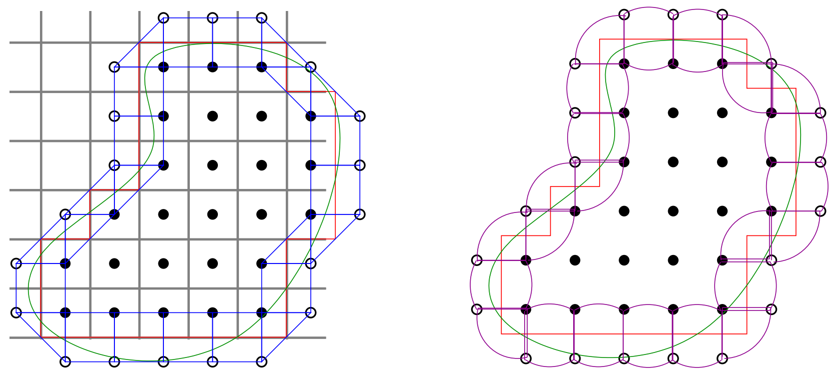
On propose une autre association courbe discrete - courbe continue que celle proposée par Lachaud avec les normales.

Sur la frontière discrete, on distingue deux type de sommets (voir Fig. 1a) :

— entre deux arêtes alignées ; le sommet est alors le centre d'un carré dont deux sommets adjacents sont allumés et les deux autres sont éteints.

— entre deux arêtes orthogonales ; le sommet est alors le centre de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont l'angle droit est éteint et les deux autres sommets allumés, ou inversement.



(a) (b))

FIGURE 1: (a) En vert : la courbe continue. Points noirs : discrétisation de Gauss (points allumés). Points blancs : points éteints. En rouge : la courbe discrète. En bleu : les carrés et triangles décrits dans le texte. (b) Idem avec des « carrés » et des « triangles » qui tiennent compte de la courbure maximale de la courbe.

En prenant comme hypothèse la par(r)-regularité et $h < r$, on devrait pouvoir montrer que la courbe est tout entière incluse dans l'union de ces carrés et triangles sous reserve de les gonfler un peu comme sur la figure 2. Le « tube » obtenu est affiché sur la figure 1b.

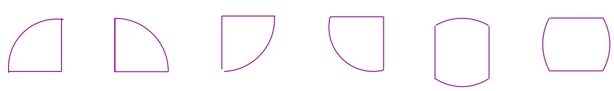


FIGURE 2: Les arcs de cercle ont pour rayon r avec ici $r = h$ soit le minimum puisque, par hypothèse, $h < r$.

Sous reserve d'arriver à montrer que l'intersection de la courbe avec une structure carré ou triangle est connexe, on associera à chaque sommet de la courbe discrète le centre (relativement à la paramétrisation) du segment de courbe délimité par la structure associée au sommet. Pour l'instant, on nomme Π cette association.

TSVP →

.

Parcours d'une structure carré On se propose de montrer que la courbe ne franchit qu'une seule fois la « porte d'entrée » d'une structure carré avant de ressortir de l'autre côté. Les notations sont celles de la figure 3.

Démonstration. Soient A, B, C, D, les sommets de la structure carré. Raisonnons par l'absurde. Si la courbe franchit $[AD]$ une première fois puis une seconde fois avant d'avoir franchit la « porte de sortie » $[BC]$, par le théorème des valeurs intermédiaires sur la composante horizontale de la dérivée, il existe un point dans la structure carré où la normale est horizontale (parallèle à $[AB]$). Soit E un tel point. Les centres des boules tangentes intérieures et extérieures sont alors les points F et G. Disons par exemple que F est le centre de la boule tangente intérieure et G le centre de la boule tangente extérieure. Alors, F ne doit pas être dans le disque d_D de centre D et de rayon h sinon la boule tangente intérieure contiendrait le point extérieur D. De même, G ne doit pas être dans le disque d_B de centre B et de rayon h. On en déduit que E ne peut pas être dans le translaté de d_D de vecteur $\vec{FE}$, c'est-à-dire dans le disque d_C de centre C et de rayon 1 ni, symétriquement, dans le disque d_A de centre A et de rayon 1. Comme l'union de ces deux derniers disques recouvrent la structure carré, le point E appartient à l'ensemble vide. $\square$

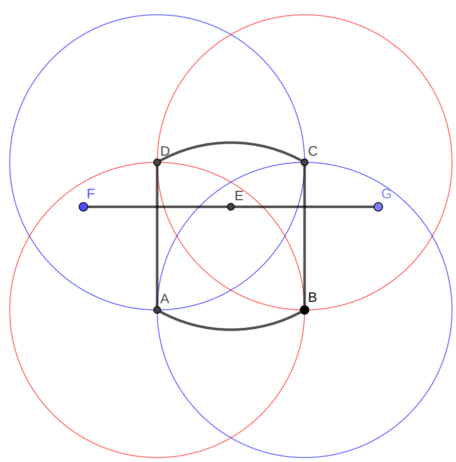


FIGURE 3: Tous les cercles ont pour rayon h et les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $DA]$, $[EF]$ et $[EG]$ ont pour longueur h.

La propriété précédente devrait permettre de montrer une propriété de croissance de l'association sommet discret $\to$ point sur courbe : si les sommets discrets x, y, z sont tels que y est entre x et z alors $\Pi(y)$ est entre $\Pi(x)$ et $\Pi(z)$.