Расчётно-графическая работа по специальным разделам высшей математики

Вариант 16

Выполнил: М3101 Симаков Глеб Дмитриевич

.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Часть I

Условие:

Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка с помощью теории квадратичных форм.

$$2x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xz - 12 = 0$$

Решение:

Запишем матрицу квадратичной формы, она же будет матрицей линейного оператора $\mathcal{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Решим вековое уравнение для матрицы A:

$$|A - \lambda\mathcal{J}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)\big((2-\lambda)^2 - 1\big) = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda \in \{1, 3, 4\}$$

Получили собственные числа для оператора $\mathcal{A}$, теперь найдём собственные векторы для каждого из чисел:

$\lambda_1 = 1:$

$$(A - \mathcal{J})x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_1^o = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 3:$

$$(A - 3\mathcal{J})x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_2^o = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 4:$

$$(A - 4\mathcal{J})x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x_1 = \frac{x_3}{2} \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \gamma_3^o = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Векторы $\{\gamma_1^o, \gamma_2^o, \gamma_3^o\}$ образуют базис, в котором матрица А имеет диагональный вид. Это означает, что в таком базисе квадратичная форма имеет канонический вид $a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + c = 0$

Составим правую тройку векторов $\{\gamma_1^o, \gamma_2^o, \gamma_3^o\}$

$$\Gamma = (\gamma_1^o, \gamma_2^o, \gamma_3^o) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\det(\Gamma) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \Gamma - \text{правая тройка}$$

Теперь перейдём от старого базиса к базису из собственных векторов:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ y = y' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{cases}$$

Действие оператора Г: Поворот вокруг оси Oy на $\frac{\pi}{4}$.

$$A_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \text{матрица } A \text{ в базисе } \Gamma$$

Канонический вид уравнения:

$$4z'^2 + 3y'^2 + x'^2 - 12 = 0$$

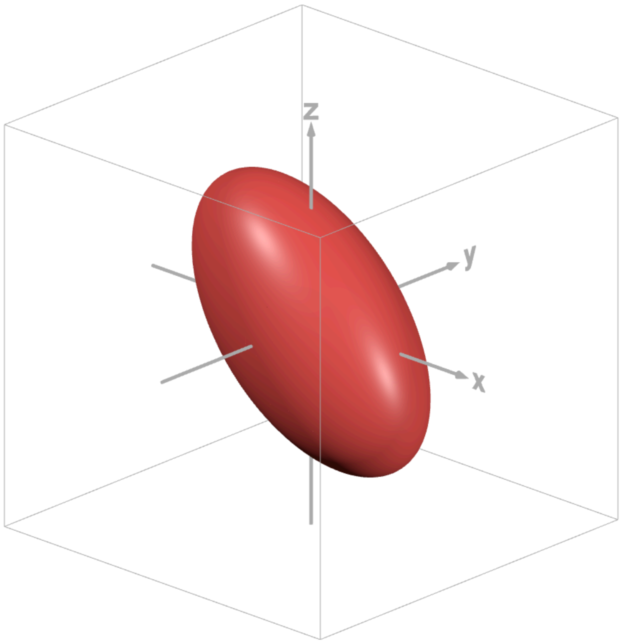

Рис. 1: Форма до канонизации

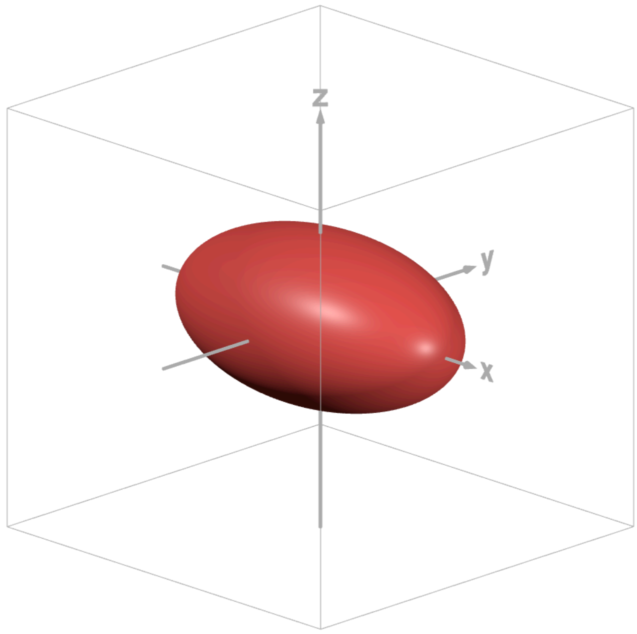

Рис. 2: Форма после канонизации

$\boxed{\textit{Ответ: } 4z^2 + 3y^2 + x^2 - 12 = 0}$

Часть II

Задание 1

Условие:

