

ГЛАВА 14

ТЕОРИЯ ИГР И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В теории принятия решений используются “разумные” процедуры выбора наилучшей из нескольких возможных альтернатив. Насколько правильным будет выбор, зависит от качества данных, используемых при описании ситуации, в которой принимается решение. С этой точки зрения процесс принятия решений может принадлежать к одному из трех возможных условий.

1. Принятие решений в условиях определенности, когда данные известны точно.
2. Принятие решений в условиях риска, когда данные можно описать с помощью вероятностных распределений.
3. Принятие решений в условиях неопределенности, когда данным нельзя приписать относительные веса (весовые коэффициенты), которые представляли бы степень их значимости в процессе принятия решений.

По существу, в условиях определенности данные надежно определены, в условиях неопределенности они не определены.¹ Принятие решений в условиях риска, следовательно, представляет “промежуточный” случай.

14.1. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ — МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Модели линейного программирования (главы 2–8) являются примером принятия решений в условиях определенности. Эти модели применимы лишь в тех случаях, когда альтернативные решения можно связать между собой точными линейными функциями. В этом разделе рассматривается иной подход к принятию решений в ситуациях, когда, например, для идей, чувств, эмоций определяются некоторые количественные показатели, обеспечивающие числовую шкалу предпочтений для возможных альтернативных решений. Этот подход известен как метод анализа иерархий.

Перед тем как изложить детали данного метода, рассмотрим пример, демонстрирующий способ, с помощью которого оцениваются различные альтернативные решения.

¹ Это не значит, что в условиях неопределенности полностью отсутствует информация о задаче. Речь идет о том, что имеющиеся данные трудно или невозможно классифицировать по степени значимости их для принятия решения, и что для этих данных, рассматриваемых как реализации случайных величин или процессов, неизвестна или не может быть определена их функция распределения или другие статистические характеристики. — *Прим. ред.*

Пример 14.1.1

Мартин Ганс — выпускник-отличник средней школы, который получил полную стипендию от трех университетов: А, В и С. Для того чтобы выбрать университет, Мартин сформулировал два основных критерия: местонахождение университета и его академическая репутация. Будучи отличным учеником, он оценивает академическую репутацию университета в пять раз выше, чем его местонахождение. Это приводит к тому, что репутации университета приписывается вес примерно 83 %, а его местонахождению — 17 %. Далее Мартин использует системный анализ (сущность его излагается ниже) для оценки трех университетов с точки зрения их местонахождения и репутации. Проведенный анализ дает следующие оценки.

Критерии	Университет		
	А	В	С
Местонахождение	12,9%	27,7%	59,4%
Репутация	54,5%	27,3%	18,2%

Структура задачи принятия решений приведена на рис. 14.1. Задача имеет единственный иерархический уровень с двумя критериями (местонахождение и репутация) и три альтернативных решения (университеты А, В и С).

