tp-ima203-var-barriol

January 23, 2024

[149]: # -*- coding: utf-8 -*-

```
import numpy as np
       import platform
       import tempfile
       import os
       import matplotlib.pyplot as plt
       from scipy import ndimage as ndi
       # necessite scikit-image
       from skimage import io as skio
       # POUR LA MORPHO
       #from skimage.morphology import watershed
       from skimage.feature import peak_local_max
[150]: #%%
       # VOUS DEVEZ FIXER LES DEUX VARIABLES SUIVANTES:
       colaboratory=False #mettre True si vous utilisez google colab
       notebook=False  # mettre Trus si vous utilisez un notebook local
       # les seuls couples possibles sont (False, False) = travailler localement sans
       \neg notebook
       # (False, True): jupyternotebook local
       # (True, False): google colab
       assert (not (colaboratory and notebook)), "Erreur"
       if colaboratory: #Si google colab on installe certaines librairies
           !pip install soundfile
           from IPython.display import Audio
           !pip install bokeh
           from bokeh.plotting import figure, output_file, show
           from bokeh.plotting import show as showbokeh
           from bokeh.io import output_notebook
           output_notebook()
           !wget https://perso.telecom-paristech.fr/ladjal/donnees_IMA203.tgz
           !tar xvzf donnees_IMA203.tgz
```

```
os.chdir('donnees_IMA203')

if notebook: # si notebook normal dans une machine locale vous devez installer

→bokeh vous-meme

from bokeh.plotting import figure, output_file, show
from bokeh.plotting import show as showbokeh
from bokeh.io import output_notebook
output_notebook()
```

```
[151]: #%% fonction pour voir une image
       import tempfile
       import numpy as np
       import IPython
       import matplotlib.pyplot as plt
       def viewimage(im, normalize=True,titre='',displayfilename=False):
           imin=im.copy().astype(np.float32)
           if normalize:
               imin-=imin.min()
           if imin.max()>0:
               imin/=imin.max()
           else:
               imin=imin.clip(0,255)/255
           imin=(imin*255).astype(np.uint8)
           filename=tempfile.mktemp(titre+'.png')
           if displayfilename:
               print (filename)
           plt.imsave(filename, imin, cmap='gray')
           IPython.display.display(IPython.display.Image(filename))
```

```
return out
def grady(I):
    """ Calcule le gradient en y de l'image I, avec condition de vonnewman au_{\sqcup}
 \hookrightarrow bord
     i.e. l'image est symétrisée et le gradient en bas est nul"""
    (m,n)=I.shape
    M=np.zeros((m,n))
    M[:-1,:]=-I[:-1,:]+I[1:,:]
    M[-1,:]=np.zeros((n,))
    return M
def gradx(I):
    """ Calcule le gradient en y de l'image I, avec condition de vonnewman au_{\sqcup}
     i.e. l'image est symétrisée et le gradient a droite est nul"""
    (m,n)=I.shape
    M=np.zeros((m,n))
    M[:,:-1] = -I[:,:-1] + I[:,1:]
    M[:,-1]=np.zeros((m,))
    return M
def div(px,py):
    """calcule la divergence d'un champ de gradient"""
    """ div= - (grad) ^*, i.e. div est la transposee de l'operateur gradient"""
    (m,n)=px.shape
    assert px.shape==py.shape , " px et py n'ont pas la meme taille dans div"
    Mx=np.zeros((m,n))
    My=np.zeros((m,n))
    My[1:-1,:]=py[1:-1,:]-py[:-2,:]
    My[0,:]=py[0,:]
    My[-1,:]=-py[-2,:]
    Mx[:,1:-1]=px[:,1:-1]-px[:,:-2]
    Mx[:,0]=px[:,0]
    Mx[:,-1] = -px[:,-2]
    return Mx+My
def gradient_TV(v,u,lamb):
    """ calcule le gradient de la fonctionnelle E2 du TP"""
# on n'utilise pas gradx et grady car pour minimiser
# la fonctionnelle E2 par descente de gradient nous avons choisi
# de prendre les memes conditions au bords que pour la resolution quadratique
    (sy,sx)=v.shape
