

1 Introduction

1.1 Estimateurs semi-locaux en une dimension

2 Courbes

2.1 Premières définitions

Définition 2.1 (Courbe). — Une *courbe paramétrée* γ est une application continue d'un intervalle $[a, b]$ dans \mathbb{R}^2 .

- Une *courbe paramétrée fermée simple* γ est une application continue injective d'un intervalle $[a, b]$ dans \mathbb{R}^2 telle que $\lim_{t \rightarrow b} \gamma(t) = \gamma(a)$.
- Une *courbe géométrique* \mathcal{C} est l'image d'une courbe paramétrée γ . On dit alors que γ est une *paramétrisation* de \mathcal{C} .
- Une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^2$ est dite *simple* si les points de $\gamma([a, b])$ n'ont qu'un seul antécédent par γ .
- Une *courbe de Jordan* est une courbe géométrique fermée simple.
- Une courbe paramétrée de longueur finie sera dite *rectifiable*.
- La longueur d'une courbe paramétrée sera notée $L(\gamma)$.

Afin de définir l'intérieur et l'extérieur d'une courbe géométrique rappelons le théorème de Jordan.

Théorème 2.2 (Théorème de Jordan). *Dans le plan \mathbb{R}^2 , le complémentaire d'une courbe de Jordan \mathcal{C} est formé d'exactly deux composantes connexes, une bornée, l'autre non.*

On appelle *intérieur de \mathcal{C}* la composante connexe bornée et *extérieur de \mathcal{C}* la composante connexe non-bornée. Si \mathcal{C} est une courbe simple, paramétrée par $\gamma : [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, telle que $[\gamma(s_0), \gamma(s_1)]$ n'intersecte pas \mathcal{C} , on appelle alors *intérieur de \mathcal{C}* (figure 1) la composante connexe non-bornée délimitée par \mathcal{C} et le segment $[\gamma(s_0), \gamma(s_1)]$.

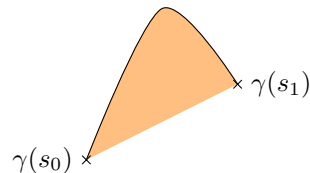


FIGURE 1 – En orange l'intérieur de l'arc $\gamma([s_0, s_1])$.

Définition 2.3 (Relation d'ordre). — A chaque courbe paramétrée simple γ , une relation d'ordre est définie pour les points de la courbe géométrique associée par :

$$\gamma(\alpha) \leq_{\gamma} \gamma(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leq \beta.$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, nous noterons \leq_{γ} plus simplement \leq .

- Une courbe paramétrée simple munie d'une telle relation d'ordre est appelée *courbe orientée*.
- Un *semi-voisinage à gauche* (respectivement *semi-voisinage à droite*) d'un point x d'une courbe orientée γ est un ensemble de points $\gamma([t_0, t_1])$ tel que $\gamma(t_1) = x$ (respectivement $\gamma([t_0, t_1[)$ tel que $\gamma(t_0) = x$).

- Un *voisinage* d'un point x d'une courbe orientée γ est un ensemble de points $\gamma(]t_0, t_1[)$ tel qu'il existe $t \in]t_0, t_1[$ tel que $\gamma(t) = x$.

2.2 Courbes latéralement lisses

Les notions définies dans ce paragraphe sont tirées de [AR]. Cependant, contrairement à [AR], nous ne considérons ici que des courbes simples.

- Définition 2.4** (Courbes latéralement lisses [AR]). — Un angle entre deux droites orientées D_1 et D_2 est la valeur absolue du représentant dans $] - \pi, \pi]$ de l'angle algébrique $(x_1 - y_1, x_2 - y_2)$ où x_1, y_1 (respectivement x_2, y_2) sont deux points de D_1 (respectivement de D_2) tels que $x_1 <_{D_1} y_1$ (respectivement $x_2 <_{D_2} y_2$). Un angle entre deux droites est donc compris entre 0 et π .
- Une droite orientée D est appelée *sécante* d'une courbe orientée si elles se coupent en deux points x et y tels que $x \leq_D y \Leftrightarrow x \leq_\gamma y$.
 - Une droite orientée D est appelée *tangente à gauche* (respectivement *tangente à droite*) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un semi-voisinage à gauche (respectivement à droite) V_x tel que toute sécante de V_x forme un angle inférieur à ϵ avec D .
 - Une courbe orientée est *latéralement lisse* si tout point de la courbe orientée, à l'exception de ses extrémités, admet une tangente à gauche et une tangente à droite.
 - Pour chaque point $\gamma(s)$ d'une courbe orientée γ paramétrée par longueur d'arc, on définit $e_l(s)$ (respectivement $e_r(s)$) le *vecteur tangent à gauche* (respectivement à droite) comme étant le vecteur orienté de norme 1, orienté dans le sens de la tangente à gauche (respectivement à droite).

Proposition 2.5 (Théorème 3.1.1. [AR]). *Toute courbe latéralement lisse est rectifiable.*

- Définition 2.6.** — Un point d'une courbe latéralement lisse dont la tangente à gauche et la tangente à droite coïncident est dit *lisse*.
- Un point d'une courbe latéralement lisse qui n'est pas lisse est dit *angulaire*.

Proposition 2.7 (Théorème 3.3.2, [AR]). *L'ensemble des points angulaires d'une courbe latéralement lisse est dénombrable.*

Proposition 2.8 (Théorème 3.3.3, [AR]). *Soit γ une courbe latéralement lisse paramétrée par longueur d'arc $s \in [0, l]$. Pour tout $s \in [0, l]$, γ admet une dérivée à droite $\gamma'_r(s)$ et une dérivée à gauche $\gamma'_l(s)$. De plus :*

- $\|\gamma'_l(s)\| = \|\gamma'_r(s)\| = 1$,
- l'application γ'_l (respectivement γ'_r) est continue à droite (respectivement continue à gauche)
- pour tout $s \in [0, L]$,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow s \\ t < s}} e_r(t) = \gamma'_l(s)$$

et

$$\lim_{\substack{t \rightarrow s \\ t > s}} e_l(t) = \gamma'_r(s).$$

Indicatrice des tangentes Dans le cas d'une courbe paramétrée simple C^1 de \mathbb{R}^2 , l'indicatrice des tangentes est simplement $(\gamma, \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|})$ reparamétrisée par longueur d'arc. Cette courbe est à image dans $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Construisons l'indicatrice des tangentes dans le cas d'une courbe simple latéralement lisse γ paramétrée par longueur d'arc. Les projections canoniques de $\mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow S^1$ sont respectivement notées p_1 et p_2 .

Définition 2.9. Une *indicatrice des tangentes* τ est une courbe simple paramétrée par longueur d'arc de $\mathbb{R}^2 \times S^1$ telle que

- pour tout $s \in [0, L(\tau)]$, $p_1(\tau(s)) \in \text{Im}(\gamma)$,
- s'il existe $(s, s') \in [0, L(\tau)] \times [0, L(\gamma)]$ tel que $p_1(\tau(s)) = \gamma(s')$, alors $p_2(\tau(s))$ appartient à une géodésique de longueur minimale de S^1 reliant $e_l(s')$ à $e_r(s')$. Si $e_l(s') = e_r(s')$, cette géodésique est réduite à un point et si $e_l(s') \neq -e_r(s')$, cette géodésique est unique.

Remarque 2.10. La projection p_2 de l'indicatrice des tangentes n'est pas nécessairement une courbe simple.

2.3 Courbure totale

Définition 2.11. — Une *chaîne* d'une courbe orientée γ est une suite finie de points de γ croissante.

- Une ligne brisée est *inscrite* dans une courbe orientée γ si ses sommets forment une chaîne de γ .
- Un polygône est inscrit dans une courbe orientée γ fermée si ses sommets forment une chaîne de γ .
- La *courbure totale* $\kappa(L)$ d'une ligne brisée L de sommets x_0, \dots, x_m est définie par :

$$\kappa(L) := \sum_{i=1}^{m-1} \widehat{(x_{i-1}x_i, x_ix_{i+1})}.$$

- La *courbure totale* $\kappa(P)$ d'un polygône P de sommets x_0, \dots, x_m est définie par :

$$\kappa(P) := \sum_{i=1}^m \widehat{(x_{i-1}x_i, x_ix_{i+1})}.$$

où $x_{m+1} := x_0$.

- La *courbure totale* $\kappa(\gamma)$ d'une courbe orientée γ est la borne supérieure des courbures totales de ses lignes brisées inscrites.
- La *courbure totale* $\kappa(\gamma)$ d'une courbe orientée fermée γ est la borne supérieure des courbures totales de ses polygônes inscrits.