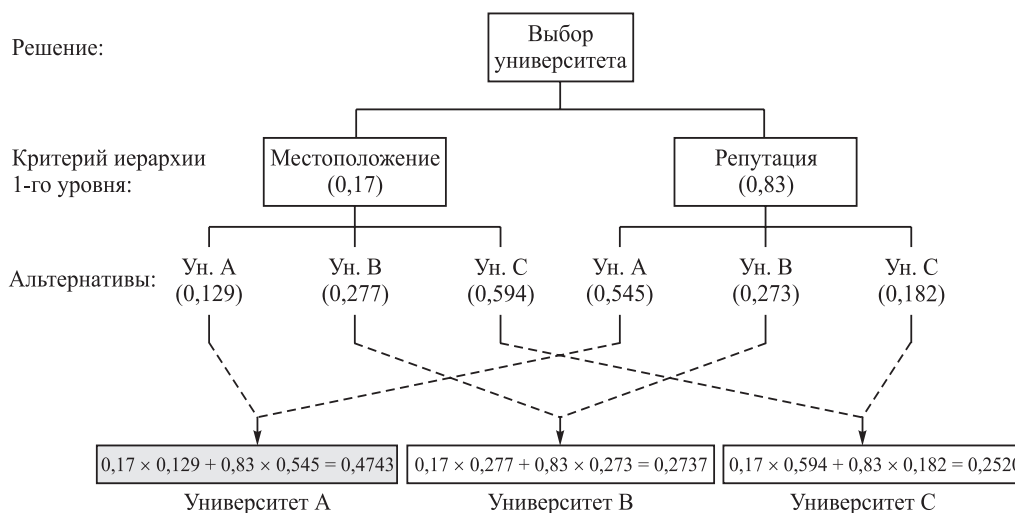


Рис. 14.1. Иерархия принятия решений примера 14.1.1

Оценка трех университетов основана на вычислении *комбинированного* весового коэффициента для каждого из них.

Университет А: $0,17 \times 0,129 + 0,83 \times 0,545 = 0,4743$.

Университет В: $0,17 \times 0,277 + 0,83 \times 0,273 = 0,2737$.

Университет С: $0,17 \times 0,594 + 0,83 \times 0,182 = 0,2520$.

На основе этих вычислений университет А получает наивысший комбинированный вес и, следовательно, является наиболее оптимальным выбором Мартина.

Общая структура метода анализа иерархий может включать несколько иерархических уровней со своими критериями. Предположим в примере 14.1.1, что сестра-близнец Мартина Джейн также получила полную стипендию от трех университетов. Однако их родители ставят условие, что дети должны учиться в одном университете, тогда они смогут пользоваться одним автомобилем. На рис. 14.2 приведена структура задачи выбора решения, которая теперь включает два иерархических уровня со своими критериями. Величины p и q (предположительно равные) на первом иерархическом уровне представляют собой весовые коэффициенты, которые приписываются точке зрения Мартина и Джейн относительно процесса выбора соответственно. Второй иерархический уровень использует веса (p_1, p_2) и (q_1, q_2) для отображения индивидуальных точек зрения Мартина и Джейн относительно критериев местонахождения и академической репутации каждого университета. Остальная часть структуры принятия решения может быть интерпретирована аналогично предыдущему примеру. Заметим, что $p + q = 1$, $p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 1$, $p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1$, $p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1$, $q_{11} + q_{12} + q_{13} = 1$, $q_{21} + q_{22} + q_{23} = 1$. Определение комбинированного веса для университета А, представленное на рис. 14.2, демонстрирует, каким образом вычисляются эти показатели.

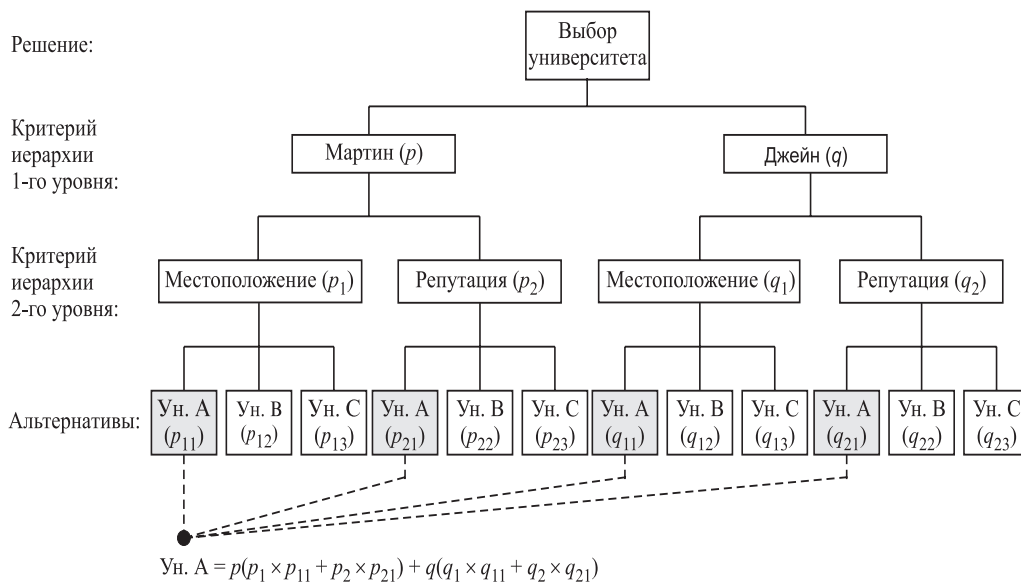


Рис. 14.2. Расширенная иерархия принятия решений примера 14.1.1

УПРАЖНЕНИЕ 14.1.1

1. Пусть для задачи выбора университета Мартином и Джейн установлены следующие значения весовых коэффициентов.

