

# **Расчётно-графическая работа по специальным разделам высшей математики**

**Вариант 16**

Выполнил: М3101 Симаков Глеб Дмитриевич



**УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

# Часть I

*Условие:*

Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка с помощью теории квадратичных форм.

$$2x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xz - 12 = 0$$

*Решение:*

Запишем матрицу квадратичной формы, она же будет матрицей линейного оператора  $\mathcal{A}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Решим вековое уравнение для матрицы  $A$ :

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 1) = 0$$

$$(4 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda \in \{1, 3, 4\}$$

Получили собственные числа для оператора  $\mathcal{A}$ , теперь найдём собственные векторы для каждого из чисел:

---

$$\lambda_1 = 1 :$$

$$(A - I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_1^o = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 3$ :

$$(A - 3\mathcal{I})x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_2^o = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$


---

$\lambda_3 = 4$ :

$$(A - 4\mathcal{I})x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x_1 = \frac{x_3}{2} \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \gamma_3^o = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$


---

Векторы  $\{\gamma_1^o, \gamma_2^o, \gamma_3^o\}$  образуют базис, в котором матрица А имеет диагональный вид. Это означает, что в таком базисе квадратичная форма имеет канонический вид  $a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + c = 0$

Составим правую тройку векторов  $\{\gamma_1^o, \gamma_2^o, \gamma_3^o\}$

$$\Gamma = (\gamma_1^o, \gamma_2^o, \gamma_3^o) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\det(\Gamma) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \Gamma - \text{правая тройка}$$

Теперь перейдём от старого базиса к базису из собственных векторов:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ y = y' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{cases}$$

Действие оператора  $\Gamma$ : Поворот вокруг оси  $Oy$  на  $\frac{\pi}{4}$ .

$$A_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \text{матрица } A \text{ в базисе } \Gamma$$

Канонический вид уравнения:

