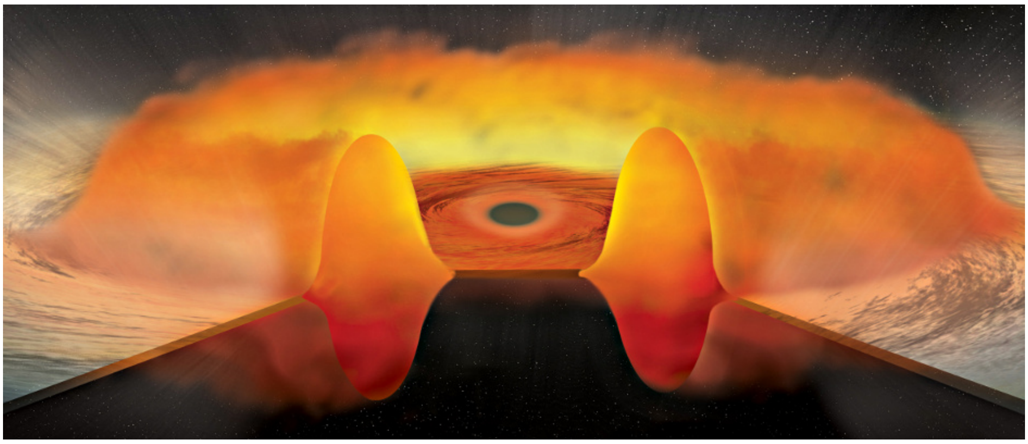
Disque épais autour d'un trou noir

Baptiste Pinot et Étienne Dupont

20/03/2018



Résumé

Nous étudions dans ce projet les caractéristiques d'un disque épais en rotation autour d'un trou noir, en particulier la stabilité du disque d'accrétion, dans l'approximation newtonienne et en négligeant l'auto-gravité.

1 Modélisation du problème newtonien sans auto-gravité

On considère un trou noir entouré d'un disque à symétrie axiale, où la symétrie Nord-Sud est respectée. On utilise les coordonnées sphériques (r, θ, Φ). Dans la suite on note $\varpi = r \sin\theta$ la distance à l'axe et $z = r\cos\theta$ l'altitude. On s'intéresse à des solutions stationnaires.
Le trou noir est caractérisé par :
- Une masse M ; un paramètre de spin $a = 0$ (trou noir sans rotation) ;
- Un rayon de l'horizon $R_S = 2GM/c^2$
- Un potentiel gravitationnel (approximation de Paczynski & Wiita 1980) donné par

$$\phi_{TN}(r) = -\frac{GM}{r - R_S}$$

Le disque est caractérisé par :
- Des rayons extrémaux R_{in} et R_{out} dans le plan équatorial ;
- Une équation d'état dominée par la pression de dégénérescence des électrons dans le régime ultra-relativiste, soit $P = \kappa\rho^\gamma$ avec $\gamma = 4/3$. On note $\epsilon = \frac{1}{\gamma-1}\frac{P}{\rho}$ et $H = \epsilon + \frac{P}{\rho}$ l'énergie interne spécifique et l'enthalpie spécifique ;
- Une loi de rotation donnée par la fonction $\Omega(\varpi)$ où Ω est la vitesse angulaire. On écrit le moment angulaire spécifique et la vitesse tangentielle
  $l(\varpi) = \varpi^2\Omega(\varpi)$ et $v(\varpi) = \varpi\Omega(\varpi) = \frac{l(\varpi)}{\varpi}$
- Une masse M_D donnée par $M_D = \int_{disque} \rho dV$
- Un moment cinétique J_D donné par $J_D = \int_{disque} \rho l dV$

2 Développement analytique du problème

2.1 Développement de l'équation d'équilibre

L'équilibre hydrostatique s'écrit

$$\vec{0} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P - \vec{\nabla}\Phi + \varpi\Omega^2(\varpi)\vec{u_\varpi}$$

où $\vec{u_\varpi}(\Phi) = \sin\theta\vec{u_\theta} + \cos\theta\vec{u_r}$ désigne le vecteur perpendiculaire à l'axe du disque, pour Φ donné. Des développements détaillés en annexe montrent que cette équation est équivalente à

$$\vec{0} = \vec{\nabla}\left(H + \Phi + \int \frac{l^2(\varpi)}{\varpi^3} d\varpi\right) \tag{1}$$

En utilisant la quantité conservée mise en évidence ainsi que la condition $P = 0$ au bord du disque (voir Annexe 1) on obtient une relation sur l'enthalpie

$$H(r,\theta) = \Phi\left(R_{in}, \theta = \frac{\pi}{2}\right) - \Phi(r,\theta) + \int_{R_{in}}^{\varpi} \frac{l^2(x)}{x^3} dx$$

Par la suite, on écrit

$$\begin{aligned} \Phi_{in} &= \Phi\left(R_{in}, \theta = \tfrac{\pi}{2}\right); \\ h_0^2 &= \tfrac{l^2(R_{in})}{R_{in}^2}; \\ \Psi(\varpi) &= \int_1^{\varpi/R_{in}} \tfrac{l^2(xR_{in})}{l^2(R_{in}x^3)} dx. \end{aligned}$$

L'équation précédente devient

$$H = \Phi_{in} - \Phi + h_0^2\Psi. \tag{2}$$

De plus, on va considérer une loi de rotation de la forme

$$l(\varpi) = l(R_{in})\left(\frac{\varpi}{R_{in}}\right)^\alpha.$$

On note l_K le moment cinétique spécifique sur une orbite keplérienne, soit $l_K^2(\varpi) = \varpi^3\partial_\varpi\Phi$. On peut identifier deux rayons remarquables dans le plan équatorial.

