La zone de rejet de H_0 est définie comme :

$$\{ T > x_{n-1, 1-\alpha} \}$$

où $x_{n-1, 1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté.

Ou autrement dit,

$$\left\{ S^2 > \frac{\sigma_0^2}{n-1} x_{n-1, 1-\alpha} \right\}.$$

Application aux données :

$n-1 = 14.$ $\sigma_0^2 = 100$

$s_n^2 = 156.25.$

Par la table p. 168, $x_{n-1,1-\alpha} = 23.7.$

Donc $\frac{\sigma_0^2}{n-1} x_{n-1,1-\alpha} = 169.29 \geq s_n^2.$

On ne se situe pas dans la zone de rejet.

On ne rejette pas H_0 et on conclut qu'au risque $\alpha = 5\%$, on ne peut pas affirmer que l'appareil est déréglé.

2. a) $\beta(\sigma_1) = \mathbb{P}\left(S^2 < \frac{\sigma_0^2}{n-1} x \mid \sigma = \sigma_1 \right)$

Comme $\sigma = \sigma_1$, $\frac{n-1}{\sigma_1^2} S^2 \sim \chi^2_{n-1}.$

Donc $\beta(\sigma_1) = \mathbb{P}\left(\frac{n-1}{\sigma_1^2} S^2 < \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} x_{n-1,1-\alpha} \right)$

$$\beta(\sigma_1) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{2370}{\sigma_1^2} \right) \text{ avec } Z \sim \chi^2_{n-1}.$$

b) Pour $\sigma_1 = 12.5$, on a :

$\beta = \mathbb{P}(Z < 15.168)$ avec $Z \sim \chi^2_{14}$.

$\rightarrow \beta \in [0,5 ; 0.9]$ d'après la table.

$\rightarrow \beta = 0.63$ (fonction pchisq R).

La puissance du test vaut $1 - \beta = 37\ \%$.

Le test n'est pas très puissant, car n est trop petit et / ou σ_0 et σ_1 sont trop proches.