$$4z'^2 + 3y'^2 + x'^2 - 12 = 0$$

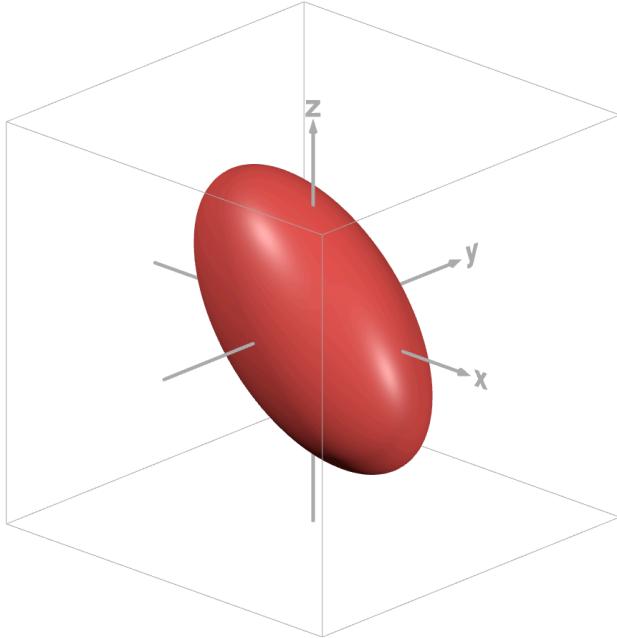


Рис. 1: Форма до канонизации

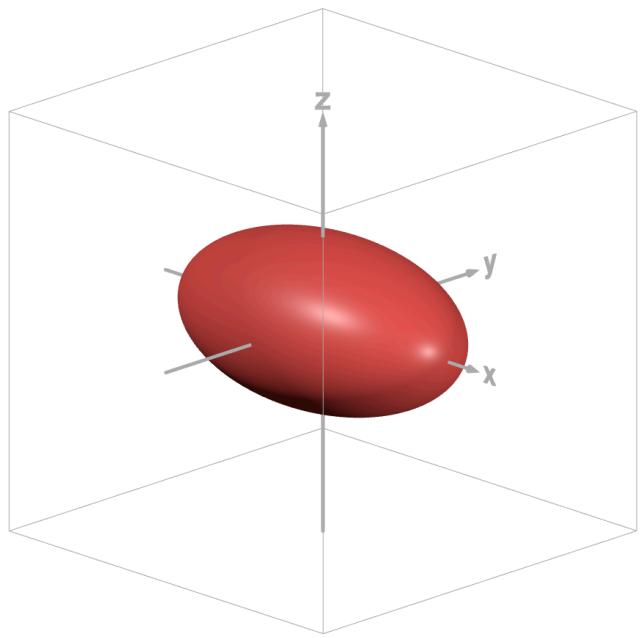


Рис. 2: Форма после канонизации

*Ответ:*  $4z^2 + 3y^2 + x^2 - 12 = 0$

## Часть II

### Задание 1

*Условие:*

- а) Найти решение задачи Коши методом неопределённых коэффициентов:

$$y''' + y'' - 2y' = x^2 + x + e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

- б) Найти общее решение методом Лагранжа:

$$y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}$$

---

*Решение пункта а:*

Найдём общее решение  $\bar{y}$  линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ):

$$y''' + y'' - 2y' = 0$$

Найдём корни характеристического уравнения:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = -2 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Составим общее решение ЛОДУ по полученным корням:

$$\bar{y} = C_0 e^{-2x} + C_1 e^x + C_2$$

Теперь найдём частное решение  $\mathring{y}$  линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ).

Правая часть ЛНДУ состоит из двух функций специального вида  $x^r e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$ . Составим частное решение с неопределёнными коэффициентами:

1.  $x^2 + x$  ( $\alpha = 0, \beta = 0, r = 1$  ( $\lambda_1 = \alpha$ ),  $P_2(x) = x^2 + x$ )
  - $\mathring{y}_1 = x(Ax^2 + Bx + C)$
2.  $e^{2x}$  ( $\alpha = 2, \beta = 0, r = 0, P_0(x) = 0$ )
  - $\mathring{y}_2 = De^{2x}$

Частное решение имеет вид:

$$\mathring{y} = \mathring{y}_1 + \mathring{y}_2 = x(Ax^2 + Bx + C) + De^{2x} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + De^{2x}$$

Найдём коэффициенты:

$$\begin{aligned}\mathring{y}' &= 3Ax^2 + 2Bx + C + 2De^{2x} \\ \mathring{y}'' &= 6Ax + 2B + 4De^{2x} \\ \mathring{y}''' &= 6A + 8De^{2x}\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}
(6A + 8De^{2x}) + (6Ax + 2B + 4De^{2x}) - 2(3Ax^2 + 2Bx + C + 2De^{2x}) = \\
= x^2 + x + e^{2x} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (-6A)x^2 + (6A - 4B)x + (8D)e^{2x} + (6A + 2B - 2C) = x^2 + x + e^{2x} \Rightarrow \\
\Rightarrow \begin{cases} -6A = 1 \\ 6A - 4B = 1 \\ 8D = 1 \\ 6A + 2B - 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = -1 \\ D = \frac{1}{8} \end{cases}
\end{aligned}$$


---

Подставим коэффициентов в  $\dot{y}$ :

$$\dot{y} = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{8}e^{2x}$$

Тогда решение ЛИДУ выглядит следующим образом:

$$y = \bar{y} + \dot{y} = C_0e^{-2x} + C_1e^x + C_2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{8}e^{2x}$$

Решим задачу Коши:

$$y' = -2C_0e^{-2x} + C_1e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 + \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$y'' = 4C_0e^{-2x} + C_1e^x - x - 1 + \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\begin{cases} y''(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4C_0 + C_1 = \frac{1}{2} \\ -2C_0 + C_1 = \frac{3}{4} \\ C_0 + C_1 + C_2 = -\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = -\frac{1}{24} \\ C_1 = \frac{2}{3} \\ C_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Тогда:

