COMMANDE DE ROBOTS MOBILES

Viviane CADENAT
Enseignant – chercheur à l'UPS
LAAS – CNRS
cadenat@laas.fr

Sommaire

Introduction

- Généralités
  - **Les robots mobiles considérés**
    - Robots mobiles à roues seulement
    - Les difficultés
      - Contraintes particulières sur le mouvement → Non holonomie
      - Environnement d'évolution non maîtrisé → Navigation autonome

Introduction

- Navigation autonome
  - **Objectif** → Atteindre un but préalablement connu, de manière autonome, tout en évitant d'éventuels obstacles
  - **Architecture** → Différentes fonctions

Perception	Localisation
Modélisation	Action
Planification	Décision

Introduction

- Navigation autonome
  - **Objectif** → Atteindre un but préalablement connu, de manière autonome, tout en évitant d'éventuels obstacles
  - **Architecture** → Différentes fonctions

Perception → *Données sensorielles*

Modélisation → *- Carte métrique → Loca. métrique*
- Carte topologique → Loca. topo.

Planification → *- Chemin/trajectoire de référence si carte métrique*
- Suite de situations à atteindre si carte topologique

Introduction

- Navigation autonome
  - **Objectif** → Atteindre un but préalablement connu, de manière autonome, tout en évitant d'éventuels obstacles
  - **Architecture** → Différentes fonctions

Localisation → *- Localisation métrique*
- Localisation topologique

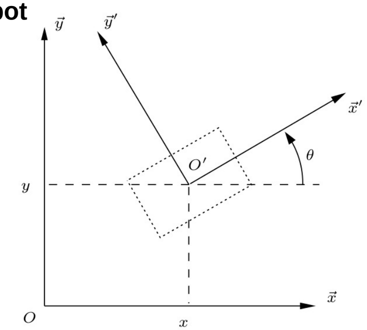
Action → *- Commande par retour d'état*
- Commande par retour de sortie

Décision → *- Décision de haut niveau*
- Décision de bas niveau

Modélisation des robots mobiles

- Notions de base
  - **Situation (ou pose ou posture) d'un robot mobile**
    - R(O, x, y, z) : repère scène
    - R'(O', x', y', z') : repère robot
    - Pose ξ = Position d'un point de référence de la base O' **et** orientation de R' / R

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$$



    - Par abus de langage, on confond souvent configuration et situation pour un robot mobile

Modélisation des robots mobiles

- Roulement sans glissement (RSG)
  - Définition intuitive

Crédit : *Chaîne Youtube de Youri Charlemagne – Vidéo : le roulement sans glissement*
Lien direct : https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=ZMKOc3wGbuA

Modélisation des robots mobiles

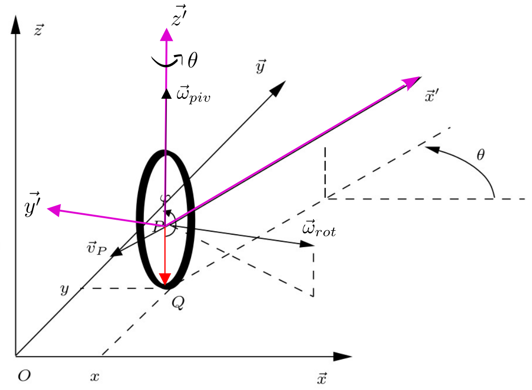
- Roulement sans glissement (RSG)
  - Condition de RSG :

    → **La vitesse relative de la roue / sol au point de contact doit être nulle**
  - Pour cela :
    - Le contact entre la roue et le sol doit être **ponctuel**
    - Les roues doivent être **indéformables**
  - Remarques :
    - Ces conditions ne sont jamais exactement vérifiées : contact surfacique, pneus, …
    - La condition de RSG (avec celle du sol plat) est une hypothèse – clé, rarement remise en cause (sauf exception → passage au dynamique, intégration des effets du glissement sur le modèle cinématique)

Modélisation des robots mobiles

- Roulement sans glissement (RSG)
  - Modélisation du RSG
    - R : repère scène
    - R' : repère roue
    - P : centre de la roue
    - Q : point de contact de la roue avec le sol
    - φ : Angle de rotation propre
    - θ : Angle de pivotement
    - $\vec{\omega}_{rot}$, $\vec{\omega}_{piv}$: Vitesse de rotation autour de y' et de z'
  - Condition de RSG

    $\vec{v}_{Q/R} = \vec{0}$



$$\rightarrow \vec{v}_{Q/R} = \vec{v}_{P/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \times \vec{PQ} = \vec{0}$$