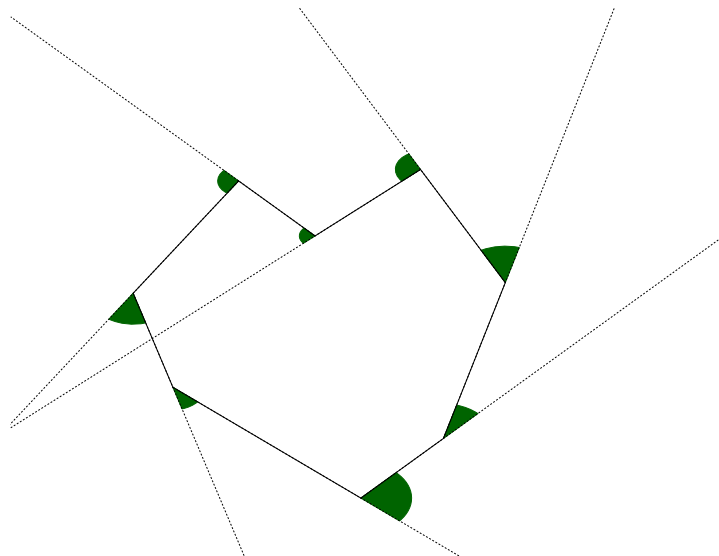


FIGURE 2 – La courbure totale du polygone est la somme de ses angles verts.

Proposition 2.12 (Théorème 5.1.2 [AR]). *Toute courbe de courbure totale finie est latéralement lisse.*

Proposition 2.13 (Théorème 5.4.1 [AR]). *Soit γ une courbe rectifiable paramétrée par la longueur d'arc. Si de plus γ est de courbure totale finie, alors pour tout $s \in [0, L(\gamma)]$, les dérivées à gauche $\gamma'_l(s)$ et à droite $\gamma'_r(s)$ existent et les fonctions dérivées à gauche et à droite sont à variation bornée.*

Proposition 2.14 (Théorème de Fenchel, théorème 5.1.5 [AR]). *Pour toute courbe fermée γ $\kappa(\gamma) \geq 2\pi$. De plus $\kappa(\gamma) = 2\pi$ si et seulement si γ est le bord d'une partie convexe du plan.*

Proposition 2.15 (Théorème 5.2.2 [AR]). *La courbure totale d'une courbe latéralement lisse est égale à la longueur de la projection p_2 d'une de ses indicatrices des tangentes.*

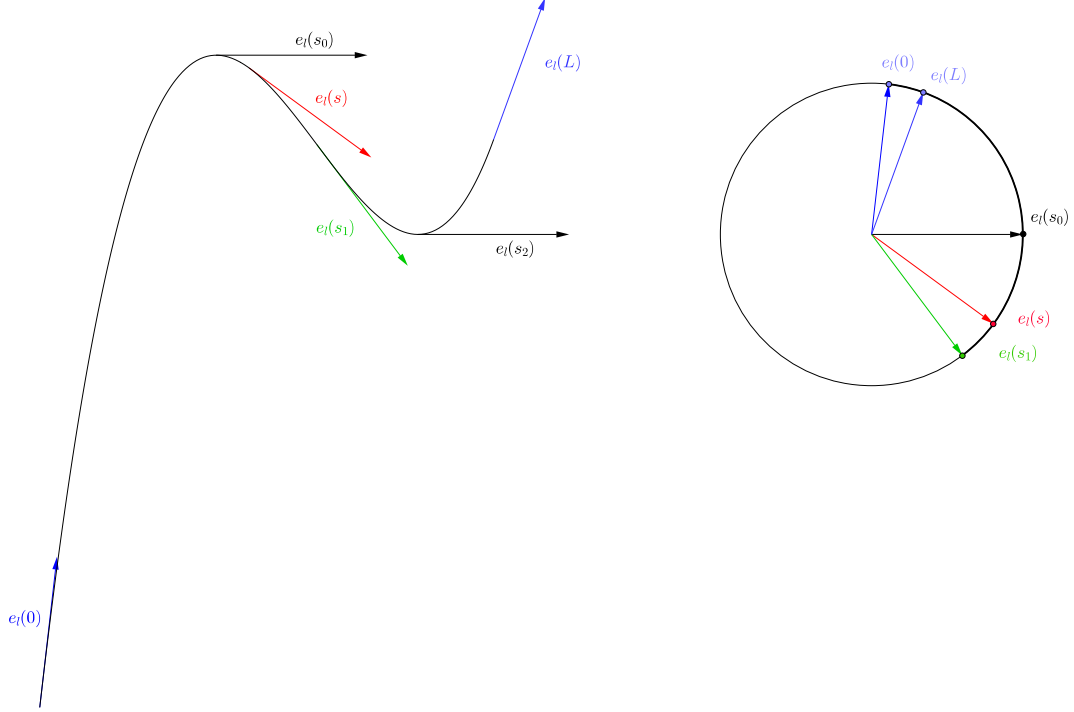


FIGURE 3 – La courbure totale de la courbe est la longueur de la courbe tracée par le vecteur tangent unitaire sur le cercle compté avec multiplicité. Ici le vecteur $e_l(s) = e_r(s)$ (en rouge) parcourt la courbe tracée sur le cercle en partant de $e_l(0)$ (en bleu) va jusqu'à $e_l(s_1)$ et retourne à $e_l(L)$ (en vert). La courbure totale est alors la somme des arcs $e_l(0)e_l(s_1)$ et $e_l(s_1)e_l(L)$.

La proposition suivante est une variante du théorème de comparaison de Schur (Théorème 5.1, Partie II, [BSSZ]) les arguments utilisés sont semblables à ceux du théorème 5.8.1 de [AR].

Proposition 2.16. *Soit γ et $\bar{\gamma}$ deux courbes latéralement lisses paramétrées par longueur d'arc de \mathbb{R}^2 telles que :*

- *γ et $\bar{\gamma}$ ont mêmes extrémités, plus précisément $\gamma(0) = \bar{\gamma}(0)$ et il existe s_1 et \bar{s}_1 tels que $\gamma(s_1) = \bar{\gamma}(\bar{s}_1)$;*
- *l'intérieur de $\bar{\gamma}|_{[0, \bar{s}_1]}$ existe et est convexe ;*
- *$\bar{\gamma}$ est de courbure supérieure à γ , c'est-à-dire pour tout intervalle $I \subset [0, \bar{s}_1]$, $\kappa(\gamma|_I) \leq \kappa(\bar{\gamma}|_I)$*

Alors la longueur de $\bar{\gamma}$ est supérieure à la longueur de γ , plus précisément $\bar{s}_1 \geq s_1$.

Démonstration. Notons m le milieu du segment $[\bar{\gamma}(1), \bar{\gamma}(0)]$. Notons δ_1 et δ_2 les paramétrisations des segments $[m, \bar{\gamma}(0)]$ et $[\bar{\gamma}(1), m]$ par longueur d'arc. Notons $\xi := \delta_2 \square \bar{\gamma} \square \delta_1$. Soit τ une indicatrice des tangentes de ξ . Par la proposition 2.14, $L(p_2(\tau)) = 2\pi$. Il existe alors s' tel que $L(p_2(\tau|_{[0, s']})) = L(p_2(\tau|_{[s', L(\tau)]})) = \pi$. $p_2 \circ \tau(s')$ est alors orienté dans le même sens que $\bar{\gamma}(1) - \bar{\gamma}(0)$. Notons $\bar{\gamma}(\tilde{s}) := p_1 \circ \tau(s')$ et $T_0 := p_2 \circ \tau(s')$.

