

## Préliminaires

### Courbes

**Définition 0.1.** Une *courbe paramétrée fermée simple de classe  $C^k$*   $\gamma$  est une application de classe  $C^k$  d'un intervalle  $[t_0, t_1]$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que la restriction de  $\gamma$  à  $]t_0, t_1[$  soit injective et  $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ . Une *courbe géométrique fermée simple de classe  $C^k$*   $C$  est l'image d'une courbe paramétrée fermée simple de classe  $C^k$   $\gamma$ ,  $\gamma$  est alors une *paramétrisation* de  $C$ . Une *courbe géométrique fermée simple de classe  $C^0$*  est appelée *courbe de Jordan*.

A chaque courbe paramétrée fermée simple  $\gamma$ , une relation d'ordre pour les points de la courbe géométrique associée privée de  $\gamma(0)$  est définie par :

$$\gamma(\alpha) \leq \gamma(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leq \beta.$$

Un point  $b$  d'une courbe  $C$  privée de  $\gamma(0)$  est *entre  $a$  et  $c$* , où  $a$  et  $c$  sont deux points de  $C \setminus \gamma(0)$  si  $a \leq b \leq c$  pour la relation d'ordre associée à  $\gamma$ . Afin de définir l'intérieur et l'extérieur d'une courbe géométrique rappelons le théorème de Jordan.

**Théorème 0.2.** *Dans le plan, le complémentaire d'une courbe de Jordan  $C$  est formé d'exactly 2 composantes connexes, une bornée, l'autre non.*

On appellera *intérieur de  $C$*  la composante connexe bornée et *extérieur de  $C$*  la composante connexe non-bornée.

### Discretisation de Gauss [LT]

Pour tout  $z \in \mathbb{R}^2$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$  on note  $B_{||\cdot||_\infty}(z, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^2, ||x||_\infty \leq \epsilon\}$ , c'est-à-dire un carré centré en  $z$  et de côté de longueur  $2\epsilon$ . La *discretisation de Gauss d'un ensemble  $A$  pour le pas  $h$*   $G_h(K)$  est alors définie par :

$$G_h(A) := \bigcup_{z \in A \cap h\mathbb{Z}^2} B_{||\cdot||_\infty}(z, \frac{h}{2}).$$

Autrement dit  $G_h(A)$  est la réunion de tous les carrés formés par le réseau  $h\mathbb{Z}^2$  de côté de longueur  $h$ , dont le centre est dans  $A$ . La *discretisation de Gauss d'une courbe de Jordan  $C$*   $\partial_h(C)$  est la frontière de la discretisation de Gauss de l'intérieur de  $C$ . Notons de plus :

$$Dig_G(C) := \frac{1}{h} \partial_h(C) \cap \left( \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mathbb{Z}^2 \right).$$

Les éléments de  $Dig_G(C)$  sont appelés les *sommets de la discretisation* et un segment reliant deux sommets consécutifs est appelé une *arête de la discretisation*.

### Ensembles à portée positive et projection [Fed]

**Définition 0.3** ([Fed]). Soit  $E$  un espace euclidien et  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

— On définit la distance  $d$  entre  $A$  et un point  $x \in E$  par :

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} ||x - a||_E$$

— On définit la distance entre  $A$  et  $B$  par :

$$d(A, B) := \max(\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b))$$

- $Unp(A)$  est l'ensemble des points  $x \in E$  ayant un unique plus proche point  $a \in A$ .
- La projection  $\pi : Unp(A) \rightarrow A$  est définie comme étant l'application qui associe à  $x \in E$ , l'unique plus proche point de  $A$ .
- La portée de  $A$  en  $a \in A$ , notée  $reach(A, a)$ , est définie par :

$$reach(A, a) := \sup \{r \mid B_E(a, r) \subset Unp(A)\}.$$

$reach(A, a)$  peut valoir  $+\infty$ .

- La portée de  $A$  est définie par :

$$reach(A) := \inf_{a \in A} reach(A, a)$$

$reach(A)$  peut valoir  $+\infty$ .

