

Traitement Numérique du Signal

BE - Traitement Numérique du Signal

1 Rappels

Ce BE est consacré à l'étude des filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) et des Filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII). Dans le cas des filtres RIF, tout échantillon du signal en sortie est la somme pondérée d'échantillons du signal en entrée. Les filtres RIF sont fréquemment désignés par le terme de filtres non-récurrents, car ils ne présentent pas de boucle de réaction de la sortie vers l'entrée. Ils peuvent être synthétisés directement par un développement en série de Fourier du gabarit idéal. Le résultat obtenu peut être ensuite optimisé grâce à la méthode des moindres carrés ou à l'algorithme de Remez. La deuxième partie du TP est consacrée à l'étude des filtres RII ou filtres récurrents. La synthèse de ces filtres s'appuie sur les fonctions modèles du filtrage analogique (Tchebychev, Butterworth,...) par l'intermédiaire de la transformée bilinéaire, transformation conforme permettant de passer du plan numérique au plan analogique.

1.1 Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

1.1.1 Définition

Ce sont des systèmes à réponse impulsionnelle finie, de fonction de transfert $H(z)$, dont les coefficients $h(k)$ sont tels que :

$$\begin{aligned} h(k) &\neq 0 \text{ pour } k \in [0, N-1] \\ h(k) &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

On obtient l'expression de la fonction de transfert dans le plan des z :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k}$$

Le caractère non récurrent apparaît clairement sur l'équation de récurrence liant l'entrée et la sortie du filtre :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k)$$

Nous allons proposer une méthode de synthèse des filtres à phase linéaire (caractéristique recherchée dans de nombreuses applications). Ceci implique une symétrie de la réponse impulsionnelle. En effet, on veut :

$$H(f) = R(f) e^{j\Phi(f)}$$

avec $R(f) \in \mathbb{R}$ et $\Phi(f) = -2\pi f \tau_{pg}$. La réponse impulsionnelle d'un tel filtre s'écrit :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(f) e^{j\Phi(f)} e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} R(f) e^{j2\pi f(t-\tau_{pg})} df$$

On décompose $R(f)$ en la somme d'une partie paire $R_p(f)$ et d'une partie impaire $R_i(f)$. La réponse impulsionnelle $h(t)$ étant réelle (dans le cas d'un signal réel le spectre d'amplitude est pair et la phase est impaire), on a :

$$h(\tau_{pg} + t) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_p(f) \cos(2\pi ft) df = h(\tau_{pg} - t)$$

Cette relation fait donc apparaître la symétrie de la réponse impulsionnelle par rapport au point $t = \tau_{pg}$ de l'axe des temps.

1.1.2 Synthèse par développement en série de Fourier

On se donne un gabarit fréquentiel $H(f)$ à respecter. On calcule la réponse impulsionnelle du filtre recherché par transformée de Fourier inverse de ce gabarit. Il s'agit alors de faire une troncature afin de garder un nombre fini N d'éléments qui seront les coefficients du filtre, puis d'effectuer un décalage afin de rendre le filtre causal c'est-à-dire physiquement réalisable. *Etapes successives de la synthèse :*

- 1) Définir un gabarit fréquentiel en fréquences normalisées
- 2) En faire un développement en série de Fourier

$$h(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H(e^{j2\pi\tilde{f}}) e^{j2\pi\tilde{f}k} d\tilde{f}$$

- 3) Multiplication par une fenêtre temporelle $W(k)$ de longueur N (ordre du filtre) avec $W(k) = 0$ pour $|k| > N$,
- 4) Réaliser un décalage (translation) afin de satisfaire la condition de causalité. La valeur du temps de propagation de groupe est :

$$\tau_{pg} = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(\tilde{f})}{d\tilde{f}} = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \text{ est pair} \\ \frac{N-1}{2} & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases}$$

1.1.3 Synthèse avec des méthodes d'optimisation

La première méthode d'optimisation consiste à minimiser au sens des moindres carrés la distance entre le gabarit $H(f)$ désiré et le gabarit du filtre obtenu par la méthode précédente.

L'objectif de la seconde méthode d'optimisation est d'obtenir la meilleure approximation du gabarit $H(f)$ présentant des ondulations d'amplitude constante. Elle utilise une technique itérative : l'algorithme de Remez.

