Système Linéaire (1) :

Exercice n°1 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 & (L_1) \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 & (L_2) \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 & (L_3) \end{cases}$$

Etape 1 : Supprimer la première variable des deux dernières équations à l'aide des formules ci-dessous :

$$\boldsymbol{L_2 = L_2 - L_1}$$

$$= -2x_1 - x_2 + x_3 \quad = -3 - x_1 + x_2 - x_3 \quad = -1$$

$$= -2x_1 \cancel{- x_2 + x_3} = -3 - x_1 \cancel{+ x_2 - x_3} = -1$$

$$= -x_1 = -4$$

$$\boldsymbol{L_3 = L_3 - 3L_1}$$

$$= 3x_1 - 2x_2 + x_3 \quad = 1 - 3(x_1 + x_2 - x_3 \quad = -1)$$

$$= 3x_1 - 2x_2 + x_3 \quad = 1 - 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -3$$

$$= \cancel{3x_1} - 2x_2 + x_3 \quad = 1 \cancel{-3x_1} - 3x_2 + 3x_3 + 3$$

$$= -x_2 + 4x_3 = 2$$

Etape 2 : Supprimer le x_2 de la dernière équation à l'aide de l'opération suivante :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 & (L_1) \\ -x_1 = -4 & (L_2) \\ -x_2 + 4x_3 = 2 & (L_3) \end{cases}$$

$L_3 = L_3 + L_2$

$-x_2 + 4x_3 = 2 + -x_1 = -4$

$-x_2 + 4x_3 = 2 - x_1 = -4$

$x_1 - x_2 + 4x_3 = -2$

On termine donc avec :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 & (L_1) \\ x_1 = -4 & (L_2) \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -2 & (L_3) \end{cases}$$

Système Linéaire (2) :

Exercice n°2 :

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 = 2 & (L_1) \\ -2x_1 - 5x_2 = -3 & (L_2) \end{cases}$$

Etape 1 : Calculer le déterminant de la matrice

$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ = (-1)(-5) – (-3)(-2)

= 5 – 5 = 0

= 0

X1 = $\dfrac{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}}$ = 2(-5) – (-3)(-3)

= -10 – 9 = 1

x = -1

X1 = $\frac{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}}$ = (-1) (-3)- (-2)(-2)

= 3 + 4 = 7

x = -7

Inversion d’une matrice :

A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Etape 1 : Barrer une ligne et une colonne :

A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Il nous reste

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Etape 2 : On multiplie en diagonale :

0 x 0 = 0 et 2 x 1 = 2

On soustrait ensuite les 2 :

0 – 2 = -2

- 2 représente le mineur du coefficient

Etape 3 : On multiplie le mineur et le coefficient :

0 x -2 = - 0

On reproduit l'étape :

A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Il reste

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On multiplie :

1x0 = 0 et 0 x 2 = 0

0-0   = 0

Ensuite

- 1 x 0 = -0

On continue

A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Il reste :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1x1 =1

0x0=0

1-0   =1

Ensuite

1 x 1 =1

Une fois ceci fait on additionne les trois cofacteurs (mineurs) :

(-0) + 0 + 1 = 1

Le déterminant de cette matrice est donc -1.

Etape 1 Transposer la matrice de départ :

A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ce qui donne

Com(A)= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On calcule ensuite le déterminant des matrices mineurs :

Com(A) $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice inversée est donc $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$