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{2}{3}e^x - \frac{1}{24}e^{-2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{4}$$

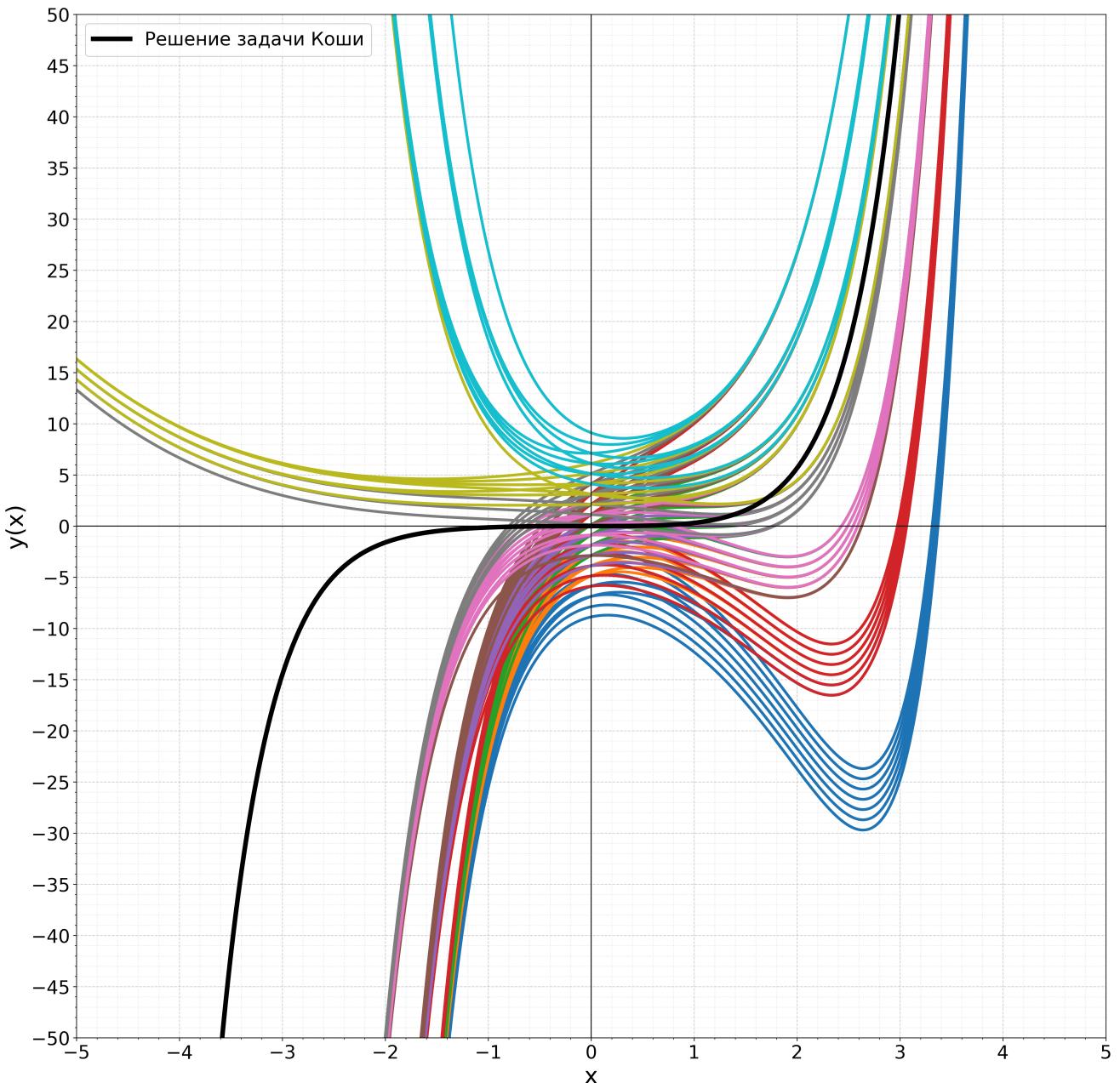


Рис. 3: График интегральных кривых и кривой решения

$$\text{Ответ: } y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{2}{3}e^x - \frac{1}{24}e^{-2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{4}$$

