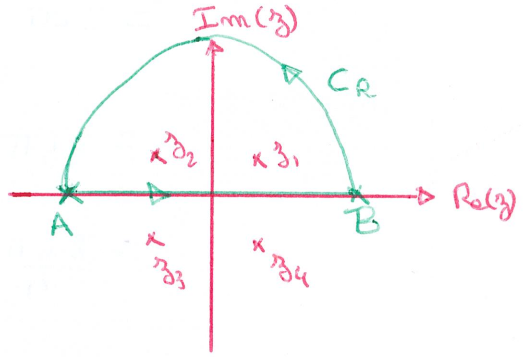
Variables complexes

TD 1

Exo 1 Calculer $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$



On définit $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$ uniforme et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\text{racines de } z^4+1\}$

où $z^4 = -1 = e^{i(\pi+2k\pi)} \Rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{k\pi}{2}}$

on note $z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{i3\pi/4}$, $z_3 = e^{i5\pi/4}$, $z_4 = e^{i7\pi/4}$

et $\Gamma = [AB] \cup C_R$ le contours

TR des résidus $\rightarrow$ $\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{z_j} \operatorname{res} f(z_j)$

- z_1 pôle d'ordre 1 $\rightarrow$ $\operatorname{res} f(z_1) = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)} = \frac{z_1^2+1}{4z_1^3} = \frac{i+1}{4e^{i3\pi/4}}$
- z_2 pôle d'ordre 1 $\rightarrow$ $\operatorname{res} f(z_2) = \frac{P(z_2)}{Q'(z_2)} = \frac{-i+1}{4e^{i\pi/4}}$

1e lemme de Jordan en posant $z = Re^{i\theta}$

$$S = \sup_{C_R} |z f(z)| = \sup_{\theta\in[0,\pi]} \left| Re^{i\theta} \frac{1+R^2e^{2i\theta}}{1+R^4e^{4i\theta}} \right|$$
$$= \sup_\theta R \frac{|1+R^2e^{2i\theta}|}{|1+R^4e^{4i\theta}|}$$

avec $|1+R^2e^{2i\theta}| < 1+R^2$ car $|a+b| < |a|+|b|$

$|1+R^4e^{4i\theta}| > |1-|R^4e^{4i\theta}|| = |1-R^4|$ car $|a+b| > ||a|-|b||$

$= R^4-1$ pour R suffisament grand

$\Rightarrow S < \frac{R(R^2+1)}{R^4-1} \underset{\infty}{\sim} \frac{R^3}{R^4} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ $\Rightarrow \int_{C_R} f(z)dz = 0$

Conclusion → pour $R \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\left[\int_{\Gamma} f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz\right]$$

$$= 2i\pi\left[\frac{i+1}{4}e^{-\frac{3i\pi}{4}} + \frac{1-i}{4}e^{-i\pi/4}\right]$$

$$= 2i\pi\left[\frac{i+1}{4}(-1-i)\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{(1-i)(1-i)}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= \frac{2i\pi\sqrt{2}}{4\cdot 2}\left[(1-i)^2-(1+i)^2\right] = \frac{i\pi\sqrt{2}}{4}(-4i) = \pi\sqrt{2}$$

$$\boxed{I = \pi\sqrt{2}}$$

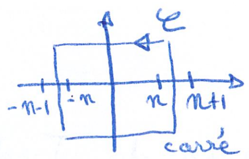
Remarque sur les séries

On se propose de calculer les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} R(n)$ ou $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n R(n)$

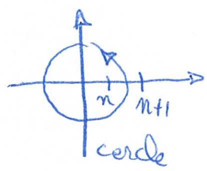
où $R(n)$ est une fraction rationnelle tq $R(n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand $n \to \infty$

A chacune des séries, on associe des fcts auxiliaires

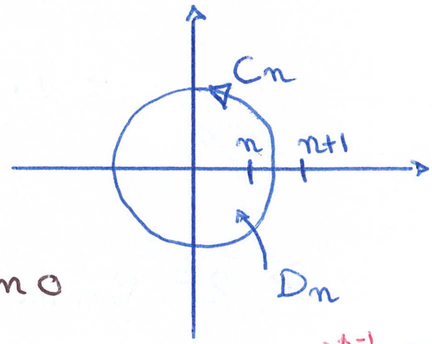
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} R(n) \Longrightarrow R(z)\,\text{cotan}(\pi z)$$



$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n R(n) \Longrightarrow R(z)\,\frac{1}{\sin(\pi z)}$$



Exo 2 Calculer la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^4}$ en appliquant le th des résidus à $g(z) = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ et au contours $\mathcal{C}$.