```

```
Kx=np.zeros((sy,sx))
   Ky=np.zeros((sy,sx))
   Kx[0,0]=1
   Kx[0,1]=-1
   Ky[0,0]=1
   Ky[1,0]=-1
   Kxback=np.zeros((sy,sx))
   Kyback=np.zeros((sy,sx))
   Kxback[0,0]=-1
   Kxback[0,-1]=1
   Kyback[0,0]=-1
   Kyback[-1,0]=1
   Dx=appfiltre(u,Kx)
   Dy=appfiltre(u,Ky)
   ng=(Dx**2+Dy**2)**0.5+1e-5
   div=appfiltre(Dx/ng,Kxback)+appfiltre(Dy/ng,Kyback)
   return 2*(u-v)-lamb*div
def gradient_TV_nonperiodique(v,u,lamb):
     """ calcule le gradient de la fonctionnelle E2 du TP"""
     gx=gradx(u)
     gy=grady(u)
    ng=((gx**2)+(gy**2))**0.5+1e-5
     dive=div(gx/ng,gy/ng)
     return 2*(u-v)-lamb*dive
def resoud_quad_fourier(K,V):
    """trouve une image im qui minimise sum i // K i conv im - V i//~2
     ou les K_i et les Vi sont des filtres et des images respectivement """
   n=len(K)
   assert len(K) == len(V), "probleme de nombre de composantes dans⊔
 →resoud_quad"
    (sy,sx)=K[0].shape
   numer=np.vectorize(np.complex)(np.zeros((sy,sx)))
   denom=np.vectorize(np.complex)(np.zeros((sy,sx)))
   fft2=np.fft.fft2
   ifft2=np.fft.ifft2
   for k in range(n):
       fV=fft2(V[k])
       fK=fft2(K[k])
        #print('type de fV',fV.dtype,' type de fK',fK.dtype)
       numer+=np.conj(fK)*fV
        denom+=abs(fK)**2
   return np.real(ifft2(numer/denom))
```

```
def minimisation_quadratique(v,lamb):
    """ minimise la fonctionnelle E1 du TP"""
    (sy,sx)=v.shape
    Kx=np.zeros((sy,sx))
    Ky=np.zeros((sy,sx))
    Kx[0,0]=1
    Kx[0,1]=-1
    Ky[0,0]=1
    Ky[1,0]=-1
    delta=np.zeros((sy,sx))
    delta[0,0]=1.0
    s=lamb**0.5
    K=(s*Kx,s*Ky,delta)
    V=(np.zeros((sy,sx)),np.zeros((sy,sx)),v)
    return resoud_quad_fourier(K,V)
def norme_VT(I):
    """ renvoie la norme de variation totale de I"""
    (sy,sx)=I.shape
    Kx=np.zeros((sy,sx))
    Ky=np.zeros((sy,sx))
    Kx[0,0]=1
    Kx[0,1]=-1
    Ky[0,0]=1
    Ky[1,0]=-1
    Dx=appfiltre(I,Kx)
    Dy=appfiltre(I,Ky)
    ng=(Dx**2+Dy**2)**0.5
    return ng.sum()
def norme_VT_nonperiodique(u):
    gx=gradx(u)
    gy=grady(u)
    ng=((gx**2)+(gy**2))**0.5
    return ng.sum()
def norm2(x):
    return ((x**2).sum())**0.5
def E2_nonperiodique(u,v,lamb): # renvoie l'énergie E2
    return lamb*norme_VT_nonperiodique(u)+norm2(u-v)**2
def minimise_TV_gradient(v,lamb,pas,nbpas):
    """ minimise E2 par descente de gradient a pas constant """
    u=np.zeros(v.shape)
```

```
Energ=np.zeros(nbpas)
    for k in range(nbpas):
        #print(k)
        Energ[k]=E2_nonperiodique(u,v,lamb)
        u=u-pas*gradient_TV_nonperiodique(v,u,lamb)
    return (u, Energ)
def projection(I,a,itmax):
    """ calcule la projection de I sur G_a
        G_a est le sous-gradient de TV en zero
        Comme vu dans le poly cette projection permet de resoudre le probleme
        de debruitage TV (E2)"""
    # ici on utilise les conditions au bord de von neuman
    \# i.e. on utilise gradx et grady definis plus haut et non pas une\sqcup
 ⇔convolution circulaire
    (m,n)=I.shape
    t=0.1249
    px=np.zeros((m,n))
    py=np.zeros((m,n))
    un=np.ones((m,n))
    for it in range(itmax):
        N=div(px,py)-I/a
        Gx=gradx(N)
        Gy=grady(N)
        G = (Gx**2+Gy**2)**0.5
        pxnew=(px+t*Gx)/(un+t*G)
        pynew=(py+t*Gy)/(un+t*G)
        px=pxnew
       py=pynew
    # la projection est la divergence du champ px, py
    P=a*div(px,py)
    return P
def vartotale_Chambolle(v,lamb,itmax=100):
    """ Trouve une image qui minimise lamb*TV(I)+||I-v||^2
    en utilisant la projection dur G_a"""
    (m,n)=v.shape
    P=projection(v,lamb/2,itmax)
    return v-P
def imread(fichier):
    return np.float32(skio.imread(fichier))
```

