1 Introduction

1.1 Estimateurs semi-locaux en une dimension

2 Courbes

2.1 Premières définitions

Définition 2.1 (Courbe). — Une *courbe paramétrée* γ est une application continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^2$.

- Une *courbe paramétrée fermée simple* γ est une application continue injective d'un intervalle $[a, b[$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\lim_{t \to b} \gamma(t) = \gamma(a)$.
- Une *courbe géométrique* $\mathcal{C}$ est l'image d'une courbe paramétrée γ. On dit alors que γ est *une paramétrisation* de $\mathcal{C}$.
- Une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^2$ est dite *simple* si les points de $\gamma(]a, b[)$ n'ont qu'un seul antécédent par γ.
- Une *courbe de Jordan* est une courbe géométrique fermée simple.
- Une courbe paramétrée de longueur finie sera dite *rectifiable*.
- La longueur d'une courbe paramétrée sera notée $\mathrm{L}(\gamma)$.

Afin de définir l'intérieur et l'extérieur d'une courbe géométrique rappelons le théorème de Jordan.

Théorème 2.2 (Théorème de Jordan). *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, le complémentaire d'une courbe de Jordan $\mathcal{C}$ est formé d'exactement deux composantes connexes, une bornée, l'autre non.*

On appelle *intérieur de $\mathcal{C}$* la composante connexe bornée et *extérieur de $\mathcal{C}$* la composante connexe non-bornée. Si $\mathcal{C}$ est une courbe simple, paramétrée par $\gamma : [s_0, s_1] \to \mathbb{R}^2$, telle que $[\gamma(s_0), \gamma(s_1)]$ n'intersecte pas $\mathcal{C}$, on appelle alors *intérieur de $\mathcal{C}$* la composante connexe non-bornée délimitée par $\mathcal{C}$ et le segment $[\gamma(s_0), \gamma(s_1)]$.

Définition 2.3 (Relation d'ordre). — A chaque courbe paramétrée simple γ, une relation d'ordre est définie pour les points de la courbe géométrique associée par :

$$\gamma(\alpha) \leq_\gamma \gamma(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leq \beta.$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, nous noterons $\leq_\gamma$ plus simplement $\leq$.

- Une courbe paramétrée simple munie d'une telle relation d'ordre est appelée *courbe orientée.*
- Un *semi-voisinage à gauche* (respectivement *semi-voisinage à droite*) d'un point x d'une courbe orientée γ est un ensemble de points $\gamma(]t_0, t_1])$ tel que $\gamma(t_1) = x$ (respectivement $\gamma([t_0, t_1[)$ tel que $\gamma(t_0) = x$) .
- Un *voisinage* d'un point x d'une courbe orientée γ est un ensemble de points $\gamma(]t_0, t_1[)$ tel qu'il existe $t \in]t_0, t_1[$ tel que $\gamma(t) = x$.

2.2 Courbes latéralement lisses

Les notions définies dans ce paragraphe sont tirées de [?]. Cependant, contrairement à [?], nous ne considérons ici que des courbes simples.

Définition 2.4 (Courbes latéralement lisses [?]). — Un angle entre deux droites orientées D_1 et D_2 est la valeur absolue du représentant dans $] - \pi, \pi]$ de l'angle algébrique

$(\widehat{x_1 - y_1, x_2} - y_2)$ où x_1, y_1 (respectivement x_2, y_2) sont deux points de D_1 (respectivement de D_2) tels que $x_1 <_{D_1} y_1$ (respectivement $x_2 <_{D_2} y_2$). Un angle entre deux droites est donc compris entre 0 et π.

— Une droite orientée D est appelée *sécante* d'une courbe orientée si elles se coupent en deux points x et y tels que $x \leq_D y \Leftrightarrow x \leq_\gamma y$.

— Une droite orientée D est appelée *tangente à gauche* (respectivement *tangente à droite*) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un semi-voisinage à gauche (respectivement à droite) V_x tel que toute sécante de V_x forme un angle inférieur à ϵ avec D.

— Une courbe orientée est *latéralement lisse* si tout point de la courbe orientée, à l'exception de ses extrémités, admet une tangente à gauche et une tangente à droite.