$$p = 0,5, q = 0,5,$$

$$p_1 = 0,17, p_2 = 0,83,$$

$$p_{11} = 0,129, p_{12} = 0,277, p_{13} = 0,594,$$

$$p_{21} = 0,545, p_{22} = 0,273, p_{23} = 0,182,$$

$$q_1 = 0,3, q_2 = 0,7,$$

$$q_{11} = 0,2, q_{12} = 0,3, q_{13} = 0,5,$$

$$q_{21} = 0,5, q_{22} = 0,2, q_{23} = 0,3.$$

Основываясь на этой информации, оцените с помощью комбинированных весов каждый из трех университетов.

Определение весовых коэффициентов. Сложность метода анализа иерархий заключается в определении относительных весовых коэффициентов (таких, как использованные в примере 14.1.1) для оценки альтернативных решений. Если имеется n критериев на заданном уровне иерархии, соответствующая процедура создает матрицу \mathbf{A} размерности $n \times n$, именуемую **матрицей парных сравнений**, которая отражает суждение лица, принимающего решение, относительно важности разных критериев. Парное сравнение выполняется таким образом, что критерий в строке i ($i = 1, 2, \dots, n$) оценивается относительно каждого из критериев, представленных n столбцами. Обозначим через a_{ij} элемент матрицы \mathbf{A} , находящийся на пересечении i -й строки и j -го столбца. В соответствии с методом анализа иерархий для описания упомянутых оценок используются целые числа от 1 до 9. При этом $a_{ij} = 1$ означает, что i -й и j -й критерии *одинаково важны*, $a_{ij} = 5$ отражает мнение, что i -й критерий *значительно важнее*, чем j -й, а $a_{ij} = 9$ указывает, что i -й критерий *чрезвычайно важнее* j -го. Другие промежуточные значения между 1 и 9 интерпретируются аналогично. Согласованность таких обозначений обеспечивается следующим условием: если $a_{ij} = k$, то автоматически $a_{ji} = 1/k$. Кроме того, все диагональные элементы a_{ii} матрицы \mathbf{A} должны быть равны 1, так как они выражают оценку критерия относительно самих себя.

Пример 14.1.2

Покажем, как определяется матрица сравнения \mathbf{A} для задачи выбора Мартина из примера 14.1.1. Начнем с главного иерархического уровня, который имеет дело с критериями академической репутации университета и его местонахождения. С точки зрения Мартина, академическая репутация университета *значительно важнее* его местонахождения. Следовательно, он приписывает элементу $(2, 1)$ матрицы \mathbf{A} значение 5, т.е. $a_{21} = 5$. Это автоматически предполагает, что $a_{12} = 1/5$. Обозначив через R и L критерии репутации университета и его местонахождения, можно записать матрицу сравнения следующим образом.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} L & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} L \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Относительные веса критериев R и L могут быть определены путем деления элементов каждого столбца на сумму элементов этого же столбца. Следовательно, для нормализации матрицы \mathbf{A} делим элементы первого столбца на величину $1 + 5 = 6$, элементы второго — на величину $1 + 1/5 = 1,2$. Искомые относительные веса w_R и w_L критериев вычисляются теперь в виде средних значений элементов соответствующих строк нормализованной матрицы \mathbf{A} . Следовательно,

$$\mathbf{N} = \begin{matrix} & \begin{matrix} L & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} L \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,17 & 0,17 \\ 0,83 & 0,83 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{array}{l} \text{Средние значения элементов строк} \\ w_R = (0,83 + 0,83)/2 = 0,83, \\ w_L = (0,17 + 0,17)/2 = 0,17. \end{array}$$

В результате вычислений получили $w_R = 0,83$ и $w_L = 0,17$, т.е. те веса, которые показаны на рис. 14.1. Столбцы матрицы N одинаковы, что имеет место лишь в случае, когда лицо, принимающее решение, проявляет идеальную *согласованность* в определении элементов матрицы A . Этот тезис детальнее обсуждается ниже.