1 Partie 1 : Débruitage par régularisation quadratique

Q1 : On souhaite minimiser $E_1(f) = \|f - v\|^2 + \lambda \|\nabla f\|^2 = \|\delta * f - v\|^2 + \|\sqrt{\lambda} K_x * f - 0\|^2 + \|\sqrt{\lambda} K_y * f - 0\|^2 = \sum_{i=1}^3 \|K_i * f - v_i\|^2$

Avec
$$K_1=\delta,\,K_2=\sqrt{\lambda}K_x,\,K_3=\sqrt{\lambda}K_y,\,v_1=v$$
 et $v_2=v_3=0$

Pour réaliser cette minimisation, on utilise la fonction resoud_quad_fourier avec les paramètres que l'on vient de donner.

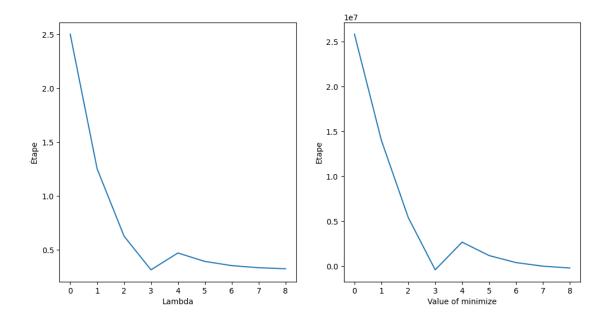
Q2 : Lorsque λ est très grand, le terme de régularisation $\lambda \|\nabla f\|^2$ devient dominant par rapport au terme d'attache aux données $\|f-v\|^2$. Cela a pour effet de rendre l'image résultante f plus lisse, car la régularité spatiale est fortement privilégiée. En revanche, lorsque λ est très petit, l'impact de la régularisation diminue, et l'image résultante f peut conserver plus de détails, mais avec un risque accru de surajustement au bruit.

