Géométrie à la Alexandrov

16 mai 2018

Ce document a pour but d'une part de présenter un extension de la notion de courbure, ou plus précisément de courbure totale à une famille plus grande de courbes 0.11 et d'autre part de comparer la longueur de deux courbes ayant même extrémités mais des courbures totales différentes. Les résultats proviennent de General Theory of Irregular Curves [AR]. Pour des raisons de clarté et de concision, les définitions de ce document ne sont pas toujours exactement celles de [AR].

Courbes

Définition 0.1 (Courbe)**.** — Une *courbe paramétrée simple* γ est une application continue injective d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^2$.

— Une *courbe paramétrée simple fermée* γ est une application continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$ et les points de $\gamma(]a, b[)$ n'ont qu'un seul antécédent par γ.

— Une *courbe géométrique simple* C est l'image d'une courbe paramétrée simple γ, γ est alors une *paramétrisation* de C.

Définition 0.2 (Concaténée)**.** La *concaténée* de deux courbes paramétrées $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to E$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to E$ telles que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, notée $\gamma_2 \Box \gamma_1 : [0, b_1 - a_1 + b_2 - a_2] \to E$ est définie par :

$$\gamma_2 \Box \gamma_1(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [0, b_1 - a_1] \\ \gamma_2(t - (b_1 - a_1) + a_2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 0.3 (Relation d'ordre)**.** — A chaque courbe paramétrée fermée simple γ, une relation d'ordre est définie pour les points de la courbe géométrique associée par :

$$\gamma(\alpha) \leq \gamma(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leq \beta.$$

— Une courbe munie d'une telle relation d'ordre est appelée *courbe orientée*.

— Un *semi-voisinage à gauche* (respectivement *semi-voisinage à droite*) d'un point x d'une courbe orientée est un ensemble de points $\gamma(]t_0, t_1])$ tel que $\gamma(t_1) = x$ (respectivement $\gamma([t_0, t_1[)$ tel que $\gamma(t_0) = x$) .

Remarque 0.4. La notion de courbes utilisée dans [AR] est plus générale : une courbe peut s'intersecter elle même. Ce point d'intersection est alors considérés comme deux points distincts de la courbe paramétrée.

Définition 0.5 (Courbes latéralement lisses [AR])**.** — Un angle entre deux droites orientées D_1 et D_2 est l'angle géométrique $(\widehat{x_1 y_1, x_2 y_2})$ où x_1, y_1 (respectivement x_2, y_2) sont deux points de D_1 (respectivement D_2) tels que $x_1 < y_1$ (respectivement $x_2 < y_2$).

— Une droite orientée D est appelée *sécante* d'une courbe orientée si elles se coupent en deux points x et y tels que $x \leq_D y \Leftrightarrow x \leq_\gamma y$.

- Une droite orientée D est appelée *tangente à gauche* (respectivement *tangente à droite*) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un semi-voisinage à gauche (respectivement à droite) V_x tel que toute sécante de V_x forme un angle inférieur à ϵ avec D.
- Une courbe orientée est *latéralement lisse* si tout point de la courbe orientée, à l'exception de ses extrémités, admet une tangente à gauche et une tangente à droite.
- Pour chaque point $\gamma(s)$ d'une courbe orientée γ paramétrée par longueur d'arc, on définit $e_l(s)$ (respectivement $e_r(s)$) *le vecteur tangent à gauche* (respectivement à droite) comme étant le vecteur orienté de norme 1, orienté dans le sens de la tangente à gauche (respectivement à droite).

Proposition 0.6 (Théorème 3.1.1. [AR]). *Toute courbe latéralement lisse est rectifiable.*

Définition 0.7. — Un point d'une courbe latéralement lisse dont la tangente à gauche et la tangente à droite coïncident est dit *lisse*.
- Un point d'une courbe latéralement lisse qui n'est pas lisse est dit *angulaire*.