Относительные веса альтернативных решений, соответствующих университетам A , B и C , вычисляются в пределах каждого критерия R и L с использованием следующих двух матриц сравнения.

$$A_L = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 2 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

Суммы элементов столбцов = [8, 3,5, 1,7].

$$A_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

Суммы элементов столбцов = [1,83, 3,67, 5,5].

Элементы матриц A_R и A_L определены на основе суждений Мартина, касающихся относительной важности трех университетов.

При делении элементов каждого столбца матриц A_R и A_L на сумму элементов этих же столбцов получаем следующие нормализованные матрицы.

$$N_L = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,125 & 0,143 & 0,118 \\ 0,250 & 0,286 & 0,294 \\ 0,625 & 0,571 & 0,588 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \text{Средние значения элементов строк} \\ w_{LA} = (0,125 + 0,143 + 0,118)/3 = 0,129, \\ w_{LB} = (0,250 + 0,286 + 0,294)/3 = 0,277, \\ w_{LC} = (0,625 + 0,571 + 0,588)/3 = 0,594. \end{matrix}$$

$$N_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,545 & 0,545 & 0,545 \\ 0,273 & 0,273 & 0,273 \\ 0,182 & 0,182 & 0,182 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \text{Средние значения элементов строк} \\ w_{RA} = (0,545 + 0,545 + 0,545)/3 = 0,545, \\ w_{RB} = (0,273 + 0,273 + 0,273)/3 = 0,273, \\ w_{RC} = (0,182 + 0,182 + 0,182)/3 = 0,182. \end{matrix}$$

Величины $(w_{RA}, w_{RB}, w_{RC}) = (0,545, 0,273, 0,182)$ дают соответствующие веса для университетов A , B и C с точки зрения академической репутации. Аналогично величины $(w_{LA}, w_{LB}, w_{LC}) = (0,129, 0,277, 0,594)$ являются относительными весами, касающимися местонахождения университетов.

Согласованность матрицы сравнений. В примере 14.1.2 мы отмечали, что все столбцы нормализованных матриц N и N_R идентичны, а столбцы матрицы N_L таковыми не являются. Одинаковые столбцы указывают на то, что результирующие относительные веса сохраняют одно и то же значение независимо от того, как выполняется сравнение. В этом случае говорят, что исходные матрицы сравнения A и A_R являются *согласованными*. Следовательно, матрица A_L не является таковой.

Согласованность означает, что решение будет согласовано с определениями парных сравнений критериев или альтернатив. С математической точки зрения

согласованность матрицы \mathbf{A} означает, что $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ для всех i, j и k . Например, в матрице \mathbf{A}_R из примера 14.1.2 $a_{13} = 3$ и $a_{12}a_{23} = 2 \times 3/2 = 3$. Свойство согласованности требует линейной зависимости столбцов (и строк) матрицы \mathbf{A} . В частности, столбцы любой матрицы сравнений размерностью 2×2 являются зависимыми, и, следовательно, такая матрица всегда является согласованной. Не все матрицы сравнений являются согласованными. Действительно, принимая во внимание, что такие матрицы строятся на основе человеческих суждений, можно ожидать некоторую степень несогласованности, и к ней следует относиться терпимо при условии, что она не выходит за определенные “допустимые” рамки.