Q3:

```
[154]: def minimize(u_t, v, lambda_):
         terme1 = np.linalg.norm(u_t - v)**2
         u_min = minimisation_quadratique(v, lambda_)
         terme2 = np.linalg.norm(u_min - v)**2
         return terme2 - terme1
       def dichotomie(f, v, lambdas, tolerance=0.01):
         lambda h = lambdas[1]
         lambda_l = lambdas[0]
         lambdas ms = []
         min = []
         while lambda_h - lambda_l > tolerance:
           lambda_m = (lambda_h + lambda_1)/2
           mid = minimize(f, v, lambda_m)
           lambdas_ms.append(lambda_m)
           min.append(mid)
           if minimize(f, v, lambda_l) * minimize(f, v, lambda_m) < 0:</pre>
               lambda_h = lambda_m
           else:
               lambda l = lambda m
         return lambdas_ms, min, len(lambdas_ms), lambdas_ms[-1]
```

```
lena = imread('lena.tif')
sigma = 5
v = degrade_image(lena, sigma)
lambdas = [0, 5]
lambdas_ms, mins, nb_iteration, lambd = dichotomie(lena, v, lambdas)
print('Nb d iterations :', nb_iteration)
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(lambdas_ms)
plt.xlabel('Lambda')
plt.ylabel('Étape')
plt.subplot(1,2,2)
plt.plot(mins)
plt.xlabel('Value of minimize')
plt.ylabel('Etape')
plt.show()
```

```
<ipython-input-152-e3058ab021c2>:94: DeprecationWarning: `np.complex` is a
deprecated alias for the builtin `complex`. To silence this warning, use
`complex` by itself. Doing this will not modify any behavior and is safe. If you
specifically wanted the numpy scalar type, use `np.complex128` here.
Deprecated in NumPy 1.20; for more details and guidance:
https://numpy.org/devdocs/release/1.20.0-notes.html#deprecations
   numer=np.vectorize(np.complex)(np.zeros((sy,sx)))
<ipython-input-152-e3058ab021c2>:95: DeprecationWarning: `np.complex` is a
deprecated alias for the builtin `complex`. To silence this warning, use
`complex` by itself. Doing this will not modify any behavior and is safe. If you
specifically wanted the numpy scalar type, use `np.complex128` here.
Deprecated in NumPy 1.20; for more details and guidance:
https://numpy.org/devdocs/release/1.20.0-notes.html#deprecations
   denom=np.vectorize(np.complex)(np.zeros((sy,sx)))
```



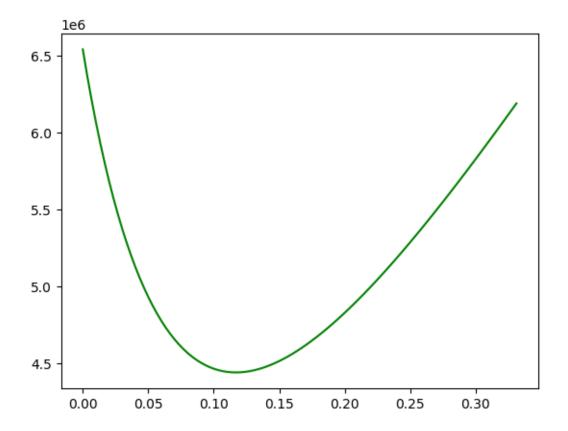
Q4:

```
[155]: u = lena
       sigma = 5
       v = degrade_image(u, sigma)
       print(lambd)
       def func(u, v, lambda_):
         return np.linalg.norm(u - minimisation_quadratique(v, lambda_))**2
       lambdas = np.linspace(0,lamb_optimal,100)
       f_list = [func(u, v, lambdas[i]) for i in range(len(lambdas))]
       print(f_list)
       plt.plot(lambdas, f_list, label='Distance au carré entre u et u tilde', u
        ⇔color='g')
       plt.show()
       i_min = np.argmin(f_list)
       min = lambdas[i_min]
       print('Lambda minimisateur : ', min)
       viewimage(u, titre="Image originale")
       viewimage(v, titre="Image degradée")
       viewimage(minimisation_quadratique(v, min), titre="Minimisation")
```