Proposition 0.8 (Théorème 3.3.2, [AR]). *L'ensemble des points angulaires d'une courbe latéralement lisse est dénombrable.*

Proposition 0.9 (Théorème 3.3.3, [AR]). *Soit γ une courbe latéralement lisse paramétrée par longueur d'arc $s \in [0, l]$. Pour tout $s \in [0, l]$, γ admet une dérivée à droite $\gamma'_r(s)$et une dérivée à gauche $\gamma'_l(s)$. De plus :*
- $||\gamma'_l(s)|| = ||\gamma'_r(s)|| = 1$,
- *l'application γ'_l (respectivement γ'_r) est continue à droite (respectivement continue à gauche),*
- *pour tout $s \in [0, L]$,*
$$\lim_{\substack{t\to s\\ t<s}} e_r(t) = \gamma'_l(s)$$
et
$$\lim_{\substack{t\to s\\ t>s}} e_l(t) = \gamma'_r(s).$$

Indicatrice des tangentes

Dans le cas d'une courbe C^1, l'indicatrice des tangentes est simplement $\frac{\gamma'}{||\gamma'||}$. Cette courbe est à image dans le cercle unité S^1. Construisons l'indicatrice des tangentes dans le cas d'une courbe latéralement lisse γ paramétrée par longueur d'arc. Notons $(\gamma(s_i))$ la suite de ses points angulaires ordonnés dans l'ordre croissant.
- Soit η_i la courbe de S^1 qui est l'image de $]s_i, s_{i+1}[$ par $e_r = e_l$.
- Notons
$$\tau_{i+\frac{1}{2}} : \begin{cases}]s_i, s_{i+1}[& \to & \mathbb{R}^2 \times S^1 \\ s & \mapsto & (\gamma(s), \eta_i(s)) \end{cases}$$
- Soit σ_i une courbe géodésique de longueur minimale de S^1 reliant $e_l(s_i)$ à $e_r(s_i)$ (elle est uniquement définie si $e_l(s_i)$ et $e_r(s_i)$ ne sont pas antipodaux).
- Notons
$$\tau_i : \begin{cases} [0, \theta] & \to & \mathbb{R}^2 \times S^1 \\ s & \mapsto & (\gamma(s), \eta_i(s)) \end{cases}$$
où $\theta := (e_l(\widehat{s_i), e_r}(s_i))$
- Une *indicatrice des tangentes* τ est la concaténée des courbes successives $\tau_{\frac{1}{2}i}$.
- Les projections canoniques de $\mathbb{R}^2 \times S^1 \to \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \times S^1 \to S^1$ sont respectivement notées p_1 et p_2.

Remarque 0.10. L'indicatrice des tangentes est définie de façon plus formelle dans [AR].

Courbure totale

Définition 0.11. — Une *chaîne* d'une courbe orientée γ est une suite finie de points de γ croissante.

— Une ligne brisée est *inscrite* dans une courbe orientée γ si ses sommets forment une chaîne de γ.

— Un polygône est inscrit dans une courbe orientée γ fermée si ses sommets forment une chaîne de γ.

— *La courbure totale* $\kappa(L)$ d'une ligne brisée L de sommets x_0, ..., x_m est définie par :

$$\kappa(L) := \sum_{i=1}^{m-1} (\widehat{x_{i-1}x_i, x_ix_{i+1}}).$$

— *La courbure totale* $\kappa(P)$ d'un polygône P de sommets x_0, ..., x_m est définie par :

$$\kappa(P) := \sum_{i=1}^{m} (\widehat{x_{i-1}x_i, x_ix_{i+1}}).$$

où $x_{m+1} := x_0$.

— *La courbure totale* $\kappa(\gamma)$ d'une courbe orientée γ est la borne supérieure des courbures totales de ses lignes brisées inscrites.

— *La courbure totale* $\kappa(\gamma)$ d'une courbe orientée fermée γ est la borne supérieure des courbures totales de ses polygônes inscrits.

Proposition 0.12 (Théorème 5.1.2 [AR])**.** *Toute courbe de courbure totale finie est latéralement lisse.*

Proposition 0.13 (Théorème 5.4.1 [AR])**.** *Soit γ une courbe rectifiable paramétrée par la longueur d'arc. Si de plus γ est de courbure totale finie, alors pour tout $s \in [0, L(\gamma)]$, les dérivées à gauche $\gamma_l'(s)$ et $\gamma_r'(s)$ existent et les fonctions dérivées à gauche et à droite sont à variation bornée.*

Proposition 0.14 (Théorème de Fenchel, théorème 5.1.5 [AR])**.** *Pour toute courbe fermée γ $\kappa(\gamma) \geq 2\pi$. De plus $\kappa(\gamma) = 2\pi$ si et seulement si γ est le bord d'une partie convexe du plan.*

Proposition 0.15 (Théorème 5.2.2 [AR])**.** *La courbure totale d'une courbe latéralement lisse est égal à la longueur de la projection p_2 d'une de ses indicatrices des tangentes.*

La proposition suivante est une variante du théorème de comparaison de Schur (Théorème 5.1, Partie II, [BSSZ]) les arguments utilisés sont semblables à ceux du thèorème 5.8.1 de [AR].

