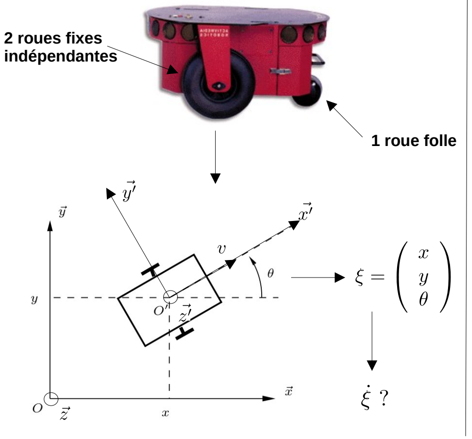
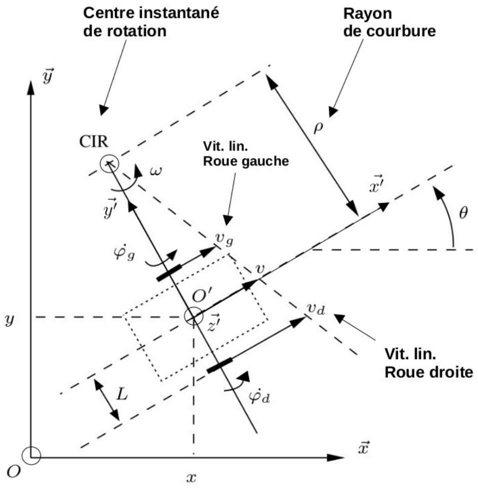
Modélisation des robots mobiles

De la roue au robot mobile

- Modélisation du robot unicycle





Modélisation des robots mobiles

De la roue au robot mobile

- Modélisation du robot unicycle

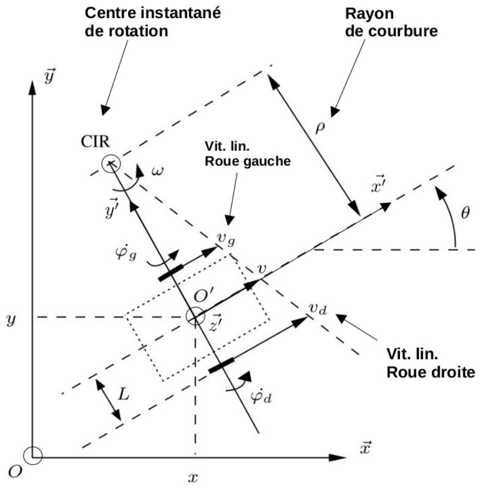
$$\left\{ \begin{array}{lclcl} v_d & = & \multirow{2}{*}{} r\dot\varphi_d & = & (\rho + L)\omega \\ v_g & = & r\dot\varphi_g & = & (\rho - L)\omega \end{array} \right. \quad \overset{\text{RSG}}{\boxed{\begin{array}{c} r\dot\varphi_d \\ r\dot\varphi_g \end{array}}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{r}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\varphi_d \\ \dot\varphi_g \end{pmatrix}$$

Remarque :

$\dot\varphi_d = \dot\varphi_g$ → **Ligne droite**

$\dot\varphi_d = -\dot\varphi_g$ → **Rotation sur place**



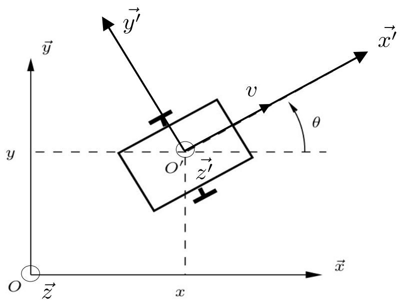
Modélisation des robots mobiles

De la roue au robot mobile

- Modélisation du robot unicycle
  - Modèle cinématique

$$\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot\theta \end{pmatrix} = \frac{r}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\varphi_d \\ \dot\varphi_g \end{pmatrix}$$



NB :

- Modèle de la forme : $\dot\xi = B(\xi)U(t)$ avec $U(t) = (v \quad \omega)^T$ ou $U(t) = (\dot\varphi_d \quad \dot\varphi_g)^T$
- Sous-actionnement : $dim(U) < dim(\xi)$