0.322265625

<ipython-input-152-e3058ab021c2>:94: DeprecationWarning: `np.complex` is a deprecated alias for the builtin `complex`. To silence this warning, use `complex` by itself. Doing this will not modify any behavior and is safe. If you specifically wanted the numpy scalar type, use `np.complex128` here. Deprecated in NumPy 1.20; for more details and guidance: https://numpy.org/devdocs/release/1.20.0-notes.html#deprecations numer=np.vectorize(np.complex)(np.zeros((sy,sx))) <ipython-input-152-e3058ab021c2>:95: DeprecationWarning: `np.complex` is a deprecated alias for the builtin `complex`. To silence this warning, use `complex` by itself. Doing this will not modify any behavior and is safe. If you specifically wanted the numpy scalar type, use `np.complex128` here. Deprecated in NumPy 1.20; for more details and guidance: https://numpy.org/devdocs/release/1.20.0-notes.html#deprecations denom=np.vectorize(np.complex)(np.zeros((sy,sx))) [6541505.932896514, 6372377.48116978, 6214836.2885406995, 6068066.495098841, 5931326.027835457, 5803938.363571754, 5685285.383784251, 5574801.154521877, 5471966.493315725, 5376304.2082202975, 5287374.913030582, 5204773.338177201, 5128125.069497284, 5057083.657553546, 4991328.048852182, 4930560.297529829, 4874503.522108681, 4822900.076973295, 4775509.912474013, 4732109.101151367, 4692488.510615578, 4656452.606198239, 4623818.36869459, 4594414.314396332, 4568079.606228187, 4544663.246187599, 4524023.3404822275, 4506026.429792278, 4490546.8779791305, 4477466.313338382, 4466673.117171111, 4458061.955036986, 4451533.346567656, 4446993.2701708125, 4444352.799351031, 4443527.767722254, 4444438.460093664, 4447009.327281846, 4451168.722541765, 4456848.657721484, 4463984.577434125, 4472515.149707909, 4482382.071724413, 4493529.8893881915, 4505905.829589579, 4519459.644128897, 4534143.464365288, 4549911.665738903, 4566720.74139172, 4584529.184181245, 4603297.376443535, 4622987.486917822, 4643563.374295569, 4664990.49690278, 4687235.828065102, 4710267.77674348, 4734056.113061441, 4758571.898376293, 4783787.419574528, 4809676.127297018, 4836212.577823177, 4863372.378364083, 4891132.135534162, 4919469.406788566, 4948362.654629562, 4977791.203400034, 5007735.19849578, 5038175.567840493, 5069093.9854791425, 5100472.837155381, 5132295.187748681, 5164544.750455489, 5197205.85760692, 5230263.433023036, 5263702.965810547, 5297510.485517374, 5331672.53856315, 5366176.165870458, 5401008.88162627, 5436158.653108246,

5471613.881514231, 5507363.383737885, 5543396.375036627, 5579702.452541784, 5616271.579563975, 5653094.07064962, 5690160.577347375, 5727462.07464575, 5764989.848045587, 5802735.481233288, 5840690.844322852, 5878848.082636471, 5917199.605995523, 5955738.078495315, 5994456.408738431, 6033347.740503266, 6072405.443825401, 6111623.106470951, 6150994.525782135, 6190513.700876457]



Lambda minimisateur : 0.11707460037385574







2 Partie 2 : Débruitage par variation totale

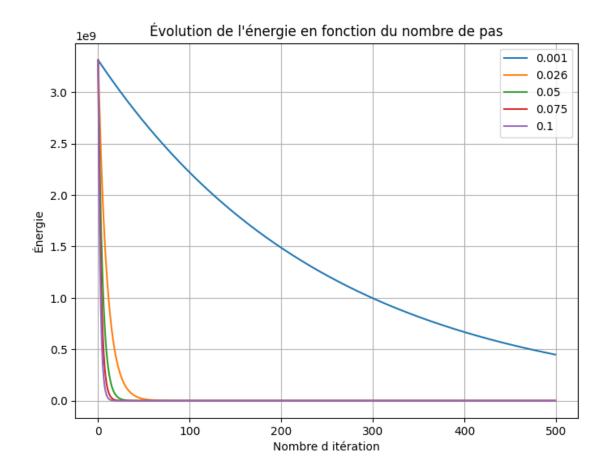
Q1:

```
[156]: lambda_ = min
    pas_list = np.linspace(1e-3, 1e-1, 5)

Energ_tab = []
    u_tab = []
    for i, pas in enumerate(pas_list):
        u, Energ = minimise_TV_gradient(v, lambda_, pas, 500)
        print(Energ.size)
        Energ_tab.append(Energ)
        u_tab.append(u)

for i,pas in enumerate(pas_list):
```

```
print('Pas', pas)
        print('Energie', Energ_tab[i][499])
       #print(len(Energ_tab))
       #print(len(u_tab))
      500
      500
      500
      500
      500
      Pas 0.001
      Energie 449376561.89001703
      Pas 0.0257500000000000002
      Energie 445736.34135187184
      Pas 0.0505
      Energie 445736.3484944708
      Pas 0.07525000000000001
      Energie 445736.3535106384
      Pas 0.1
      Energie 445736.37367790955
[157]: plt.figure(figsize=(8, 6))
       for i in range(len(pas_list)):
        plt.plot(Energ_tab[i], linestyle='-', label=round(pas_list[i], 3))
       plt.xlabel('Nombre d itération')
       plt.ylabel('Energie')
       plt.title('Évolution de l\'énergie en fonction du nombre de pas')
       plt.legend(loc='upper right')
       plt.grid(True)
       plt.show()
```



