz$	$x\overline{y}z$	xyz	F
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0

8. Expande la siguiente función y da su maxitérminos.

$$F(x,y,z)=(x+\overline{x}z)\cdot(\overline{y}+\overline{z})\cdot z$$

Solución:

Primero desarrollemos la función:

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= (x+\bar{x}z)(\bar{y}+\bar{z})z \\
&= (x+\bar{x}z)(\bar{y}z+\bar{z}z) && \text{(por Distributividad)} \\
&= (x+\bar{x}z)(\bar{y}z+0) && \text{(por Complemento)} \\
&= (x+\bar{x}z)\bar{y}z && \text{(por identidad)} \\
&= (x\bar{y}z+\bar{x}z\bar{y}z) && \text{(por Distributividad)} \\
&= (x\bar{y}z+\bar{x}\bar{y}zz) && \text{(por Conmutatividad)} \\
&= (x\bar{y}z+\bar{x}\bar{y}z) && \text{(por Idempotencia)} \\
&= (\bar{y}xz+\bar{y}\bar{x}z) && \text{(por Conmutatividad)} \\
&= \bar{y}(xz+\bar{x}z) && \text{(por Distributividad)} \\
&= \bar{y}(x+\bar{x})z && \text{(por Distributividad)} \\
&= \bar{y}(1)z && \text{(por Complemento)} \\
&= \bar{y}z && \text{(por Identidad)}
\end{aligned}
$$

Ahora veamos los Maxitérminos. Como ya dijimos, nos debemos fijar en las filas de la tabla de verdad que se evalúan a 0 y negar los 1 que aparezcan en cada variable. Notemos que no necesitamos ver la tabla para ver que hay 3 filas que se evalúan a 0 (pues es una conjunción). En particular, las filas evaluadas a 0 son cuando $\bar{y}$ se evalúa a 0 y cuando $\bar{y}$ se evalúa a 1 y z se evalúa a 0. Entonces tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\bar{y}\bar{z}+\bar{y}z+yz &= \bar{y}(\bar{z}+z)+yz && \text{(por Distributividad)} \\
&= \bar{y}(1)+yz && \text{(por Complemento)} \\
&= \bar{y}+yz && \text{(por Identidad)}
\end{aligned}
$$

9. Utilizando Mapas de Karnaugh simplifica la función.

$$F(x_0,x_1,x_2,x_3) = \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_2x_3 + x_0\overline{x_1}x_2x_3 + x_0x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_0}x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_0x_1x_2x_3$$

Solución:

El mapa es el siguiente:

x_0x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	0	0	0
11	1	0	1	0
10	0	0	1	0

Del mapa de Karnaugh, obtenemos la siguiente función:

$$F(x_0,x_1,x_2,x_3) = \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_3 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_0x_2x_3$$

10. Para realizar una Mapa de Karnaugh con más de 5 variables se menciono que existe más de una forma de representarlo.

Investiga ambos métodos y utiliza el que más se te acomode para reducir la siguiente función.

$$
\begin{aligned}
F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = {} & \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4 \\
& + x_0x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_0}x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + x_0x_1x_2x_3x_4
\end{aligned}
$$

11. A lo largo del capitulo abordamos los postulados de Huntington y sus demostraciones, pero existe un principio llamado Principio de Dualidad, el cual nos permite formalizar que a toda relación o ley lógica le corresponderá su dual, formada mediante el intercambio de los operadores unión (suma lógica) con los de intersección (producto lógico), y de los 1 con los 0.

Con esta definición indica cual es la expresión dual de:

(a) $x \cdot 0 = 0$

(b) $x(x + y) = x$

Solución:

- Por el Principio de Dualidad, la expresión es: $x + 1 = 1$
- Por el Principio de Dualidad, la expresión es: $x + (xy) = x$