Exercice 2.

1. Soit $X \sim \mathcal{B}(\alpha, \alpha)$. Alors :

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\alpha)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\alpha-1} \quad x \in [0,1].$$

$$= \left(B(\alpha,\alpha)\right)^{-1} \times \left[x(1-x)\right]^{\alpha-1} \quad x \in [0,1].$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \quad \forall \alpha > 0.$$

$$Var(X) = \frac{1}{4 \times (2\alpha+1)}.$$

2. Calcul de la vraisemblance :

$$V(x, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} f_\alpha(x_i)$$

$$= \left(B(\alpha,\alpha)\right)^{-n} \prod_{i=1}^{n} \left[x_i(1-x_i)\right]^{\alpha}.$$

Log-vraisemblance :

$$\mathcal{L}(x, \alpha) = -n \log(B(\alpha, \alpha)) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n} (\log(x_i) + \log(1 - x_i)).$$

3. Méthode des moments.

a) $$V(X) = \frac{1}{4(2\alpha + 1)}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{V(X)} \times \frac{1}{4} - 1\right).$$

b) On note $\hat{\sigma}^2$ la variance empirique.

Ici, l'espérance est connue, on peut utiliser :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \frac{1}{2}\right)^2$$

Un estimateur de α est $\hat{\alpha}$:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\hat{\sigma}^2} - 1\right)$$

4. L'estimateur des moments donne $\hat{\alpha} = 5.13$.

D'après la table fournie, le maximum de vraisemblance devrait être atteint entre 5.15 et 5.20.

Les deux informations sont cohérentes.