— Pour chaque point $\gamma(s)$ d'une courbe orientée γ paramétrée par longueur d'arc, on définit $e_l(s)$ (respectivement $e_r(s)$) *le vecteur tangent à gauche* (respectivement à droite) comme étant le vecteur orienté de norme 1, orienté dans le sens de la tangente à gauche (respectivement à droite).

Proposition 2.5 (Théorème 3.1.1. [?]). *Toute courbe latéralement lisse est rectifiable.*

Définition 2.6. — Un point d'une courbe latéralement lisse dont la tangente à gauche et la tangente à droite coïncident est dit *lisse.*

— Un point d'une courbe latéralement lisse qui n'est pas lisse est dit *angulaire.*

Proposition 2.7 (Théorème 3.3.2, [?]). *L'ensemble des points angulaires d'une courbe latéralement lisse est dénombrable.*

Proposition 2.8 (Théorème 3.3.3, [?]). *Soit γ une courbe latéralement lisse paramétrée par longueur d'arc $s \in [0, l]$. Pour tout $s \in [0, l]$, γ admet une dérivée à droite $\gamma_r'(s)$et une dérivée à gauche $\gamma_l'(s)$. De plus :*

— $||\gamma_l'(s)|| = ||\gamma_r'(s)|| = 1,$

— *l'application γ_l' (respectivement γ_r') est continue à droite (respectivement continue à gauche)*

— *pour tout $s \in [0, L]$,*

$$\lim_{\substack{t \to s \\ t < s}} e_r(t) = \gamma_l'(s)$$

et

$$\lim_{\substack{t \to s \\ t > s}} e_l(t) = \gamma_r'(s).$$

Indicatrice des tangentes Dans le cas d'une courbe paramétrée simple C^1 de $\mathbb{R}^2$, l'indicatrice des tangentes est simplement $(\gamma, \frac{\gamma'}{||\gamma'||})$ reparamétrée par longueur d'arc. Cette courbe est à image dans $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{S}^1$. Construisons l'indicatrice des tangentes dans le cas d'une courbe simple latéralement lisse γ paramétrée par longueur d'arc. Les projections canoniques de $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ sont respectivement notées p_1 et p_2.

Définition 2.9. Une *indicatrice des tangentes* τ est une courbe simple paramétrée par longueur d'arc de $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{S}^1$ telle que

— pour tout $s \in [0, \mathrm{L}(\tau)]$, $p_1(\tau(s)) \in \mathrm{Im}(\gamma)$,

— s'il existe $(s, s') \in [0, \mathrm{L}(\tau)] \times [0, \mathrm{L}(\gamma)]$ tel que $p_1(\tau(s)) = \gamma(s')$, alors $p_2(\tau(s))$ appartient à une géodésique de longueur minimale de S^1 reliant $e_l(s')$ à $e_r(s')$. Si $e_l(s') = e_r(s')$, cette géodésique est réduite à un point et si $e_l(s') \neq -e_r(s')$, cette géodésique est unique.

Remarque 2.10. La projection p_2 de l'indicatrice des tangentes n'est pas nécessairement une courbe simple.

2.3 Courbure totale

Définition 2.11. — Une *chaîne* d'une courbe orientée γ est une suite finie de points de γ croissante.

— Une ligne brisée est *inscrite* dans une courbe orientée γ si ses sommets forment une chaîne de γ.

— Un polygône est inscrit dans une courbe orientée γ fermée si ses sommets forment une chaîne de γ.

— *La courbure totale* $\kappa(L)$ d'une ligne brisée L de sommets x_0, ..., x_m est définie par :

$$\kappa(L) := \sum_{i=1}^{m-1} (\widehat{x_{i-1}x_i, x_ix_{i+1}}).$$

— *La courbure totale* $\kappa(P)$ d'un polygône P de sommets x_0, ..., x_m est définie par :

$$\kappa(P) := \sum_{i=1}^{m} (\widehat{x_{i-1}x_i, x_ix_{i+1}}).$$

où $x_{m+1} := x_0$.

— *La courbure totale* $\kappa(\gamma)$ d'une courbe orientée γ est la borne supérieure des courbures totales de ses lignes brisées inscrites.

— *La courbure totale* $\kappa(\gamma)$ d'une courbe orientée fermée γ est la borne supérieure des courbures totales de ses polygônes inscrits.