Чтобы выяснить, является ли уровень согласованности “допустимым”, необходимо определить соответствующую количественную меру для матрицы сравнений \mathbf{A} . В примере 14.1.2 мы видели, что идеально согласованная матрица \mathbf{A} порождает нормализованную матрицу \mathbf{N} , в которой все столбцы одинаковы:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 & \cdots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \cdots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n & w_n & \cdots & w_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что матрица сравнений \mathbf{A} может быть получена из матрицы \mathbf{N} путем деления элементов i -го столбца на w_i (это процесс, обратный к нахождению матрицы \mathbf{N} из \mathbf{A}). Итак, получаем следующее.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя приведенное определение матрицы \mathbf{A} , имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

В компактной форме условие согласованности матрицы \mathbf{A} формулируется следующим образом. Матрица \mathbf{A} будет согласованной тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = n\mathbf{w},$$

где \mathbf{w} — вектор-столбец относительных весов w_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Когда матрица \mathbf{A} не является согласованной, относительный вес w_i аппроксимируется средним значением n элементов i -й строки нормализованной матрицы \mathbf{N} (см. пример 14.1.2). Обозначив через \bar{w} вычисленную оценку (среднее значение), можно показать, что

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{w}} = n_{\max} \bar{\mathbf{w}},$$

где $n_{\max} \geq n$. В этом случае, чем ближе n_{\max} к n , тем более согласованной является матрица сравнения \mathbf{A} . В результате в соответствии с методом анализа иерархий вычисляется коэффициент согласованности в виде

$$CR = \frac{CI}{RI},$$

где

$$CI = \frac{n_{\max} - n}{n - 1} \text{ — коэффициент согласованности матрицы } \mathbf{A},$$

$$RI = \frac{1,98(n-2)}{n} \text{ — стохастический коэффициент согласованности матрицы } \mathbf{A}.$$

Стохастический коэффициент согласованности RI определяется эмпирическим путем как среднее значение коэффициента CI для большой выборки генерированных случайным образом матриц сравнения \mathbf{A} .

Коэффициент согласованности CR используется для проверки согласованности матрицы сравнения \mathbf{A} следующим образом. Если $CR \leq 0,1$, уровень несогласованности является приемлемым. В противном случае уровень несогласованности матрицы сравнения \mathbf{A} является высоким, и лицу, принимающему решение, рекомендуется проверить элементы парного сравнения a_{ij} матрицы \mathbf{A} в целях получения более согласованной матрицы.

Значение n_{\max} вычисляется на основе матричного уравнения $\mathbf{A}\bar{\mathbf{w}} = n_{\max}\bar{\mathbf{w}}$, при этом нетрудно заметить, что i -е уравнение этой системы имеет вид:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{w}_j = n_{\max}\bar{w}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^n \bar{w}_i = 1$, легко проверить, что

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{w}_j \right) = n_{\max} \sum_{i=1}^n \bar{w}_i = n_{\max}.$$

Это значит, что величину n_{\max} можно определить путем вычисления вектор-столбца $\mathbf{A}\bar{\mathbf{w}}$ с последующим суммированием его элементов.

Пример 14.1.3

В примере 14.1.2 матрица \mathbf{A}_L является несогласованной, так как столбцы матрицы \mathbf{N}_L неодинаковы. Требуется исследовать согласованность матрицы \mathbf{A}_L .

Вычислим значение n_{\max} . Из данных примера 14.1.2 имеем

$$\bar{w}_1 = 0,129, \bar{w}_2 = 0,277, \bar{w}_3 = 0,594.$$

Следовательно,

$$\mathbf{A}_L \bar{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,129 \\ 0,277 \\ 0,594 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3863 \\ 0,8320 \\ 1,7930 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

Следовательно, для $n = 3$ имеем

$$CI = \frac{n_{\max} - n}{n - 1} = \frac{3,0113 - 3}{3 - 1} = 0,00565,$$

$$RI = \frac{1,98(n-2)}{n} = \frac{1,98 \times 1}{3} = 0,66,$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0,00565}{0,66} = 0,00856.$$

Так как $CR < 0,1$, уровень несогласованности матрицы A_i является приемлемым.