Donc pour tout point p de τ , $\widehat{(p, \tau(s'))} \leq \frac{1}{2}L(\tau) = \pi$. Pour tout $s \in [0, \bar{s}_1]$, $\widehat{(\bar{\gamma}'(s), T_0)} \leq \pi$,

donc

$$(\widehat{\gamma'_l(s), \gamma'_l(\tilde{s})}) \leq \kappa(\gamma|_{[\tilde{s}, s_1]}) \leq \kappa(\bar{\gamma}|_{[\tilde{s}, s_1]}) \leq (\widehat{\bar{\gamma}'_l(s), T_0}) \leq \pi$$

Par décroissance de cosinus, pour tout $s \in [0, \bar{s}_1]$,

$$\langle \bar{\gamma}'_l(s), T_0 \rangle = \cos(\widehat{T_0, \bar{\gamma}'_l(s)}) \leq \cos(\widehat{\gamma'_l(\tilde{s}), \gamma'_l(s)}) = \langle \gamma'_l(s), \gamma'_l(\tilde{s}) \rangle. \quad (1)$$

De plus,

$$|\bar{\gamma}(s_1) - \bar{\gamma}(0)| = \langle \bar{\gamma}(s_1) - \bar{\gamma}(0), T_0 \rangle = \int_0^{\bar{s}_1} \langle \bar{\gamma}'_l(s), \bar{\gamma}'_l(\tilde{s}) \rangle ds,$$

or

$$|\bar{\gamma}(s_1) - \bar{\gamma}(0)| = |\gamma(s_1) - \gamma(0)| \geq \langle \gamma(s_1) - \gamma(0), \gamma'_l(\tilde{s}) \rangle = \int_0^{s_1} \langle \gamma'_l(s), \gamma'_l(\tilde{s}) \rangle ds,$$

donc

$$\int_0^{\bar{s}_1} \langle \bar{\gamma}'_l(s), T_0 \rangle ds \geq \int_0^{s_1} \langle \gamma'_l(s), \gamma'_l(\tilde{s}) \rangle ds,$$

et par l'inégalité 1, $\bar{s}_1 \geq s_1$. □

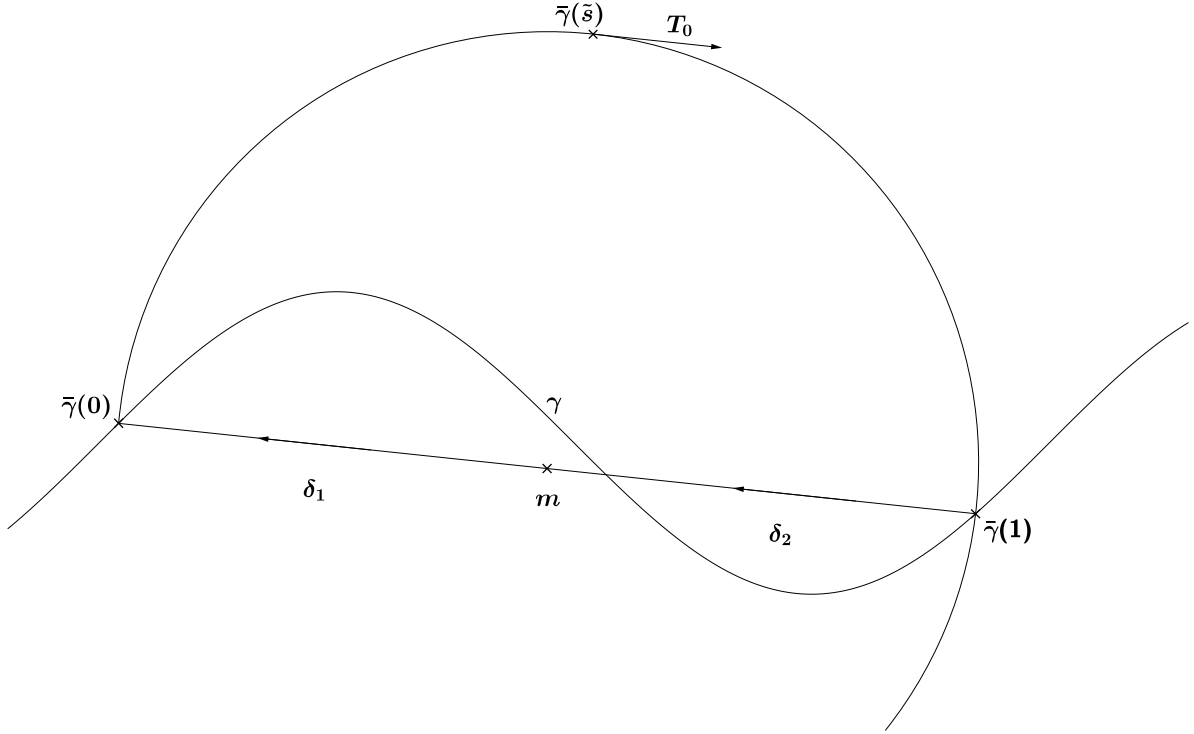


FIGURE 4

L'hypothèse sur les courbures de γ et $\bar{\gamma}$ de la proposition 2.16 est assez restrictive, elle implique que $\bar{\gamma}$ possède au moins autant de points angulaires que γ . En pratique cette proposition risque de n'être utilisable que pour des courbes C^1 . Dans le cas plus général des courbes à courbure totale finie, les propositions suivantes prennent le relais.

Proposition 2.17 (Théorème 5.8.1 [AR]). Soit $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbf{R}^2$ une courbe telle que $\kappa(\gamma([0, 1])) < \pi$, alors

$$L(\gamma) \leq \frac{\|\gamma(1) - \gamma(0)\|_2}{\cos\left(\frac{\kappa(\gamma)}{2}\right)}.$$

De plus, les deux termes de l'inégalité sont égaux si et seulement si γ est une ligne brisée composée de deux arêtes de même longueur.

Corollaire 2.18 (Comparaison cordes et courbe). Soit \mathcal{C} une courbe latéralement lisse telle que toute paramétrisation γ soit de courbure inférieure à celle d'un cercle de rayon $r > 0$, c'est-à-dire pour tout intervalle $I \subset [0, L(\gamma)]$, $\kappa(\gamma|_I) \leq \frac{|I|}{r}$. Soient a et b des points de \mathcal{C} , tels que $\|a - b\|_2 < 2r$. En notant $L(\gamma_{ab})$ la longueur d'arc entre a et b , arc inclus dans $\overset{\circ}{B}_{\|\cdot\|_2}(a, r)$,

$$\|a - b\|_2 \leq L(\gamma_{ab}) \leq 2r \arcsin\left(\frac{\|a - b\|_2}{2r}\right).$$

Démonstration. La distance euclidienne entre a et b est plus faible que la longueur de γ_{ab} , $\|a - b\|_2 \leq L(\gamma_{ab})$. Notons $\phi := 2\arcsin\left(\frac{\|a - b\|_2}{2r}\right)$. Par la proposition, la longueur maximale de γ_{ab} est majorée par celle d'un arc de cercle de longueur $r\phi$.

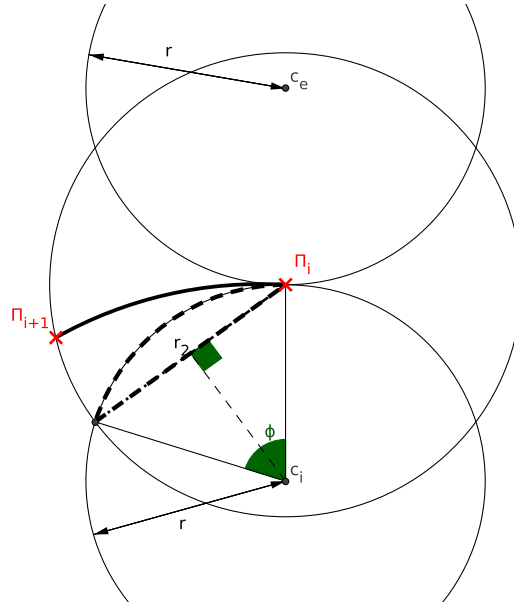


FIGURE 5 – Lemme 2.18 MODIFIER DESSIN

□

3 Courbe discrétisée

3.1 Discrétisation de Gauss

[LT]

Définition 3.1. — Le *voisinage 4-connexe* d'un point $a \in \mathbb{Z}^2$ ou $a \in ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^2)$ est l'ensemble noté

$$V_a := \{a + (0, 1), a + (1, 0), a + (-1, 0), a + (0, -1)\}.$$

— Le *voisinage 8-connexe* d'un point $a \in \mathbb{Z}^2$ ou $a \in ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^2)$ est l'ensemble noté

$$V_{a,8} := V_a \cup \{a + (1, 1), a + (-1, 1), a + (-1, -1), a + (1, -1)\}.$$

— A une résolution h fixée, un *pixel* centré en un point $m \in h\mathbb{Z}^2$ est noté P_m et est défini par :

$$P_m := \bar{B}_{\|\cdot\|_\infty} \left(m, \frac{h}{2} \right).$$

— A une résolution h fixée, un *pixel dual* centré en un point $a \in h((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^2)$ est noté \widetilde{P}_a et est défini par :

$$\widetilde{P}_a := \bar{B}_{\|\cdot\|_\infty} \left(a, \frac{h}{2} \right).$$

— La *discrétisation de Gauss d'un ensemble A pour le pas h*, $G_h(A)$ est définie par :

$$G_h(A) := \bigcup_{m \in A \cap h\mathbb{Z}^2} P_m.$$

Autrement dit $G_h(A)$ est la réunion de tous les carrés formés par le réseau $h\mathbb{Z}^2$ de côté de longueur h , dont le centre est dans A .

