D'où $IC_{95\%}(\mu) = \left[ \hat{\mu} - t \frac{s}{\sqrt{n}} ; \hat{\mu} + t \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$

$= [11.15 ; 12.85]$.

c) Dans le premier cas, seul $u$ / $t$ changent.

- $90\% < 95\%$, on est plus restrictif, l'intervalle de confiance est moins large.
- $99\% > 95\%$, on est moins restrictif, l'intervalle de confiance est plus large.

(On peut visualiser que $IC_{100\%}(\mu) = \mathbb{R}$).

Dans le second cas, on change $n$, et donc aussi $u$ / $t$. (les ddl des lois changent.)

Avec plus de données, on est plus précis : l'intervalle est moins large.

5. Intervalle de confiance pour $\sigma^2$

a) On a : $n \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$.

Notons $u_{97.5}$ le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $\chi^2_{10}$ ; et $u_{2.5}$ le quantile d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ de cette même loi.

$\mathbb{P}\left( u_{2.5} \leq n \frac{S^2}{\sigma^2} \leq u_{97.5} \right) = 95\%$.

Donc :

$$P\left( \frac{1}{n\, u_{2.5}} \geq \frac{\sigma^2}{S^2} \geq \frac{1}{n\, u_{97.5}} \right) = 95\,\%$$

Et $IC_{95}(\sigma^2) = \left[ \frac{s^2}{n\, u_{97.5}} \; ; \; \frac{s^2}{n\, u_{2.5}} \right]$

$= [0.611 \; ; \; 3.858]$

b) On procède de la même façon pour $\mu$ inconnu, en utilisant la seconde formule et les quantiles de la loi $\chi^2_{n-1}$. On obtient :

$$IC_{95}(\sigma^2) = \left[ \frac{s^2}{(n-1)\, u_{97.5}} \; ; \; \frac{s^2}{(n-1)\, u_{2.5}} \right]$$

$= [0.658 \; ; \; 4.638]$

Exercice 2.

1. $X$ = v.a. représentant le nb de tomates de diamètre inférieur à 8.

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$ (répétition de $n$ épreuves de Bernoulli indépendantes)

Le succès est défini comme "diamètre < 8".

On sait que $E(X) = np$, par la méthode des moments, on peut proposer $\hat{p} = \frac{\overline{X}}{n} = \frac{X}{n}$

car il n'y a pas de répétition.

On peut aussi dire que $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ avec $Y_i \sim \mathcal{B}(p)$, $Y_i$ iid. Dans ce cas, $\mathbb{E}(Y) = p$, et $\hat{p} = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum Y_i$, ce qui revient à $\hat{p} = \frac{X}{n}$.

Pour obtenir une loi pour $\hat{p}$, on utilise le TLC: (appliqué sur les $Y_i$):

$$\frac{X - np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1). \quad n \to \infty.$$

$$\Rightarrow \frac{n\hat{p} - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad n \to \infty.$$

2. On considère que $\sqrt{p(1-p)} \approx \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$.

On note $u$ le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors:

$$\mathbb{P}\left(-u \leq \sqrt{n} \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \leq u\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\Rightarrow IC_{1-\alpha}(p) = \left[\hat{p} \pm u\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

3. $p \in [0, 1]$.

On note $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$

$$p \to p(1-p) = p - p^2.$$

$f$ est un polynôme d'ordre 2, dont les racines sont 1 et 0. Son premier terme est négatif, donc le <u>maximum</u> de $f$ est atteint entre 0 et 1.

$$f'(p) = 1 - 2p = 0 \iff p = \frac{1}{2}.$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ est le maximum de $f$.

On prend $\alpha = 0.05$. Alors $u = 1.96 \simeq 2$.

$$\hat{p}(1-\hat{p}) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} \leq \frac{1}{2}.$$

Et donc $IC_{1-\alpha}(p) \simeq \left[\hat{p} - \sqrt{\frac{1}{n}} ; \hat{p} + \sqrt{\frac{1}{n}}\right]$.

fonctionne pour $p \simeq 1/2$.

4. $n = 100$, $x = 20$. $\hat{p} = 0.2$.

a) $IC(p) = [0.12 ; 0.28]$.

b) $IC(p) = [0.1 ; 0.3]$.

$n = 100$, $x = 50$, $\hat{p} = 0.5$.

a) $IC(p) = [0.40 ; 0.60]$.

b) $IC(p) = [0.4, 0.6]$.

5. La méthode exacte n'utilise pas l'approximat° précédente. Les intervalles exacts sont très proche ($10^{-3}$) de ceux obtenus avec approximation.

6. La méthode de la q.2) se base sur le TLC, elle donne de bons résultats si n est grand.

La méthode de la q.3) nécessite en plus d'avoir $p \approx 0.5$. Par ailleurs, elle ne vaut que pour $\alpha = 0.05$.