1.2 Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)

1.2.1 Définition

Ces systèmes sont caractérisés par des réponses impulsionnelles de durée infinie : les coefficients $h(k)$ sont non nuls sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ceci est réalisé par la présence de pôles dans la fonction de transfert du filtre :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} b_k z^{-k}}{\sum_{i=0}^{m-1} a_i z^{-i}}$$

Cela se traduit par l'équation suivante :

$$y(n) = -\sum_{i=1}^{m-1} a_i y(n-i) + \sum_{k=0}^{p-1} b_k x(n-k)$$

La condition de stabilité impose que les pôles de $H(z)$ soient à l'intérieur du cercle unité. La réponse impulsionnelle infinie permet d'obtenir un filtrage plus sélectif qu'un filtre *RIF* pour une quantité de calcul inférieure. La linéarité de la phase est, en théorie, impossible. Cependant on peut l'obtenir approximativement dans une bande limitée.

1.2.2 Synthèse

On calcule tout d'abord le filtre analogique passe-bas qui lui correspond, puis on synthétise ce filtre analogique. Enfin, on revient au filtre numérique par la transformation bilinéaire. Les méthodes classiques mettent en oeuvre des transformations à partir des équations de filtres analogiques connus (Butterworth, Tchebychev...). Le passage entre les différents types de filtre (Passe-Bas, Passe-Haut, Passe-Bande et Coupe-Bande) peut se faire dans le plan des p (analogiques) ou dans le plan des z au cours de la transformation $p \rightarrow z$. La méthode utilisée, la transformation bilinéaire, fait correspondre le plan des z au plan des p suivant la relation :

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

La synthèse d'un filtre *RII* se fait donc selon les étapes suivantes :

1) Synthèse du filtre analogique passe-bas de pulsation de coupure ω_c :

$$\text{Butterworth d'ordre } n : |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

$$\text{Tchebychev d'ordre } n : |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega)}$$

$$\text{avec } T_n(\omega) = \cos(n \arccos(\omega)) \text{ si } |\omega| \leq 1, T_n(\omega) = \cosh(n \operatorname{Arch}(\omega)) \text{ si } |\omega| > 1$$

2) Transformations fréquentielles en vue d'obtenir les diverses familles de filtres : passe-haut, passe-bande, coupe bande.

3) Transformée bilinéaire du filtre obtenu en 2).

4) Calcul de la fonction de transfert à partir des coefficients.

5) Visualisation : DSP, temps de propagation de groupe, réponse impulsionnelle, réponse indicielle.

Remarque : la transformation bilinéaire introduit une déformation des fréquences :

$$f_\alpha = \frac{F_e}{\pi} \tan\left(\pi \frac{f_n}{F_e}\right)$$

avec f_α fréquence analogique, f_n fréquence numérique et F_e la fréquence d'échantillonnage.