— La *discrétisation de Gauss d'une courbe de Jordan C* $\partial_h(C)$ est la frontière de la discrétisation de Gauss de la réunion de l'intérieur de C et de C .

— Notons de plus :

$$\text{Dig}_h(C) := \partial_h(C) \cap h \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mathbb{Z}^2 \right).$$

— Les éléments de $\text{Dig}_h(C)$ sont appelés les *sommets de la discrétisation* et un segment reliant deux sommets consécutifs est appelé une *arête de la discrétisation*.

— Un sommet d'un pixel P_m est dit *intérieur* s'il appartient à l'intérieur de C , *extérieur* s'il appartient à l'extérieur de C . De plus un point intérieur est dit *frontalier* s'il appartient à C et un point *intérieur strict* sinon.

Remarque 3.2. $\partial_h(C)$ étant le bord de $G_h(A)$, où A est l'intérieur de C , une arête de $\partial_h(C)$ traverse l'arête d'un pixel dual P_a si et seulement si cette arête possède un point extérieur et un point intérieur comme extrémités.

3.2 Association courbe discrète courbe continue

Proposition 3.3. Soit C une courbe fermée simple et $h > 0$. Il existe alors une application $\xi : \text{Dig}_h(C) \rightarrow C$ telle que

$$\forall a \in \text{Dig}_h(C), \|\xi(a) - a\|_\infty \leq \frac{h}{2}$$

Démonstration. Si $a \in \text{Dig}_h(C)$ alors a appartient à une arête de $\partial_h(C)$, qui est elle même frontière de deux pixels $\bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(p_i, \frac{h}{2})$ et $\bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(p_e, \frac{h}{2})$ tel que p_i soit un point intérieur et p_e soit un point extérieur. Si p_i est un point frontalier, alors p_i est un point de C à distance inférieure à $\frac{h}{2}$ de z en norme $\|\cdot\|_\infty$. Sinon p_i est un point intérieur strict. L'intérieur et l'extérieur de C étant deux composante connexes distinctes, C sépare le pixel dual P_a en deux composantes connexes, l'une contenant p_i , l'autre p_e . Donc $\widetilde{P}_a \cap C \neq \emptyset$. On peut alors définir une telle application ξ . \square

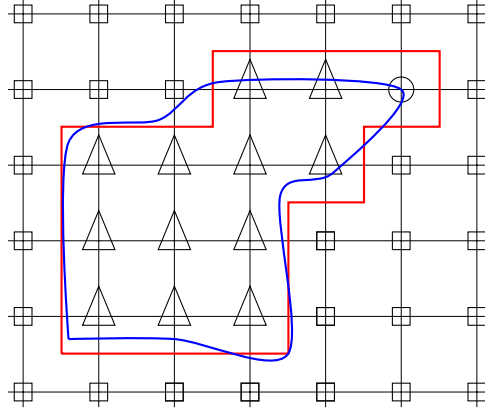


FIGURE 6 – Les intersections de la grille sont dans $h\mathbb{Z}^2$, les carrés représentés sont donc les pixels duaux. En bleu, \mathcal{C} , en rouge $\partial_h(\mathcal{C})$, les triangles sont les points intérieurs, les cercles les points frontaliers, et les carrés les points extérieurs.

Une telle application ξ sera appelée *association*.

Remarque 3.4. En revanche il n'existe pas forcément une application ψ telle que

$$\forall a \in \text{Dig}_h(\mathcal{C}), \|\psi(a) - a\|_\infty < \frac{h}{2}$$

En effet :

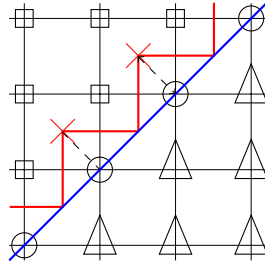


FIGURE 7 – Les deux croix sont des points de $\text{Dig}_h(\mathcal{C})$ qui ne sont pas à distance strictement inférieure à $\frac{h}{2}$ de \mathcal{C} en bleue.

Le but de cette sous-section est de montrer une propriété de conservation de l'ordre défini sur $\partial_h(\mathcal{C})$ par une association. Si deux points de $\text{Dig}_h(\mathcal{C})$ sont trop proches, une association ξ ne conservera par forcément l'ordre de ces points. En effet :

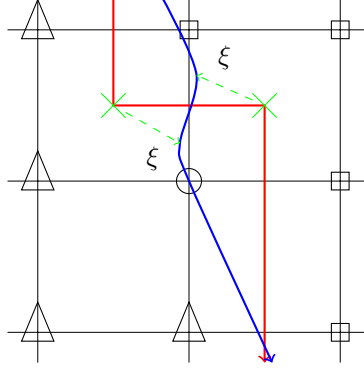


FIGURE 8 – Il existe une association ξ modifiant l'ordre des deux croix vertes dans $\text{Dig}_h(\mathcal{C})$. Cette configuration de décrochement a déjà été décrite dans [Lac] (Annexe B.2)

La proposition 3.13 affirme qu'une association conserve l'ordre des sommets de $\partial_h(\mathcal{C})$ suffisamment loin les uns des autres pour la distance géodésique. Cette proposition a pour hypothèse que la courbe \mathcal{C} possède une certaine épaisseur (définition 3.8). Pour démontrer la proposition 3.13, il suffit de montrer (lemme 3.12) que seuls des sommets proches de $a \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$ pour la distance géodésique peuvent être associés à un point de \mathcal{C} situé entre la première entrée de la courbe \mathcal{C} dans le pixel dual \tilde{P}_a en $\gamma(s^-)$, et sa dernière sortie en $\gamma(s^+)$. Le lemme 3.10, montre que les seuls voisins 8-connexes d'un point $a \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$ peuvent être associés à un point de \mathcal{C} situé entre $\gamma(s^-)$ et $\gamma(s^+)$. Le lemme 3.11 permet de montrer que seuls les voisins 4-connexes d'un point $a \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$ peuvent être associés à un point compris strictement entre $\gamma(s^-)$ et $\gamma(s^+)$. La démonstration des lemmes 3.10 et 3.12 repose essentiellement sur trois arguments basiques :

- la séparation de sommets intérieurs stricts et extérieurs des pixels duaux dans des composantes connexes différentes de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ déjà utilisé dans la preuve de la proposition 3.3,
- un arc sortant d'un pixel dual par une arête et rentrant par une autre possède une courbure totale d'au moins $\frac{\pi}{2}$ (lemme 3.5),
- si un arc sort par une arête et rentre de nouveau par la même arête dans un pixel dual, alors cet arc reste dans un certain disque (lemme 3.6 et son corollaire 3.7).

Lemme 3.5. *Soit $h > 0$. Soit \mathcal{C} une courbe géométrique fermée admettant une paramétrisation par longueur d'arc γ telle que si la courbe γ sort d'un carré $\bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(a, l)$ en $\gamma(s_0)$ et rentre de nouveau dans ce carré en $\gamma(s_1)$, c'est-à-dire,*

$$\exists a \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } \gamma(s_0), \gamma(s_1) \in \partial \bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(a, l) \text{ et } \gamma([s_0, s_1]) \cap \bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(a, l) = \emptyset$$

alors

$$\kappa(\gamma([s_0, s_1])) \geq n_s \frac{\pi}{2}$$

où n_s est le nombre de sommets de $\bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(a, l)$ compris dans l'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$. En particulier si $\gamma(s_0)$ et $\gamma(s_1)$ n'appartiennent pas à la même arête de $\bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(a, l)$, alors

$$\kappa(\gamma([s_0, s_1])) \geq \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration. Quatre cas sont possibles, l'intérieur de l'arc $\gamma([s_0, s_1])$ contient soit un seul sommet p_1 de $\partial(\bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(a, l))$ ($\gamma(s_1)$ est sur une face adjacente à $\gamma(s_0)$), soit deux sommets p_1, p_2 ($\gamma(s_1)$ est sur une face opposée à $\gamma(s_0)$), soit trois sommets p_1, p_2, p_3 , ($\gamma(s_1)$ est sur une face adjacente à $\gamma(s_0)$), soit quatre sommets p_1, p_2, p_3, p_4 , ($\gamma(s_1)$ est sur la même face que $\gamma(s_0)$).