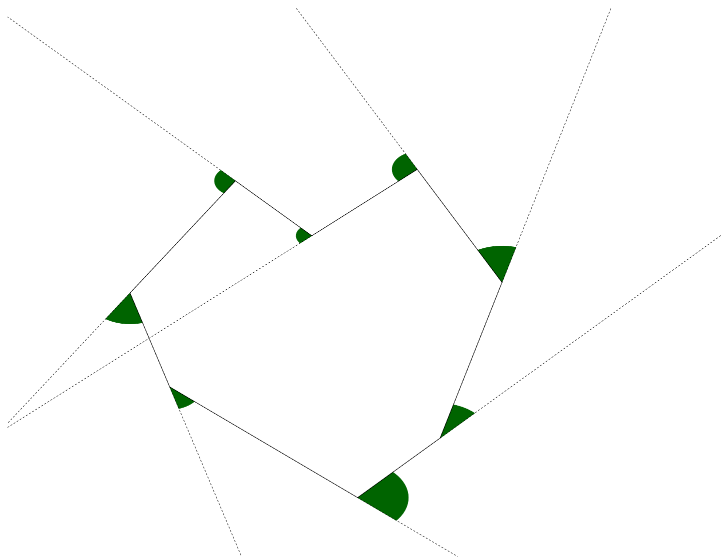


FIGURE 1 – La courbure totale du polygone est la somme de ses angles verts.

Proposition 2.12 (Théorème 5.1.2 [?]). *Toute courbe de courbure totale finie est latéralement lisse.*

Proposition 2.13 (Théorème 5.4.1 [?]). *Soit γ une courbe rectifiable paramétrée par la longueur d'arc. Si de plus γ est de courbure totale finie, alors pour tout $s \in [0, L(\gamma)]$, les dérivées à gauche*

$\gamma_l'(s)$ *et à droite* $\gamma_r'(s)$ *existent et les fonctions dérivées à gauche et à droite sont à variation bornée.*

Proposition 2.14 (Théorème de Fenchel, théorème 5.1.5 [?])**.** *Pour toute courbe fermée* γ $\kappa(\gamma) \geq 2\pi$*. De plus* $\kappa(\gamma) = 2\pi$ *si et seulement si* γ *est le bord d'une partie convexe du plan.*

Proposition 2.15 (Théorème 5.2.2 [?])**.** *La courbure totale d'une courbe latéralement lisse est égale à la longueur de la projection* p_2 *d'une de ses indicatrices des tangentes.*

