Commande des robots mobiles

Suivi de trajectoire

Définition

- But : suivre une courbe avec un « timing » donné ⇔ Suivre un robot virtuel de même cinématique que le robot réel (unicycle)
  - → Le robot réel doit rattraper le robot de référence et reproduire son mouvement
  - → Sous l'hypothèse que v_r et ω_r ne s'annulent jamais, on cherche (v, ω) tel que :

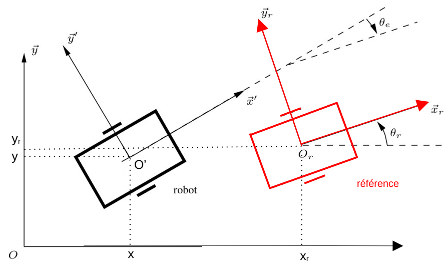
$$\lim_{t\to\infty} \Delta X = \lim_{t\to\infty} (X_r(t) - X(t)) = 0$$

avec :

$$\Delta X = X_r - X = \begin{pmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta\theta \end{pmatrix}$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\dot{X}_r = \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_r & 0 \\ \sin\theta_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ \omega_r \end{pmatrix}$$



Commande des robots mobiles

Suivi de trajectoire

Formulation du problème de commande

1) L'erreur de posture ΔX à annuler est projetée dans le repère R' lié au robot → X_e

$$X_e = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x\cos\theta + \Delta y\sin\theta \\ -\Delta x\sin\theta + \Delta y\cos\theta \\ \Delta\theta \end{pmatrix}$$

2) Représentation d'état de l'erreur à annuler

$$\dot{X}_e = \begin{pmatrix} v_r\cos\theta_e - v + \omega\, y_e \\ v_r\sin\theta_e - \omega x_e \\ \omega_r - \omega \end{pmatrix} \longrightarrow$$

On pose $\begin{cases} u_1 = -v + v_r\cos\theta_e \\ u_2 = \omega_r - \omega \end{cases}$

$$\dot{X}_e = \begin{pmatrix} 0 & \omega_r(t) & 0 \\ -\omega_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_e + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta_e \\ 0 \end{pmatrix} v_r + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

On cherche (u_1, u_2) qui stabilise la représentation d'état en 0_{3x1}.
On déduit ensuite (v,ω).

Commande des robots mobiles

Suivi de trajectoire

Synthèse de la loi de commande

- Méthodes non linéaires
- Linéarisation autour d'un point d'équilibre $X_{eq} = 0$ $\longrightarrow \sin\theta_e \approx \theta_e$
  - → Le robot se trouve initialement près du robot de référence
  - → Représentation d'état linéaire :

$$\dot{X}_e = \begin{pmatrix} 0 & \omega_r & 0 \\ -\omega_r & 0 & v_r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_e + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

- Étude de commandabilité

$$\Lambda = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\omega_r^2 & v_r\omega_r \\ 0 & 0 & -\omega_r & v_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcul d'un retour d'état de la forme U = -K X_e par des méthodes linéaires (cf. suite du cours). On déduit ensuite (v, ω) comme indiqué plus haut.

Commande des robots mobiles

Suivi de chemin

But : suivre une courbe $\mathcal{C}$ « sans contrainte de temps »

- v est supposée connue et ne s'annule jamais
- On cherche ω permettant de ramener le robot sur le chemin et de le suivre à la vitesse v prédéfinie → Convergence géométrique

Modélisation du problème

1/ On projette orthogonalement O' sur $(\mathcal{C})$ → O_r

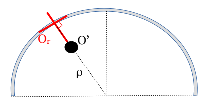
→ **Définition d'un repère de Frenet** → $R_r(O_r, \vec{x}_r, \vec{y}_r)$

2/ Existence et unicité de O_r garantie ssi :

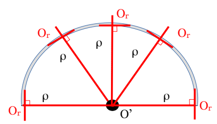
$$\rightarrow \quad \| \vec{O_rO'} \| < \rho(s) \quad \forall s \in [0,1] \quad \Leftrightarrow \quad \| \vec{O_rO'} \| .|c(s)| < 1$$

$$\text{avec } c(s) = \frac{1}{\rho(s)} = \frac{\partial\theta_r}{\partial s} \text{ courbure du chemin en s}$$

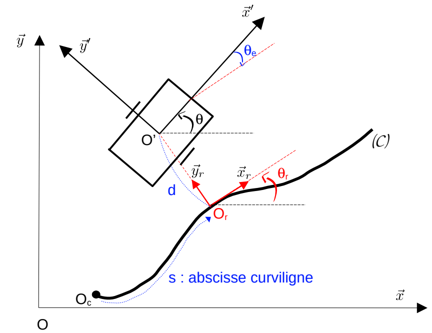
Cas du cercle



$\| \vec{O_rO'} \| < \rho(s) \rightarrow$ unicité



$\| \vec{O_rO'} \| \geq \rho(s) \rightarrow$ non unicité



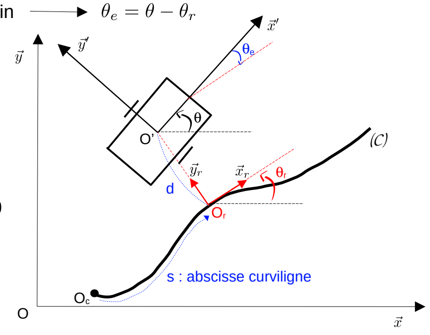
Commande des robots mobiles

Suivi de chemin

- Formulation du problème
  - Grandeurs caractéristiques du suivi de chemin
    - s : Abscisse curviligne de O_r sur $(\mathcal{C})$
    - d : distance signée de O_r à O' $\longrightarrow \overrightarrow{O_rO'} = d\vec{y}_r$
    - θ_e : Orientation relative robot/chemin $\longrightarrow \theta_e = \theta - \theta_r$
  - État du système = Erreur exprimée dans le repère de Frenet R_r

$$X_e = \begin{pmatrix} d \\ \theta_e \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Erreur de distance} \\ \longrightarrow \text{Erreur d'orientation} \end{array}$$

  - But : trouver ω qui garantit : $\lim_{t\to\infty} X_e = 0$ avec v non nulle et connue.