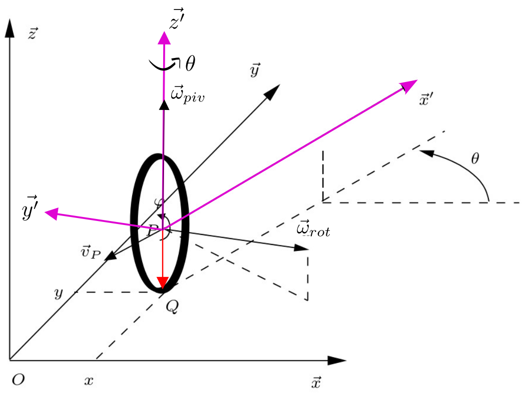
Modélisation des robots mobiles

- Roulement sans glissement (RSG)
  - Modélisation du RSG

$$\vec{v}_{Q/R} = \vec{v}_{P/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \times \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}^{(R)}_{Q/R} = \begin{pmatrix} \dot{x} + r\dot{\varphi}\cos\theta \\ \dot{y} + r\dot{\varphi}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} + r\dot{\varphi}\cos\theta = 0 & (1) \\ \dot{y} + r\dot{\varphi}\sin\theta = 0 & (2) \end{cases}$$



Contraintes sur le mouvement :

- *Pas de déplacement selon l'axe z*

  → Q évolue dans le plan (O, x, y)
- *Il reste 2 contraintes sur le mouvement dans ce plan →* $\vec{v}^{(R')}_{P/R}$

Modélisation des robots mobiles

- Roulement sans glissement (RSG)
  - Modélisation du RSG

$$\Rightarrow \vec{v}^{(R')}_{P/R} = \begin{pmatrix} \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta \\ -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

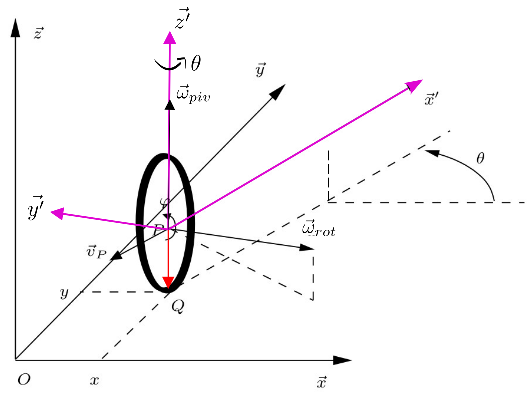
➡ De (1) et (2)

$$\begin{cases} \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta & = & -r\dot{\varphi} \\ -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta & = & 0 \end{cases}$$

Contraintes sur le mouvement

- *Une seule vitesse selon l'axe x', uniquement due à la rotation de la roue*
- *Pas de vitesse latérale*

  → Pas de déplacement selon y' qui est l'axe perpendiculaire aux roues
- *Pas de déplacement selon l'axe z' = z*



Modélisation des robots mobiles

- Roulement sans glissement (RSG)
  - Notion de non holonomie
    - Définition : une contrainte non holonome (NH) est une contrainte non intégrable
    - Concrètement : l'existence de contraintes NH ⇒ le robot ne peut pas **instantanément** effectuer certains mouvements
    - Comment montrer mathématiquement qu'une contrainte est NH ?
      - Définir la configuration du système q avec dim(q) = (n, 1)
      - Écrire les m contraintes sous la forme $A^T\dot{q} = 0_{m\times 1}$
      - Appliquer le théorème de Frobenius
    - Application à la roue

Contraintes $\begin{cases} \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta &= -r\dot{\varphi} \\ -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta &= 0 \end{cases}$

$$\text{Configuration} \; : \quad \mathrm{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{A}^T\dot{q} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NB : n = 4, m = 2

Modélisation des robots mobiles

- Roulement sans glissement (RSG)
  - Notion de non holonomie
    - Comment montrer mathématiquement qu'une contrainte est NH ?
      → Un outil : le théorème de Frobenius et le crochet de Lie

Soient :

- *Un système de configuration q, de dimension n, soumis à un ensemble de contraintes indépendantes s'écrivant sous la forme $A^T\dot{q} = 0$.*
- *Une matrice de taille (n,m) et de rang plein m (m ≤ n) telle que $A^T(q)B(q) = 0$ pour tout q*
- *L'algèbre de Lie de dimension p (m ≤ p ≤ n) engendrée par les colonnes de B(q) et leurs crochets de Lie successifs à condition qu'ils augmentent la dimension de l'algèbre*

Alors n – p contraintes sont intégrables.