На рис. 14.3 показано применение этого шаблона для решения задачи примера 14.1.2². Матрицы сравнения вводятся *по одной за раз* в верхнюю часть раздела входных данных. Порядок, в котором вводятся матрицы сравнения не важен, тем не менее, будет больше пользы, если рассматривать их в порядке иерархии. После ввода коэффициентов матрицы сравнения в разделе выходных результатов в нижней части рабочего листа появится соответствующая нормированная матрица, а также ее коэффициент согласованности *CR*. Далее вы должны скопировать значения весов *w* в столбце *J* и вставить их в область *Solution summary* (правая часть таблицы). Для вставки не забудьте выполнить команду Вставка⇒Специальная вставка⇒Значения, чтобы скопировать значения, а не формулы. Эти действия следует повторять для всех матриц сравнения.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O							
1	AHP-Analytic Hierarchy Process																					
2	Input: Comparison matrix										Solution summary											
3	Matrix name:	AL	<<Maximum 8										A									
4	Matrix size=	3											R					0.83333				
5	Matrix data:	UA											UB	UC	L					0.16667		
6	UA	1	0.5	0.2											AR							
7	UB	2	1	0.5											UA	0.54545	UA	0.1285				
8	UC	5	2	1											UB	0.27273	UB	0.27661				
9																UC	0.18182	UC	0.59489			
14	Col sum	8	3.5	1.7																		
15	Output: Normalized martix																					
16			nMax=	3.00746	CR=		0.0056															
17			UA	UB	UC											Weight						
18	UA	0.12500	0.14286	0.11765											0.12850							
19	UB	0.25000	0.28571	0.29412											0.27661	Final ranking						
20	UC	0.62500	0.57143	0.58824											0.59489	UA= 0.47596						
21																UB= 0.27337						
22																UC= 0.25068						
23																						

Рис. 14.3. Решение в Excel задачи примера 14.1.2

² Из-за ошибок округления результаты, полученные в Excel, немного отличаются от тех, которые были получены в примерах 14.1.2 и 14.1.3 (в Excel получены более точные результаты).

После того как в столбцах К:R будут записаны значения весов для всех матриц сравнения, можно использовать эти данные для создания формул, необходимых для сравнения альтернативных вариантов. Выполнить эту операцию в Excel не сложно. На рис. 14.3 в диапазоне К20:К27 представлены результаты ранжирования альтернатив. В ячейке К20 содержится формула

$$= \$L\$4 * \$L\$8 + \$L\$5 * \$N\$8$$

По этой формуле вычисляется оценка для университета А. После создания этой формулы скопируйте ее, а затем вставьте в ячейки К21 и К22. Во вставленных формулах относительные ссылки автоматически изменятся так, что новые формулы будут вычислять оценки для университетов В и С.

Можно усовершенствовать формулы в ячейках К20:К22 так, чтобы непосредственно в ячейке отображались названия альтернатив. Такая формула для альтернативы университета А (обозначается как UA) выглядит следующим образом.

$$= \$K\$8 & " = " & ТЕКСТ(\$L\$4 * \$L\$7 + \$L\$5 * \$N\$7; "####0.00000")$$

Заметьте, что названия альтернатив содержатся в ячейках К8:К10. Вам надо самостоятельно ввести эти названия.

Процедуру вычисления оценок альтернативных вариантов можно без труда распространить на любое количество уровней иерархии. Если формула для первой альтернативы была создана правильно, то ее же можно использовать и для других альтернативных вариантов, просто скопировав ее в последующие строки того же столбца. Но не забывайте, что все ссылки на ячейки должны быть абсолютными, кроме ссылок на альтернативы, в которых фиксированным должен быть только столбец.

УПРАЖНЕНИЯ 14.1.2

1. Отдел кадров фирмы сузил поиск будущего сотрудника до трех кандидатур: Стив (S), Джейн (J) и Майса (M). Конечный отбор основан на трех критериях: собеседование (C), опыт работы (O) и рекомендации (P). Отдел кадров использует матрицу A (приведенную ниже) для сравнения трех критериев. После проведенного собеседования с тремя претендентами, сбора данных, относящихся к опыту их работы и рекомендациям, построены матрицы A_c , A_o и A_p . Какого из трех кандидатов следует принять на работу? Оцените согласованность данных.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} C & O & P \end{array} \\
 \begin{array}{c} C \\ A = O \\ P \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{ccc} S & J & M \end{array} \\
 \begin{array}{c} S \\ A_c = J \\ M \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 5 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S & J & M \\ A_o = J \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{array}{ccc} S & J & M \\ A_p = J \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
 \end{array}$$