**Proposition 0.4** ([Fed]). *Soit  $E$  un espace euclidien et soit  $A$  un sous-ensemble fermé non-vide de  $E$ . Alors*

- La projection  $\pi$  est continue.
- Plus précisément, si  $0 < r < q < +\infty$ ,  $x$  et  $y$  sont deux points de  $Unp(A)$ ,  $d(A, x) \leq r$ ,  $d(A, y) \leq r$  et  $reach(A, \pi(x)) \geq q$ ,  $reach(A, \pi(y)) \geq q$ , alors

$$\|\pi(x) - \pi(y)\|_E \leq \frac{q}{q-r} \|x - y\|_E.$$

**ensembles par-(r) réguliers** [LCG98] [LT]

**Définition 0.5.** [LCG98] Soit  $E$  un espace euclidien et  $A$  un sous-ensemble de  $E$ .

- Une *boule tangente intérieure de rayon  $r$* ,  $r > 0$ , en un point  $y \in C$  est une boule fermée euclidienne  $\bar{B}_{\|\cdot\|_E}(x, r)$ , telle que

$$\exists x \in \overset{\circ}{A}, \text{ tel que } \partial A \cap \partial B_{\|\cdot\|_E}(x, r) = \{y\} \text{ et } B_{\|\cdot\|_E}(x, r) \subset \overset{\circ}{A} \cup \{y\}.$$

- Une *boule tangente extérieure de rayon  $r$* ,  $r > 0$ , en un point  $y \in C$  est une boule fermée euclidienne  $\bar{B}_{\|\cdot\|_E}(x, r)$ , telle que

$$\exists x \in (E \setminus A)^\circ, \text{ tel que } \partial A \cap \partial B_{\|\cdot\|_E}(x, r) = \{y\} \text{ et } B_{\|\cdot\|_E}(x, r) \subset (E \setminus A)^\circ \cup \{y\}.$$

- $A$  est *par( $r, -$ )-régulier*, si pour tout  $y \in \partial A$ , il existe une boule tangente intérieure de rayon  $r$  en  $y$ .
- $A$  est *par( $r, +$ )-régulier*, si pour tout  $y \in \partial A$ , il existe une boule tangente extérieure de rayon  $r$  en  $y$ .
- $A$  est *par( $r$ )-régulier* si  $A$  est *par( $r, -$ )-régulier* et *par( $r, +$ )-régulier*.

Il est possible définir la par( $r$ )-régularité de façon équivalente (proposition 0.7).

**Définition 0.6.** — Pour tout  $x \in \partial A$  possédant une boule tangente intérieure et une boule tangente extérieure de centre respectifs  $c_i$  et  $c_e$ , on définit la droite  $nl(x) := (c_i, c_e)$ .

- Pour tout  $x \in \partial A$  possédant une boule tangente intérieure et une boule tangente extérieure, le vecteur normal extérieur  $N_e(x, l)$  (respectivement le vecteur normal intérieur  $N_i(x, l)$ ) le segment inclus dans  $nl(x)$ , d'extrémité  $x$ , de longueur  $l$  et d'intersection non-vide avec toute boule tangente extérieure en  $x$  (respectivement avec toute boule tangente intérieure en  $x$ ).

**Proposition 0.7** (Définition équivalente, Théorème 1 [LCG98]). *Un ensemble  $A$  est par( $r$ )-régulier si et seulement si pour tout couple de points distincts  $(x_1, x_2)$  de  $\partial A$ ,  $N_e(x_1, r)$ ,  $N_i(x_1, r)$ ,  $N_e(x_2, r)$ ,  $N_i(x_2, r)$  existent,  $N_e(x_1, r) \cap N_e(x_2, r) = \emptyset$  et  $N_i(x_1, r) \cap N_i(x_2, r) = \emptyset$ .*

Le lemme suivant permet de relier les notions de portée et de par( $r$ )-régularité.

**Lemme 0.8.** [LT] *Soit  $A$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^d$  alors*

$$\text{reach}(\partial A) \geq r \Leftrightarrow \forall r' < r, A \text{ est par}(r')\text{-régulier.}$$

Ainsi pour une courbe par( $r$ )-régulière,  $\pi$  est définie pour des points suffisamment proches de la courbe.

**Proposition 0.9.** [GL] *Soit  $A$  un sous-ensemble fermé  $C^2$  du plan  $\mathbb{R}^2$  (c'est-à-dire un ensemble dont le bord  $\partial A$  est une courbe de Jordan  $C^2$ ). Alors, il existe  $r > 0$  tel que  $A$  soit par( $r$ )-régulier.*

La proposition suivante permet de majorer la distance entre un point de la discrétisation de Gauss d'une courbe et sa projection  $\pi$  sur la courbe.