- Si l'intérieur contient un seul sommet p_1 (figure 9a), alors les droites $(\gamma(s_0), p_1)$ et $(\gamma(s_1), p_1)$ intersectent $\gamma([s_0, s_1])$ en deux points A et B tels que $A \leq_\gamma B$. Notons θ_1 l'angle formé entre $(\gamma(0), A)$ et (A, B) , θ_2 l'angle formé entre (A, B) et $(B, \gamma(1))$, ϕ_1 l'angle formé entre $(\gamma(0), A)$ et $(\gamma(0), B)$ et ϕ_2 l'angle formé entre $(\gamma(1), A)$ et $(\gamma(1), B)$. Comme la somme des angles d'un triangle fait π et que $(\gamma(0), B)$ et $(\gamma(1), A)$ forme un angle droit en p_1 ,

$$\phi_1 + \frac{\pi}{2} + \pi - \theta_1 + \frac{\pi}{2} + \pi - \theta_2 + \phi_2 + \frac{\pi}{2} = 3\pi,$$

donc

$$\theta_1 + \theta_2 = \phi_1 + \phi_2 + \frac{\pi}{2},$$

donc

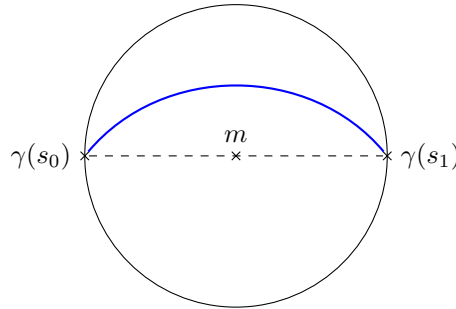
$$\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 + \theta_2 \leq \frac{3\pi}{2}.$$

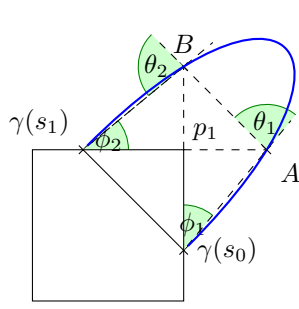
Par définition de la courbure totale, $\kappa(\gamma|_{[s_0, s_1]}) \geq \theta_1 + \theta_2 \geq \frac{\pi}{2}$.

- Si l'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient deux sommets consécutifs p_1 et p_2 du carré $\bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(a, l)$ (figure 9b), alors les droites $(\gamma(s_0), p_1)$ et $(\gamma(s_1), p_2)$ intersectent $\gamma([s_0, s_1])$ en deux points A et B tels que $A \leq_\gamma B$. Notons θ_1 l'angle entre $(\gamma(0), A)$ et (A, B) , θ_2 l'angle entre (A, B) et $(B, \gamma(1))$. $\theta_1 + \theta_2 = \pi$. Par définition de la courbure totale, $\kappa(\gamma|_{[s_0, s_1]}) \geq \theta_1 + \theta_2 = \pi$.
- Si l'intérieur $\gamma([s_0, s_1])$ contient trois sommets consécutifs p_1, p_2, p_3 du carré $\bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(a, l)$ (figure 9c), avec p_1 sur la même arête que $\gamma(s_0)$ et p_3 sur celle de $\gamma(s_1)$ alors les droites $(\gamma(s_0), p_1), (\gamma(s_1), p_2), (p_3, p_2)$ intersectent $\gamma([s_0, s_1])$ en trois points A, B et C tels que $A \leq_\gamma B \leq_\gamma C$. Notons θ_1 l'angle entre $(p_1 A)$ et (AB) , θ_2 l'angle entre (AB) et (BC) et θ_3 l'angle entre (BC) et $(C p_3)$. Alors $\pi - \theta_1 - \theta_2, \pi - \theta_3$ et $\frac{\pi}{2}$ sont les trois angles du triangle $p_3 B C$. Donc $\pi - \theta_1 - \theta_2 + \pi - \theta_3 + \frac{\pi}{2} = \pi$. Par définition de la courbure totale, $\kappa(\gamma([s_0, s_1])) \geq \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{3\pi}{2}$.
- Si l'intérieur $\gamma([s_0, s_1])$ contient trois quatre sommets consécutifs p_1, p_2, p_3, p_4 du carré $\bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(a, l)$ (figure 9d), avec p_1 sur la même arête que $\gamma(s_0)$ et p_4 sur celle de $\gamma(s_1)$ alors les droites $(\gamma(s_0), p_1), (\gamma(s_1), p_4), (p_3, p_2)$ intersectent $\gamma([s_0, s_1])$ en quatre points A, B, C et D tels que $A \leq_\gamma B \leq_\gamma C \leq_\gamma D$. Notons θ_1 l'angle entre $(\gamma(s_0) A)$ et (AB) , θ_2 l'angle entre (AB) et (BC) , θ_3 l'angle entre (BC) et (CD) et θ_4 l'angle entre (CD) et $(D \gamma(s_1))$. $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ et $\theta_3 + \theta_4 = \pi$, donc $\kappa(\gamma([s_0, s_1])) \geq \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \geq 2\pi$

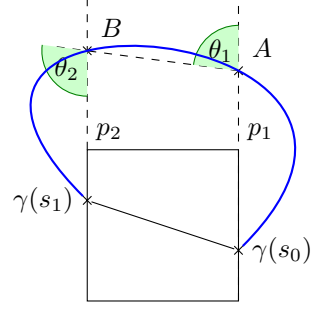
□

Lemme 3.6. Soient \mathcal{C} une courbe fermée simple de paramétrisation par longueur d'arc γ et $s_0, s_1 \in [0, L(\gamma)]$ tels que $s_0 < s_1$ et $\kappa(\gamma([s_0, s_1])) < \frac{\pi}{2}$, alors $\gamma([s_0, s_1]) \subset \bar{B}_{\|\cdot\|_2}(c, \frac{l}{2})$ où c est le milieu de $[\gamma(s_0), \gamma(s_1)]$ et $l := \|\gamma(s_1) - \gamma(s_0)\|_2$.

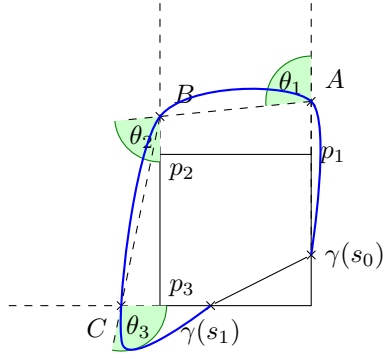




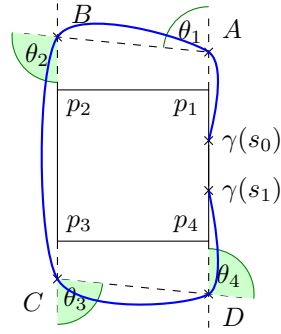
(a) L'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient un seul sommet.



(b) L'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient deux sommets.

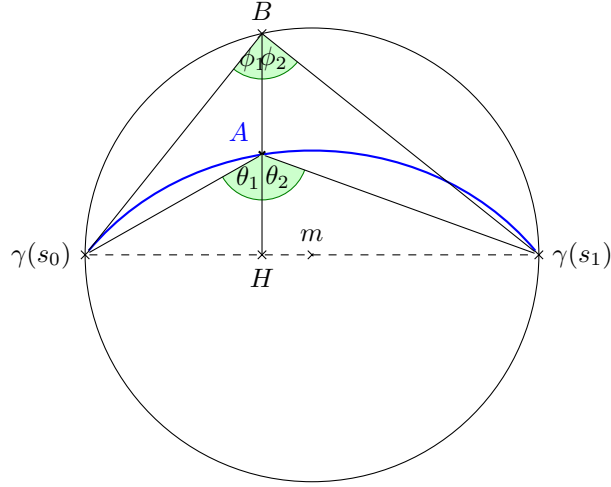


(c) L'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient trois sommets.



(d) L'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient quatre sommets.

Démonstration. Soit A un point de $\gamma([s_0, s_1])$. Comme $\kappa(\gamma([s_0, s_1])) < \frac{\pi}{2}$, l'angle géométrique $\bar{\theta} := (\gamma(s_0) - A, \gamma(s_1) - A) = \pi - \theta > \frac{\pi}{2}$. Notons H (respectivement B) l'intersection de $[\gamma(s_0), \gamma(s_1)]$ (respectivement du cercle de centre c et de rayon $\frac{l}{2}$) et de la perpendiculaire à $[\gamma(s_0), \gamma(s_1)]$ passant par A . Notons également $\bar{\theta}_1$ l'angle entre les droites $(A\gamma(s_0))$ et (AH) , $\bar{\theta}_2$ l'angle entre les droites (AH) et $(A\gamma(s_1))$, ϕ_1 l'angle entre les droites $(B\gamma(s_0))$ et (BH) , ϕ_2 l'angle entre les droites (BH) et $(B\gamma(s_1))$. $\phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{2}$ et $\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 > \frac{\pi}{2}$. Donc $\bar{\theta}_1 > \phi_1$ ou $\bar{\theta}_2 > \phi_2$. Donc $AH < \frac{\gamma(s_0)H}{\tan \phi_1} = BH$ ou $AH < \frac{\gamma(s_1)H}{\tan \phi_2} = BH$. Donc A est sur le segment $]BH[$, donc $A \in \mathring{B}_{\|\cdot\|_2}(c, \frac{h}{2})$.



