
EI - ST5 Pollution électromagnétique

Optimisation d'une chambre anéchoïque

du 13 au 18 novembre 2023

Gif sur Yvette

BARIL Eloïse
BONNAND Étienne
BOUTOUATOU Ouissal
MAHIOU Dany
SUN Mingyang
ZHU Bowen

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Etat de l'art	2
1.2	Présentation du projet	2
2	PARTIE I : Etude des matériaux absorbants	2
2.1	Absorbant mono-couche	3
2.1.1	Modélisation du problème	3
2.1.2	Vérification des résultats	3
2.1.3	Résultats numériques	4
2.2	Absorbant triple couche	5
2.2.1	Modélisation du problème :	5
2.2.2	Validation du modèle :	6
2.2.3	Résultats numériques :	6
2.3	Etudes complémentaires :	6
2.3.1	Effet de l'épaisseur dans le cas mono-couche et triple-couche :	6
2.3.2	Minimum global mono couche	8
2.3.3	Comparaison modèle mono couche et modèle triple couche :	8
2.3.4	Effet des incertitudes :	9
2.3.5	Conclusion sur l'aspect commercial :	9
3	PARTIE II : Optimisation de la chambre anéchoïque	10
3.1	Modélisation mathématique du problème	11
3.1.1	Résultats théoriques	11
3.2	Paramètres du modèle - taille, fréquence et matériau	12
3.3	Détermination théorique de $J'(\chi)$	14
3.3.1	Avec matériau réfléchissant sur tous les bords	14
3.3.2	Avec une frontière Γ_{air} à l'air libre	16
3.4	Algorithme d'optimisation	17
3.5	Résultats	18
3.5.1	Référence	18
3.5.2	Absorbant vs. Réfléchissant	20
3.5.3	Choisir le volume de matériau β (V_{obj})	20
3.5.4	Mur plan	23
3.5.5	Géométrie fractale	24
4	Conclusion	26

1 Introduction

1.1 Etat de l'art

Dans le domaine des ondes électromagnétiques et des chambres anéchoïques, la recherche se concentre sur le développement de structures permettant de minimiser les réflexions indésirables et donc d'assurer une absorption efficace des ondes incidentes. Ces chambres anéchoïques sont essentielles dans divers domaines, notamment la recherche en télécommunications, la caractérisation des antennes, et les essais de compatibilité électromagnétique. Les approches conventionnelles reposent sur l'utilisation de matériaux absorbants spécifiques, souvent constitués de polymères spéciaux ou de mousses absorbantes, pour revêtir les parois des chambres. Ces matériaux ont démontré leur efficacité dans une gamme de fréquences, mais présentent des limites en termes de bande passante, d'épaisseur et de coût.

Les recherches actuelles s'orientent vers l'exploration de nouvelles alternatives, notamment des matériaux semi-absorbants, qui pourraient offrir une combinaison optimale d'absorption et de réflectivité contrôlée. L'objectif est d'améliorer la performance des chambres anéchoïques, les rendant plus flexibles et adaptées à des applications spécifiques.

Les avancées récentes dans ce domaine explorent également des concepts novateurs tels que l'utilisation de métamatériaux et de structures composites pour optimiser les propriétés d'absorption et de réflexion des matériaux. Ces approches ouvrent de nouvelles perspectives pour la conception de chambres anéchoïques plus performantes.

En parallèle, des efforts sont déployés pour modéliser de manière plus précise le comportement des ondes électromagnétiques dans ces environnements complexes. Les simulations numériques et les modèles théoriques sont devenus des outils essentiels pour prédire et comprendre le rendement des chambres anéchoïques.

L'évolution rapide de la technologie des chambres anéchoïques souligne l'importance continue de la recherche dans ce domaine, tant pour répondre aux besoins actuels que pour anticiper les exigences futures en matière de tests électromagnétiques.

1.2 Présentation du projet

Le projet de start-up Mumure s'inscrit dans le domaine de la gestion des ondes de la 5G, visant à définir une géométrie optimale pour des parois constituées d'isolants et de matériaux réfléchissants.

Notre approche vise à minimiser l'énergie des ondes électromagnétiques et à déterminer la forme optimale d'une chambre anéchoïque. Contrairement aux chambres anéchoïques classiques dotées de parois absorbantes, notre projet propose la création d'une chambre semi-anéchoïque optimale, réduisant ainsi considérablement le besoin de matériaux absorbants.

Dans cette configuration, la source électromagnétique est dirigée vers une paroi plane, avec toutes les autres parois, y compris le plafond et le sol, étant totalement réfléchissantes. L'exception concerne la paroi en face de la source, composée de deux matériaux distincts : l'un absorbant et l'autre réfléchissant.

Par exemple, la forme des parois est préétablie, et notre objectif est de déterminer la distribution optimale des inclusions absorbantes dans la paroi en face de la source. L'enjeu est ainsi de concevoir une chambre de manière efficiente afin de minimiser l'impact énergétique des ondes électromagnétiques, ouvrant ainsi des perspectives innovantes dans le domaine de la gestion des ondes 5G.

Dans cette perspective, nous cherchons à minimiser davantage l'énergie des ondes, crucial pour simuler de manière plus réaliste un environnement sans interférences, propice aux tests d'antenne et autres appareils de télécommunications.

2 PARTIE I : Etude des matériaux absorbants

Dans cette partie, on se propose de déterminer la conductivité et l'épaisseur de l'absorbant sur nos parois de chambre anéchoïque afin d'obtenir une réflexion convenable (-10dB ou moins). Nous validons ensuite la bande de fréquence avec laquelle nous pouvons fonctionner. Toute l'étude est faite en incidence normale.

2.1 Absorbant mono-couche

2.1.1 Modélisation du problème

Pour cette configuration, en 1, une seule couche d'absorbant de permittivité relative ϵ_r et d'épaisseur e données est considérée. Celle-ci est posée sur un conducteur parfait.

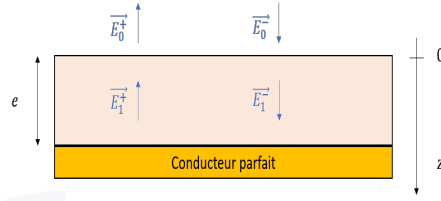


FIGURE 1 – Le modèle mono couche

En considérant les réflexions multiples opérant dans l'absorbant et la réflexion totale sur le conducteur parfait, on obtient les expressions suivantes :

$$\vec{E}_1^+ = \frac{t}{1 - r \exp(-jek)} \vec{E}_0^+, \vec{E}_1^- = \frac{-t \exp(-2jek)}{1 - r \exp(-2jek)} \vec{E}_0^+ \text{ et donc, } \vec{E}_0^- = \left[r - \frac{tt' \exp(-2jek)}{1 - r \exp(-2jek)} \right] \vec{E}_0^+$$

Avec :

- $k = \mu_0 \epsilon \omega^2 - j \mu_0 \sigma \omega$ le nombre d'onde dans le milieu absorbant et $k_0 = \frac{\omega}{c}$ dans l'air.
- $r = \frac{k - k_0}{k + k_0}$: le coefficient de réflexion dans l'air
- t : le coefficient de transmission de l'air dans l'absorbant, $t = 1 + r$.
- t' : le coefficient de transmission de l'absorbant dans l'air, $t' = 1 - r$.

Ainsi, nous pouvons calculer $R = \frac{|\vec{E}_0^-|^2}{|\vec{E}_0^+|^2}$.

2.1.2 Vérification des résultats

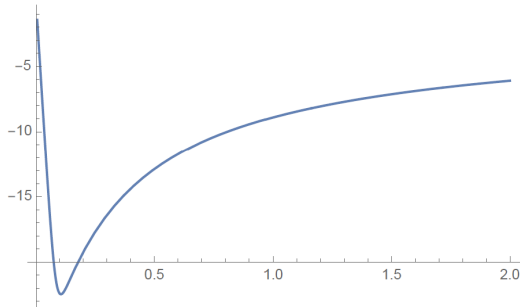


FIGURE 2 – $\sigma_{opti} = 0.105 S/m$, $R_{min} = -22.46 dB$

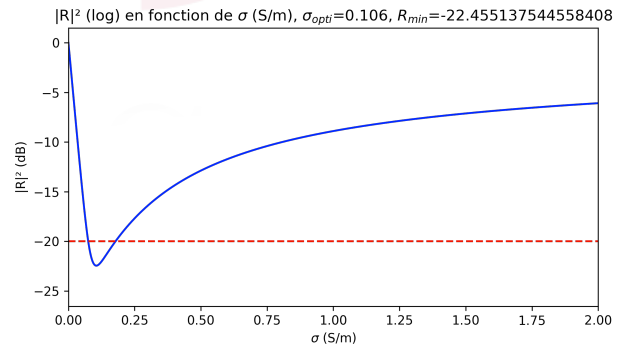


FIGURE 3 – Résultat pour les mêmes paramètres

Les résultats de référence nous sont donnés pour $e = 10cm$, $f = 8GHz$, $\epsilon_r = 1.2$ en 2 et 4 et nos résultats en 3 et 5.

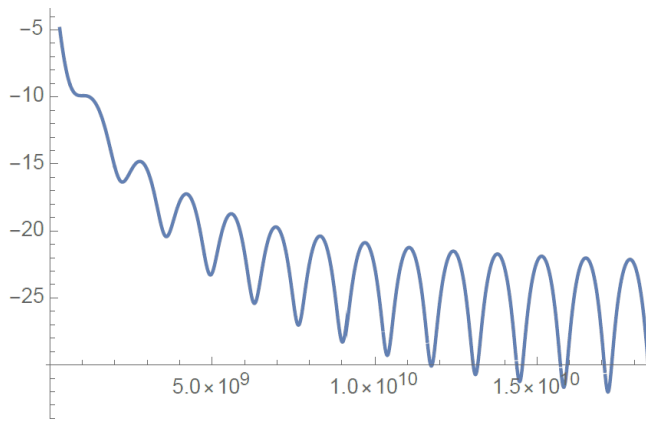
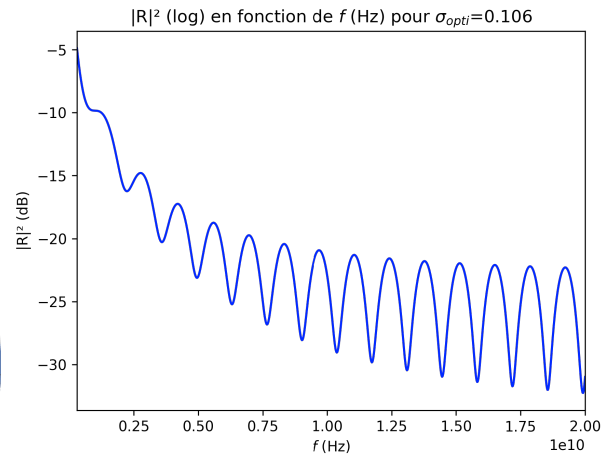
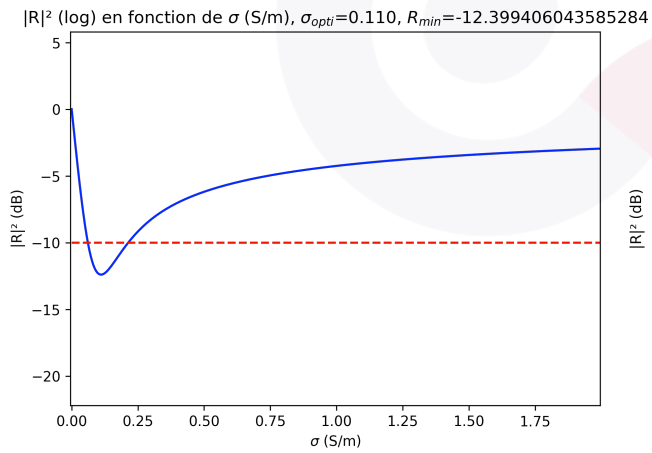
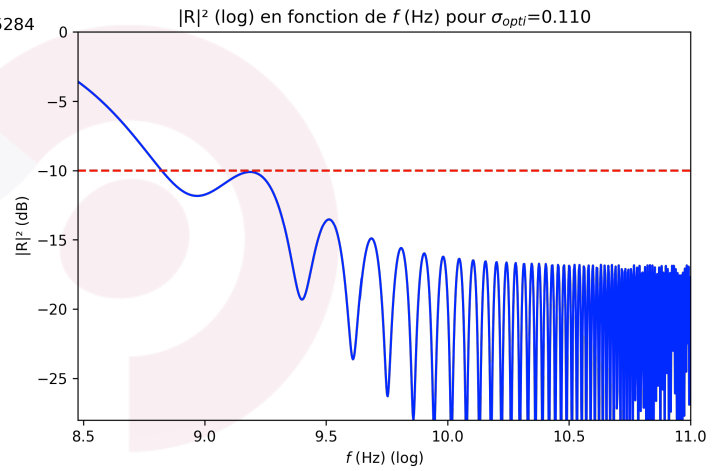
FIGURE 4 – $\sigma_{opti} = 0.105 S/m$, $f \in [0.3GHz, 11GHz]$ 