**Proposition 0.10.** [LT] *Soit  $A$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^2$  de portée  $\text{reach}(A) > r$ . Alors pour tout pas de discrétisation  $h$ ,  $0 < h < \sqrt{2}r$ ,*

$$\forall y \in \partial_h(C), \exists x \in C, \quad \text{tel que } \|x - y\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}h \text{ et } y \in n\left(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h\right), \quad (1)$$

$$\forall x \in C, \exists y \in \partial_h(C), \quad \text{tel que } \|x - y\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}h \text{ et } y \in n\left(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h\right), \quad (2)$$

où  $n(x, l)$  est le segment orienté dans le sens de la normale centré en  $x$  et de longueur  $2l$ .

Le point 1 de la proposition 0.10 montre que  $\pi$  est définie dans un voisinage tubulaire de  $C$ , et le point 2 de la proposition montre que  $\pi$  est surjective. Cependant  $\pi$  n'est pas forcément injective (voir configuration de décrochement figure 1 ou figure B.6 [Lac]). Les lemmes et propositions suivantes [Lac] étudient le « défaut d'injectivité de la projection ».

Sous certaines conditions la projection  $\pi$  est bijective. Notons  $\mathbf{n}(x)$  le vecteur unitaire orienté vers l'extérieur selon la direction de la normale à  $C$  en  $x$  et  $\mathbf{w}(y)$  le vecteur unitaire orienté vers l'extérieur selon la direction de la normale à  $\partial_h(C)$  en  $x$ .

**Lemme 0.11** (Lemme B.11 [Lac]). *Soit  $C$  une courbe par( $r$ )-régulière. Si pour tout  $y \in \partial_h(C)$ , l'angle  $(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y)))$  est dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , alors la projection  $\pi$  est bijective, de classe  $C^2$  par morceaux sur chaque arête ouverte de la discrétisation.*

De plus les deux propositions suivantes donnent la configuration précise dans laquelle  $\pi$  n'est pas bijective.

**Lemme 0.12** (Lemme B.12 [Lac]). *Soit  $A$  un ensemble par( $r$ )-régulier et  $h < \sqrt{2}r$ . Soit  $y \in \partial G_h(A)$ . Alors l'angle  $(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y)))$  est dans l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha[$  avec  $\alpha := \arcsin(\frac{h}{4})$ . De plus, si  $y$  ne touche pas une configuration de décrochement (figure 1 ou figure B.6 [Lac]) alors l'angle  $(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y)))$  est dans l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .*

**Lemme 0.13** (Proposition B.13 [Lac]). *Soit  $A$  un ensemble par( $r$ )-régulier, soit  $h < \sqrt{2}r$ , s'il existe  $y \in \partial G_h(A)$  tel que  $(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y))) \notin ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , alors  $y$  appartient à une configuration de décrochement impliquant trois arêtes consécutives  $[y_{i-1}, y_i]$ ,  $[y_i, y_{i+1}]$  et  $[y_{i+1}, y_{i+2}]$  (figure 1 ou figure B.6 [Lac]). De plus tous les éléments de l'arc  $[\pi(y_i), \pi(y_{i+1})]$  ont plusieurs antécédents par la projection  $\pi$ . La longueur de l'arc  $[\pi(y_i), \pi(y_{i+1})]$  est alors un  $O(h^2)$ . Les arcs  $[\pi(\frac{y_{i-1}+y_i}{2}), \pi(y_{i+1})[$  et  $] \pi(y_i), \pi(\frac{y_{i+1}+y_i}{2})]$  n'ont qu'un seul antécédent par  $\pi$ .*