*Решение пункта б:*

Найдём общее решение  $\bar{y}$  линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ):

$$y'' + 16 = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 4i$$

Общее решение:  $\bar{y} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$

Найдём частное решение  $\dot{y}$  с помощью метода Лагранжа:

$$\dot{y} = C_1(x) \cos 4x + C_2(x) \sin 4x$$

Составим условия для функций  $C_1(x), C_2(x)$ :

$$\begin{pmatrix} \cos 4x & \sin 4x \\ -4 \sin 4x & 4 \cos 4x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{16}{\sin 4x} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Вронскиан:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos 4x & \sin 4x \\ -4 \sin 4x & 4 \cos 4x \end{vmatrix} = 4 \cos^2 4x + 4 \sin^2 4x = 4$$

$\forall x \in \mathbb{R} : W(x) \neq 0 \Rightarrow \exists!$  решение уравнения (1)

Найдём решение метод Крамера:

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin 4x \\ \frac{16}{\sin 4x} & 4 \cos 4x \end{vmatrix} = -16 \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos 4x & 0 \\ -4 \sin 4x & \frac{16}{\sin 4x} \end{vmatrix} = 16 \operatorname{ctg} 4x$$

$$C'_1(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} = -4 \quad C'_2(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} = 4 \operatorname{ctg} 4x$$

Решим дифференциальные уравнения для  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ :

$$C_1(x) = -4x + \tilde{C}_1 \quad C_2 = \int \operatorname{ctg} 4x \, d(4x) = \ln |\sin 4x| + \tilde{C}_2$$

Подставим полученные функции в  $\dot{y}$ :

$$\dot{y} = (-4x + \tilde{C}_1) \cos 4x + (\ln |\sin 4x| + \tilde{C}_2) \sin 4x$$

Тогда общее решение выглядит следующим образом:

$$y = \bar{y} + \dot{y} = (-4x + \tilde{C}_1) \cos 4x + (\ln |\sin 4x| + \tilde{C}_2) \sin 4x$$