FIGURE 5 – Résultat pour les mêmes fréquences

2.1.3 Résultats numériques

Pour notre étude, on prend les paramètres $\epsilon_r = 1.4$, $e = 8cm$ et $f = 2GHz$. On trouve une absorbance optimale de $-12.40dB$ pour $\sigma_{opti} = 0.110 S/m$. La largeur de bande à $-10dB$ est $\sigma \in [0.062 S/m, 0.214 S/m]$. A partir de la fréquence $f = 0.63GHz$, l'absorbance d'au moins $-10dB$ est garantie.

FIGURE 6 – Réflectivité, $\sigma \in [0 S/m, 2 S/m]$ FIGURE 7 – Réflectivité pour $f \in [0.3GHz, 100GHz]$

2.2 Absorbant triple couche

On veut maintenant augmenter l'absorption sur les bords. Pour cela, on multiplie les couches d'absorbant, les trois couches étant homogènes de même épaisseur e mais de conductivités différentes : la conductivité augmente lorsque les couches se rapprochent du conducteur parfait.

Notre objectif est de modéliser ce problème, puis de calculer numériquement les trois conductivités des trois couches pour minimiser la réflectivité totale.

On opte pour une résolution matricielle à l'aide des matrices de transmissions pour l'étude de ce problème.

2.2.1 Modélisation du problème :

On se place dans le cas de de la figure 8.

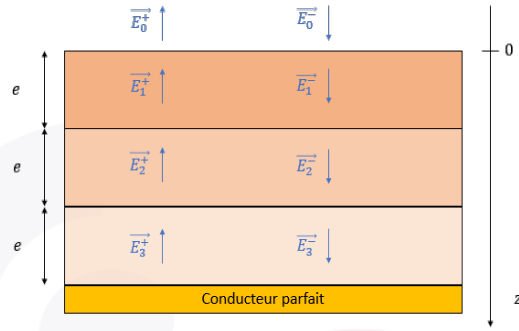


FIGURE 8 – Le modèle triple couche

Au niveau de chaque interface $i \in \{0, 1, 2\}$ qui correspond à $z = i \times e$ on définit les coefficients de réflexion et transmission suivants :

- $r_{i,1}$ le coefficient de réflexion au niveau $z = i \times e^-$
- $r_{i,2}$ le coefficient de réflexion au niveau $z = i \times e^+$
- $t_{i,1}$ le coefficient de transmission au niveau $z = i \times e^-$
- $t_{i,0}$ le coefficient de transmission au niveau $z = i \times e^+$

L'étude du champ électrique au niveau des interfaces donne les résultats suivant $\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{i+1}^+ &= t_{i,1} \vec{E}_i^+ + r_{i,2} \vec{E}_{i+1}^- \\ \Rightarrow \vec{E}_i^+ &= \frac{1}{t_{i,1}} \vec{E}_{i+1}^+ - \frac{r_{i,2}}{t_{i,1}} \vec{E}_{i+1}^- \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \vec{E}_i^- &= r_{i,1} \vec{E}_i^+ + t_{i,2} \vec{E}_{i+1}^- \\ \Rightarrow \vec{E}_i^- &= \frac{r_{i,1}}{t_{i,1}} \vec{E}_{i+1}^+ + \left(t_{i,2} - \frac{r_{i,2} r_{i,1}}{t_{i,1}} \right) \vec{E}_{i+1}^- \end{aligned}$$

Ainsi au niveau des interfaces on peut écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_i^+ \\ \vec{E}_i^- \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{t_{i,1}} & -\frac{r_{i,2}}{t_{i,1}} \\ \frac{r_{i,1}}{t_{i,1}} & t_{i,2} - \frac{r_{i,2} r_{i,1}}{t_{i,1}} \end{pmatrix}}_{I_i} \begin{pmatrix} \vec{E}_{i+1}^+ \\ \vec{E}_{i+1}^- \end{pmatrix}$$

De plus, il faut également modéliser la propagation des ondes à travers les couches. On a la relation matricielle suivante pour $i \in \{0, 1, 2\}$:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_i^+ \\ \vec{E}_i^- \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \exp(jk_{i+1}e) & 0 \\ 0 & \exp(-jk_{i+1}e) \end{pmatrix}}_{C_i} \begin{pmatrix} \vec{E}_{i+1}^+ \\ \vec{E}_{i+1}^- \end{pmatrix}$$

Ainsi en combinant les relations trouvées au niveau des interfaces et des couches, on trouve :

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_0^+ \\ \vec{E}_0^- \end{pmatrix} = I_0 C_0 I_1 C_1 I_2 C_2 \begin{pmatrix} \vec{E}_3^+ \\ \vec{E}_3^- \end{pmatrix}$$

Or on a au niveau de l'interface $z = 3e$ un conducteur parfait, on trouve : $\vec{E}_3^+ = -\vec{E}_3^-$

ce qui donne : $\begin{pmatrix} \vec{E}_3^+ \\ \vec{E}_3^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{E}_3^+$.

2.2.2 Validation du modèle :

On teste notre modèle pour une valeur de fréquence $f = 8$ GHz, une épaisseur totale $e_{tot} = 10$ cm, et une même permittivité pour les 3 couche $\epsilon_r = 1.2$. On trouve une réflectivité totale minimale $|R_{min}|^2 = -22.7$ dB, qui est proche du minimum trouvé pour le test de validation du modèle monocouche, et des conductivité $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0.085, 0.105, 0.16)$ ce qui représente bien des conductivités qui augmentent dans le sens des z croissants.

Un second test possible est de considérer la même conductivité dans les 3 couches qui soit égale à la conductivité de la réflectivité minimale dans le cas monocouche ($\sigma_{opt} = 0.105$) on retrouve la valeur $|R_{min}|^2 \approx -22.5$ dB.

Ainsi, notre modèle est validé.

2.2.3 Résultats numériques :

On se place dans le cas d'un plan absorbant d'épaisseur totale 12 cm ce qui donne $e = 4$ cm. On fixe les autres paramètres, la fréquence $f = 2$ GHz et la permittivité relative $\epsilon_r = 1.4$.

On trouve une réflectivité totale minimale (locale) $|R_{min}|^2 = -28.86$ dB et des conductivités $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0.03, 0.18, 0.5)$ (S/m), ce qui représente bien des conductivités croissantes avec z .

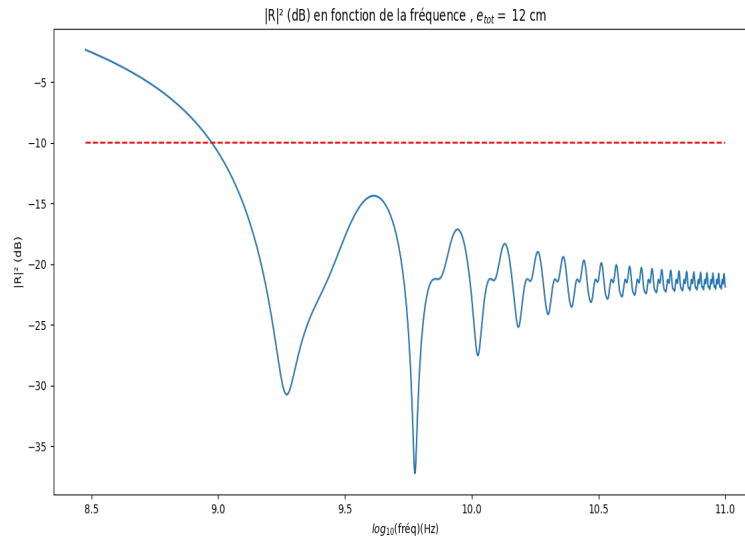
2.3 Etudes complémentaires :

Nous allons maintenant conduire une étude complémentaire axée sur l'impact des autres paramètres du problème, en nous interrogeant sur la meilleure manière de rentabiliser notre produit. Nous enrichissons notre analyse en comparant d'abord la mono-couche et la triple-couche, puis en examinant l'influence de l'épaisseur sur la réflectivité. Ensuite, nous rechercherons un minimum global pour la mono-couche (à fréquence fixée). Enfin, nous nous pencherons sur l'effet des incertitudes liées au choix du matériau pour notre chambre anéchoïque.

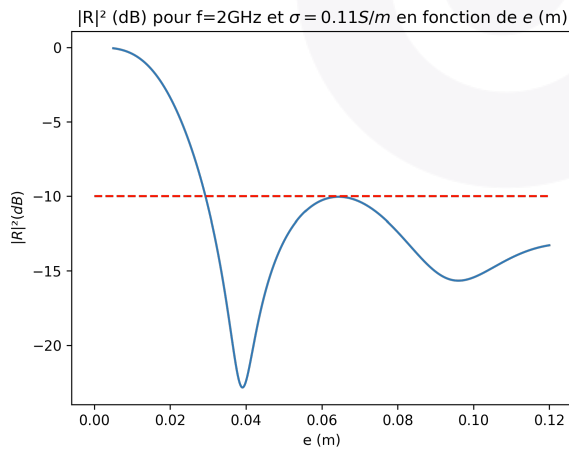
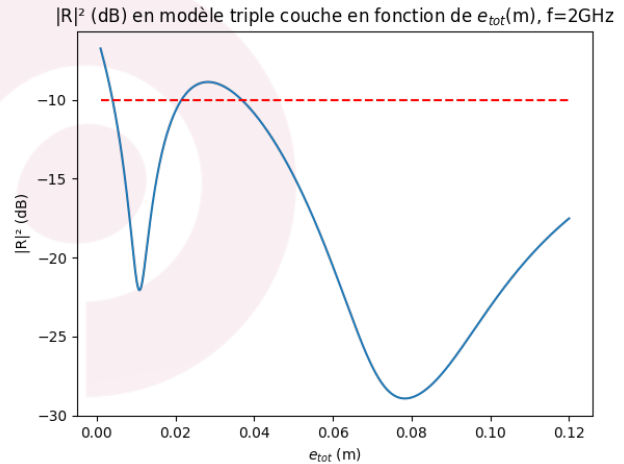
2.3.1 Effet de l'épaisseur dans le cas mono-couche et triple-couche :

Une fois que les matériaux à utiliser ont été choisis (détermination des conductivités optimales). Pour la première fois dans l'étude, on fait varier l'épaisseur pour optimiser l'absorbance de la couche. En effet, on a un compromis sur le prix des absorbants à choisir : il faut que la quantité de matière soit la plus faible possible tout en s'assurant que la taille de la couche reste réaliste (autour du cm).