□

Corollaire 3.7. Soit \mathcal{C} une courbe fermée simple de paramétrisation par longueur d'arc γ telle que $\gamma(s_0)$ et $\gamma(s_1)$ appartiennent à une même arête $[p_1, p_2]$ d'un pixel dual \widetilde{P}_a telle que $\gamma([s_0, s_1]) \cap \widetilde{P}_a = \emptyset$ et $\kappa(\gamma([s_0, s_1])) < \frac{\pi}{2}$, alors $\gamma([s_0, s_1]) \subset \overset{\circ}{B}_{\|\cdot\|_2}(c, \frac{h}{2})$ où c est le milieu de $[p_1, p_2]$.

Définition 3.8. L'épaisseur e d'une courbe fermée \mathcal{C} est la borne inférieure des distances en norme $\|\cdot\|_2$ entre deux points a et b de \mathcal{C} tels que la courbure totale de tout arc de \mathcal{C} d'extrémités a et b soit supérieure à $\frac{\pi}{2}$.

Remarque 3.9. Une courbe d'épaisseur non-nulle, ne peut pas avoir de points angulaires aigus.

Lemme 3.10. Soit \mathcal{C} une courbe fermée simple d'épaisseur $e > 0$. Soient $\sqrt{2}h \leq e$, $N \in \mathbb{N}$, $a \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$. Soit γ une paramétrisation de \mathcal{C} par longueur d'arc telle que $\gamma(0) \notin \widetilde{P}_a$. Notons

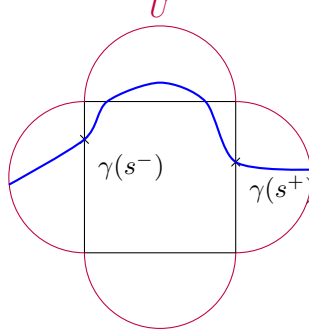
$$s^+ := \max \left\{ s \in [0, L(\gamma)] \mid \gamma(s) \in \widetilde{P}_a \right\},$$

$$s^- := \min \left\{ s \in [0, L(\gamma)] \mid \gamma(s) \in \widetilde{P}_a \right\}.$$

Autrement dit $\gamma(s^-)$ est le premier point de la courbe \mathcal{C} à être dans le pixel dual \widetilde{P}_a et $\gamma(s^+)$ le dernier. Alors $\gamma([s^-, s^+]) \subset U$ où

$$U := \widetilde{P}_a \cup \bigcup_{b \in V_{\frac{1}{2}}} \overset{\circ}{B}_{\|\cdot\|_2}(a+b, \frac{h}{2})$$

avec $V_{\frac{1}{2}} := \left\{ \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{2}\right) \right\}$.



Démonstration. Comme le diamètre de \widetilde{P}_a est $\sqrt{2}h$, par l'hypothèse $e > \sqrt{2}h$, $\kappa(\gamma([s^-, s^+])) < \frac{\pi}{2}$. Si la courbe $\gamma([s, s^+])$ sort de \widetilde{P}_a , elle intersecte $\partial\widetilde{P}_a$ en un point $\gamma(s_0)$. Par le lemme 3.5 elle rentre alors de nouveau dans \widetilde{P}_a en passant par une arête fermée d sur laquelle est $\gamma(s_0)$. Si la courbe $\gamma([s, s^+])$ sort puis rentre de nouveau par une certaine arête de \widetilde{P}_a , alors, par le lemme 3.7 la courbe $\gamma([s^-, s^+])$ ne peut sortir de U . \square

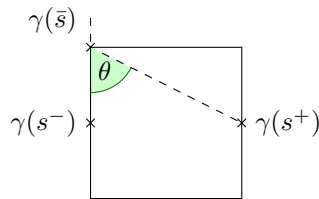
L'image d'un point $b \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$ par une association ξ est à distance inférieure à $\frac{h}{2}$ en norme $\|\cdot\|_\infty$. Les seuls points de $b \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$ pouvant être envoyés par ξ sur $\gamma([s^-, s^+])$ sont les voisins 8-connexes de a .

Lemme 3.11. *Soit \widetilde{P}_a un pixel dual et \mathcal{C} une courbe simple d'épaisseur $e > \sqrt{2}h$ de paramétrisation par longueur d'arc γ telle que $\gamma(0) \notin \widetilde{P}_a$. Si \mathcal{C} passe par un sommet d'un pixel dual en $\gamma(\bar{s})$, alors soit $\bar{s} = s^-$ soit $\bar{s} = s^+$ où*

$$s^+ := \max \left\{ s \in [0, L(\gamma)] \mid \gamma(s) \in \widetilde{P}_a \right\},$$

$$s^- := \min \left\{ s \in [0, L(\gamma)] \mid \gamma(s) \in \widetilde{P}_a \right\}.$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\bar{s} \in]s^-, s^+[$. D'une part $\gamma(s^-)$ et $\gamma(s^+)$ sont sur la même arête du pixel dual \widetilde{P}_a . En effet si $\gamma(s^-)$ et $\gamma(s^+)$ étaient sur des arêtes différentes de \widetilde{P}_a , alors l'angle géométrique $\theta := \left(\gamma(\bar{s}) - \gamma(s^-), \gamma(\bar{s}) - \gamma(s^+) \right)$ serait strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$ donc $\kappa(\gamma([s^-, s^+])) \geq \pi - \theta > \frac{\pi}{2}$, ce qui contredirait l'hypothèse $e > \sqrt{2}h$. Donc $\gamma(s^-)$ et $\gamma(s^+)$ sont sur la même arête. Donc $\gamma(s^-) \in [\gamma(s^+), \gamma(\bar{s})]$ ou $\gamma(s^+) \in [\gamma(s^-), \gamma(\bar{s})]$. Ce qui contredit le fait que la courbe soit simple. Donc $\bar{s} = s^-$ ou $\bar{s} = s^+$.



\square

Si b est un voisin 8-connexe de a sans être un voisin 4-connexe, alors les seuls points du pixel dual \widetilde{P}_a auxquels peut être associé b sont les sommets de \widetilde{P}_a . Donc les seuls points pouvant être associé à un point de $\gamma([s^-, s^+])$ sont les voisins 4-connexes de a . Le lemme suivant 3.12 montre que ces points sont à une distance géodésique sur $\partial_h(\mathcal{C})$ inférieure ou égale à 1 de a .

Lemme 3.12. Soient \mathcal{C} une courbe fermée simple d'épaisseur e et h tels que $0 < \sqrt{2}h < e$ et $\partial_h(\mathcal{C})$ soit simple fermée. Soit $(a_i)_{i \in [1, N]}$ la suite des sommets de $\partial_h(\mathcal{C})$ ordonnés dans l'ordre croissant pour une certaine paramétrisation de $\partial_h(\mathcal{C})$. Soit γ une paramétrisation de \mathcal{C} par longueur d'arc telle que $\gamma(0) \notin \widetilde{P_{a_i}}$. Notons

$$s^+ := \max \left\{ s \in [0, L(\gamma)] \mid \gamma(s) \in \widetilde{P_{a_i}} \right\},$$

$$s^- := \min \left\{ s \in [0, L(\gamma)] \mid \gamma(s) \in \widetilde{P_{a_i}} \right\}.$$

Soit ξ une association. S'il existe j tel que $\xi(a_j) \in \gamma([s^-, s^+])$, alors $j \in [i-1, i+1]$.

Démonstration. Soit $a_j \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$ tel que $\xi(a_j) \in \gamma([s^-, s^+])$. Par le lemme 3.10 et la définition d'une association, les seuls points $a \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$ tels que $\xi(a) \in \gamma([s^-, s^+])$ sont les voisins 8-connexes de a_i . Donc a_j est un voisin 8-connexe de a_i . De plus si a_j n'était pas un voisin 4-connexe de a_i , alors par le lemme 3.10 $\xi(a_j)$ ne pourrait être qu'un sommet de $\widetilde{P_{a_i}}$, donc par le lemme 3.11, $\xi(a_j) = \gamma(s^-)$ ou $\xi(a_j) = \gamma(s^+)$, donc $\xi(a_j) \notin \gamma([s^-, s^+])$. Donc a_j est un voisin 4-connexe de a_i . De plus, par le lemme 3.10 et l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$ si $\gamma([s^-, s^+])$ sort de $\widetilde{P_{a_i}}$ par une certaine arête et si elle rentre de nouveau, alors elle rentre par la même arête. Donc $a_j \in \gamma([s_0, s_1])$ avec $\gamma(s_0), \gamma(s_1) \in \partial \widetilde{P_{a_i}}$ et $\gamma([s_0, s_1]) \cap \overset{\circ}{\widetilde{P_{a_i}}} = \emptyset$.