а) Найти решение задачи Коши методом неопределённых коэффициентов:

$$y''' + y'' - 2y' = x^2 + x + e^{2x}, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = 0$$

б) Найти общее решение методом Лагранжа:

$$y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}$$

Решение пункта а:

Найдём общее решение $\bar{y}$ линейного однородного диффререниального уравнения (ЛОДУ):

$$y''' + y'' - 2y' = 0$$

Найдём корни характеристического уравнения:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{aligned} \lambda_0 &= -2 \\ \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned}\right.$$

Составим общее решение ЛОДУ по полученным корням:

$$\bar{y} = C_0 e^{-2x} + C_1 e^x + C_2$$

Теперь найдём частное решение $\mathring{y}$ линейного неоднородного дифферениального уравнения (ЛНДУ).

Правая часть ЛНДУ состоит из двух функций специального вида $x^r e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$. Составим частное решение с неопределёнными коэффициентами:

1. $x^2 + x$ $(\alpha = 0,\ \beta = 0,\ r = 1\ (\lambda_1 = \alpha),\ P_2(x) = x^2 + x)$
   - $\mathring{y}_1 = x\big(Ax^2 + Bx + C\big)$
2. e^{2x} $(\alpha = 2,\ \beta = 0,\ r = 0,\ P_0(x) = 0)$
   - $\mathring{y}_2 = De^{2x}$

Частное решение имеет вид:

$$\mathring{y} = \mathring{y}_1 + \mathring{y}_2 = x\big(Ax^2 + Bx + C\big) + De^{2x} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + De^{2x}$$

Найдём коэффициенты:

$$\mathring{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C + 2De^{2x}$$
$$\mathring{y}'' = 6Ax + 2B + 4De^{2x}$$
$$\mathring{y}''' = 6A + 8De^{2x}$$

$$\big(6A + 8De^{2x}\big) + \big(6Ax + 2B + 4De^{2x}\big) - 2\big(3Ax^2 + 2Bx + C + 2De^{2x}\big) =$$
$$= x^2 + x + e^{2x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-6A)x^2 + (6A - 4B)x + (8D)e^{2x} + (6A + 2B - 2C) = x^2 + x + e^{2x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -6A = 1 \\ 6A - 4B = 1 \\ 8D = 1 \\ 6A + 2B - 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = -1 \\ D = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Подставим коэффициентов в $\mathring{y}$:

$$\mathring{y} = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{8}e^{2x}$$

Тогда решение ЛНДУ выглядит следующим образом:

$$\boxed{y = \bar{y} + \mathring{y} = C_0 e^{-2x} + C_1 e^x + C_2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{8}e^{2x}}$$

Решим задачу Коши:

$$y' = -2C_0e^{-2x} + C_1e^{x} - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 + \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$y'' = 4C_0e^{-2x} + C_1e^{x} - x - 1 + \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\begin{cases} y''(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4C_0 + C_1 = \frac{1}{2} \\ -2C_0 + C_1 = \frac{3}{4} \\ C_0 + C_1 + C_2 = -\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = -\frac{1}{24} \\ C_1 = \frac{2}{3} \\ C_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Тогда: $y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{x} - \frac{1}{24}e^{-2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{4}$