On cherche alors l'épaisseur minimale dans le cas mono-couche et triple couche pour avoir une réflectivité minimale (-10dB ou mieux).

FIGURE 9 – Réflectivité en modèle triple couche pour $f \in [0.3GHz, 100GHz]$

les tracés 10 et 11 présentent respectivement la variation de la réflectivité en fonction de l'épaisseur pour des conductivités prises égales aux valeurs optimales.

FIGURE 10 – Réflectivité en fonction de l'épaisseur de la mono-couche, $e_{opti} = 3.91cm$, $e_{10dB} = 2.93cm$ FIGURE 11 – Réflectivité en fonction de l'épaisseur de la triple couche, $e_{opti} \approx 8cm$

On constate qu'on peut atteindre des performances beaucoup plus intéressantes pour des épaisseurs faibles ($e \approx 3.9$ cm pour le modèle mono couche au lieu de $e = 8$ cm, et $e_{tot} \approx 8$ cm au lieu de $e_{tot} = 12$ cm dans le modèle triple couche).

D'un point de vue fabrication, la variation du minimum en fonction de l'épaisseur n'est pas si forte autour du minimum, donc avec une précision de fabrication de 0.1cm, on peut obtenir une bonne approximation du minimum, qui est tout de même à ≈ -30 dB dans le modèle triple couche.

2.3.2 Minimum global mono couche

On étudie dans cette section le comportement de l'absorbant monocouche à une fréquence $f = 2GHz$ en fonction des 2 variables épaisseur et conductivité en 12. On retrouve la valeur minimale de la réflectivité qui est atteinte pour les valeurs $e = 3.9cm$ et $\sigma = 0.125S/m$.

$|R|^2$ (log) en fonction de e (m) et σ pour $f=2GHz$

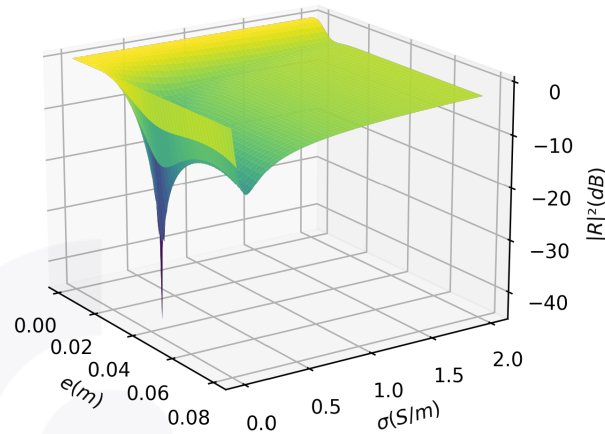


FIGURE 12 – Réflectivité en fonction de l'épaisseur et de la conductivité, 4e4 points

2.3.3 Comparaison modèle mono couche et modèle triple couche :

Comparaison pour une même épaisseur du monocouche et du 3 couches sur une bande de fréquence donnée.

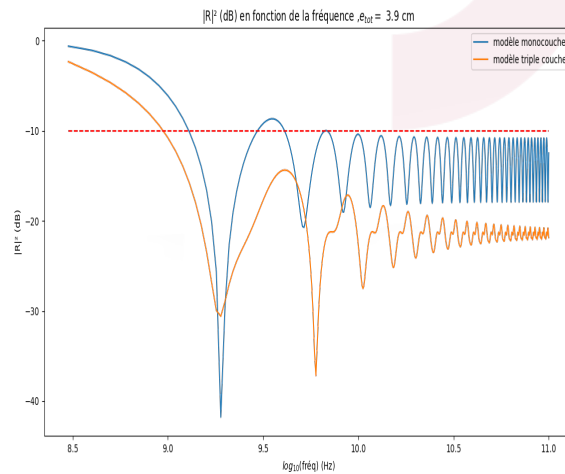


FIGURE 13 – Comparaison des modèles mono et triple couches

On observe ici, et dans les courbes des deux premières études, que le mono-couche et le triple couches ont des atténuations similaires en variant la fréquence. Or, on s'intéresse ici à avoir le plus grand spectre d'absorption. On observe alors que le triple-couches a une meilleure bande d'atténuation que le mono-couche.

Cependant, fixer l'épaisseur à $e = 3.9\text{cm}$ et $\sigma = 0.125\text{S/m}$ compromet la bande passante, comme on peut le voir en 13. Si la fréquence est proche de 3.2 GHz (ce qui est proche de la bande 5G (3.4GHz-3.8GHz), même si celle-ci est correctement atténuée ici), les -10dB ne sont pas atteints.

2.3.4 Effet des incertitudes :

Étant donné que les mesures de conductivité sont inexorablement associées à des incertitudes, il serait judicieux d'examiner l'influence de ces incertitudes sur la réflectivité de la mono-couche.

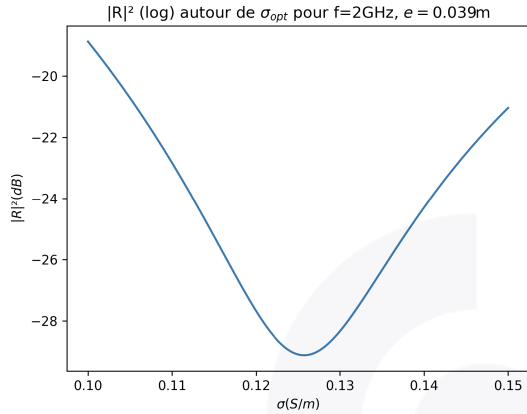


FIGURE 14 – Réflectivité en fonction de la conductivité, autour de σ_{opt} à $\pm 20\%$

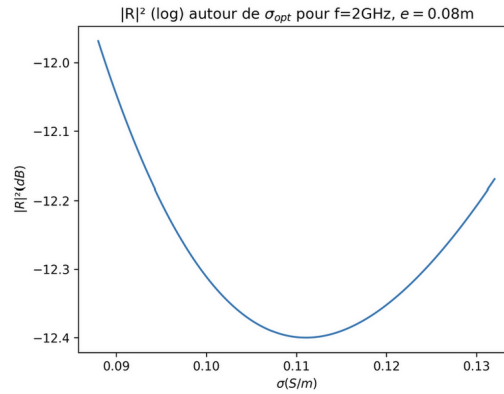


FIGURE 15 – Réflectivité en fonction de la conductivité autour de 0.11 S/m à $\pm 20\%$

On voit dans 14 et 15 qu'une incertitude de $\pm 20\%$ sur σ ne remet pas en cause l'absorption de notre matériau pour e_{opt} .

2.3.5 Conclusion sur l'aspect commercial :

Sur le plan commercial, notre objectif est d'optimiser notre absorbant en tenant compte à la fois du coût et de la complexité de la résolution, en se basant sur les études réalisées.

En premier lieu, nous chercherons à minimiser l'utilisation de matière pour la pose des couches d'absorbant, afin de réaliser des économies. Cependant, il est essentiel de trouver un équilibre, car une épaisseur trop réduite rendrait le produit inutilisable. L'analyse de la variation de l'épaisseur/irréalisable, ainsi que du minimum global pour le mono-couche, suggère que les meilleures performances d'atténuation se situent souvent à une épaisseur de l'ordre de 4 centimètres, offrant ainsi un compromis optimal.

Par ailleurs, à mesure que la conductivité augmente, le coût de l'absorbant également. Il est crucial de maintenir une conductivité à un niveau acceptable pour éviter des coûts excessifs, en particulier avec le triple-couches. La recherche de minimums locaux pertinents avec une conductivité acceptable devient une priorité, d'autant plus que l'incertitude associée à la conductivité est élevée. Nous privilégierons donc les minimums locaux avec une faible variation, réduisant ainsi notre préoccupation quant à l'incertitude.

Lors de l'optimisation de l'absorbant, notre quête se portera souvent sur le meilleur minimum local qui répond à nos critères tout en restant économiquement avantageux. En conséquence, nous rechercherons un minimum local caractérisé par une faible conductivité, une faible épaisseur et une variation minimale autour de ce minimum.

Le choix entre le mono-couche et le triple-couches dépendra largement des spécifications du cahier des charges. Le mono-couche, avec seulement deux paramètres, offre une fabrication, une installation et une optimisation moins complexes. En comparaison, le triple-couches, avec quatre paramètres, présente une complexité accrue. D'un point de vue financier, le mono couche semble être une option plus économique, surtout dans le cas de cahiers des charges à coûts limités. Toutefois, des exigences pointues, telles qu'une atténuation avec un bon spectre d'atténuation, pourraient justifier le choix du triple couche malgré son coût plus élevé pour le client.



3 PARTIE II : Optimisation de la chambre anéchoïque

3.1 Modélisation mathématique du problème

Pour simplifier, nous modifions la condition aux limites de l'équation de Helmholtz. Considérons un domaine $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$ qui représente l'intérieur de la chambre anéchoïque, $\partial\Omega$ est la frontière du domaine telle que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_n \cup \Gamma_s$ où Γ_D correspond au plafond où se situe la source Γ_s correspond aux côtés de la chambre et Γ_n correspond au sol de la chambre. L'équation de Helmholtz avec les conditions aux limites suivantes est considérée :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u|_{\Gamma_D} = g & g \neq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_n} + \alpha(\omega)\chi u|_{\Gamma_n} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_s} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- u représente l'onde dans la chambre anéchoïque et elle est régie par l'équation de propagation des ondes.
- k représente le vecteur d'onde défini $k = \frac{\omega}{c}$ où ω est la pulsation de l'onde et c la vitesse de la lumière dans le vide. (On assimile l'air de la chambre au vide)
- La condition sur la frontière Γ_D représente la source de l'onde électromagnétique. g représente donc l'émission de la source.
- La condition sur Γ_s de Neumann homogène modélise les murs réfléchissants.
- La condition sur Γ_s permet de prendre en compte la géométrie du matériau composite, absorbant et réfléchissant.
- α modélise un phénomène d'absorption partielle. avec $\text{Re}(\alpha) > 0$ et $\text{Im}(\alpha) < 0$ pour qu'il y ait effectivement une absorption partielle et une réflexion.
- χ est la fonction caractéristique du matériau poreux définie sur $U_{\text{ad}}^*(\beta)$, lui-même défini par :

$$U_{\text{ad}}^*(\beta) = \left\{ \chi \in L^\infty(\Gamma_n) \mid \forall x \in \Gamma_n, \chi(x) \in [0, 1], 0 < \beta = \int_{\Gamma_n} \chi d\mu < \mu(\Gamma_n) \right\}$$

Où β est la proportion de matériau absorbant dans la composition du mur qui vérifie les inégalités suivantes :

$$0 < \int_{\Gamma_n} \chi d\mu = \beta < \mu(\Gamma_n) = \int_{\Gamma_n} 1 d\mu = 1$$

Comme χ est la fonction caractéristique du matériau poreux, on a donc :

$$\forall x \in \Gamma_n, \quad \chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{il y a un matériau poreux en } x \\ 0, & \text{pas de matériau poreux en } x \end{cases}$$

Ainsi, cette condition va bien retranscrire la réalité physique. Si $\chi(x) = 0$ l'on est en présence d'un matériau réfléchissant et on a effectivement une condition de Neumann homogène. A l'inverse si $\chi(x) = 1$ on est en présence d'un matériau absorbant. On a alors : $\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \alpha(\omega)u(x) = 0$ ce qui modélise bien une absorption partielle. Le formalisme mathématique est cohérent.