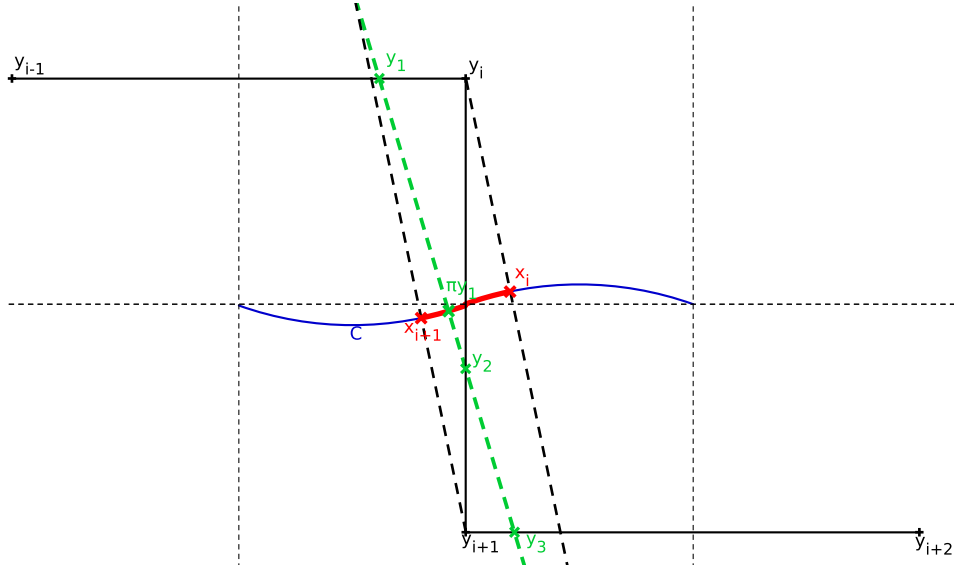


FIGURE 1 – Configuration de décrochement figure B.6 [Lac]

Tous les points de l'arc  $x_{i+1}$  à  $x_i$  ont plusieurs antécédents. Par exemple, le point  $\pi(y_1)$  possède pour antécédents  $y_1$ ,  $y_2$  et  $y_3$ .

La proposition suivante mesure le « défaut d'injectivité de la projection ». Le sous-ensemble de  $\partial A$  possédant plusieurs antécédents par la projection  $\pi$  est appelé *partie non-bijective pour la discrétisation*  $\partial G_h(A)$  et est noté  $\partial G_h^* A$ .

**Proposition 0.14** (Théorème B.14 [Lac]). *Soit  $A$  un ensemble  $\text{par}(r)$ -régulier et  $0 < h < \frac{\sqrt{10}}{5}r$ . La partie non bijective  $\partial G_h^* A$  est fermée pour la topologie induite de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\partial A$ . La longueur de  $\partial G_h^* A$  est en  $O(h)$ . Si de plus  $A$  est convexe, la longueur de  $\partial G_h^* A$  est en  $O(h^2)$ . Si  $A$  possède un nombre fini de points d'inflexion alors la longueur de  $\partial G_h^* A$  est aussi en  $O(h^2)$ .*

Le contrôle de ce « défaut d'injectivité » de la projection permet de comparer les intégrales sur  $\partial A$  et  $\partial_h A$ .

**Proposition 0.15** (Théorème B.16 [Lac]). *Soit  $A$  un ensemble  $\text{par}(r)$ -régulier et soit un pas de discrétisation  $h$ ,  $0 < h \leq \frac{\sqrt{10}}{5}r$ . Si  $g$  est une fonction intégrable définie sur  $\partial A$  alors l'équation ci-dessous est vérifiée*

$$\int_{\partial A} g dx = \int_{\partial G_h(A)} g \circ \pi |n \circ \pi(y) \cdot w(y)| dy + O(h^n),$$

avec  $n=2$  si  $A$  est convexe ou si son bord possède un nombre fini de points d'inflexion,  $n=1$ , sinon.

**Remarque 0.16.** Les résultats précédents (du lemme 0.11 à 0.15) sont tirés, sans modifications, de [Lac]. Cependant il semble nécessaire de supposer en plus que  $A$  soit au moins à bord  $C^2$ .

## Estimateurs semi-locaux

Dans cette sous-section, une partie des résultats du théorème 8 de [MB16] sont transposés au cas des courbes  $C^2$ . Pour une suite finie de points  $(x_i)_{i=0}^N$ , une norme  $\|\cdot\|$ , on définit

$$M_{\alpha, \|\cdot\|} := \left( \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \|x_i\|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

pour  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , ainsi que

$$M_{+\infty, \|\cdot\|} := \max_{i \in [0, N]} \|x_i\|.$$

On se placera dans le cas d'un espace normé  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ . De plus  $\|\cdot\|$  est équivalente à la norme 2, vérifiant alors :

$$k_1 \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_2 \leq k_2 \|\cdot\|,$$

avec  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$ .