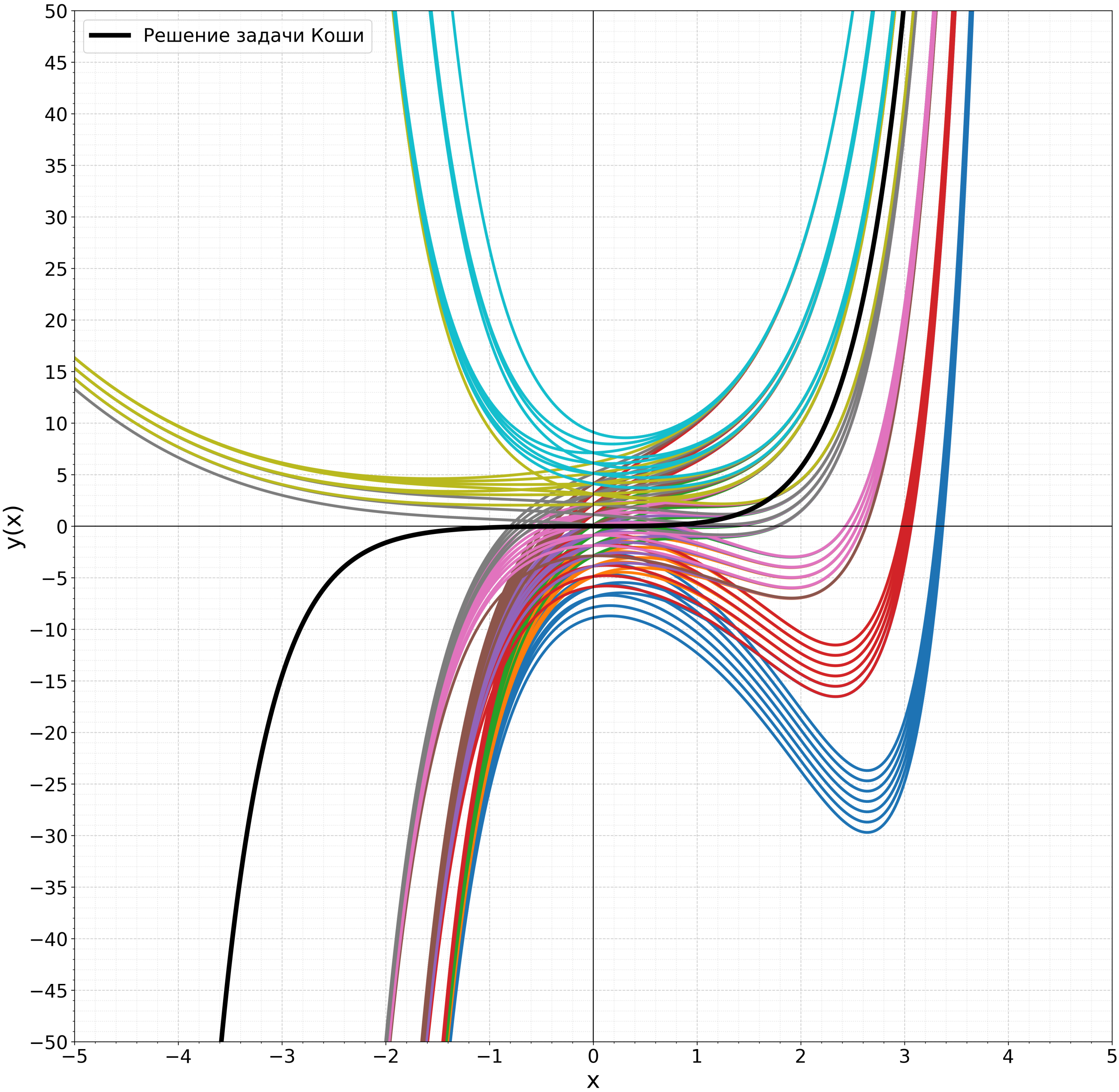

Рис. 3: График интегральных кривых и кривой решения

$\boxed{\textit{Ответ}: y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{x} - \frac{1}{24}e^{-2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{4}}$

Решение пункта б:

Найдём общее решение $\bar{y}$ линейного однородного диффереиального уравнения (ЛОДУ):

$$y'' + 16 = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 4i$$

Общее решение: $\bar{y} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$

Найдём частное решение $\mathring{y}$ с помощью метода Лагранжа:

$$\mathring{y} = C_1(x) \cos 4x + C_2(x) \sin 4x$$

Составим условия для функций $C_1(x), C_2(x)$:

$$\begin{pmatrix} \cos 4x & \sin 4x \\ -4\sin 4x & 4\cos 4x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{16}{\sin 4x} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Вронскиан:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos 4x & \sin 4x \\ -4\sin 4x & 4\cos 4x \end{vmatrix} = 4\cos^2 4x + 4\sin^2 4x = 4$$

$\forall x \in \mathbb{R} : W(x) \neq 0 \Rightarrow \exists!$ решение уравнения (1)

Найдём решение метод Крамера:

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin 4x \\ \frac{16}{\sin 4x} & 4\cos 4x \end{vmatrix} = -16 \qquad W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos 4x & 0 \\ -4\sin 4x & \frac{16}{\sin 4x} \end{vmatrix} = 16 \operatorname{ctg} 4x$$

$$C_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} = -4 \qquad C_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} = 4 \operatorname{ctg} 4x$$

Решим дифференциальные уравнения для $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = -4x + \mathring{C}_1 \qquad C_2 = \int \operatorname{ctg} 4x \; d(4x) = \ln|\sin 4x| + \mathring{C}_2$$

Подставим полученные функции в $\mathring{y}$:

$$\mathring{y} = \left(-4x + \mathring{C}_1\right) \cos 4x + \left(\ln|\sin 4x| + \mathring{C}_2\right) \sin 4x$$

Тогда общее решение выглядит следующим образом:

$$y = \bar{y} + \mathring{y} = \left(-4x + \tilde{C}_1\right)\cos 4x + \left(\ln|\sin 4x| + \tilde{C}_2\right)\sin 4x$$

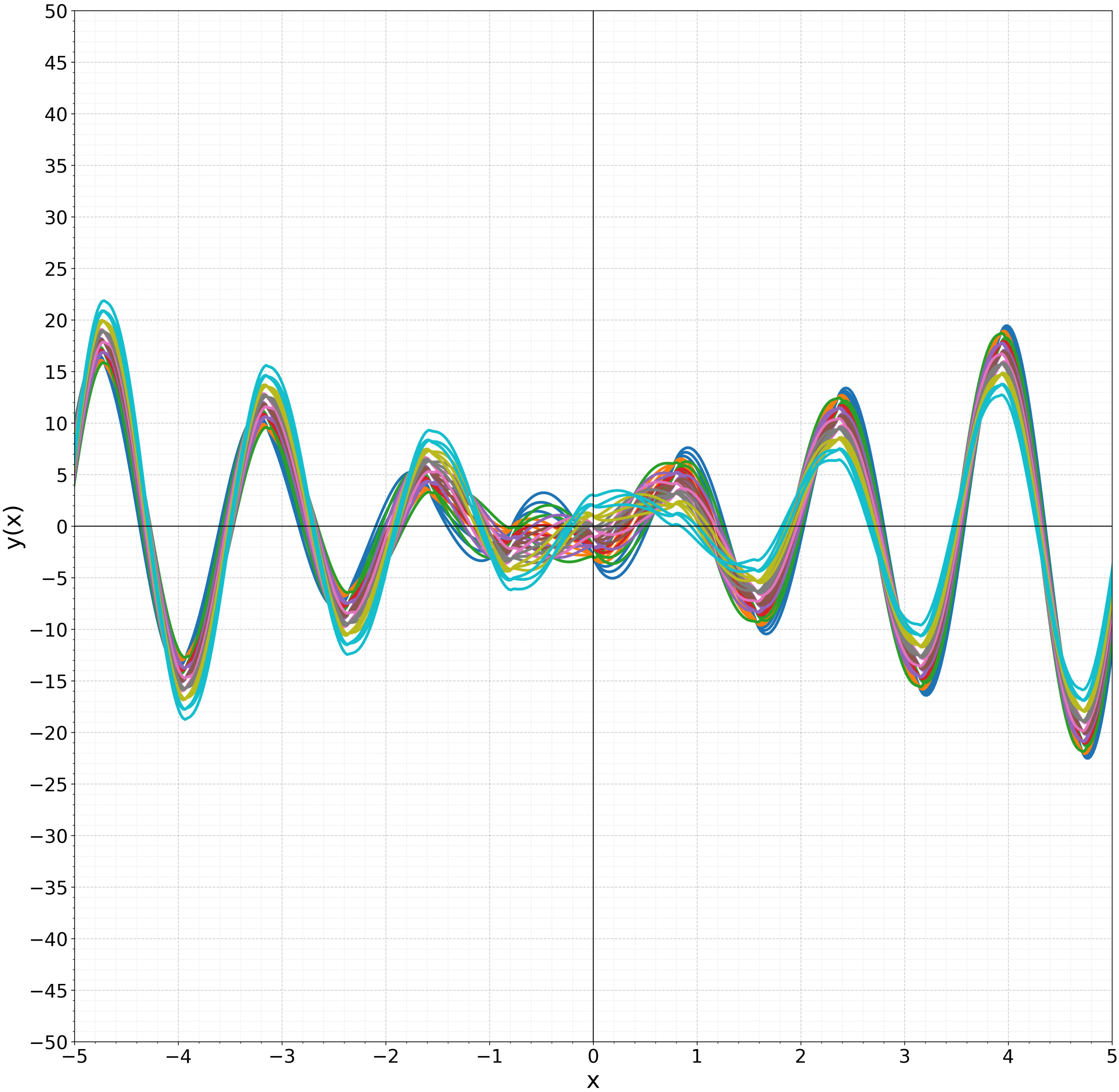

Рис. 4: Изображение некоторых интегральных кривых

$\boxed{\textit{Ответ}\text{: } y(x) = \left(-4x + \tilde{C}_1\right)\cos 4x + \left(\ln|\sin 4x| + \tilde{C}_2\right)\sin 4x}$

Задание 2

Условие:

Найдите общее решение системы матричным способом.

$$\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}$$

Решение:

Запишем систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \\ z'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \Leftrightarrow X'(t) = AX(t)$$