3.1.1 Résultats théoriques

Grâce à l'analyse théorique, nous savons qu'il existe une unique solution faible du problème de Helmholtz $u \in V(\Omega)$, où :

$$V(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \text{Tr}(u) = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$$

C'est un espace vectoriel normé pour la norme :

$$\|u\|_{V(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma} \text{Re}(\alpha) |\text{Tr } u|^2 d\mu$$

On obtient la formulation variationnelle (FV) définie pour tous $v \in V(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx - k^2 \int_{\Omega} u \bar{v} dx + \int_{\Gamma_n} \chi \alpha \text{Tr}(u) \text{Tr}(\bar{v}) d\mu = 0$$

et u dépend continûment des données :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^2(\Gamma_D)}$$

3.2 Paramètres du modèle - taille, fréquence et matériau

Les chambres anéchoïques pour les tests d'ondes électromagnétiques sont conçues pour absorber les ondes électromagnétiques et empêcher les réflexions, en faisant ainsi un environnement idéal pour tester les antennes, les radars et d'autres équipements électromagnétiques. La plage de fréquences de travail de ces chambres peut varier considérablement en fonction de leur conception, de leur taille et du type de matériau absorbant utilisé.

Plage de Fréquences : En général, une chambre anéchoïque est efficace pour des fréquences allant de quelques centaines de mégahertz (MHz) à plusieurs dizaines de gigahertz (GHz). Cette plage englobe la plupart du spectre utilisé dans les communications sans fil modernes, y compris les fréquences cellulaires, WiFi, Bluetooth et radar. Dans notre application, nous pourrions cibler une chambre pour l'application 5G avec une plage de travail autour de 3,3-4,2 GHz. Nous fixons le point de fréquence cible à 3,5 GHz.

Matériau Absorbant : Les parois latérales d'une chambre anéchoïque sont faites d'un matériau réfléchissant. La paroi intérieure (la paroi devant la source) est composée de deux matériaux - l'un absorbant et l'autre réfléchissant. Dans l'exercice suivant, nous déterminerons la distribution du matériau absorbant sur cette paroi pour obtenir une meilleure absorption des ondes électromagnétiques.

Le matériau, et donc le coefficient α , est choisi en résolvant le problème de minimisation du modèle présenté ci-dessous :

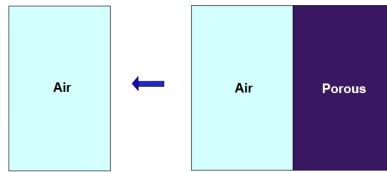


FIGURE 16 – Two media problem

L'objectif est de trouver la condition aux bords du mur qui garantit que la solution du problème d'un seul milieu est presque identique à la solution dans l'air du problème à deux milieux. Notez que, pour le modèle du problème à deux milieux ici, l'épaisseur de ces deux milieux est considérée comme infinie. Bien que ce modèle et ses équations ne soient pas exactement les mêmes que ce que nous supposons, nous considérons sa solution comme une bonne approximation pour notre problème d'optimisation.

Le problème équivalent à un milieu est modélisé par ce dernier faisant intervenir un coefficient $\alpha \in \mathbb{C}$ présenté dans 1

On trouve α en minimisant la fonction d'erreur suivante :

$$E(\alpha) = A \|u_0 - u_2\|_{L_2(\Omega_{air})}^2 + B \|\nabla(u_0 - u_2)\|_{L_2(\Omega_{air})}^2$$

Où u_0 est la solution du problème à deux milieux.

Ce problème de minimisation peut se mettre sous une forme simplifiée facilitant les calculs numériques.

$$\alpha = \inf_{\alpha^* \in \mathbb{C}} e(\alpha^*) := \sum_{k=\frac{n\pi}{L}, n \in \mathbb{Z}} e_k(\alpha^*),$$

Où :

Si $k^2 - \frac{\epsilon_0}{\eta_0} \omega^2 \geq 0$ alors :

$$e_k(\alpha) = (A + B|k|^2) \left(\frac{1}{2\lambda_0} \{ |\chi|^2 [1 - \exp(-2\lambda_0 L)] + |\gamma|^2 [\exp(2\lambda_0 L) - 1] \} + 2L \operatorname{Re}(\chi\bar{\gamma}) \right) \\ + B \frac{\lambda_0}{2} \{ |\chi|^2 [1 - \exp(-2\lambda_0 L)] + |\gamma|^2 [\exp(2\lambda_0 L) - 1] \} - 2B\lambda_0^2 L \operatorname{Re}(\chi\bar{\gamma}).$$

Sinon :

$$e_k(\alpha) = (A + B|k|^2) \left(L (|\chi|^2 + |\gamma|^2) + \frac{i}{\lambda_0} \operatorname{Im} \{ \chi\bar{\gamma} [1 - \exp(-2\lambda_0 L)] \} \right) \\ + BL |\lambda_0|^2 (|\chi|^2 + |\gamma|^2) + iB\lambda_0 \operatorname{Im} \{ \chi\bar{\gamma} [1 - \exp(-2\lambda_0 L)] \}$$

Nous ne détaillerons pas ici plus en détail les expressions des différentes fonctions auxiliaires.

Une fois que la conductivité σ et la permittivité relative ϵ_r du matériau sont déterminées, nous utilisons le code de calcul de α écrit pour obtenir la valeur de α . Pour $\sigma = 0.11 \text{ Sm/m}$, $\epsilon_r = 1.4$ et une source distribuée normalement sur le bord de Dirichlet, les parties réelle et imaginaire de α qui varient avec ω sont présentées dans la figure ci-dessous :

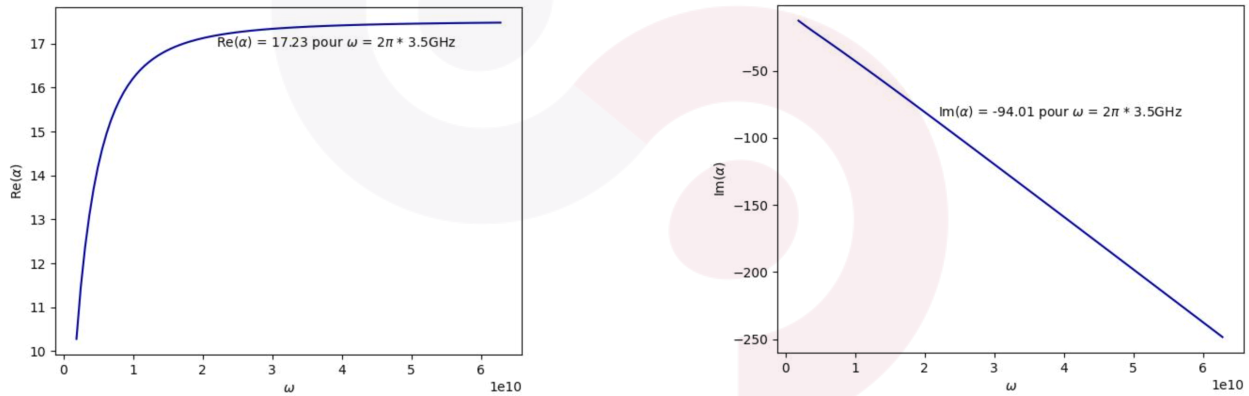


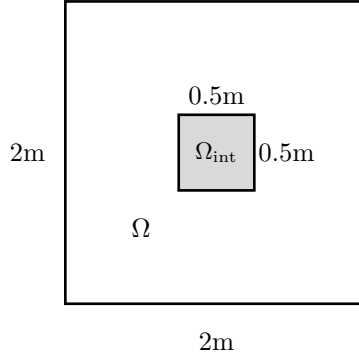
FIGURE 17 – α en fonction de la pulsation

Pour la fréquence choisie $f = 3.5 \text{ GHz}$, $\omega \approx 22 \times 10^9 \text{ rad/s}$, nous avons $\alpha \approx 17 - 94j$.

Taille de la Chambre : Les chambres plus grandes peuvent accueillir des fréquences plus basses, car les longueurs d'onde plus longues nécessitent des absorbeurs plus grands pour les atténuer efficacement. Par conséquent, la taille de la chambre est un facteur clé de ses capacités de plage de fréquences. Dans notre application, nous pouvons décider que la taille de la chambre soit de 2 mètres.

En résumé, la fréquence de travail d'une chambre anéchoïque est principalement déterminée par la conception de ses matériaux absorbants et sa taille, la plupart des chambres modernes couvrant une large plage allant de quelques centaines de MHz à plusieurs dizaines de GHz. Cette plage garantit que les chambres peuvent tester efficacement une grande variété d'équipements électromagnétiques dans diverses industries.

Dans la chambre anéchoïque, le domaine d'intérêt Ω_{interest} , défini par un carré de $0.5\text{m} \times 0.5\text{m}$ au centre, représente la zone de minimisation de l'énergie, s'alignant avec la position de la source dans Ω .



3.3 Détermination théorique de $J'(\chi)$

3.3.1 Avec matériau réfléchissant sur tous les bords

Cela revient au problème posé initialement, c'est ce que l'on va choisir dans la suite pour le modèle de chambre anéchoïque.

L'objectif est de déterminer le χ_{optimal} optimal qui minimise la fonction d'énergie $J(\chi, \omega)$ sur $U_{\text{ad}}^*(\beta)$, définie par :

$$J(\chi, \omega) = \|u(\chi)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|1_{\Omega_{\text{interest}}}(x)u(\chi)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Nous savons théoriquement qu'il existe au moins une distribution optimale $\chi^* \in U_{\text{ad}}^*$ et $u(\chi^*) \in V(\Omega)$ telle que :

$$J^*(\chi^*, u(\chi^*)) = \min_{\chi \in U_{\text{ad}}^*(\beta)} J^*(\chi, u(\chi))$$

Pour trouver la dérivée, nous introduisons la méthode du Lagrangien. Cependant, dans ce cas, α est complexe car il modélise l'absorption. La méthode du Lagrangien est basée sur un Lagrangien réel. Ainsi, nous devons diviser le problème en deux parties. Écrivons $u = u_R + iu_I$, $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$ et $g = g_R + ig_I$. En prenant les parties réelles et imaginaires de (1), nous obtenons deux problèmes réels :

$$\begin{cases} \Delta u_R + k^2 u_R = 0 \text{ sur } \Omega, \\ u_R = g_R \text{ on } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u_R}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_s, \\ \frac{\partial u_R}{\partial n} + \chi(\alpha_R u_R - \alpha_I u_I) = 0 \text{ sur } \Gamma_n. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta u_I + k^2 u_I = 0 \text{ sur } \Omega, \\ u_I = g_I \text{ on } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u_I}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_s, \\ \frac{\partial u_I}{\partial n} + \chi(\alpha_R u_I - \alpha_I u_R) = 0 \text{ sur } \Gamma_n. \end{cases} \quad (2)$$

On obtient les deux formules variationnelles suivantes :

$$\forall v_R \in V(\Omega) : - \int_{\Gamma_n} \chi(\alpha_R u_R - \alpha_I u_I) v_R d\mu - \int_{\Omega} \nabla u_R \cdot \nabla v_R dx + k^2 \int_{\Omega} u_R v_R dx = 0$$

et

$$\forall v_I \in V(\Omega) : - \int_{\Gamma_n} \chi(\alpha_I u_R + \alpha_R u_I) v_I d\mu - \int_{\Omega} \nabla u_I \cdot \nabla v_I dx + k^2 \int_{\Omega} u_I v_I dx = 0$$

Comme v_R et v_I sont indépendants, nous soustrayons les deux formulations variationnelles et obtenons la formulation variationnelle suivante :

$$FV(\chi, u_R, u_I, v_R, v_I) := \int_{\Gamma_n} \chi[(\alpha_I u_R + \alpha_R u_I) v_I - (\alpha_R u_R - \alpha_I u_I) v_R] d\mu + \int_{\Omega} [\nabla u_I \nabla v_I - \nabla u_R \nabla v_R + k^2 (u_R v_R - u_I v_I)] dx = 0$$