Une algèbre de Lie est un espace vectoriel muni d'une loi de composition interne particulière appelée crochet de Lie

$$[x_1(q), x_2(q)] = \frac{\partial x_2(q)}{\partial q} x_1(q) - \frac{\partial x_1(q)}{\partial q} x_2(q)$$

Modélisation des robots mobiles

- Roulement sans glissement (RSG)
  - Notion de non holonomie
    - Comment montrer mathématiquement qu'une contrainte est NH ?
      → Un outil : le théorème de Frobenius et le crochet de Lie
    - Application du théorème de Frobenius à la roue
      - Trouver la matrice B telle que :

$$\mathrm{A}^T B = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 & r \end{pmatrix} B(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-1}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

NB : B est bien de rang plein 2

- Calculer les crochets de Lie :

$$[b_1(q), b_2(q)] = \frac{\partial b_2(q)}{\partial q} b_1(q) - \frac{\partial b_1(q)}{\partial q} b_2(q) = (\sin\theta \quad -\cos\theta \quad 0 \quad 0)^T$$

$$[b_1(q), [b_1(q), b_2(q)]] = \frac{\partial [b_1(q), b_2(q)]}{\partial q} b_1(q) - \frac{\partial b_1(q)}{\partial q} [b_1(q), b_2(q)] = 0_{4\times 1}$$

$$[b_2(q), [b_1(q), b_2(q)]] = \frac{\partial [b_1(q), b_2(q)]}{\partial q} b_2(q) - \frac{\partial b_2(q)}{\partial q} [b_1(q), b_2(q)] = (\cos\theta \quad \sin\theta \quad 0 \quad 0)^T$$

Modélisation des robots mobiles

- Roulement sans glissement (RSG)
  - Notion de non holonomie
    - Comment montrer mathématiquement qu'une contrainte est NH ?
    - Application du théorème de Frobenius à la roue
      - Vérifier la dimension de l'algèbre → les vecteurs ainsi obtenus sont-ils lin. indep ?

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-1}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

$$[b_1(q), b_2(q)] = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[b_1(q), [b_1(q), b_2(q)]] = 0_{4\times 1}$$

$$[b_2(q), [b_1(q), b_2(q)]] = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{r} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow det(M) = \frac{1}{r} \neq 0$$

L'algèbre engendrée est de dimension p = 4
⇒ Nombre de contraintes intégrables : n – p = 4 – 4 = 0
⇒ Toutes les contraintes sont NH

Modélisation des robots mobiles

Roulement sans glissement (RSG)

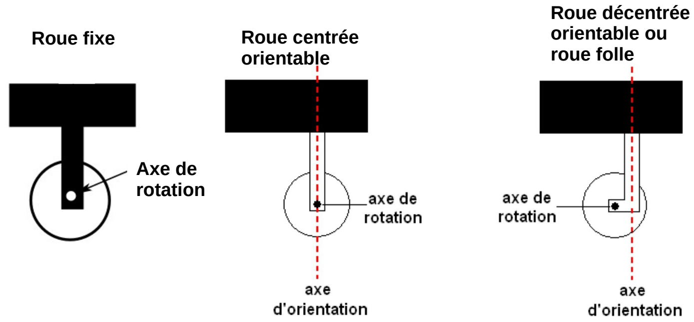
- Conclusion
  - Le mouvement de la roue sur le sol est contraint par la contrainte de RSG
  - Modélisation mathématique
    - Point-clé : *la vitesse du point de contact de la roue au sol nulle*
    - Deux contraintes émergent :
      - *Pas de vitesse latérale*
      - *Une vitesse longitudinale dépendant seulement de la vitesse de rotation de la roue*
    - *Ces deux contraintes sont non holonomes*, cad non intégrables, ce qui signifie que des directions instantanées de mouvement sont interdites

      → Ici : pas de translation instantanée selon l'axe des roues

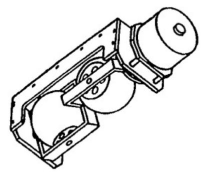
Modélisation des robots mobiles

De la roue au robot mobile

- Type et disposition des roues
  - Choix des roues et de leur disposition est crucial !
  - Classification des roues



Roue suédoise



Roue troncosphérique

Modélisation des robots mobiles

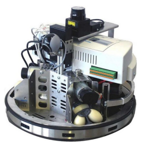
De la roue au robot mobile

- Les principales structures cinématiques
  - Le nombre de roues, leur type et leur disposition définissent la mobilité du robot
    → Attention aux blocages potentiels !
  - Comment être sûr qu'une disposition de roues est viable ?

> *On montre que :*
>
> *1) Pour qu'une disposition des roues soit viable et n'entraîne pas de glissement des roues sur le sol, il faut qu'il existe pour toutes les roues du robot un* ***UNIQUE point de vitesse nulle*** *autour duquel tourne le robot de façon instantanée.*
>
> *→ Ce point est appelé* ***centre instantané de rotation (CIR)***
>
> *2) Cette condition est réalisée si le point d'intersection des axes de rotation de toutes les roues est* ***unique.***
>
> *→ NB : les points de vitesse nulle liée à une roue se trouvent sur son axe de rotation.*

  - Principales structures cinématiques :

Unicycle



Omnidirectionnel