Montrons que a_j et a_i sont deux points consécutifs de $\partial_h(\mathcal{C})$. Les pixels duaux $\widetilde{P_{a_i}}$ et $\widetilde{P_{a_j}}$ possèdent une arête en commun d . Il suffit alors de montrer que cette arête d possède un point extérieur et un point intérieur pour extrémités. Supposons par l'absurde que les extrémités de d sont toutes les deux des points intérieurs ou toutes les deux des points extérieurs. Trois sous-cas sont possibles dans le premier sous-cas les extrémités de d sont soit deux points extérieurs, soit deux points intérieurs stricts, dans le deuxième sous-cas les extrémités de d sont un point intérieur strict et un point frontalier, dans le troisième sous-cas les extrémités de d sont toutes les deux des points frontaliers.

- Dans le premier cas (figure 10a), par le lemme 3.10, la courbe $\gamma([s, s^+])$ ne permet pas d'isoler les sommets du pixel dual $\widetilde{P_{a_j}}$ en deux composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ distinctes. De plus, la courbe \mathcal{C} ne peut passer dans $\widetilde{P_{a_j}}$ en dehors de $\gamma([s^-, s^+])$. En effet par la contraposée du lemme 3.5, cela contredirait l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$. Donc $\widetilde{P_{a_j}}$ ne possède pas de sommets extérieurs si les extrémités de d sont des sommets intérieurs et de sommets intérieurs si les extrémités de d sont des sommets extérieurs. Donc $a_j \notin \text{Dig}_h(\mathcal{C})$. Contradiction!
- Dans le deuxième cas, par le lemme 3.11, le point frontalier est soit $\gamma(s^-)$, soit $\gamma(s^+)$, donc $\xi(a_j)$ appartient à l'arête d privée de ses extrémités. Par le lemme 3.7 la courbe $\gamma([s, s^+])$ ne permet pas d'isoler les sommets du pixel dual $\widetilde{P_{a_j}}$ en deux composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ distinctes. De plus, la courbe \mathcal{C} ne peut passer dans $\widetilde{P_{a_j}}$ en dehors de $\gamma([s^-, s^+])$. En effet par la contraposée du lemme 3.5, cela contredirait l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$. Donc $\widetilde{P_{a_j}}$ ne possède pas de sommets extérieurs. Donc $a_j \notin \text{Dig}_h(\mathcal{C})$. Contradiction!
- Dans le troisième cas, $a_j \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$ si et seulement si $\widetilde{P_{a_j}}$ possède un point extérieur comme sommet. Si tel était le cas, alors le dernier sommet de $\widetilde{P_{a_j}}$ serait aussi un point extérieur, sinon la courbe devrait passer par une autre arête de $\widetilde{P_{a_j}}$ que d soit en passant par l'extérieur de $\overset{\circ}{\widetilde{P_{a_j}}}$, ce qui est impossible par le lemme 3.5 (figure 10b) soit en passant par l'intérieur de $\overset{\circ}{\widetilde{P_{a_j}}}$ ce qui est impossible par le lemme 3.7. $\widetilde{P_{a_j}}$ posséderait donc deux

sommets frontaliers (ce sont les extrémités de d) et deux sommets extérieurs. De plus $a_i \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$, donc $\widetilde{P_{a_i}}$ possède au moins un point extérieur. Dans $\widetilde{P_{a_j}} \cup \widetilde{P_{a_i}}$, il y a donc un segment \tilde{d} de longueur $2h$ perpendiculaire à d ayant pour extrémités des points extérieurs et pour milieu un point frontalier. La courbe \mathcal{C} ne doit pas isoler les deux extrémités de d . Elle doit alors soit repasser par \tilde{d} soit ne pas repasser par \tilde{d} , auquel cas, elle ne traverse pas \tilde{d} mais lui est juste tangente. Si \mathcal{C} repasse par \tilde{d} (figure 10c), alors par le lemme 3.7 et l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$, \mathcal{C} ne peut atteindre la seconde extrémité de d qui est un point frontalier. Contradiction! Si au contraire, \mathcal{C} ne repasse pas par \tilde{d} (figure 10d), par le lemme 3.5 et l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$, \mathcal{C} ne peut pas atteindre la seconde extrémité de d qui est un point frontalier. Contradiction!

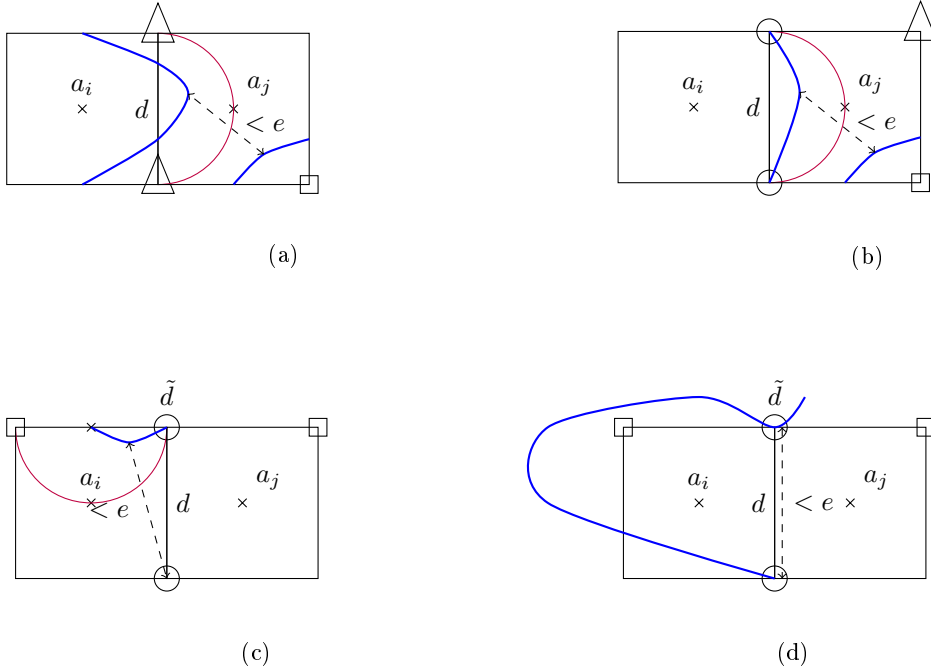


FIGURE 10

□

Proposition 3.13. *Soient \mathcal{C} une courbe fermée simple d'épaisseur $e > 0$ et $h < e$ tels que $\partial_h(\mathcal{C})$ soit fermée simple. $N \in \mathbb{N}$, $(a_i)_{i \in [1, N]}$ une suite de points de $\text{Dig}_h(\mathcal{C})$ croissante pour une certaine paramétrisation de $\partial_h(\mathcal{C})$ telle que pour tout (i, j) la longueur d'un arc de $\partial_h(\mathcal{C})$ reliant a_i et a_j est supérieure ou égale à $2h$, il existe alors une paramétrisation de \mathcal{C} pour laquelle la suite $(\xi(a_i))$ est croissante.*

Démonstration. Pour trois points sur une courbe fermée simple, il existe toujours une certaine paramétrisation de cette courbe pour laquelle ces trois points sont ordonnés dans l'ordre souhaité. Notons $(a_{i,k})$ la suite croissante des sommets de $\text{Dig}_h(\mathcal{C})$ entre a_i et a_{i+1} avec $a_{i,1} := a_i$ et

$a_{i,K} := a_{i+1}$. Par le lemme 3.10, il existe un arc \mathcal{C}_i de \mathcal{C} d'extrémités $\xi(a_i)$ et $\xi(a_{i+1})$ inclus entièrement dans la réunion des $U_{a_{i,k}}$, $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ où

$$U_{a_{i,k}} := \bar{B}_{\|\cdot\|_\infty} \left(a_{i,k}, \frac{h}{2} \right) \cup \bigcup_{b \in V_{\frac{1}{2}}} \overset{\circ}{B}_{\|\cdot\|_2} \left(a_{i,k} + b, \frac{h}{2} \right).$$

avec $V_{\frac{1}{2}} := \left\{ \left(\frac{1}{2}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, 0 \right), \left(0, -\frac{1}{2} \right) \right\}$. Donc \mathcal{C}_i peut être recouverte par les $\gamma([s_k^-, s_k^+])$ où

$$s_k^+ := \max \{ s \in [0, L(\gamma)] \mid \gamma(s) \in P_{a_{i,k}} \},$$

$$s_k^- := \min \{ s \in [0, L(\gamma)] \mid \gamma(s) \in P_{a_{i,k}} \}.$$

Donc par le lemme 3.12, il n'existe pas terme a_j de la suite (a_i) tel que $\xi(a_j) \in \mathcal{C}_i$. Donc il existe une paramétrisation γ de \mathcal{C} telle que la suite $(\xi(a_i))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ soit croissante. \square

Remarque 3.14. En revanche une association ξ ne sera pas forcément strictement croissante pour une telle suite.