Nous pouvons maintenant définir le Lagrangien de la formulation variationnelle sommée :

$$\forall \chi \in L^\infty(\Gamma), \forall w_R, w_I, q_R, q_I \in V(\Omega),$$

$$L(\chi, w_R, w_I, q_R, q_I) = J(w_R + iw_I) + FV(\chi, w_R, w_I, q_R, q_I).$$

avec J la fonction énergie qui vaut d'après sa définition :

$$J(w_R + iw_I) = \int_{\Omega} (w_R^2 + w_I^2) dx + \int_{\Omega_{\text{interest}}} (w_R^2 + w_I^2) dx$$

Trouvons maintenant le problème adjoint, commençons par calculer $\langle \frac{\partial L}{\partial w_R}(\chi, u_R, u_I, q_R, q_I), \phi_R \rangle$ et $\langle \frac{\partial L}{\partial w_I}(\chi, u_R, u_I, q_R, q_I), \phi_I \rangle$
On obtient :

$$\langle \frac{\partial L}{\partial w_R}(\chi, u_R, u_I, q_R, q_I), \phi_R \rangle = \int_{\Omega} 2u_R \phi_R dx + \int_{\Omega_{\text{interest}}} 2u_R \phi_R dx + \int_{\Gamma_n} \chi(\alpha_I q_I \phi_R - \alpha_R q_R \phi_R) d\mu + \int_{\Omega} (-\nabla q_R \cdot \nabla \phi_R + k^2 q_R \phi_R) dx$$

$$\langle \frac{\partial L}{\partial w_I}(\chi, u_R, u_I, q_R, q_I), \phi_I \rangle = \int_{\Omega} 2u_I \phi_I dx + \int_{\Omega_{\text{interest}}} 2u_I \phi_I dx + \int_{\Gamma_n} \chi(\alpha_R q_I \phi_I + \alpha_I q_R \phi_I) d\mu + \int_{\Omega} (-\nabla q_I \cdot \nabla \phi_I - k^2 q_I \phi_I) dx$$

Le système adjoint est défini par :

$$\langle \frac{\partial L}{\partial w_R}, \phi_R \rangle = 0 \quad \forall \phi_R \in V(\Omega) \quad \text{et} \quad \langle \frac{\partial L}{\partial w_I}, \phi_I \rangle = 0 \quad \forall \phi_I \in V(\Omega)$$

soit en notant p_R et p_I à la place de q_R et q_I pour le système adjoint :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} 2u_R \phi_R dx + \int_{\Omega_{\text{interest}}} 2u_R \phi_R dx + \int_{\Gamma_n} \chi(\alpha_I p_I \phi_R - \alpha_R p_R \phi_R) d\mu + \int_{\Omega} (-\nabla p_R \cdot \nabla \phi_R + k^2 p_R \phi_R) dx \\ 0 &= \int_{\Omega} 2u_I \phi_I dx + \int_{\Omega_{\text{interest}}} 2u_I \phi_I dx + \int_{\Gamma_n} \chi(\alpha_R p_I \phi_I + \alpha_I p_R \phi_I) d\mu + \int_{\Omega} (-\nabla p_I \cdot \nabla \phi_I - k^2 p_I \phi_I) dx \end{aligned}$$

On obtient le problème fort suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_R + k^2 p_R = -2u_R \text{ sur } \Omega/\Omega_{\text{interest}}, \\ \Delta p_R + k^2 p_R = -4u_R \text{ sur } \Omega_{\text{interest}}, \\ \frac{\partial p_R}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_s, \\ p_R = g_R \text{ on } \Gamma_D, \\ \frac{\partial p_R}{\partial n} + \chi(\alpha_R p_R - \alpha_I p_I) = 0 \text{ on } \Gamma_n. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_I + k^2 p_I = 2u_I \text{ sur } \Omega/\Omega_{\text{interest}}, \\ \Delta p_I + k^2 p_I = 4u_I \text{ sur } \Omega_{\text{interest}}, \\ \frac{\partial p_I}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_s, \\ p_I = g_I \text{ on } \Gamma_D, \\ \frac{\partial p_I}{\partial n} + \chi(\alpha_I p_R + \alpha_R p_I) = 0 \text{ on } \Gamma_n. \end{array} \right. \quad (3)$$

on en déduit le problème fort pour $p = p_R + ip_I$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p + k^2 p = -2\bar{u} \text{ on } \Omega/\Omega_{\text{interest}}, \\ \Delta p + k^2 p = -4\bar{u} \text{ on } \Omega_{\text{interest}}, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma_s, \\ p = g \text{ on } \Gamma_D, \\ \frac{\partial p}{\partial n} + \chi \alpha p = 0 \text{ on } \Gamma_n. \end{array} \right.$$

Or, la dérivée de l'énergie est définie par :

$$\langle J'(\chi), \chi_0 \rangle = \langle \frac{\partial L}{\partial \chi}(\chi, u(\chi), p(\chi)), \chi_0 \rangle$$

On obtient donc après avoir effectué le calcul sur le Lagrangien :

$$\langle \frac{\partial L}{\partial \chi}(\chi, u(\chi), p(\chi)), \chi_0 \rangle = \int_{\Gamma_n} \chi_0 [\alpha_I u_R(\chi_0) + \alpha_R u_I(\chi_0) p_I(\chi_0) - (\alpha_R u_R(\chi_0) - \alpha_I u_I(\chi_0)) p_R(\chi_0)] d\mu \quad (4)$$

$$= - \int_{\Gamma_n} \chi_0 \operatorname{Re}(\alpha u(\chi_0) p(\chi_0)) d\mu \quad (5)$$

Il ne nous reste plus qu'à estimer cette intégrale à l'aide de la méthode de descente de gradient.

3.3.2 Avec une frontière Γ_{air} à l'air libre

Nous allons refaire la même analyse cette fois en modifiant légèrement le problème, en considérant qu'un des murs est enlevé, que c'est simplement de l'air. On reprend les notations du problème précédent en ajoutant une condition de frontière : $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_n \cup \Gamma_s \cup \Gamma_{\text{air}}$

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u|_{\Gamma_D} = g & g \neq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_n} + \alpha(\omega)\chi u|_{\Gamma_n} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_s} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_{\text{air}}} = -ikTr(u)|_{\Gamma_{\text{air}}} \end{cases} \quad (6)$$

Pareillement, on va avoir dissocier partie réelle et partie imaginaire pour pouvoir appliquer la méthode du lagrangien.

$$\begin{cases} \Delta u_R + k^2 u_R = 0 & \text{sur } \Omega, \\ u_R = g_R & \text{on } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u_R}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_s, \\ \frac{\partial u_R}{\partial n} + \chi(\alpha_R u_R - \alpha_I u_I) = 0 & \text{sur } \Gamma_n. \\ \frac{\partial u_R}{\partial n}|_{\Gamma_{\text{air}}} = +kTr(u_I)|_{\Gamma_{\text{air}}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta u_I + k^2 u_I = 0 & \text{sur } \Omega, \\ u_I = g_I & \text{on } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u_I}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_s, \\ \frac{\partial u_I}{\partial n} + \chi(\alpha_R u_I - \alpha_I u_R) = 0 & \text{sur } \Gamma_n. \\ \frac{\partial u_I}{\partial n}|_{\Gamma_{\text{air}}} = -ikTr(u_R)|_{\Gamma_{\text{air}}} \end{cases} \quad (7)$$

Ce qui nous donne les formulations variationnelles suivantes :

$$\forall v_R \in V(\Omega) : - \int_{\Gamma_{\text{air}}} k u_I v_R d\mu - \int_{\Gamma_n} \chi(\alpha_R u_R - \alpha_I u_I) v_R d\mu - \int_{\Omega} \nabla u_R \cdot \nabla v_R dx + k^2 \int_{\Omega} u_R v_R dx = 0$$

et

$$\forall v_I \in V(\Omega) : \int_{\Gamma_{\text{air}}} k u_R v_I d\mu - \int_{\Gamma_n} \chi(\alpha_I u_R + \alpha_R u_I) v_I d\mu - \int_{\Omega} \nabla u_I \cdot \nabla v_I dx + k^2 \int_{\Omega} u_I v_I dx = 0$$

par soustraction on obtient la formulation variationnelle totale :

$$\begin{aligned} FV(\chi, u_R, u_I, v_R, v_I) = & - \int_{\Gamma_{\text{air}}} k(u_R v_I + u_I v_R) d\mu \int_{\Gamma_n} \chi[(\alpha_I u_R + \alpha_R u_I) v_I - (\alpha_R u_R - \alpha_I u_I) v_R] d\mu \\ & + \int_{\Omega} [\nabla u_I \nabla v_I - \nabla u_R \nabla v_R + k^2(u_R v_R - u_I v_I)] dx = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Ici on obtient pour le lagrangien de ce problème définie à partir de cette forme variationnelle et de la formule d'énergie précédente les dérivées suivantes :

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial w_R}(\chi, u_R, u_I, q_R, q_I), \phi_R \right\rangle = - \int_{\Gamma_{\text{air}}} k q_R \phi_R d\mu + \int_{\Omega} 2u_R \phi_R dx + \int_{\Omega_{\text{interest}}} 2u_R \phi_R dx \quad (9)$$

$$+ \int_{\Gamma_n} \chi(\alpha_I q_I \phi_R - \alpha_R q_R \phi_R) d\mu + \int_{\Omega} (-\nabla q_R \cdot \nabla \phi_R + k^2 q_R \phi_R) dx \quad (10)$$

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial w_I}(\chi, u_R, u_I, q_R, q_I), \phi_I \right\rangle = - \int_{\Gamma_{\text{air}}} k q_I \phi_I d\mu + \int_{\Omega} 2u_I \phi_I dx + \int_{\Omega_{\text{interest}}} 2u_I \phi_I dx \quad (11)$$

$$+ \int_{\Gamma_n} \chi(\alpha_R q_I \phi_I + \alpha_I q_R \phi_I) d\mu + \int_{\Omega} (-\nabla q_I \cdot \nabla \phi_I - k^2 q_I \phi_I) dx \quad (12)$$

On obtient le problème fort suivant en remplaçant q_I et q_R par p_I et p_R

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_R + k^2 p_R = -2u_R \text{ sur } \Omega/\Omega_{\text{interest}}, \\ \Delta p_R + k^2 p_R = -4u_R \text{ sur } \Omega_{\text{interest}}, \\ \frac{\partial p_R}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_s, \\ p_R = g_R \text{ on } \Gamma_D, \\ \frac{\partial p_R}{\partial n} + \chi(\alpha_R p_R - \alpha_I p_I) = 0 \text{ on } \Gamma_n \\ \frac{\partial p_R}{\partial n} + k p_R = 0 \text{ on } \Gamma_{\text{air}}. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_I + k^2 p_I = 2u_I \text{ sur } \Omega/\Omega_{\text{interest}}, \\ \Delta p_I + k^2 p_I = 4u_I \text{ sur } \Omega_{\text{interest}}, \\ \frac{\partial p_I}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_s, \\ p_I = g_I \text{ on } \Gamma_D, \\ \frac{\partial p_I}{\partial n} + \chi(\alpha_I p_R + \alpha_R p_I) = 0 \text{ on } \Gamma_n \\ \frac{\partial p_I}{\partial n} + k p_I = 0 \text{ on } \Gamma_{\text{air}} \end{array} \right. \quad (13)$$

on en déduit le problème fort pour $p = p_R + ip_I$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p + k^2 p = -2\bar{u} \text{ on } \Omega/\Omega_{\text{interest}}, \\ \Delta p + k^2 p = -4\bar{u} \text{ on } \Omega_{\text{interest}}, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma_s, \\ p = g \text{ on } \Gamma_D, \\ \frac{\partial p}{\partial n} + \chi \alpha p = 0 \text{ on } \Gamma_n \\ \frac{\partial p}{\partial n} + k p = 0 \text{ on } \Gamma_{\text{air}} \end{array} \right.$$

Pour l'énergie on a la même formule que précédemment, mais p va être différent car il ne vérifie pas les mêmes équations.

$$\langle J'(\chi), \chi_0 \rangle = - \int_{\Gamma_n} \chi_0 \operatorname{Re}(\alpha u(\chi_0) p(\chi_0)) d\mu$$

On peut maintenant faire à nouveau l'algorithme de descente de gradient pour trouver une valeur de l'énergie optimale pour ce problème.