Asymptotiquement, on devrait obtenir une énergie similaire. On remarque que pour des pas supérieurs à 0.001 la convergence est plutôt rapide avec une énergie finale environ égale à 446000. Cependant, pour un pas de 0.001 la convergence est très lente avec une energie finale d'environ $0.5.10^{\circ}-9$

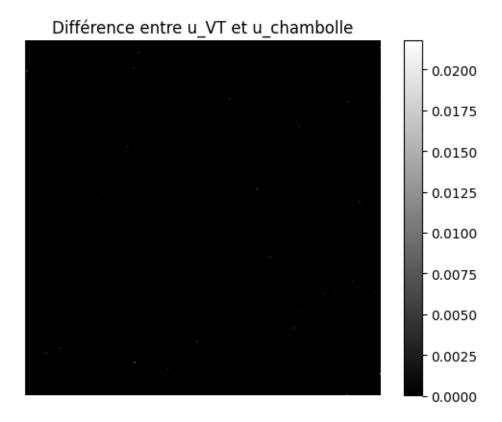
```
[158]: # Affichage des images u obtenues
plt.figure(figsize=(12, 8))
for i, u in enumerate(u_tab):
    plt.subplot(2, 5, i + 1)
    plt.imshow(u, cmap='gray')
    plt.title(f'Pas = {round(pas_list[i], 3)}')
    plt.axis('off')
plt.tight_layout()
plt.show()
```



Q2:

```
[159]: import time
       lambda_ = min
       pas_grad = 0.1
       start_time = time.time()
       u_chambolle = vartotale_Chambolle(v, lambda_, 500)
       chambolle_execution_time = time.time() - start_time
       # Mesurez le temps d'exécution de minimise_TV_gradient
       start_time = time.time()
       u_VT, E = minimise_TV_gradient(v, lambda_, pas_grad, 500)
       gradient_execution_time = time.time() - start_time
       # Visualisez la différence entre les résultats
       diff_image = np.abs(u_VT - u_chambolle)
       # Affichez les temps d'exécution
       print(f"Temps d'exécution de vartotale_Chambolle : {chambolle_execution_time}_
        ⇔secondes")
       print(f"Temps d'exécution de minimise_TV_gradient : {gradient_execution_time}_u
       ⇔secondes")
       # Affichez la différence entre les résultats
       plt.imshow(diff_image, cmap='gray')
       plt.title('Différence entre u_VT et u_chambolle')
       plt.colorbar()
       plt.axis('off')
       plt.show()
```

Temps d'exécution de vartotale_Chambolle : 4.808552503585815 secondes Temps d'exécution de minimise_TV_gradient : 6.605950117111206 secondes



Il n'y a quasiment pas de différence entre les deux méthodes lorsqu'on compare les images obtenues. Cependant, une différence importante concerne les temps d'exécution. On constate que la méthode de Chambolle est beaucoup plus rapide.