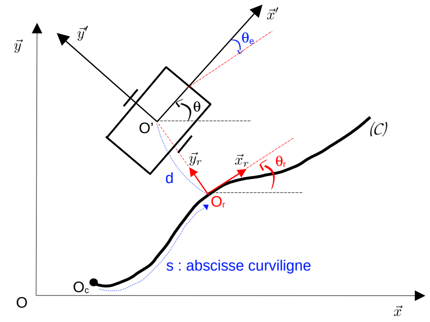
Commande des robots mobiles

Suivi de chemin

- Formulation du problème
  - Grandeurs caractéristiques du suivi de chemin
    - s : Abscisse curviligne de O_r sur $(\mathcal{C})$
    - d : distance signée de O_r à O' $\longrightarrow \overrightarrow{O_rO'} = d\vec{y}_r$
    - θ_e : Orientation relative robot/chemin $\longrightarrow \theta_e = \theta - \theta_r$
  - État du système = Erreur exprimée dans le repère de Frenet R_r

$$X_e = \begin{pmatrix} d \\ \theta_e \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Erreur de distance} \\ \longrightarrow \text{Erreur d'orientation} \end{array}$$

  - But : trouver ω qui garantit : $\lim_{t\to\infty} X_e = 0$ avec v non nulle et connue.



On montre que (cf. TD et TP) :

$$\dot{X}_e = \begin{pmatrix} \sin\theta_e & 0 \\ -\frac{c(s)\cos\theta_e}{1-dc(s)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{d} & = & v\sin\theta_e \\ \dot{\theta}_e & = & u_1 \end{array} \right. \quad \text{où} \quad u_1 = \omega - c(s)\frac{v\cos\theta_e}{1-dc(s)}$$

Commande des robots mobiles

Conclusion

- Suivi de trajectoire → on cherche (u_1, u_2) qui stabilise à 0

$$\dot{X}_e = \begin{pmatrix} 0 & \omega_r & 0 \\ -\omega_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_e + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta_e \\ 0 \end{pmatrix} v_r + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$X_e = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta\theta \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = -v + v_r\cos\theta_e \\ u_2 = \omega_r - \omega \end{array} \right.$$

  On déduit ensuite (v, ω)

- Suivi de chemin → on cherche u_1 qui stabilise à 0 :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{d} & = & v\sin\theta_e \\ \dot{\theta}_e & = & u_1 \end{array} \right. \quad \text{où} \quad u_1 = \omega - c(s)\frac{v\cos\theta_e}{1-dc(s)}$$

  On déduit ensuite ω

- Comment calculer ces lois de commande ?
  - Techniques non linéaires → retour d'état non linéaire
  - **Linéarisation autour du point d'équilibre et application de techniques linéaires**

Commande par retour d'état des systèmes linéaires

Hypothèses

- On se restreint ici au cas des systèmes linéaires

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$
$$Y(t) = CX(t) + DU(t)$$

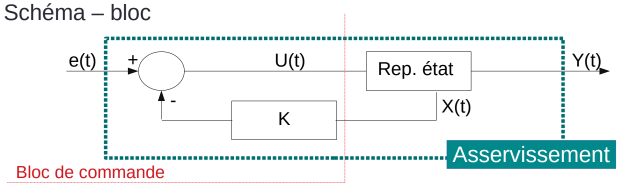
- L'application au cas du suivi de chemin/de trajectoire nécessite donc de considérer les modèles linéarisés établis précédemment
- On suppose que l'état est mesurable à chaque instant
  → localisation parfaite du robot

Cahier des charges

- Précision
- Dynamique : stabilité, temps de réponse, etc.

Commande par retour d'état des systèmes linéaires

- Structure du retour d'état
  - Expression en contexte linéaire : U(t) = e(t) – K X(t)
  - Schéma – bloc



  - Objectif

Trouver K tel que les valeurs propres de l'asservissement = valeurs propres désirées

** Le retour d'état gère l'aspect « dynamique »*
** Il nécessite un choix de valeurs propres en fonction des spécifications*
→ Choix de pôles dominants complété le cas échéant par des pôles non dominants, plus rapides

Commande par retour d'état des systèmes linéaires

- Principe de calcul (cas général)
  - Calculer le polynôme caractéristique désiré $\Psi(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i^*)$
  - Calculer le polynôme caractéristique de A – BK
  - Identifier les deux polynômes caractéristiques et déduire K

Commande par retour d'état des systèmes linéaires

- Principe de calcul (cas particulier de la forme compagne de commande)
  - Si A est sous forme compagne de commande :

$$A_{cc}=\begin{pmatrix} 0 & 1\dots 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & 0\dots 1 \\ -a_0 & \dots \quad -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

a_i : coefficients du polynôme caractéristique de A

  - Du polynôme caractéristique désiré $\Psi(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i^*)=\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+\alpha_0$

on peut déduire A_{BFcc}

$$A_{BFcc}=\begin{pmatrix} 0 & 1\dots 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & 0\dots 1 \\ -\alpha_0 & \dots \quad -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

α_i : coefficients du polynôme caractéristique désiré

  - Calcul de K

$$\boxed{K=(k_0 \;\dots\; k_{n-1}) \;\; avec \;\; k_i=\alpha_i-a_i}$$

Attention aux signes des coefficients !