3.4 Algorithme d'optimisation

Pour notre plage de fréquences choisie autour de 3.5 GHz, la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique est obtenue à l'aide de la formule $c = \lambda f$. En conséquence,

$$\lambda \approx \frac{3 \times 10^8}{3.5 \times 10^9} \approx 0.1 \text{ m} \quad (14)$$

Pour garantir une discrétisation précise, il est généralement recommandé que la longueur d'onde englobe au moins 10 éléments de maillage. Cette exigence conduit à une taille d'élément de

$$h \approx 0.01 \text{ m} \quad (15)$$

Ainsi, pour une largeur donnée, le nombre d'éléments le long de l'axe $x(Nb_{\text{elem-x}})$ est calculé selon l'équation suivante :

$$Nb_{\text{elem-x}} = \frac{\text{width}}{h} = 200 \quad (16)$$

Dans le contexte de la discrétisation et en appliquant la règle pour χ , nous définissons χ_{mat} comme une matrice de dimensions $(Nb_{\text{elem-x}}, Nb_{\text{elem-y}})$. Dans cette matrice, les points de frontière correspondant au matériau absorbant sont attribués une valeur de 1, tandis que les autres entrées sont définies à 0.

Calcul de l'énergie Dans la solution discrétisée par la méthode des éléments finis (FEM), nous avons l'amplitude de u sur tous les nœuds du maillage. Dans une approximation d'ordre zéro, chaque nœud se voit attribuer un carré autour des nœuds, et la valeur approximative dans le carré est la valeur des nœuds, facilitant ainsi le calcul de l'intégrale.

Supposons que la valeur nodale soit regroupée dans un vecteur u_{vec} . On a donc,

$$\int |u|^2 dx dy \approx \text{Aire} \times \frac{u_{\text{vec}}^T u_{\text{vec}}}{Nb_{\text{nœuds}}}$$

Descente de gradient La descente de gradient se fait avec l'itération de la relation suivante :

$$\chi^{k+1} = \mathbf{P}_{\mathbf{V}_{\text{obj}}}(\chi^k - \mu J'(\chi^k))$$

où

- $\mathbf{P}_{\mathbf{V}_{\text{obj}}}$ est une fonction de projection qui vise à projeter χ dans un espace physiquement admissible, c'est-à-dire que χ doit être nul partout à l'extérieur de la frontière de Robin (Γ_n), et sur cette frontière, sa valeur doit être comprise entre 0 et 1 (nous prenons une valeur continue de 0 à 1 pour faciliter le processus de descente de gradient ; cela expliquerait de manière simplifiée que l'épaisseur varie de 0 à l'infini). Plus important encore, la fonction de projection impose une contrainte sur la proportion d'absorbant sur la frontière, qui est fixée initialement par le paramètre β .
- μ représente le taux d'apprentissage.

Projection La projection fonctionne de la manière suivante :

- Calculer V_{sum} la somme de matrice χ sur la frontière Γ_n . Diviser cela par le nombre de nœuds sur la frontière noté S . On obtient ainsi : $V = \frac{V_{\text{sum}}}{S}$. Cela va correspondre à la proportion de matériau absorbant dans le mur. On va faire en sorte qu'il devienne égal à β .
- Configurer χ pour qu'il soit égal à 0 partout sauf sur la frontière de Robin.
- Trouver un terme de contrainte approprié, l , en utilisant la dichotomie, de sorte que

$$\chi = \max(0, \min(1, \chi + l))$$

Cela assure que χ sera dans sa plage physiquement admissible, c'est-à-dire entre 0 et 1, et obtenir :
 $V \approx V_{\text{obj}} := \beta$.

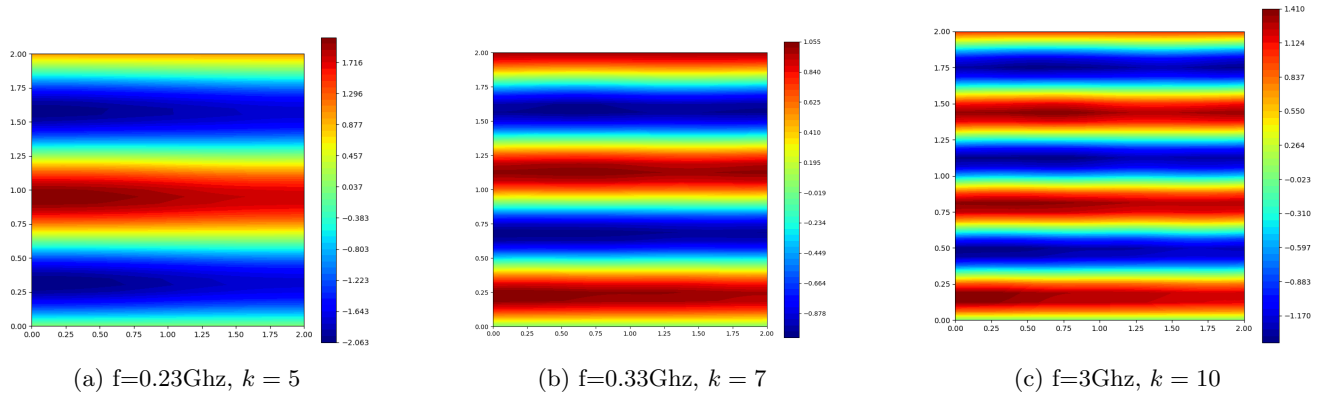
3.5 Résultats

3.5.1 Référence

Pour obtenir un scénario de référence, la condition optimale que nous pouvons atteindre est d'utiliser un matériau entièrement absorbant sur le mur frontal.

$$u|_{\Gamma_n} = 0$$

Nous fixons $g = 1$ pour la source.



Nous pouvons tracer la courbe de l'énergie $\|u\|_{L_2}^2$ par rapport au nombre d'ondes k de manière numérique. Nous constatons clairement que certaines fréquences correspondent à une énergie bien plus grande que le résultat des fréquences, et ces fréquences correspondent aux multiples entiers de $\pi/2$.

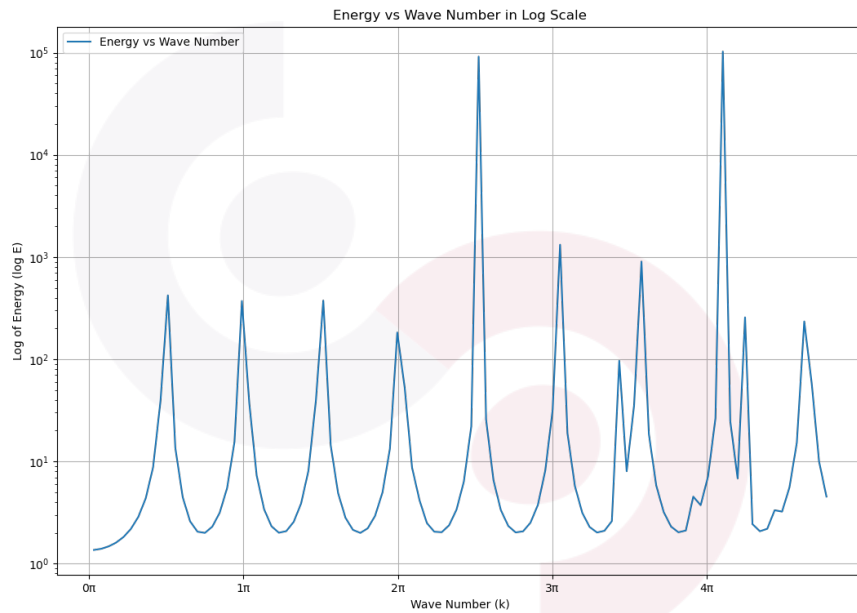


FIGURE 19 – wavenumber vs. energy

Suivant ce modèle, nous nous concentrons sur notre plage de fréquences et recherchons la fréquence où l'énergie est maximale. À partir des figures affichées ci-dessous, la fréquence que nous cherchons est $f = 3,49\text{GHz}$, associée à une valeur de nombre d'ondes k d'environ 23. Nous obtenons ainsi la valeur de l'énergie $E = 1501,05$.

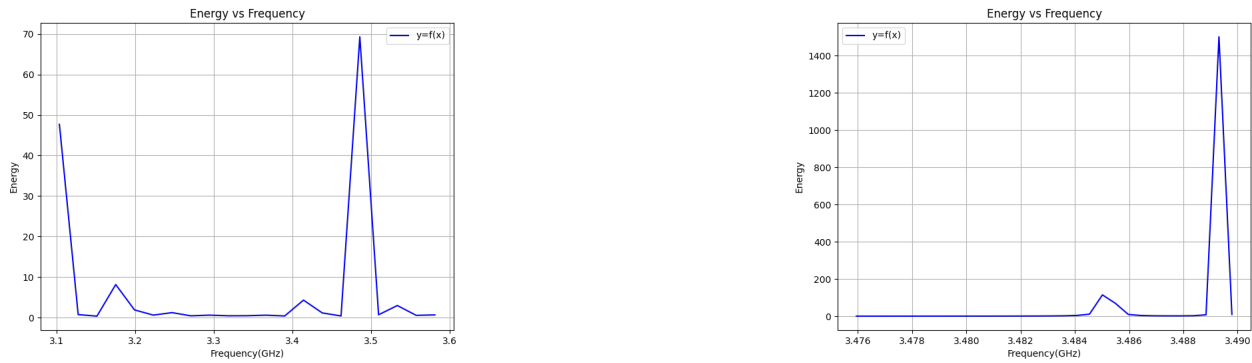


FIGURE 20 – Fréquence où se trouve un maximum d'énergie

Nous allons désormais focaliser notre attention sur la minimisation de l'énergie à cette fréquence, car c'est à cet endroit que l'énergie atteint son niveau le plus élevé.

3.5.2 Absorbant vs. Réfléchissant

Nous fixons la fréquence du maximum et remplaçons le mur entièrement absorbant par un mur réfléchissant. La même méthode de calcul nous donne une énergie $E = 1,73$, ce qui est extrêmement faible comparé à l'énergie dans le cas d'un mur absorbant.