**Définition 0.17.** — Une *fonction de motifs*  $\mathcal{A}$  est une fonction qui à une courbe discrète de  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^2$  4-connexe  $D$  et un pas de discrétisation  $h$  associe une suite de points  $(a_i)_{i=0}^N$  de  $D \cap ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^2)$  croissante pour une certaine paramétrisation de  $D$ .  
— Une fonction de  $\alpha$ -motifs est une fonction de motifs  $\mathcal{A}$  telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} h M_{\alpha, \|\cdot\|}(\mathcal{A}(D, h)_{i+1} - \mathcal{A}(D, h)_i) = 0,$$

en notant  $a_{N+1} := a_0$ .

Dans la suite  $C$  sera une courbe  $C^2$ , donc par(r)-régulière pour un certain  $r > 0$ ,  $h \in ]0, r[$ . On note  $(a_i)_{i=0}^{N_h} := \mathcal{A}(\partial_h(C), h)$ , avec  $\mathcal{A}$  une fonction de  $+\infty$ -motifs telle que  $\lim_{h \rightarrow 0} h N_h = 0$ . Pour tout,  $i \in [0, N_h]$ ,  $\pi_i := \pi(ha_i)$ . L'objectif est alors de comparer la longueur du polygone dont les sommets sont les  $(ha_i)$  avec la longueur de la courbe  $C$ . La preuve se décompose en trois parties :

- résoudre le problème de la croissance des  $\pi_i$  (lemme 0.18),
- comparer la longueur des segments  $h[a_i, a_{i+1}]$  et  $[\pi_i, \pi_{i+1}]$  (lemme 0.19),
- comparer la longueur des cordes  $[\pi_i, \pi_{i+1}]$  aux arcs de  $C$  allant de  $\pi_i$  à  $\pi_{i+1}$  (lemme 0.20).

Le résultat est donné dans la proposition 0.22.

**Lemme 0.18** (Presque croissance de la projection). *Soient  $\gamma_C$  et  $\gamma_D$  des paramétrisations respectivement de  $C$  et de  $\partial_h(C)$  définies sur  $[0, 1]$ , vérifiant  $\pi(\gamma_D(0)) = \gamma_C(0)$ .  $\gamma_C$  (respectivement  $\gamma_D$ ) définit une relation d'ordre sur  $C$  (respectivement sur  $\partial_h(C)$ ). Si  $b, f, g$  sont des points de  $\partial_h(C)$  tels que  $b < f < g$ ,  $\|f - b\|_2 > \sqrt{2}h$ ,  $\|g - f\|_2 > \sqrt{2}h$ , alors  $\pi(f)$  est entre  $\pi(b)$  et  $\pi(g)$ .*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $\pi(f)$  ne soit pas entre  $\pi(b)$  et  $\pi(g)$ . Supposons que  $\pi(f) < \pi(b)$  (le cas  $\pi(f) > \pi(g)$  se traite de la même façon). D'après le lemme 0.13, il existe  $c, e$  points de la courbe  $\partial_h(C)$  tels que  $b \leq c < e \leq f < g$  et les éléments des arcs ouverts  $\pi(c)$  à  $\pi(e)$  n'ont qu'un seul antécédent par  $\pi$ . Soit  $d$  un point de  $\partial_h(C)$  tel que  $c < d < e$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\tilde{t} \in ]0, 1[$ ,  $\gamma_D^{-1}(f) < \tilde{t} < \gamma_D^{-1}(g)$  tel que  $\pi(\gamma(\tilde{t})) = \pi(d)$ , de plus  $d < \gamma(\tilde{t})$ . Contradiction!  $\square$

**Lemme 0.19** (Comparaison courbe discrétisée et cordes). *Soit  $C$  une courbe de Jordan par(r)-régulière et soit  $h \in ]0, \sqrt{2}r[$ ,  $a_k$  et  $a_{k'}$  deux points de  $\text{Dig}_G(C)$ ,  $\pi_k$  et  $\pi_{k'}$  les projections respectives de  $ha_k$  et  $ha_{k'}$  sur  $C$ . Alors*

$$|h|a_k - a_{k'}| - |\pi_k - \pi_{k'}| < \frac{1}{k_1} \sqrt{2}h.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\|\pi_k - \pi_{k'}\| &\leq \|\pi_k - ha_k\| + \|ha_k - ha_{k'}\| + \|ha_{k'} - \pi_{k'}\|, \\
&\leq h\|a_k - a_{k'}\| + \frac{1}{k_1} (\|\pi_k - ha_k\|_2 + \|ha_{k'} - \pi_{k'}\|_2), \\
&< h\|a_k - a_{k'}\| + \frac{1}{k_1} \sqrt{2}h.
\end{aligned}$$