2 Travail à effectuer

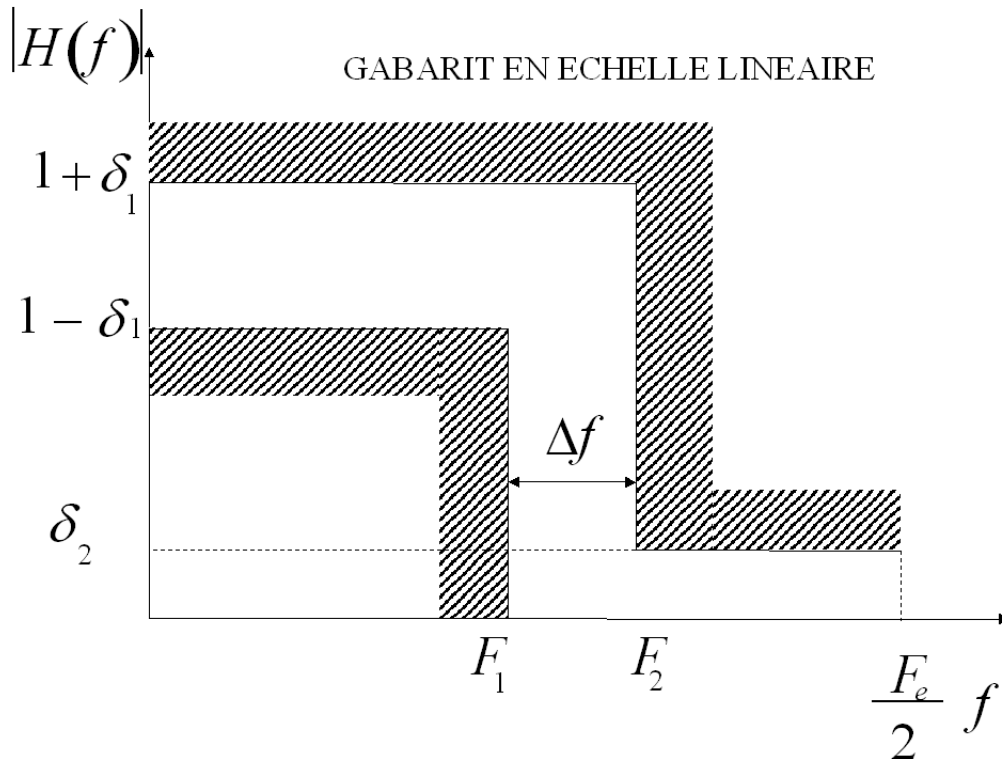
Lancer `filtnum` sous Matlab.

2.1 Introduction

Le TP permet de synthétiser des filtres numériques RIF et RII. Les filtres RIF peuvent être calculés par un développement en série de Fourier avec différentes fenêtres (rectangulaire, triangulaire, de Hamming et de Kaiser) et par deux méthodes d'optimisation (par les moindres carrés et par Remez). Les méthodes proposées pour les filtres RII utilisent les équations donnant des filtres analogiques connus (de Butterworth, de Chebychev I, de Chebyshev II et elliptique). L'intérêt sera porté tout d'abord sur les caractéristiques des filtres RIF, puis sur celles des filtres RII. Chacune de ces études sera suivie par des exemples de filtrage de signaux réels.

2.2 Gabarit

Le gabarit du filtre est défini par l'utilisateur parmi les quatre catégories suivantes : filtre passe-bas, filtre passe-haut, filtre coupe-bande et filtre passe-bande. On peut régler F_e la fréquence d'échantillonnage, Δf la largeur de la bande de transition, δ_1 l'amplitude des ondulations en bande passante et δ_2 l'amplitude des oscillations en bande atténuée. Ces amplitudes sont exprimées en échelle linéaire. Il est également possible d'utiliser comme paramètres l'ondulation en bande passante et en bande affaiblie exprimées en dB : $dp = 20 \log_{10} \left(\frac{1+\delta_1}{1-\delta_1} \right)$ et $da = 20 \log_{10} \frac{1}{\delta_2}$.



2.3 Filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

2.3.1 Calcul des coefficients par développement en série de Fourier

Evaluation de l'ordre : Possédant les caractéristiques du gabarit à respecter, il est possible de calculer quel devra être l'ordre N (très approximatif et en général sous-estimé) :

$$N = \frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{1}{10\delta_1\delta_2} \right) \frac{F_e}{\Delta f}$$

où F_e est la fréquence d'échantillonnage, Δf la largeur de la bande de transition, δ_1 l'amplitude des ondulations en bande passante et δ_2 l'amplitude des oscillations en bande atténuée. Repérer ces différents paramètres sur le tracé du gabarit et calculer N . Cette approximation n'est valable que pour des ordres suffisamment élevés. Choisir $F_e = 10000Hz$, $F_1 = 45Hz$ et $F_2 = 50Hz$. Synthétiser le filtre pour un ordre de $N = 50, 500, 1000, 2000, 3000, 4000$. Calculer l'ordre donné par l'approximation.

Influence de la fenêtre : Observer les fonctions de transfert obtenues par les quatre types de fenêtres disponibles (valeur de la pente, position et amplitude du premier lobe d'oscillation). Quels sont les avantages et les inconvénients de chacune ? Observer le temps de propagation de groupe.