Le rayon du centre R_c correspond au maximum de la masse volumique. On a donc en R_c

$$\vec{\nabla} P = \kappa \vec{\nabla} \rho^\gamma = \vec{0}$$

Soit en reprenant l'équation d'équilibre hydrostatique

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}\Phi + \frac{l^2(R_c)}{R_c^3}\vec{u_\varpi}$$

En projetant sur $\vec{u_\varpi}$ on obtient directement

$$l(R_c) = l_K(R_c) \text{ avec } R_c > R_{in}$$

La condition sur R_c découle du fait que si R_c était plus petit ou égal à R_{in} alors on pourrait trouver, par continuité de la pression donc de la masse volumique dans le disque, un rayon R_0 vérifiant $\rho(R_0) > 0$ et $R_0 < R_{in}$ ce qui est impossible si R_{in} désigne l'extrémité interne du disque.

Le rayon de Lagrange correspond au rayon où la force de gravité est exactement compensée par la force centrifuge, ce qui correspond exactement au cas du mouvement keplérien. On a donc immédiatement

$$l(R_L) = l_K(R_L) \text{ avec } R_L \leq R_{in}$$

La condition sur R_L provient de la continuité du gradient de pression au niveau de l'interface entre l'intérieur et l'extérieur du disque, où on a $\vec{\nabla} P = \vec{0}$. Si on avait $R_L > R_{in}$ alors, pour $r < R_L$ la force de gravité l'emporterai strictement sur la force centrifuge et on aurait donc, avec la relation hydrostatique, a alors en particulier $\vec{\nabla} P(R_{in}) < 0$ ce qui n'est pas possible.

3 Annexes

3.1 Obtention de l'équation (1)

L'équilibre hydrostatique s'écrit

$$\vec{0} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} P - \vec{\nabla}\Phi + \varpi\Omega^2(\varpi)\vec{u_\varpi}$$

En outre on a $P = \kappa\rho^\gamma$ d'où

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} P = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(\kappa\rho^\gamma) = \gamma\frac{\rho^{\gamma-1}}{\rho}\vec{\nabla}\rho = \frac{\gamma}{\gamma-1}\vec{\nabla}\frac{P}{\rho} = \vec{\nabla} H$$

Notons

$$\int_\varpi^{R_{in}} \frac{l^2(x)}{x^3}dx = \int \frac{l^2(\varpi)}{\varpi^3}d\varpi$$

Pour se convaincre qu'on a bien la relation $\varpi\Omega^2(\varpi)\vec{u}_\varpi = -\vec{\nabla}\int \frac{l^2}{\varpi^3}d\varpi$ on peut décomposer le terme de droite sur la base $(\vec{u}_\varpi, \vec{u}_z, \vec{u}_\Phi)$

$$\begin{cases} \vec{u}_\varpi.\vec{\nabla}\int \frac{l^2}{\varpi^3}d\varpi & = & \frac{\partial}{\partial\varpi}\int \frac{l^2}{\varpi^3}d\varpi = -\frac{l^2}{\varpi^3} \\ \vec{u}_z.\vec{\nabla}\int \frac{l^2}{\varpi^3}d\varpi & = & \frac{\partial}{\partial z}\int \frac{l^2}{\varpi^3}d\varpi = 0 \\ \vec{u}_\Phi.\vec{\nabla}\int \frac{l^2}{\varpi^3}d\varpi & = & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\Phi}\int \frac{l^2}{\varpi^3}d\varpi = 0 \end{cases}$$

D'autre part on a

$$\frac{l^2}{\varpi^3} = \frac{\varpi^4\Omega^2(\varpi)}{\varpi^3} = \varpi\Omega^2(\varpi)$$

Ce qui donne le résultat escompté :

$$\vec{0} = \vec{\nabla}\left(H + \Phi + \int \frac{l^2(\varpi)}{\varpi^3} d\varpi\right)$$

En outre, la condition $P(R_{in}, \theta) = 0$ donne $\rho(R_{in}, \theta) = 0$ et donc $H(R_{in}, \theta) = 0$. En utilisant la quantité conservée on a

$$H(\varpi, z) + \Phi(\varpi, z) + \int_{\varpi}^{R_{in}} \frac{l^2(x)}{x^3} dx = H(R_{in}, 0) + \Phi(R_{in}, 0) + \int_{R_{in}}^{R_{in}} \frac{l^2(x)}{x^3} dx = \Phi(R_{in}, 0)$$

En repassant dans le système de coordonnées (r, θ, Φ) on obtient

$$H(r, \theta) = \Phi\left(R_{in}, \theta = \frac{\pi}{2}\right) - \Phi(r, \theta) + \int_{R_{in}}^{\varpi} \frac{l^2(x)}{x^3} dx$$

3.2 Détail des algorithmes