De même :

$$h\|a_k - a_{k'}\| < \|\pi_k - \pi_{k'}\| + \frac{1}{k_1} \sqrt{2}h.$$

□

**Lemme 0.20** (Comparaison cordes et courbe). *Soit  $C$  une courbe  $C^2$  par( $r$ )-régulière,  $r > 0$ . Soit  $\pi_i$  et  $\pi_{i+1}$  des points de  $C$ , tels que  $\|\pi_i - \pi_{i+1}\|_2 < \sqrt{2}r$ . En notant  $L(\gamma_i)$  la longueur d'arc  $C$  entre  $\pi_i$  et  $\pi_{i+1}$  (arc inclus dans  $B_{\|\cdot\|_2}(\pi_i, \sqrt{2}r)$ ),*

$$\|\pi_i - \pi_j\|_2 \leq L(\gamma_i) \leq 2r \arcsin\left(\frac{\|\pi_i - \pi_j\|_2}{2r}\right).$$

Si de plus  $k_2\|\pi_i - \pi_{i+1}\| < 2r$ ,

$$k_1\|\pi_i - \pi_j\| \leq L(\gamma_i) \leq 2r \arcsin\left(\frac{k_2\|\pi_i - \pi_j\|}{2r}\right).$$

*Démonstration.* La distance euclidienne entre  $\pi_i$  et  $\pi_{i+1}$  est plus faible que la longueur de  $\gamma_i$ ,  $\|\pi_i - \pi_j\|_2 \leq L(\gamma_i)$ . La courbure de  $C$  est majorée par  $\frac{1}{r}$  (d'après la preuve du théorème 5 de [GL]). Notons  $\phi := 2\arcsin(\frac{\|\pi_i - \pi_j\|_2}{2r})$ . La courbe longueur maximale à courbure bornée par  $\frac{1}{r}$  reliant  $\pi_i$  à un point à distance  $\|\pi_i - \pi_{i+1}\|_2$  est un arc de cercle de longueur  $r\phi$ . □

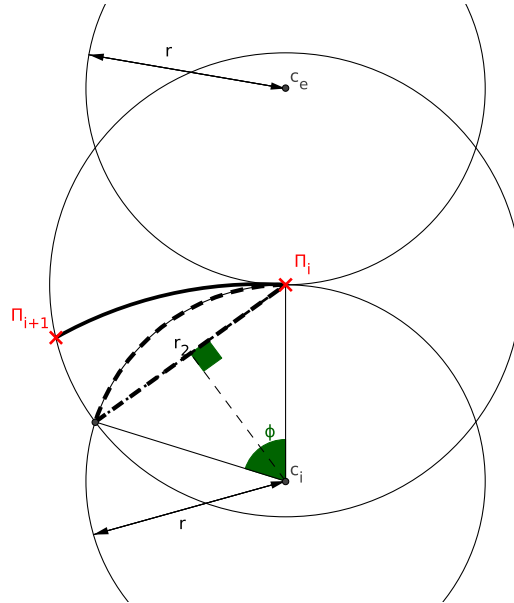


FIGURE 2 – Lemme 0.20

**Remarque 0.21.** Un raisonnement similaire est utilisé dans la preuve du lemme B.10 de [Lac].

**Proposition 0.22.** Soient  $C$  une courbe de Jordan  $C^2$  de longueur  $L(C)$ ,  $\text{par}(r)$ -régulière pour  $r > 0$ ,  $h \in ]0, r[$  telle que  $\text{Dig}_G(C)$  soit une courbe discrète 4-connexe. Soit  $\mathcal{A}$  une fonction de motifs telle que  $hM_{+\infty}(\mathcal{A}(\partial_h(C), h) < 2r - \sqrt{2}h$ . On note  $(a_i)_{i=0}^{N_h} := \mathcal{A}(\partial_h(C), h)$ . Alors :

$$\left| L(C) - h \sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1} - a_i\|_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(h\|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sqrt{2}h) + l(h, r)\text{card}(I) + \sqrt{2}hN_h.$$

et pour une norme équivalente  $\|\cdot\|$  :