Modélisation des robots mobiles

De la roue au robot mobile

- Modélisation du robot unicycle
  - Non holonomie

$$\vec v_{Q_G/R} = \vec v_{O'/R} + \vec\Omega_{R'/R} \times \overrightarrow{O'Q_G} = \vec 0$$
$$\vec v_{Q_D/R} = \vec v_{O'/R} + \vec\Omega_{R'/R} \times \overrightarrow{O'Q_D} = \vec 0$$

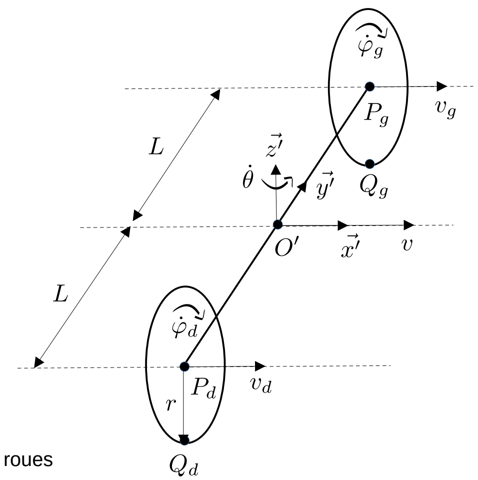
↓

Contraintes sur le mouvement exprimées dans R'

$$\vec v^{(R')}_{Q_G/R} = \begin{pmatrix} v - L\omega - r\dot\varphi_g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{3\times1}$$

$$\vec v^{(R')}_{Q_D/R} = \begin{pmatrix} v + L\omega - r\dot\varphi_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{3\times1}$$

→ Pas de déplacement instantané selon l'axe des roues
→ Vitesse longitudinale seulement



Modélisation des robots mobiles

De la roue au robot mobile

- Modélisation du robot unicycle
  - Non holonomie

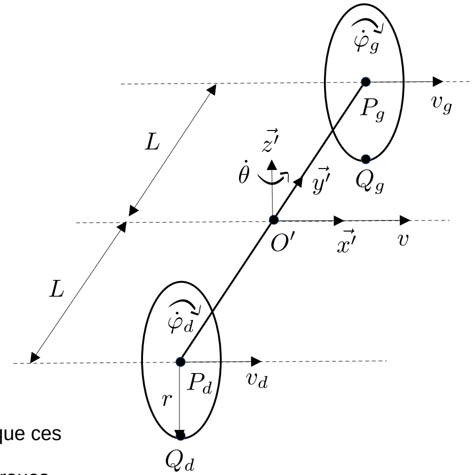
$$\vec{v}_{Q_G/R} = \vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \times \overrightarrow{O'Q_G} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_{Q_D/R} = \vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \times \overrightarrow{O'Q_D} = \vec{0}$$

Contraintes sur le mouvement exprimées dans R

$$\begin{cases} \dot{x} + L\omega\cos\theta - r\dot{\varphi}_d\cos\theta = 0 \\ \dot{y} + L\omega\sin\theta - r\dot{\varphi}_d\sin\theta = 0 \\ \dot{x} - L\omega\cos\theta - r\dot{\varphi}_g\cos\theta = 0 \\ \dot{y} - L\omega\sin\theta - r\dot{\varphi}_g\sin\theta = 0 \end{cases}$$

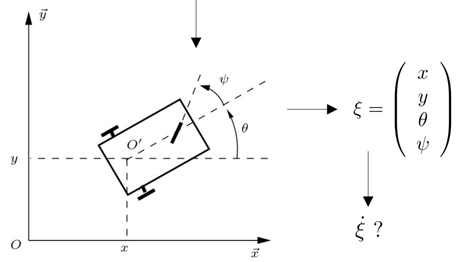
On peut montrer, avec le théorème de Frobenius, que ces contraintes sont non holonomes
→ Pas de déplacement instantané selon l'axe des roues