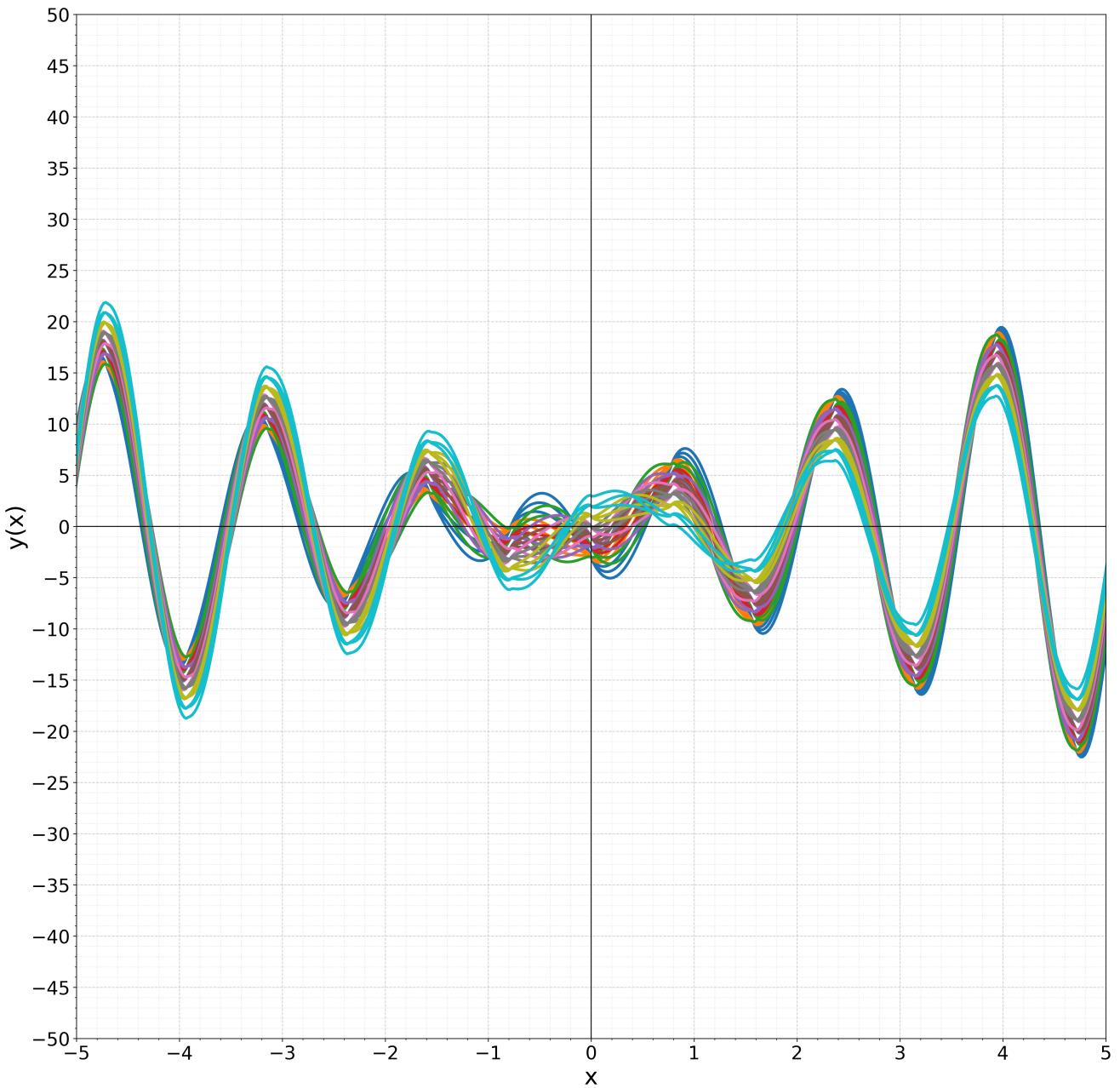


Рис. 4: Изображение некоторых интегральных кривых

*Ответ:*  $y(x) = (-4x + \tilde{C}_1) \cos 4x + (\ln|\sin 4x| + \tilde{C}_2) \sin 4x$

## Задание 2

*Условие:*

Найдите общее решение системы матричным способом.

$$\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}$$

*Решение:*

Запишем систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \\ z'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \Leftrightarrow X'(t) = AX(t)$$

Ищем решение в виде  $X(t) = \Gamma e^{\lambda t}$ .

Найдём собственные числа для матрицы  $A$ :

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

Для каждого собственного числа  $\lambda_i$  найдём соответствующий ему собственный вектор  $\Gamma_i$ :

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$


---

$\lambda_1 = 1$ :

$$(A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Пусть  $z = 1$ , тогда  $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$ :

$$(A - 2\mathcal{I}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Пусть  $z = 1$ , тогда  $\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -1$ :

$$(A + \mathcal{I}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}z \\ y = \frac{3}{5}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Пусть  $z = 5$ , тогда  $\Gamma_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Теперь составим общее решение системы, используя  $\lambda_i$  и  $\Gamma_i$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 C_i e^{\lambda_i x} \Gamma_i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Запишем общее решение в виде системы:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t} \\ y(t) = C_1 e^t + 3C_3 e^{-t} \\ z(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 5C_3 e^{-t} \end{cases}$$