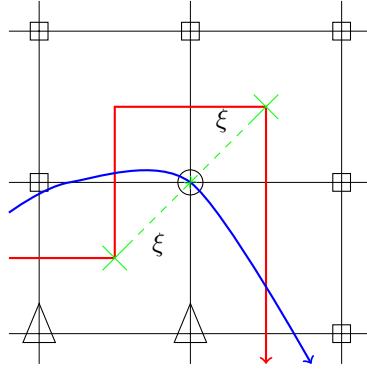


FIGURE 11 – Il existe une association ξ associant les deux croix vertes de $\text{Dig}_h(\mathcal{C})$ sur un même point de \mathcal{C} .

4 Convergence des estimateurs semi-locaux dans l'espace 2D

Lemme 4.1 (Comparaison courbe discrétisée et cordes). *Soit \mathcal{C} une courbe fermée simple. Soient $h > 0$, $\xi : \text{Dig}_h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ une association. Soient a_i et a_j deux points de $\text{Dig}_h(\mathcal{C})$,*

$$| \|a_i - a_j\|_2 - \|\xi(a_i) - \xi(a_j)\|_2 | \leq \sqrt{2}h.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \|\xi(a_i) - \xi(a_j)\|_2 &\leq \|\xi(a_i) - a_j\|_2 + \|a_i - a_j\|_2 + \|\xi(a_i) - a_j\|_2, \\ &\leq \|a_i - a_j\|_2 + \sqrt{2}h. \end{aligned}$$

De même :

$$\|a_i - a_j\|_2 \leq \|\xi(a_i) - \xi(a_j)\|_2 + \sqrt{2}h.$$

\square

Proposition 4.2. Soit \mathcal{C} une courbe C^1 d'épaisseur $e > 0$ telle que pour toute paramétrisation γ et s'il existe k tel que pour tout intervalle $I \subset [0, L(\gamma)]$, $\kappa(\gamma|_I) \leq k|I|$. Soit \mathcal{A} une fonction de motifs telle que

- $hM_{+\infty}(\mathcal{A}(\partial_h(\mathcal{C}), h)) < \frac{2}{k} - \sqrt{2}h$,
- en notant $(a_i^h)_{i=0}^{N_h} := h\mathcal{A}(\partial_h(\mathcal{C}), h)$, $\forall (i, j) \in [0, N_h], i \neq j$, a_j^h et a_i^h ne sont pas connectés par un arc de $\partial_h(\mathcal{C})$ de longueur inférieure ou égale à h .

Alors :

$$\left| L(\mathcal{C}) - \sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_k(\|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}h) + \sqrt{2}hN_h.$$

où

$$\psi_k(x) := \frac{2}{k} \arcsin\left(\frac{kx}{2}\right) - x.$$

De plus :

$$\sum_{i=0}^{N_h} \psi_k(\|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}h) = O_{h \rightarrow 0} \left(h^3 N_h \left(M_3(\mathcal{A}(\partial_h(\mathcal{C}), h)) + \sqrt{2} \right)^3 \right).$$

Démonstration. Soit $\xi : \text{Dig}_h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ une association. Par le lemme 2.18 et la proposition 3.13,

$$\left| L(\mathcal{C}) - \sum_{i=0}^{N_h} \|\xi(a_{i+1}^h) - \xi(a_i^h)\|_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \left(\frac{2}{k} \arcsin\left(\frac{k\|\xi(a_{i+1}^h) - \xi(a_i^h)\|_2}{2}\right) - \|\xi(a_{i+1}^h) - \xi(a_i^h)\|_2 \right),$$

$$\left| L(\mathcal{C}) - \sum_{i=0}^{N_h} \|\xi(a_{i+1}^h) - \xi(a_i^h)\|_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_k(\|\xi(a_{i+1}^h) - \xi(a_i^h)\|_2)$$

Donc par le lemme 4.1,

$$\left| L(\mathcal{C}) - \sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_k(\|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}h) + \sqrt{2}hN_h.$$

De plus par développement limité de l'arcsinus :

$$\psi_k(h\|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}h) = O_{h \rightarrow 0}((h\|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}h)^3)$$

et par l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=0}^{N_h} \psi_k(\|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}h) \right)^{1/3} \leq hN_h^{1/3} M_3(\mathcal{A}(\partial_h(\mathcal{C}), h)) + h\sqrt{2}N_h^{1/3}$$

donc

$$\sum_{i=0}^{N_h} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}h) = O_{h \rightarrow 0} \left(h^3 N_h \left(M_3(\mathcal{A}(\partial_h(\mathcal{C}), h)) + \sqrt{2} \right)^3 \right).$$

□

Proposition 4.3. Soit \mathcal{C} une courbe latéralement lisse d'épaisseur $e > 0$. Soit \mathcal{A} une fonction de motifs telle que

- $\lim_{h \rightarrow 0} hM_{+\infty}(\mathcal{A}(\partial_h(\mathcal{C}), h)) = 0$,
- $\lim_{h \rightarrow 0} hN_h = 0$,
- en notant $(a_i^h)_{i=0}^{N_h} := h\mathcal{A}(\partial_h(\mathcal{C}), h)$, $\forall (i, j) \in [0, N_h], i \neq j$, a_j^h et a_i^h ne sont pas connectés par un arc de $\partial_h(\mathcal{C})$ de longueur inférieure ou égale à $2h$.

Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 = L(\mathcal{C})$$

De plus, si $\sqrt{2}h < e$,

$$\sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 - \sqrt{2}hN_h \leq L(\gamma) \leq \sqrt{2} \sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}hN_h.$$

Démonstration. Par la proposition 3.3, pour tout h , il existe une association $\xi_h : \text{Dig}_h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$. Par le lemme 4.1, pour tout $i \in [0, N_h]$

$$\|\xi_h(a_{i+1}^h) - \xi_h(a_i^h)\|_2 - \|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 \leq \sqrt{2}h$$

donc $\lim_{h \rightarrow 0} \|\xi_h(a_{i+1}^h) - \xi_h(a_i^h)\|_2 = 0$. Donc il existe h_0 , tel que pour tout $h < h_0$, $\sqrt{2}h < e$, donc par la proposition 3.13, existe une paramétrisation telle que $(\xi_h(a_i^h))$ soit croissante. Donc par le corollaire du théorème 2.1.2 de [AR],

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N_h} \|\xi_h(a_{i+1}^h) - \xi_h(a_i^h)\|_2 = L(\mathcal{C}),$$

donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 = L(\mathcal{C}).$$

De plus si $\sqrt{2}h < e$, en notant γ une paramétrisation pour laquelle $(\xi_h(a_i^h))$ est croissante et γ_i les arcs de γ reliant a_i à a_{i+1} , alors par le lemme 2.17,

$$\|\xi_h(a_{i+1}^h) - \xi_h(a_i^h)\|_2 \leq L(\gamma_i) \leq \sqrt{2}\|\xi_h(a_{i+1}^h) - \xi_h(a_i^h)\|_2,$$

donc

$$\sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 - \sqrt{2}hN_h \leq L(\gamma) \leq \sqrt{2} \sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}hN_h.$$

□

Références

- [AR] ALEXANDROV et RESHETNYAK : *General Theory of Irregular Curves*.
- [BSSZ] BOBENKO, SCHRÖDER, SULLIVAN et ZIEGLER : *Discrete Differential Geometry*.
- [Lac] Jacques-Olivier LACHAUD : Espaces non-euclidiens et analyse d'image : modèles déformables riemanniens et discrets, topologie et géométrie discrète.
- [LT] Jacques-Olivier LACHAUD et Boris THIBERT : Properties of gauss digitized shapes and digital surfaces integration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*.