2. Кевин и Джун Парки (K и D) покупают новый дом. Рассматриваются три варианта — A, B и C. Парки согласовали два критерия для выбора дома: площадь зеленой лужайки (L) и близость к месту работы (B), а также разработали

матрицы сравнений, приведенные ниже. Необходимо оценить три дома в порядке их приоритета и вычислить коэффициент согласованности каждой матрицы.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{matrix} & K & D \\ K & 1 & 2 \\ D & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix}, \quad \mathbf{A}_K = \begin{matrix} & L & B \\ L & 1 & \frac{1}{3} \\ B & 3 & 1 \end{matrix}, \quad \mathbf{A}_D = \begin{matrix} & L & B \\ L & 1 & 4 \\ B & \frac{1}{4} & 1 \end{matrix}, \\ \mathbf{A}_{KL} &= \begin{matrix} & A & B & C \\ A & 1 & 2 & 3 \\ B & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ C & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix}, \quad \mathbf{A}_{KB} = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ B & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ C & 2 & 3 & 1 \end{matrix}, \\ \mathbf{A}_{DL} &= \begin{matrix} & A & B & C \\ A & 1 & 4 & 2 \\ B & \frac{1}{4} & 1 & 3 \\ C & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{matrix}, \quad \mathbf{A}_{DB} = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ B & 2 & 1 & 3 \\ C & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{matrix}. \end{aligned}$$

3. Автор книги по исследованию операций определил три критерия для выбора издательства, которое будет печатать его книгу: процент авторского гонорара (R), уровень маркетинга (M) и размер аванса (A). Издательства H и P проявили интерес к изданию книги. Используя приведенные ниже матрицы сравнения, необходимо дать оценку двум издательствам и оценить согласованность решения.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & R & M & A \\ R & 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ M & 1 & 1 & \frac{1}{5} \\ A & 4 & 5 & 1 \end{matrix}, \quad \mathbf{A}_R = \begin{matrix} & H & P \\ H & 1 & 2 \\ P & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix}, \quad \mathbf{A}_M = \begin{matrix} & H & P \\ H & 1 & \frac{1}{2} \\ P & 2 & 1 \end{matrix}, \quad \mathbf{A}_A = \begin{matrix} & H & P \\ H & 1 & 1 \\ P & 1 & 1 \end{matrix}.$$

4. Профессор политологии планирует предсказать исход выборов в местный школьный совет. Кандидаты I , B и S баллотируются на одно место. Профессор делит всех избирателей на три категории: левые (L), центристы (C) и правые (R). Оценка кандидатов основывается на трех факторах: педагогический опыт (O), отношение к детям (D) и характер (X). Ниже приведены матрицы сравнения для первого иерархического уровня, связанного с градацией избирателей (левые, центристы и правые).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{matrix} & L & C & R \\ L & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ C & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ R & 2 & 5 & 1 \end{matrix}, \quad \mathbf{A}_L = \begin{matrix} & O & D & X \\ O & 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ D & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ X & 2 & 3 & 1 \end{matrix}, \\ \mathbf{A}_C &= \begin{matrix} & O & D & X \\ O & 1 & 2 & 2 \\ D & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ X & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{matrix}, \quad \mathbf{A}_R = \begin{matrix} & O & D & X \\ O & 1 & 1 & 9 \\ D & 1 & 1 & 8 \\ X & \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & 1 \end{matrix}. \end{aligned}$$

Профессор сгенерировал еще девять матриц сравнения для трех кандидатов на втором иерархическом уровне, связанном с педагогическим опытом, отношением к детям и характером. Затем был использован метод анализа иерархий для сведения этих матриц к следующим относительным весам.

Кандидат	Левые			Центристы			Правые		
	О	Д	Х	О	Д	Х	О	Д	Х
I	0,1	0,2	0,3	0,3	0,5	0,2	0,7	0,1	0,3
B	0,5	0,4	0,2	0,4	0,2	0,4	0,1	0,4	0,2
S	0,4	0,4	0,5	0,3	0,3	0,4	0,2	0,5	0,5

Используя эту информацию, необходимо определить, кто из кандидатов выиграет выборы, и оценить согласованность решения.