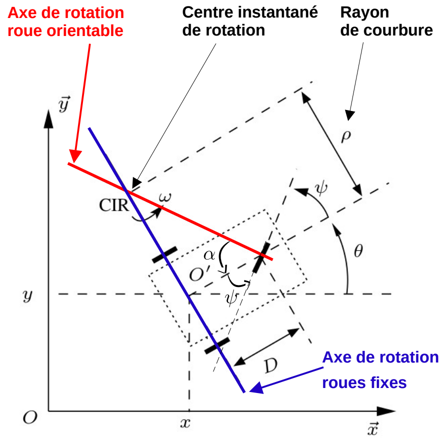


Modélisation des robots mobiles

De la roue au robot mobile

- Modélisation du robot tricycle

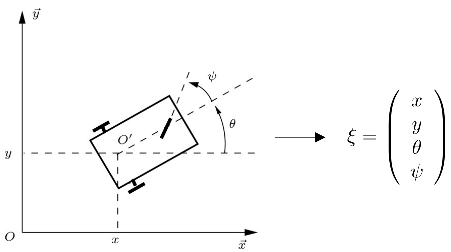




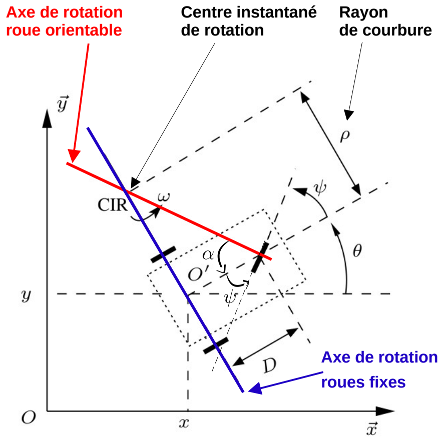
Modélisation des robots mobiles

De la roue au robot mobile

- Modélisation du robot tricycle



$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \\ \frac{v\tan\psi}{D} \\ \eta \end{pmatrix}$$

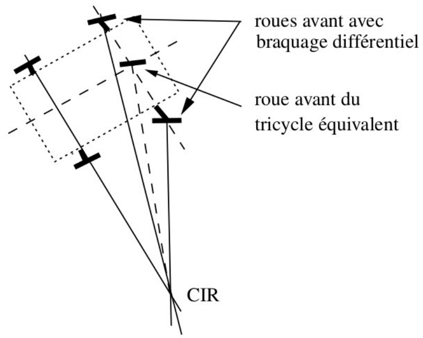


Modélisation des robots mobiles

De la roue au robot mobile

- Modélisation du robot voiture
  - Existence du CIR : Roues avant non parallèles afin de garantir que les axes des roues soient concourants

    → **Système de braquage différentiel d'Ackermann**
  - Rayon de courbure des trajectoires des roues avant différents
  - Idem que le robot tricycle
    - introduire une roue avant virtuelle transformant la voiture en tricycle équivalent.
    - Attention à l'orientation de cette roue → **existence du CIR**



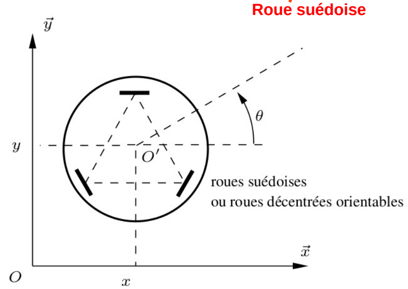
Modélisation des robots mobiles

De la roue au robot mobile

- Modélisation des robots omnidirectionnels
  - Un robot est omnidirectionnel si l'on peut agir indépendamment sur les vitesses de translation et de rotation
  - Réalisation → plus grande complexité mécanique
    - Impossible d'utiliser des roues fixes ou centrées orientables
    - Roues suédoises ou décentrées orientables agencées sur un triangle équilatéral
  - Robot holonome