Ищем решение в виде $X(t) = \Gamma e^{\lambda t}$. Найдём собственные числа для матрицы A:

$$|A - \lambda \mathcal{I}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -1 \end{array}\right.$$

Для каждого собственного числа λ_i найдём соответствующий ему собственный вектор Γ_i:

$$(A - \lambda \mathcal{I}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 1$:

$$(A - \mathcal{I}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Пусть $z = 1$, тогда $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$:

$$(A - 2\mathcal{I}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Пусть $z = 1$, тогда $\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -1$:

$$(A + \mathcal{I})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}z \\ y = \frac{3}{5}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Пусть $z = 5$, тогда $\Gamma_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Теперь составим общее решение системы, используя λ_i и Γ_i:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} C_i e^{\lambda_i x}\Gamma_i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Запишем общее решение в виде системы:

Ответ:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t} \\ y(t) = C_1 e^{t} + 3C_3 e^{-t} \\ z(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + 5C_3 e^{-t} \end{cases}$$

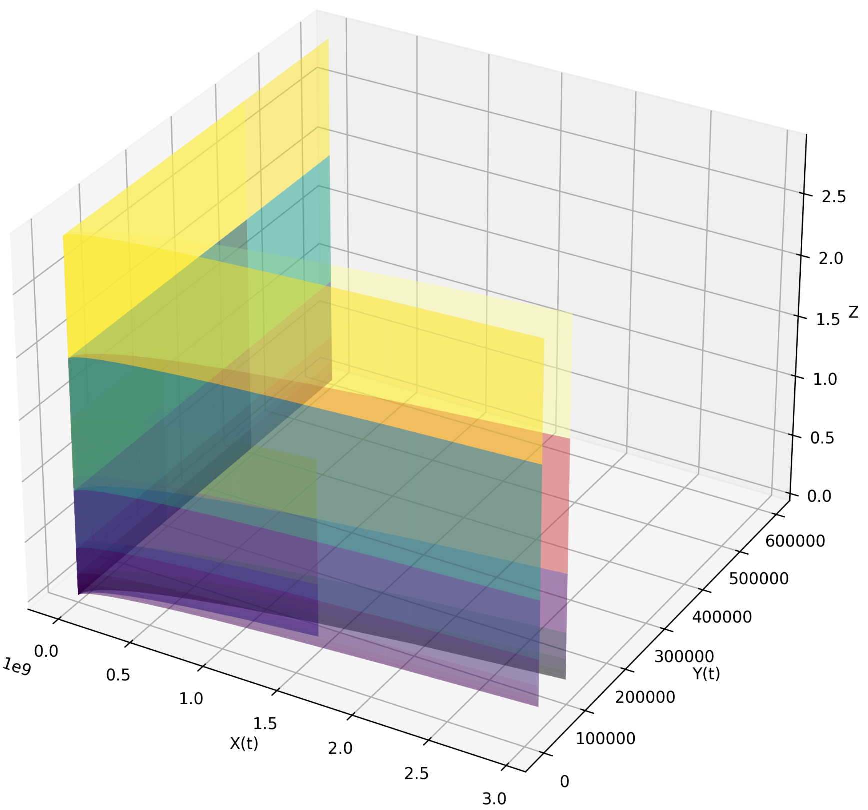

Рис. 5: Изображение некоторых частных решений системы