$$\left| L(C) - h \sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1} - a_i\| \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \rho_r(h\|a_{i+1} - a_i\| + \sqrt{2}h) + l(h, r)\text{card}(I) + \frac{\sqrt{2}}{k_1}hN_h.$$

où

- $\psi_r(x) := 2r \arcsin\left(\frac{x}{2r}\right) - x$ ,
- $\rho_r(x) := \max(|(k_1 - 1)x|, |2r \arcsin\left(\frac{k_2 x}{2r}\right) - x|)$
- $\alpha(h, r) := \arcsin\left(\frac{h}{4r}\right)$ ,
- $l(h, r) := 2r \left( \alpha(h, r) - \arctan\left(\frac{h/4}{r \cos \alpha(h, r) + h/2}\right) \right)$ , (c'est la longueur maximale d'une composante connexe de la partie non-bijective de courbe).
- $I$  est l'ensemble des indices  $i$  tel que  $\pi(a_{i+1})$  n'est pas entre  $\pi(a_i)$  et  $\pi(a_{i+2})$ .

De plus :

- $\sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(h\|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sqrt{2}h) = O_{h \rightarrow 0} \left( N_h (hM_3(\mathcal{A}(\partial_h(C), h))^3 \right)$ ,
- $l(h, r)\text{card}(I) = O_{h \rightarrow 0}(h)$ .

*Démonstration.* On note  $\pi_{N_h+1} = \pi_0$  et  $a_{N_h+1} := a_0$ . Si pour les  $(\pi_i)$  est croissante ou décroissante pour une certaine paramétrisation de  $C$ , c'est-à-dire  $I = \emptyset$ , par le lemme 0.20,

$$\left| L(C) - \sum_{i=0}^{N_h} \|\pi_{i+1} - \pi_i\|_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \left( 2r \arcsin\left(\frac{\|\pi_{i+1} - \pi_i\|_2}{2r}\right) - \|\pi_{i+1} - \pi_i\|_2 \right),$$

Sinon, d'après la preuve du lemme B.13 de [Lac],

$$\left| L(C) - \sum_{i=0}^{N_h} \|\pi_{i+1} - \pi_i\|_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(\|\pi_{i+1} - \pi_i\|_2) + l(h, r)\text{card}(I),$$

Donc par le lemme 0.19,

$$\begin{aligned} \left| L(C) - h \sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1} - a_i\|_2 \right| &\leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(\|\pi_{i+1} - \pi_i\|_2) + l(h, r)\text{card}(I) + \sqrt{2}hN_h, \\ &\leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(h\|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sqrt{2}h) + l(h, r)\text{card}(I) + \sqrt{2}hN_h. \end{aligned}$$

De plus par développement limité de l'arcsinus :

$$\psi_r(h\|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sqrt{2}h) = O_{h \rightarrow 0}((h\|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sqrt{2}h)^3)$$

et par l'inégalité de Minkowski :

$$\left( \sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(h \|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sqrt{2}h) \right)^{1/3} \leq h N_h^{1/3} M_3(\mathcal{A}(\partial_h(C), h) + h\sqrt{2}N_h^{1/3})$$

donc

$$\sum_{i=0}^{N_h} \psi_r(h \|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sqrt{2}h) = O_{h \rightarrow 0} \left( N_h (h M_3(\mathcal{A}(\partial_h(C), h)))^3 \right).$$

Finalement, par 0.13 (théorème B.13 [Lac])  $l(h, r) \text{card}(I) = O_{h \rightarrow 0}(h)$ .

□

## Références

- [Fed] Herbert FEDERER : Curvature measure.
- [GL] Ari GROSS et Longin LATECKI : Digitizations preserving topological and differential geometric properties.
- [Lac] Jacques-Olivier LACHAUD : Espaces non-euclidiens et analyse d'image : modèles déformables riemanniens et discrets, topologie et géométrie discrète.
- [LCG98] Longin Jan LATECKI, Christopher CONRAD et Ari GROSS : Preserving topology by a digitization process. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, page 131–159, 1998.
- [LT] Jacques-Olivier LACHAUD et Boris THIBERT : Properties of gauss digitized shapes and digital surfaces integration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*.
- [MB16] Loïc MAZO et Étienne BAUDRIER : Non-local estimators : A new class of multigrid convergent length estimators. *Theoretical Computer Science*, pages 128–146, 2016.