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \\ \dot{y} = u_2 \\ \dot{\theta} = u_3 \end{cases}$$

où les u_i sont les commandes utilisées



Commande des robots mobiles

Bilan de la modélisation

- Tous les modèles précédents peuvent se ramener sous la forme d'une représentation d'état particulière non linéaire, de la forme :

$$\dot{X} = B(X)U$$

Robot unicycle

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$$

Robot tricycle/voiture

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ \frac{\tan\psi}{D} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \eta \end{pmatrix}$$

Robot omnidirectionnel

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

- La non holonomie se traduit par un sous-actionnement du système

Commande des robots mobiles

Commandabilité du système

- Un robot est commandable ssi il existe une loi de commande u(t) amenant le robot d'un état initial $X(t_0)$ à un état final $X(t_f)$ en un temps fini t_f.
- Pour un système linéaire de la forme $\dot{X} = AX + BU, Y = CX + DU$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} \rightarrow Rg(\Lambda) = n \text{ où } n = dim(X)$$

- Problème : la RE d'un robot mobile NH est non linéaire, avec une forme particulière :

$$\dot{X} = B(X)U \text{ avec } U = (u_1 \dots u_m)^T$$
$$= \begin{pmatrix} b_1(X) & b_2(X) & \dots & b_m(X) \end{pmatrix} U \ = \sum_{i=1}^m b_i(X)u_i$$

→ Cas de l'unicycle :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{matrix}\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0 \\ 0 \\ 1\end{matrix}} \end{array}\right)} \end{array} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = b_1 v + b_2 \omega$$

Commande des robots mobiles

Commandabilité du système

- Théorème de Chow

$$\dot{X} = B(X)U = \sum_{i=1}^m b_i(X)u_i \ (1)$$

Soit un robot mobile défini par une représentation d'état de la forme (1). Ce robot est commandable si les colonnes $b_i(X)$ de B(X) et leurs crochets de Lie successifs forment un ensemble de n colonnes indépendantes.

Rappel : Crochet de Lie : $[x_1(q), x_2(q)] = \frac{\partial x_2(q)}{\partial q} x_1(q) - \frac{\partial x_1(q)}{\partial q} x_2(q)$

→ Application à l'unicycle

$$[b_1, b_2] = \frac{\partial b_2}{\partial X} b_1 - \frac{\partial b_1}{\partial X} b_2 = (\sin\theta \quad -\cos\theta \quad 0)^T$$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & [b_1, b_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies det(M) = \frac{1}{r} \neq 0$$

⇒ **Système commandable**

Commande des robots mobiles

Les problèmes de commande

- Trois problèmes
  - Suivi de chemin *ou path following* : suivre « simplement » une courbe
  - Suivi de trajectoire *ou trajectory tracking ou tracking* : suivre une courbe avec un « timing » donné ⇔ Suivre un robot virtuel
  - Stabilisation en une configuration fixe : atteindre une configuration fixe prédéfinie → **Théorème de Brockett**

Il n'existe pas de retour d'état continu de la forme U = K(X) stabilisant le système (1). Pour qu'un tel retour d'état existe, il faudrait que Rang(B) = n, ce qui n'est pas le cas pour les robots non holonomes (systèmes sous-actionnés). Cette condition est appelée 'condition de Brockett'.

On ne peut pas stabiliser un robot mobile non holonome en une configuration donnée X* avec un retour d'état continu de la forme U = K(X). Mais on peut bien sûr le faire avec d'autres types de commande telles que U = K(X,t) par exemple.

On s'intéressera seulement aux deux premiers problèmes qui peuvent être résolus par retour d'état continu (si v ne s'annule pas).

Commande des robots mobiles

Suivi de chemin et suivi de trajectoire

- Hypothèses
  - On dispose toujours de l'état du robot → localisation du robot à chaque instant
  - On dispose d'un chemin ou d'une trajectoire à suivre
  - La vitesse linéaire le long du chemin ou de la trajectoire ne s'annule pas
  - On se focalisera sur le robot unicycle
- Modélisation générale du problème
  - On raisonne sur une erreur entre la référence et le robot → local
  - But : calculer v, ω pour annuler cette erreur
  - Le repère R_r sera défini par :
    - Un repère de Frenet sur le chemin → path following
    - Le repère du robot à suivre → trajectory tracking