*** Identification des singularités**

- $z=0$ pôle d'ordre 5 car $\sin(\pi z) = 0$ en 0
- $z = -n, \dots, n$ (sauf 0) pôle simple

car Taylor $\varphi(z) = \varphi(z_j) + \dots + \frac{(z-z_j)^{p-1}}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(z_j) + \dots$

$\frac{\varphi(z)}{(z-z_j)^p} = \dots + \frac{\varphi^{(p-1)}(z_j)}{(p-1)!(z-z_j)}$

*** Calcul des résidus**

- en $z=0$ dvpmt de Laurent, puis recherche terme en $\frac{1}{z}$

$\Updownarrow$

dvpmt de Taylor de $\overset{\varphi(z)=}{z^5 g(z)}$ puis terme en z^4

$$z^5 g(z) = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = \pi z [\sin(\pi z)]^{-1} = \pi z \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\pi z)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right]^{-1}$$

$$= \pi z \left[\pi z - \frac{(\pi z)^3}{6} + \frac{(\pi z)^5}{120} + o(z^5) \right]^{-1}$$

$$= \pi z [\pi z]^{-1} \left[1 - \frac{(\pi z)^2}{6} + \frac{(\pi z)^4}{120} + o(z^4) \right]^{-1}$$

$$= 1 - \left(-\frac{(\pi z)^2}{6} + \frac{(\pi z)^4}{120} + o(z^4) \right) + \left(-\frac{(\pi z)^2}{6} + \frac{(\pi z)^4}{120} + o(z^4) \right)^2$$

$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$

terme en z^4 $\rightarrow$ $\boxed{\mathrm{res}\, g(0)} = -\frac{\pi^4}{120} + \frac{\pi^4}{36} = \boxed{\frac{7\pi^4}{360}}$

- en $\overset{k}{\overset{\shortparallel}{z}} \in [\![-n, n]\!] \setminus \{0\}$ pôle simple de $1/\sin(\pi z)$

$$\mathrm{res}\, g(k) = \lim_{z \to k} (z-k)\, g(z) = \lim_{z \to k} \frac{1}{z^4} \frac{(z-k)\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{k^4} \underbrace{\lim_{z \to k} \frac{\pi(z-k)}{\sin(\pi z)}}_{\mathrm{res}\, \frac{\pi}{\sin(\pi z)}}$$

avec $\mathrm{res}\, \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{P(z)}{Q'(z)}\Big|_{z=k} = \frac{\cancel{\pi}}{\pi \cos(\pi k)} = (-1)^k$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{res}\, g(k) = (-1)^k / k^4}$ $\leftarrow$ on devine la série initiale !

* Intégrale le long de C_n

$$\int_{C_n} g(z)dz = \int_{C_n} \frac{1}{z^4}\frac{2i\pi\, dz}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}} = 2i\pi\left[\int_{C_n^R}\frac{1}{z^4}\frac{dz}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}} + \int_{C_n^\ell}\frac{1}{z^4}\frac{dz}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}\right]$$

on choisit ces e^- car 2e lemme
$\Rightarrow C_n^R$ et $m>0$
C_n^ℓ et $m<0$

$$= 2i\pi\left[\int_{C_n^R}\underbrace{\frac{1}{z^4}\frac{e^{i\pi z}}{e^{2i\pi z}-1}}_{\psi(z)}dz + \int_{C_n^\ell}\underbrace{\frac{1}{z^4}\frac{e^{-i\pi z}}{1-e^{-2i\pi z}}}_{\phi(z)}dz\right]$$

▷ 2e lemme de Jordan sur C_n^R

$$z = Re^{i\theta} \Rightarrow e^{2i\pi z} = e^{2i\pi R(\cos\theta + i\sin\theta)} = e^{2i\pi R\cos\theta}\, e^{-2i\pi R\sin\theta}$$

$|a+b| > ||a|-|b||$

$$\Rightarrow |e^{2i\pi z}-1| > ||e^{2i\pi z}|-1| = |e^{-2i\pi R\sin\theta}-1|$$

$$= 1 - e^{-2i\pi R\sin\theta}$$ pour R 'grand' car $\sin\theta > 0$

$$\Rightarrow |\psi(z)| < \frac{1}{R^4}\frac{1}{1-e^{-2i\pi R\sin\theta}} \xrightarrow[R\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_n^R}\psi(z)e^{i\pi z}dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

▷ 2e lemme de Jordan sur C_n^ℓ

$$e^{-2i\pi z} = e^{-2i\pi R\cos\theta}\, e^{2\pi R\sin\theta}$$

$$|1-e^{-2i\pi z}| > |1-e^{2\pi R\sin\theta}| = 1-e^{2\pi R\sin\theta}$$ pour $R\to\infty$ car $\sin\theta<0$

$$\Rightarrow |\phi(z)| = \frac{1}{R^4}\frac{1}{1-e^{2\pi R\sin\theta}} \xrightarrow[R\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_n^\ell}\phi(z)e^{-i\pi z}dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Conclusion =

$$\int_{\mathcal{C}} g(z)\,dz = \int_{\mathcal{C}_n^{\ell}} g(z)\,dz + \int_{\mathcal{C}_n^{R}} g(z)\,dz \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$= 2i\pi \sum_i \operatorname{res} g = 2i\pi \left[\operatorname{res} g(0) + \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \operatorname{res} g(k)\right]$$

$$= 2i\pi \left[\frac{7\pi^4}{360} + \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} (-1)^k \frac{1}{k^4}\right]$$

$$= \underbrace{2i\pi \left[\frac{7\pi^4}{360} + 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k^4}\right]}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^4} = -\frac{7\pi^4}{720}}$$