Influence de l'ordre : On appelle ordre optimal d'un filtre numérique, l'ordre minimal tel que le gabarit fréquentiel soit respecté. Faire varier l'ordre du filtre dans une plage incluant l'ordre optimal

N. Mesurer son influence sur les paramètres suivants :

- la raideur de la pente
- la position de la fréquence de coupure à $-3dB$.
- la pseudo-période des lobes d'oscillation
- l'allure du temps de propagation

Comparer l'amplitude des ondulations en bande passante et en bande affaiblie. Quelle remarque peut-on faire sur l'amplitude des oscillations ? Pourrait-on réaliser un filtre passe-tout ? Quel serait son intérêt ?

2.3.2 Calcul des coefficients avec des méthodes d'optimisation

La méthode des moindres carrés permet d'agir différemment sur les ondulations en bande passante et en bande affaiblie. Comment ? Quelle propriété spécifique possède l'amplitude des oscillations lorsqu'on applique la méthode de Remez ? Observer le temps de propagation de groupe.

2.3.3 Réponse impulsionnelle et réponse indicielle

Observer la réponse impulsionnelle d'un filtre RIF. Retrouver les coefficients du filtre ? Justifier son aspect symétrique. Retrouver le temps de propagation. Quelles remarques peut-on faire sur la réponse indicielle (allure générale, nombre d'oscillations en fonction de l'ordre, ...) ?

2.3.4 Filtrage d'un signal

Vérifier la nature du filtre en lui imposant en entrée un bruit blanc. Existe-t-il un retard entre le signal initial et le signal filtré ?

2.4 Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)

2.4.1 Synthèse avec un Butterworth

Evaluation de l'ordre : Il existe un grand nombre de formules permettant d'estimer l'ordre du filtre numérique à partir du gabarit que l'on s'impose. Ces formules ne sont applicables que pour un certain type de filtre. A titre d'exemple, on donne :

$$N \geq \frac{\log \left(\frac{1}{\delta_2 \sqrt{2\delta_1}} \right)}{\log \tan(\pi F_2 T_e) - \log \tan(\pi F_1 T_e)}$$

avec F_1 fréquence de fin de bande 1 $[0, F_1]$, F_2 fréquence de début de bande 2 $([F_2, F_e/2])$. Cette formule n'est utilisable que pour des filtres passe-bas ou passe-haut de type Butterworth avec δ_1 et δ_2 petits. On notera qu'elle ne s'applique pas toujours pour les gabarits générés dans le *TP* car δ_1 n'est pas suffisamment faible. Dans ce cas, on fixera un ordre suffisamment grand permettant de respecter le gabarit puis on diminuera progressivement cet ordre afin d'obtenir l'ordre optimal. Observer l'influence de l'ordre sur la pente et sur le temps de propagation de groupe. Comment évoluent, pour le temps de propagation, la valeur des maxima et les fréquences correspondant à ces maxima ? *Pourquoi peut-il être très gênant d'avoir des temps de propagation très différents dans la bande passante ?*

2.4.2 Synthèse par un Tchebychev

Influence de l'ordre : Comme pour le filtre synthétisé par Butterworth, mesurer successivement la raideur de la pente, la position des fréquences de coupure (à -3dB), les oscillations dans la bande passante, la valeur du temps de propagation de groupe.

2.4.3 Comparaison

Observer les fonctions de transfert obtenues par les quatre méthodes proposées (Butterworth, Chebyshev I et de Chebychev II et elliptique) : valeur de la pente, position du premier lobe d'oscillation, amplitude du lobe secondaire. Quelle est la différence entre les méthodes de Chebyshev I et de Chebychev II ? En quoi la méthode elliptique est-elle optimale ?

Observer le temps de propagation de groupe. Quelles conséquences va-t-il entraîner ?

2.4.4 Réponse impulsionnelle et réponse indicielle

Observer la réponse impulsionnelle d'un filtre RII. Quelles remarques peut-on faire sur la réponse indicielle (allure générale, nombre d'oscillations en fonction de l'ordre, ...) ?

2.4.5 Filtrage d'un signal

Vérifier la nature du filtre en lui imposant en entrée un bruit blanc.

2.5 Conclusion

Donner les avantages et les inconvénients respectifs des filtres RIF et des filtres RII. En particulier, comparer leurs réponses aux différents signaux proposés.