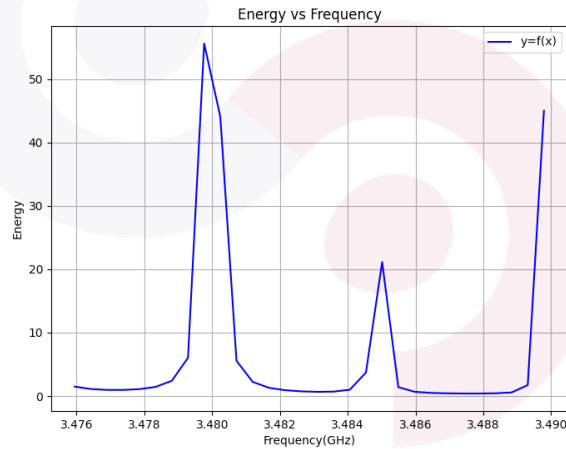
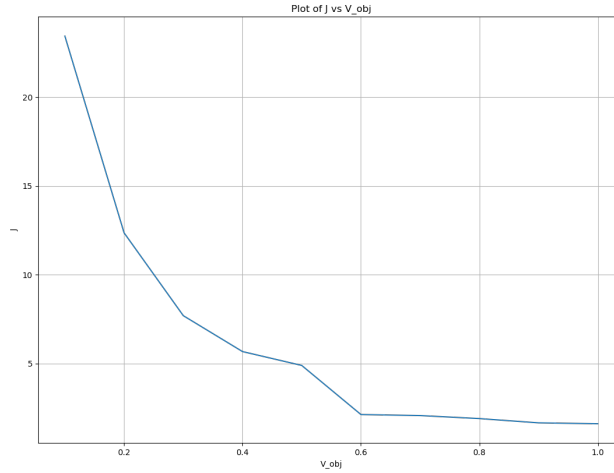


FIGURE 21 – frequency vs. energy

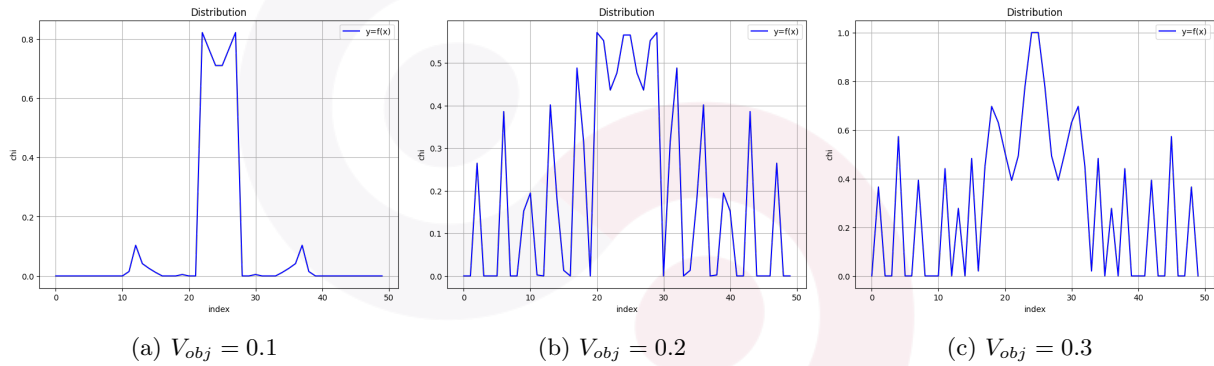
lorsque le nombre d'onde k est un multiple entier de π , dans notre cas, 23π , les ondes émises par la source parcourent précisément 23 longueurs d'onde de l'une des extrémités de la chambre à l'autre. Après avoir rencontré le mur réfléchissant, elles subissent un retard d'une demi-longueur d'onde, entraînant une coïncidence entre les crêtes des ondes réfléchies et les creux des ondes incidents. Ce phénomène provoque une annulation d'énergie, caractérisée par des interférences destructives. C'est ce qui explique cette énergie nettement plus faible. Le schéma suivant met en lumière ce principe.

3.5.3 Choisir le volume de matériau β (V_{obj})

β correspond à la proportion de matériau absorbant dans la barrière composite. Pour choisir le β optimal, nous avons représenté graphiquement la relation entre J et V_{obj} , c'est à dire l'énergie en fonction de β pour χ optimisé.

FIGURE 22 – Energie en fonction de β

Étant donné que les matériaux sont généralement coûteux, choisir un β approprié est crucial. En utilisant le graphique 22, on observe qu'à partir de $\beta = 0.6$, l'augmentation de β ne provoque pas une diminution très importante de l'énergie. Nous fixons donc pour la suite $\beta = 0.6$ soit une proportion de 60 %.

FIGURE 23 – Distribution ($V_{obj} = 0.1 - 0.3$)

L'algorithme de descente de gradient nous fournit les résultats en 23 pour la répartition de matériau absorbant, en fonction de différentes valeurs de $V_{obj} = \beta$. On remarque que la répartition varie considérablement avec la modification de la proportion. Cela confirme la nécessité de déterminer initialement cette proportion avant de rechercher la répartition optimale du matériau.

En appliquant la méthode descente de gradient, on obtient la distribution optimale pour la fréquence choisie de $f = 3.5GHz$

Paramètres :

Nombre d'onde = 23π

$\alpha = 17.18 - 87.20j$

Quantité de matériau = $\beta = 0.6$

Taux d'apprentissage = 0.0001

La quantité de matériau est ici fixé comme une contrainte de budget, elle est calculée par la formule :

$$V_{obj} = \frac{\sum_{i=1}^{50} \chi(i)}{\text{Nombre de nodes sur le mur}} = \bar{\chi}$$

Dans ce cas-là, J est réduite de 4.75 à 2.13. La distribution de matériau est donnée pour notre $\beta = 0.6$ en 24 :

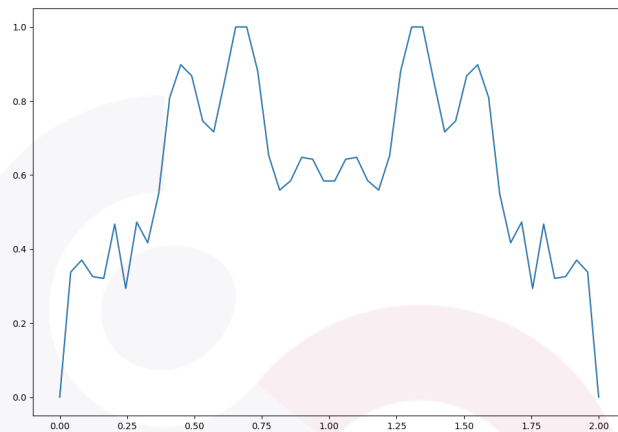


FIGURE 24 – Distribution($V_{obj} = 0.6$)

Nous voulons ensuite appliquer ce χ optimisé pour analyser sa capacité à réduire l'énergie de la chambre à d'autres fréquences comprises dans la plage de fréquences de 3,3 à 4,2 GHz, ceci est fait en 25

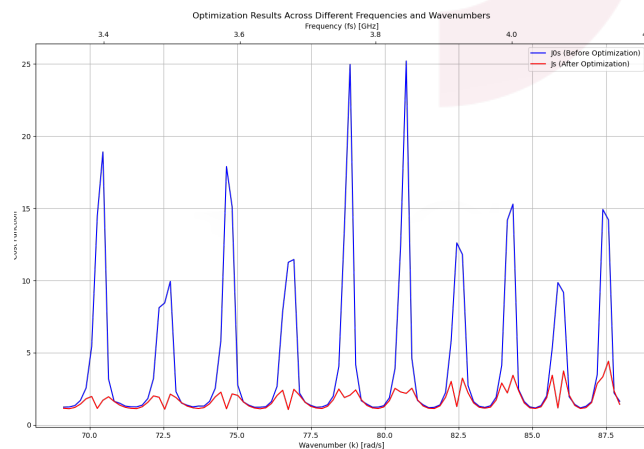


FIGURE 25 – Résultat de la réduction d'énergie avec la distribution de la fig :24 pour d'autres fréquences (en bleu, l'énergie avant l'optimisation et en rouge, l'énergie après l'optimisation)

En comparaison avec les résultats obtenus dans le cas d'un mur entièrement absorbant, où le graphique de l'énergie en fonction du nombre d'ondes est présenté ci-dessous, nous remarquons que la distribution optimisée χ réduit considérablement la grande valeur d'énergie due au phénomène de résonance, où le nombre d'ondes k est un multiple entier de π . Pour d'autres fréquences, la distribution optimisée parvient à une absorption comparable à celle d'un mur entièrement absorbant tout en limitant l'utilisation de matériaux, entraînant ainsi des réductions de coûts considérables. On obtient ici une énergie moyenne de $1.23J$

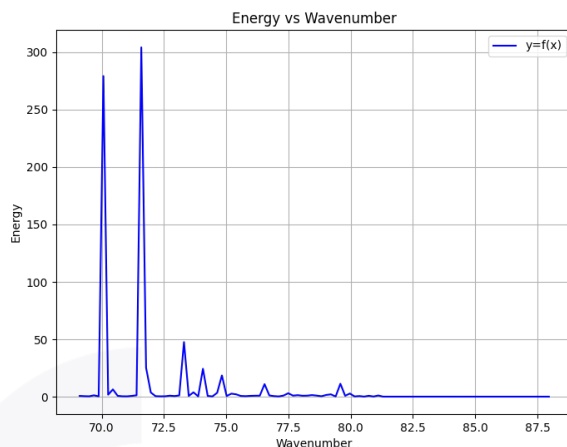
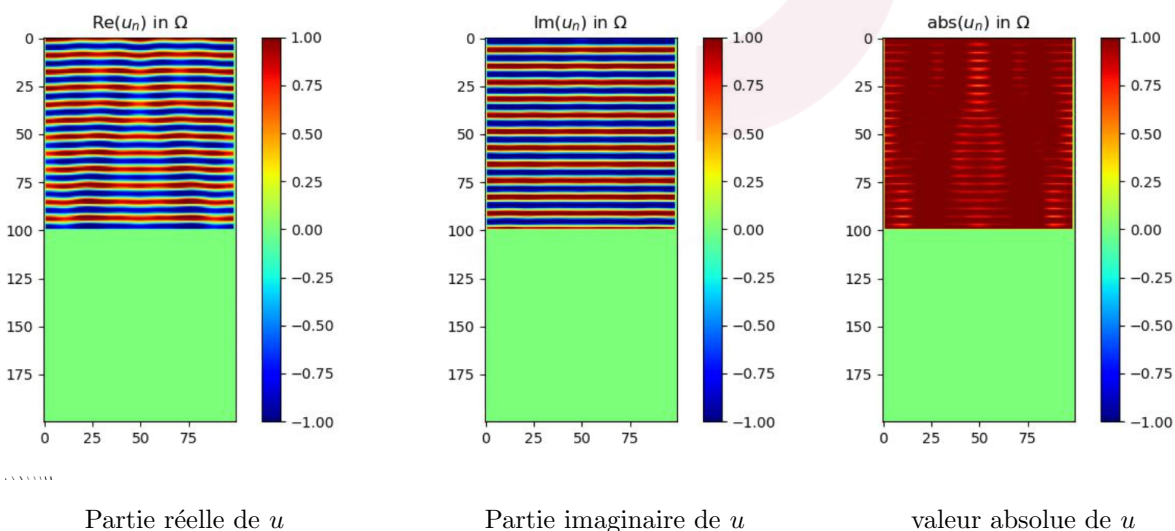


FIGURE 26 – Énergie dans le cas de mur totalement absorbant

D'après la Figure 25, il est évident que le χ optimisé fonctionne bien sur une large plage de fréquences, couvrant la gamme de test des appareils 5G. Par conséquent, nous pouvons conclure que cette conception est suffisante pour être utilisée dans la chambre anéchoïque.