Proposition 0.16. *Soit γ et $\bar{\gamma}$ deux courbes latéralement lisses paramétrées par longueur d'arc de $\mathbb{R}^2$ telles que :*

— *γ et $\bar{\gamma}$ ont mêmes extrémités, plus précisément $\gamma(0) = \bar{\gamma}(0)$ et il existe s_1 et $\bar{s_1}$ tels que $\gamma(s_1) = \gamma(\bar{s_1})$;*

— *une composante connexe compacte délimitée par $\bar{\gamma}|_{[0,s_1]}$ et le segment reliant $\gamma(0)$ et $\gamma(s_1)$ est convexe ;*

— *$\bar{\gamma}$ est de courbure supérieure à γ, c'est-à-dire pour tout intervalle $I \subset [0, \bar{s_1}]$, $\kappa(\gamma|_I) \leq \kappa(\bar{\gamma}|_I)$*

Alors la longueur de $\bar{\gamma}$ est supérieure à la longueur de γ, plus précisément $\bar{s_1} \geq s_1$.

Démonstration. Notons m le milieu du segment $[\bar{\gamma}(1), \bar{\gamma}(0)]$. Notons δ_1 et δ_2 les paramétrisisations des segments $[m, \bar{\gamma}(0)]$ et $[\bar{\gamma}(1), m]$ par longueur d'arc. Notons $\xi := \delta_2 \square \bar{\gamma} \square \delta_1$. Soit τ une indicatrice des tangentes de ξ. Par la proposition 0.14, $L(p_2(\tau)) = 2\pi$. Il existe alors s' tel que $L(p_2(\tau|_{[0,s']})) = L(p_2(\tau|_{[s',L(\tau)]})) = \pi$. $p_2 \circ \tau(s')$ est alors orienté dans le même sens que $\bar{\gamma}(1) - \bar{\gamma}(0)$. Notons $\gamma(\tilde{s}) := p_1 \circ \tau(s')$ et $T_0 := p_2 \circ \tau(s')$.

Donc pour tout point p de τ, $(\widehat{p, \tau(s')}) \leq \frac{1}{2}L(\tau) = \pi$. Pour tout $s \in [0, \bar{s_1}]$, $(\widehat{\bar{\gamma}_l'(s), T_0}) \leq \pi$, donc

$$(\widehat{\gamma_l'(s), \gamma_l'(\tilde{s})}) = \kappa(\gamma|_{[\tilde{s},s]}) \leq \kappa(\bar{\gamma}|_{[\tilde{s},s]}) \leq (\widehat{\bar{\gamma}_l'(s), T_0}) \leq \pi$$

Par décroissance de cosinus, pour tout $s \in [0, \bar{s_1}]$,

$$< \bar{\gamma}_l'(s), T_0 >= cos(\widehat{T_0, \bar{\gamma}_l'(s)}) \leq cos(\widehat{\gamma_l'(\tilde{s}), \gamma_l'(s)}) =< \gamma_l'(s), \gamma_l'(\tilde{s}) > . \tag{1}$$

De plus,

$$|\bar{\gamma}(s_1) - \bar{\gamma}(0)| =< \bar{\gamma}(s_1) - \bar{\gamma}(0), T_0 >= \int_0^{\bar{s_1}} < \bar{\gamma}_l'(s), \bar{\gamma}_l'(\tilde{s}) > ds,$$

or

$$|\bar{\gamma}(s_1) - \bar{\gamma}(0)| = |\gamma(s_1) - \gamma(0)| \geq < \gamma(s_1) - \gamma(0), \gamma_l'(\tilde{s}) >= \int_0^{s_1} < \gamma_l'(s), \gamma_l'(\tilde{s}) > ds,$$

donc

$$\int_0^{\bar{s_1}} < \bar{\gamma}_l'(s), T_0 > ds \geq \int_0^{s_1} < \gamma_l'(s), \gamma_l'(\tilde{s}) > ds,$$

et par l'inégalité 1, $\bar{s_1} \geq s_1$. □

Remarque 0.17. L'hypothèse sur les courbures de γ et $\bar{\gamma}$ est assez restrictive, elle implique que $\bar{\gamma}$ possède au moins autant de points angulaires que γ.

Références

[AR] Alexandrov et Reshetnyak : *General Theory of Irregular Curves.*

[BSSZ] Bobenko, Schröder, Sullivan et Ziegler : *Discrete Differential Geometry.*