Exercice 3.

Notons A : " la brebis est attaquée "

L : " le loup est présent ".

On nous dit que $\mathbb{P}(A \mid L) = 0.01$.

1. On note X la v.a qui compte le nombre de brebis attaquées parmi 100 lorsque le loup est présent.

$A \mid L \sim \mathcal{B}(0.01)$.

$X \sim \mathcal{B}(\underbrace{100}_{n}, \underbrace{0.01}_{p})$ (répétition de 100 fois $A \mid L$ de façon indépendante).

$\mathbb{E}(X) = np = 1$.

$Var(X) = np(1-p) = 0.99$.

La loi binomiale est définie par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathcal{C}_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} \quad k \in [\![0; n]\!].$$

Avec $\mathcal{C}_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$\mathbb{P}(X = 2) = 18.48\ \%$.

$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 63\ \%$.

$\mathbb{P}(X < 3) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 92\ \%$.

2. On peut approcher X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

> **Paradigme de Poisson:**
>
> Soit $S_n = \Sigma X_i$ où $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, iid,
> avec $p << 1$. Alors $S_n \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \mathcal{P}(\lambda)$
> avec $\lambda = \mathbb{E}(S_n)$.

On retrouve les mêmes probabilités.

3. Soit V la valeur perçue par l'assurance.

$$V = 2n - 150 \times X.$$

$$\mathbb{E}(V) = 2n - 150\, \mathbb{E}(X)$$

$$= 2 \times 100 - 150 = 50\ €.$$

Exercice 4.

$n = 100$ pommiers.

X_i = production du pommier i, $i \in \{1 \dots n\}$.

Les X_i sont iid avec $X_1 \sim \mathcal{N}(20, 100)$.

1. On note T la production totale du verger.

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Comme T est une somme de v.a. normales indépendantes, $T \sim \mathcal{N}\left(\sum \mathbb{E}(X_i), \sum Var(X_i)\right)$

Donc $T \sim \mathcal{N}(2\,000, 10\,000)$.

2. Probabilité de perdre de l'argent :

$$\mathbb{P}(T < 1800) = \mathbb{P}\left(\frac{T - 2000}{100} < 2\right)$$

$$= \mathbb{P}(\tilde{T} < 2) \text{ avec } \tilde{T} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= 0.02.$$

Probabilité de réussir l'objectif :

$$\mathbb{P}(T > 2100) = \mathbb{P}(\tilde{T} > 1) = 0.15.$$

3. On cherche t tq $\mathbb{P}(T > t) = 0.9$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\tilde{T} > \frac{t - 2000}{100}\right) = 0.9.$$

On trouve $\frac{t - 2000}{100} = -1.28$.

$\rightarrow t = 1871.85$ €.