3.5.4 Mur plan

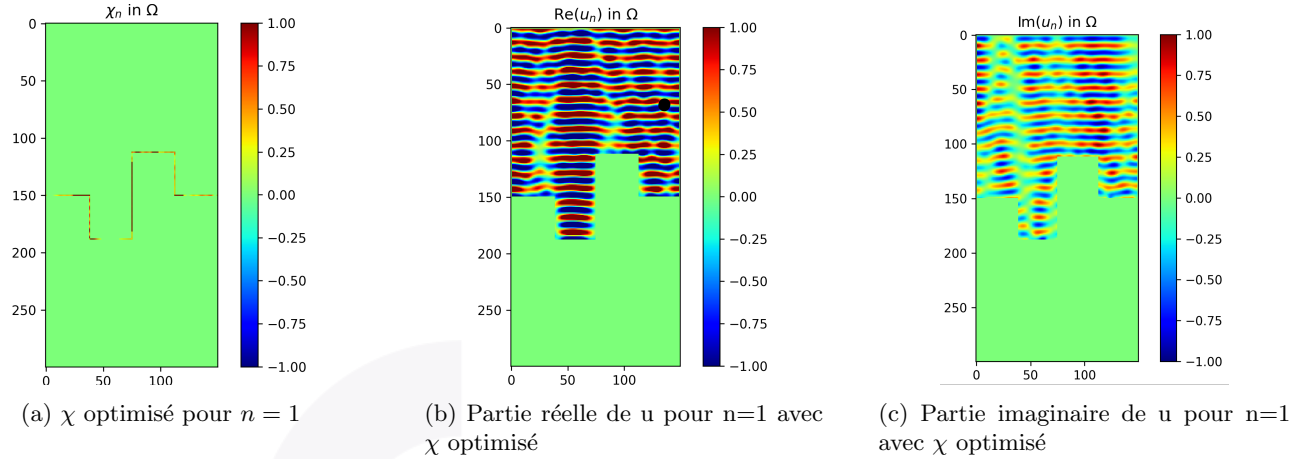
Nous avons donc effectué les simulations et les calculs pour le mur plan. Voici les images que l'on obtient pour la distribution en matériaux absorbant de la barrière et pour l'onde u résultante dans la chambre.



3.5.5 Géométrie fractale

On applique ensuite notre algorithme sur un mur à niveau de fractale de 1, 2 et 3 dans les figures ci-dessous. L'idée est de comparer les performances de l'atténuation de l'énergie pour différents type de frontières.

Fractale d'ordre 1 Avec une bordure qui correspond à une fractale d'ordre 1, on obtient les figures suivantes pour la distribution de la barrière et pour la fonction d'onde :



En comparaison avec le mur plan, en 29, l'énergie moyenne est beaucoup plus faible. On obtient ici l'énergie moyenne qui vaut 1.12.

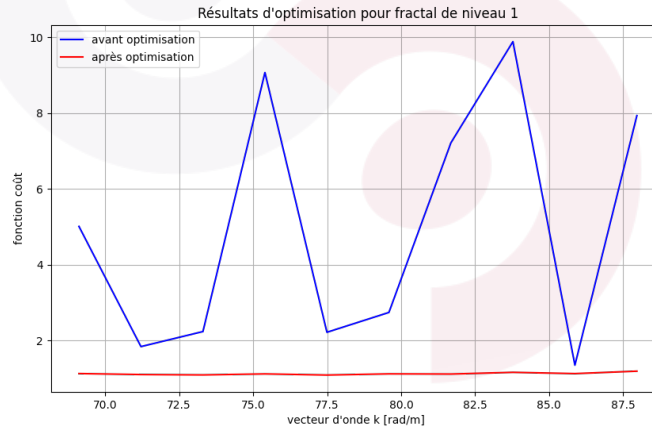
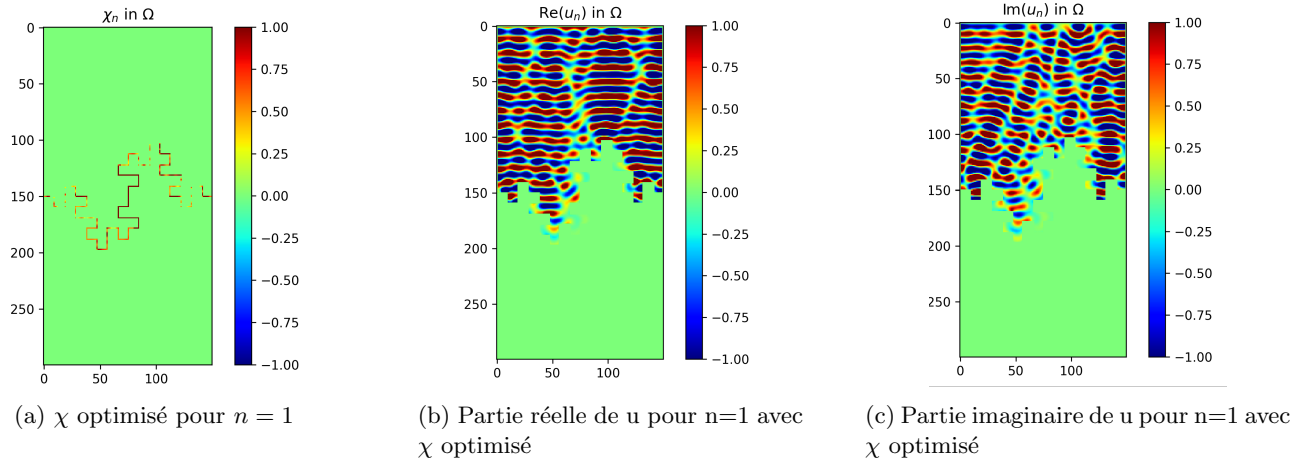


FIGURE 29 – Comparaison de l'énergie avant et après optimisation pour $n=1$

Fractale d'ordre 2 Avec une bordure qui correspond à une fractale d'ordre 2, on obtient les figures suivantes pour la distribution de matériau absorbant sur la frontière (χ) et pour la fonction d'onde (u) :



La comparaison avant après de l'énergie est donnée en 31. Ici, l'énergie moyenne est plus élevée que dans le cas plan. Cela n'est pas la peine d'essayer de réaliser une telle frontière car elle n'optimise pas l'atténuation et complique la fabrication.

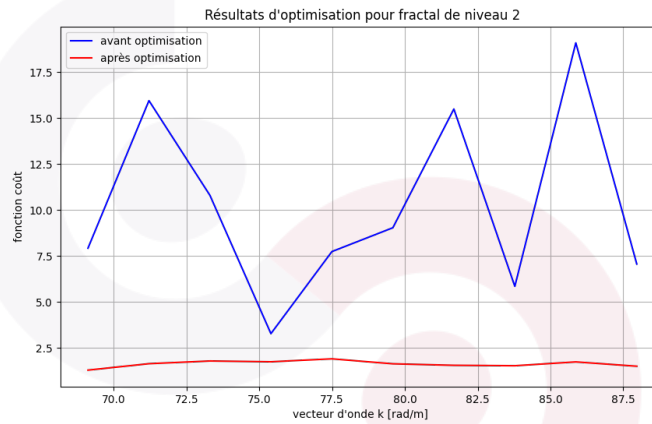
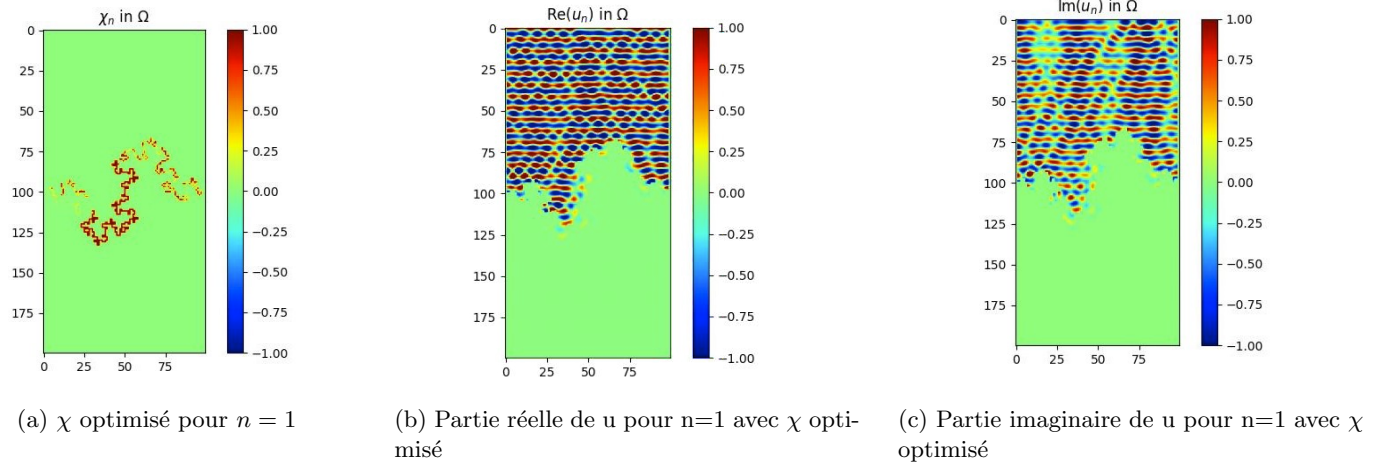


FIGURE 31 – $n=2$, énergie avant/après optimisation

fractale d'ordre 3 Avec une bordure qui correspond à une fractale d'ordre 3, on obtient les figures suivantes pour la distribution de matériau absorbant sur la frontière (χ) et pour la fonction d'onde (u) :



Voici l'énergie avant et après optimisation dans 33. Ici, l'énergie moyenne est supérieure que dans le cas plan. Cela n'est pas la peine d'essayer de réaliser une telle frontière, cela n'optimise pas l'atténuation.

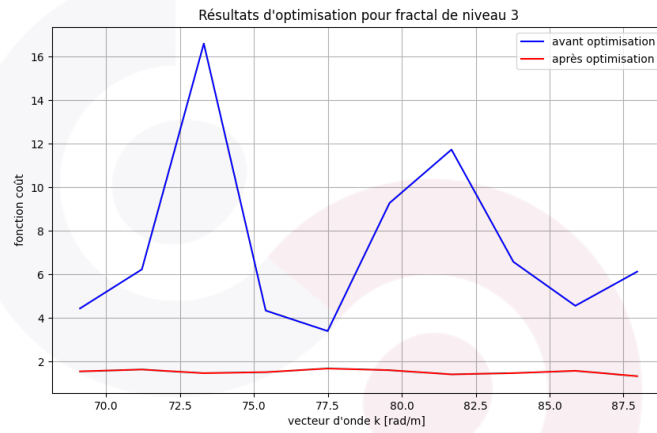


FIGURE 33 – Pour $n=3$, énergie avant et après optimisation

4 Conclusion

En conclusion, ce projet revêt une importance significative dans le domaine de la recherche sur les ondes 5G, mettant l'accent sur l'étude approfondie des matériaux absorbants et l'optimisation d'une chambre anéchoïque spécifiquement adaptée à ces fréquences.

La première phase de notre projet a consisté à explorer les propriétés des absorbants mono-couche et triple couche, en mettant l'accent sur leur application aux ondes 5G. Cette analyse a joué un rôle crucial dans le choix du matériau le plus approprié pour la conception de la chambre anéchoïque.

La seconde phase du projet s'est concentrée sur l'optimisation de la chambre anéchoïque en utilisant le matériau identifié dans la première partie. Nous avons mis en place un schéma d'optimisation visant à trouver le meilleur compromis entre le coût et la performance, mesurée par l'énergie dans la chambre. Après le calcul du coefficient d'absorption α et la modélisation théorique du problème, nous avons développé un algorithme d'optimisation pour déterminer la valeur optimale de χ .

Suite à la définition du design optimal, des tests ont été réalisés à différentes fréquences, confirmant la résistance réussie du design à ces essais. En poursuivant nos investigations, nous avons également évalué l'impact de différentes géométries de frontière, de fractales d'ordre 1 à 3. Il est ressorti de nos analyses que la fractale d'ordre 1 permet d'atténuer de manière plus efficace l'énergie.

En résumé, notre projet a abouti à une solution viable pour la chambre anéchoïque 5G, atteignant un équilibre optimal entre coût et performance. Pour la suite, des tests en conditions réelles sont nécessaires, tout en considérant l'aspect environnemental de la production du matériau, ainsi que sa capacité à être recyclé. Ces prochaines étapes seront cruciales pour valider pleinement l'applicabilité de notre solution.