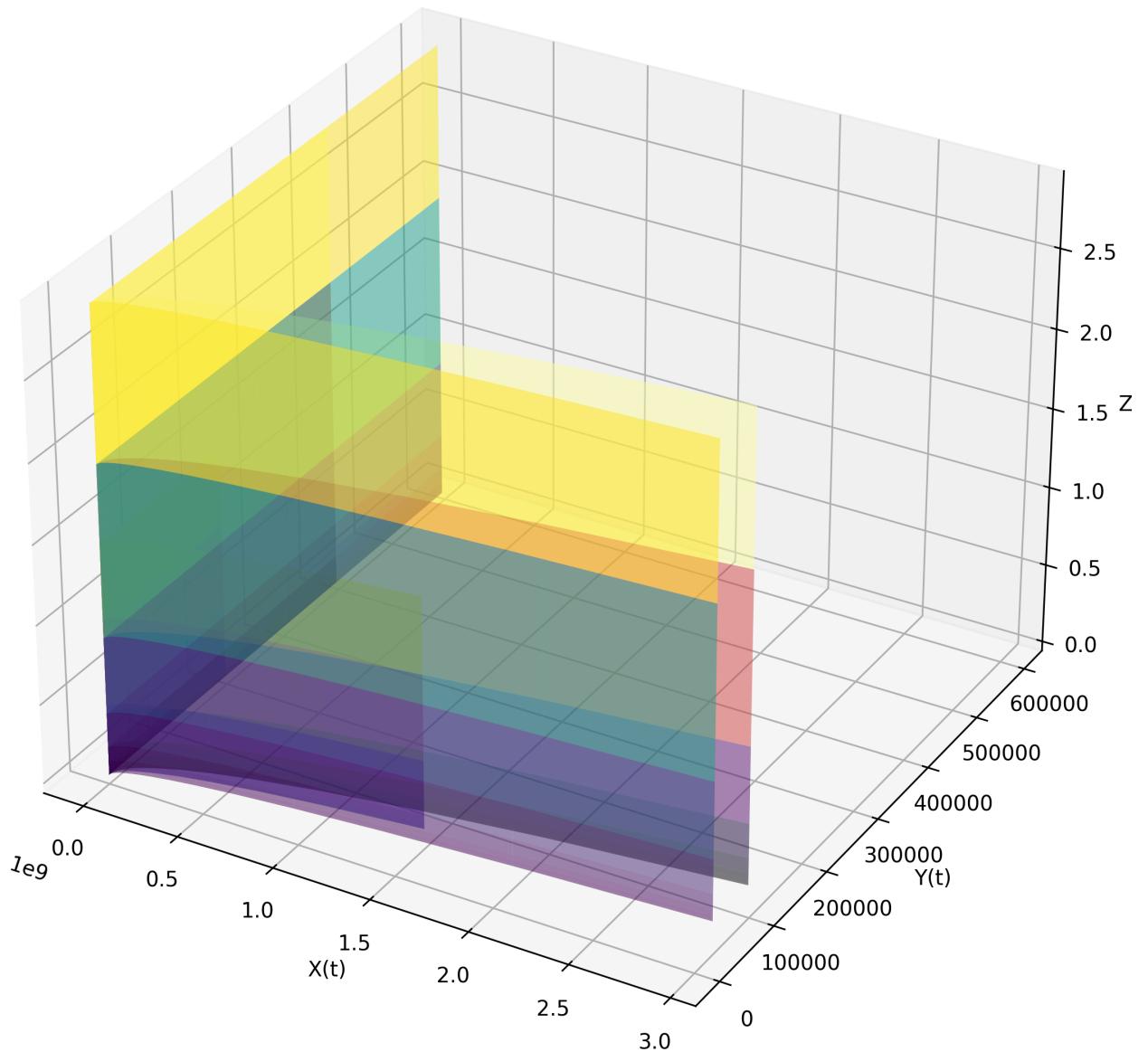


Рис. 5: Изображение некоторых частных решений

*Ответ:*

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t} \\ y(t) = C_1 e^t + 3C_3 e^{-t} \\ z(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 5C_3 e^{-t} \end{cases}$$