5. Школьный округ крайне заинтересован в сокращении своих расходов, что вызвано очередным уменьшением бюджетного финансирования начальных школ. Есть две возможности решить эту проблему: ликвидировать программу физического воспитания (Φ) или программу музыкального образования (M). Управляющий округа сформировал комитет с равным представительством от местного школьного совета (C) и ассоциации родителей и учителей (P) для изучения ситуации и выработки предложения. Комитет принял решение изучить ситуацию с точки зрения ограничения бюджета (B) и потребностей учеников (Π). Проведенный анализ дал следующие матрицы сравнения.

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} & B & \Pi \\ A_C = & \begin{matrix} B \\ \Pi \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_P = \begin{matrix} B \\ \Pi \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{matrix} & \Phi & M \\ A_{CB} = & \begin{matrix} \Phi \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{CP} = \begin{matrix} \Phi \\ M \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{matrix} & \Phi & M \\ A_{PB} = & \begin{matrix} \Phi \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{PP} = \begin{matrix} \Phi \\ M \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Проанализируйте ситуацию, связанную с принятием решения, и выработайте соответствующее предложение.

6. Решив купить автомобиль, человек сузил свой выбор до трех моделей: $M1$, $M2$ и $M3$. Факторами, влияющими на его решение, являются: стоимость автомобиля (C), стоимость обслуживания (O), стоимость поездки по городу (Γ) и сельской местности (M). Следующая таблица содержит необходимые данные, соответствующие трехгодичному сроку эксплуатации автомобиля.

Модель автомобиля	С (долл.)	О (долл.)	Г (долл.)	М (долл.)
$M1$	6 000	1800	4500	1500
$M2$	8 000	1200	2250	750
$M3$	10 000	600	1125	600

Используйте указанные стоимости для построения матриц сравнений. Оцените согласованность матриц и определите модель автомобиля, которую следует выбрать.

14.2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Если решение принимается в условиях риска, то стоимости альтернативных решений обычно описываются вероятностными распределениями. По этой причине принимаемое решение основывается на использовании *критерия ожидаемого значения*, в соответствии с которым альтернативные решения сравниваются с точки зрения максимизации ожидаемой прибыли или минимизации ожидаемых затрат. Такой подход имеет свои недостатки, которые не позволяют использовать его в некоторых ситуациях. Для них разработаны модификации упомянутого критерия. В этой главе рассматриваются часто используемые подходы к принятию решений в условиях риска.

14.2.1. Критерий ожидаемого значения

Критерий ожидаемого значения сводится либо к максимизации ожидаемой (средней) прибыли, либо к минимизации ожидаемых затрат. В данном случае предполагается, что прибыль (затраты), связанная с каждым альтернативным решением, является случайной величиной.

Дерево решений. В приведенном ниже примере рассматривается простая ситуация, связанная с принятием решения при наличии конечного числа альтернатив и точных значений матрицы доходов.

Пример 14.2.1

Предположим, что вы хотите вложить на фондовой бирже 10 000 долл. в акции одной из двух компаний: *A* или *B*. Акции компании *A* являются рискованными, но могут принести 50 % прибыли от суммы инвестиции на протяжении следующего года. Если условия фондовой биржи будут неблагоприятны, сумма инвестиции может обесцениться на 20 %. Компания *B* обеспечивает безопасность инвестиций с 15 % прибыли в условиях повышения котировок на бирже и только 5 % — в условиях понижения котировок. Все аналитические публикации, с которыми можно познакомиться (а они всегда есть в изобилии в конце года), с вероятностью 60 % прогнозируют повышение котировок и с вероятностью 40 % — понижение котировок. В какую компанию следует вложить деньги?

Информация, связанная с принятием решения, суммирована в следующей таблице.

Альтернативные решения	Прибыль за один год от инвестиции 10 000 долл.	
	При повышении котировок (долл.)	При понижении котировок (долл.)
Акции компании <i>A</i>	5000	–2000
Акции компании <i>B</i>	1500	500
Вероятность события	0,6	0,4

Эта задача может быть также представлена в виде **дерева решений**, показанного на рис. 14.4. На этом рисунке используется два типа вершин: квадратик представляет