3 Partie 3 : Comparaison

```
[160]: u = lena
    sigma = 25
    v = degrade_image(u, sigma)

# Pour E1 :

lambdas = np.linspace(0.1,5,200)
    f_list = [func(u, v, lambdas[i]) for i in range(len(lambdas))]
    i_min = np.argmin(f_list)
    min = lambdas[i_min]

print('Lambda minimisateur pour la minimisation quadratique : ', min)

# Pour E2 :
```

```
def func2(u, v, lambda_):
    return np.linalg.norm(u - vartotale_Chambolle(v, lambda_))**2

lambdas2 = np.linspace(0.1,200,100)
f_listc = [func2(u, v, lambdas2[i]) for i in range(len(lambdas2))]
i_minc = np.argmin(f_listc)
minc = lambdas2[i_minc]

print('Lambda minimisateur pour la projection de Chambrolle : ', minc)
```

<ipython-input-152-e3058ab021c2>:94: DeprecationWarning: `np.complex` is a
deprecated alias for the builtin `complex`. To silence this warning, use
`complex` by itself. Doing this will not modify any behavior and is safe. If you
specifically wanted the numpy scalar type, use `np.complex128` here.
Deprecated in NumPy 1.20; for more details and guidance:
https://numpy.org/devdocs/release/1.20.0-notes.html#deprecations
 numer=np.vectorize(np.complex)(np.zeros((sy,sx)))
<ipython-input-152-e3058ab021c2>:95: DeprecationWarning: `np.complex` is a
deprecated alias for the builtin `complex`. To silence this warning, use
`complex` by itself. Doing this will not modify any behavior and is safe. If you
specifically wanted the numpy scalar type, use `np.complex128` here.
Deprecated in NumPy 1.20; for more details and guidance:
https://numpy.org/devdocs/release/1.20.0-notes.html#deprecations
 denom=np.vectorize(np.complex)(np.zeros((sy,sx)))

Lambda minimisateur pour la minimisation quadratique : 1.1587939698492464 Lambda minimisateur pour la projection de Chambrolle : 40.48383838383838

On trouve $\lambda_q=1.15$ pour la minimisation quadratique et \$ _c=40.5 \$ pour la minimisation avec Chambolle

```
[163]: # Débruitage avec la méthode de minimisation quadratique
u_quad = minimisation_quadratique(v, min)

# Débruitage avec la méthode de régularisation TV de Chambolle
u_tv_chambolle = vartotale_Chambolle(v, minc)

# Affichage des images débruitées pour la comparaison
plt.figure(figsize=(10, 5))

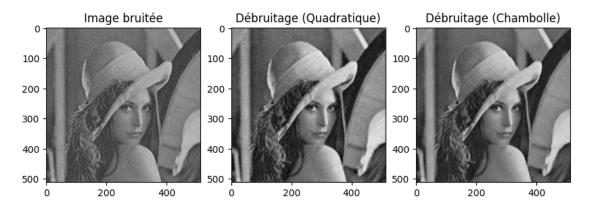
plt.subplot(1, 3, 1)
plt.imshow(v, cmap='gray')
plt.title('Image bruitée')

plt.subplot(1, 3, 2)
plt.imshow(u_quad, cmap='gray')
plt.title('Débruitage (Quadratique)')
```

```
plt.subplot(1, 3, 3)
plt.imshow(u_tv_chambolle, cmap='gray')
plt.title('Débruitage (Chambolle)')

plt.show()
```

<ipython-input-152-e3058ab021c2>:94: DeprecationWarning: `np.complex` is a
deprecated alias for the builtin `complex`. To silence this warning, use
`complex` by itself. Doing this will not modify any behavior and is safe. If you
specifically wanted the numpy scalar type, use `np.complex128` here.
Deprecated in NumPy 1.20; for more details and guidance:
https://numpy.org/devdocs/release/1.20.0-notes.html#deprecations
 numer=np.vectorize(np.complex)(np.zeros((sy,sx)))
<ipython-input-152-e3058ab021c2>:95: DeprecationWarning: `np.complex` is a
deprecated alias for the builtin `complex`. To silence this warning, use
`complex` by itself. Doing this will not modify any behavior and is safe. If you
specifically wanted the numpy scalar type, use `np.complex128` here.
Deprecated in NumPy 1.20; for more details and guidance:
https://numpy.org/devdocs/release/1.20.0-notes.html#deprecations
 denom=np.vectorize(np.complex)(np.zeros((sy,sx)))



La projection de Chambolle offre des résultats plus nets. Cette méthode de débruitage se concentre sur la réduction du bruit tout en préservant les détails de l'image, produisant ainsi des images débruitées plus claires et nettes.