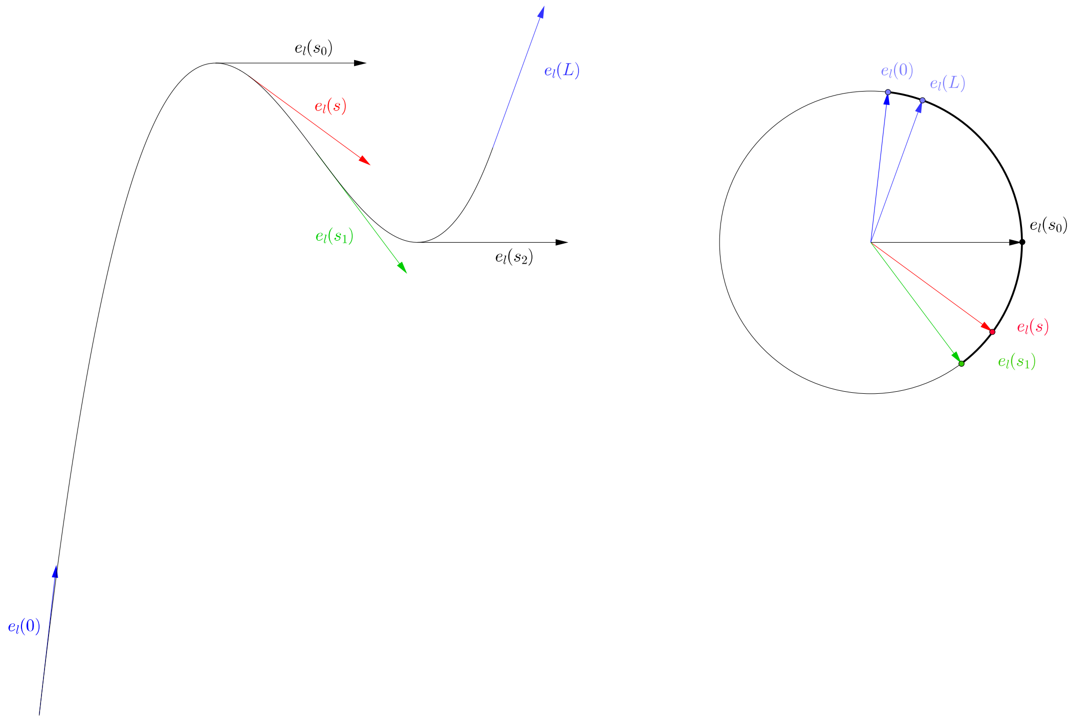


FIGURE 2 – La courbure totale de la courbe est la longueur de la courbe tracée par le vecteur tangent unitaire sur le cercle compté avec multiplicité. Ici le vecteur $e_l(s) = e_r(s)$ (en rouge) parcourt la courbe tracée sur le cercle en partant de $e_l(0)$ (en bleu) va jusqu'à $e_l(s_1)$ et retourne à $e_l(L)$ (en vert). La courbure totale est alors la somme des arcs $e_l(0)e_l(s_1)$ et $e_l(s_1)e_l(L)$.

La proposition suivante est une variante du théorème de comparaison de Schur (Théorème 5.1, Partie II, [?]) les arguments utilisés sont semblables à ceux du thèorème 5.8.1 de [?].

Proposition 2.16. *Soit* γ *et* $\bar{\gamma}$ *deux courbes latéralement lisses paramétrées par longueur d'arc de* $\mathbb{R}^2$ *telles que :*

— γ *et* $\bar{\gamma}$ *ont mêmes extrémités, plus précisément* $\gamma(0) = \bar{\gamma}(0)$ *et il existe* s_1 *et* $\bar{s_1}$ *tels que* $\gamma(s_1) = \gamma(\bar{s_1})$ *;*

— *l'intérieur de* $\bar{\gamma}|_{[0,s_1]}$ *existe et est convexe ;*

— $\bar{\gamma}$ *est de courbure supérieure à* γ*, c'est-à-dire pour tout intervalle* $I \subset [0, \bar{s_1}]$, $\kappa(\gamma|_I) \leq \kappa(\bar{\gamma}|_I)$

Alors la longueur de $\bar{\gamma}$ est supérieure à la longueur de γ, plus précisément $\bar{s_1} \geq s_1$.

Démonstration. Notons m le milieu du segment $[\bar{\gamma}(1), \bar{\gamma}(0)]$. Notons δ_1 et δ_2 les paramétrisisations des segments $[m, \bar{\gamma}(0)]$ et $[\bar{\gamma}(1), m]$ par longueur d'arc. Notons $\xi := \delta_2 \square \bar{\gamma} \square \delta_1$. Soit τ une indicatrice des tangentes de ξ. Par la proposition 2.14, $L(p_2(\tau)) = 2\pi$. Il existe alors s' tel que $L(p_2(\tau|_{[0,s']})) = L(p_2(\tau|_{[s',L(\tau)]})) = \pi$. $p_2 \circ \tau(s')$ est alors orienté dans le même sens que $\bar{\gamma}(1) - \bar{\gamma}(0)$. Notons $\bar{\gamma}(\tilde{s}) := p_1 \circ \tau(s')$ et $T_0 := p_2 \circ \tau(s')$.

Donc pour tout point p de τ, $(\widehat{p, \tau(s')}) \leq \frac{1}{2}L(\tau) = \pi$. Pour tout $s \in [0, \bar{s_1}]$, $(\widehat{\bar{\gamma}_l'(s), T_0}) \leq \pi$, donc

$$(\widehat{\gamma_l'(s), \gamma_l'(\tilde{s})}) \leq \kappa(\gamma|_{[\tilde{s},s]}) \leq \kappa(\bar{\gamma}|_{[\tilde{s},s]}) \leq (\widehat{\bar{\gamma}_l'(s), T_0}) \leq \pi$$

Par décroissance de cosinus, pour tout $s \in [0, \bar{s_1}]$,

$$< \bar{\gamma}_l'(s), T_0 >= \cos(\widehat{T_0, \bar{\gamma}_l'(s)}) \leq \cos(\widehat{\gamma_l'(\tilde{s}), \gamma_l'(s)}) =< \gamma_l'(s), \gamma_l'(\tilde{s}) > . \tag{1}$$

De plus,

$$|\bar{\gamma}(s_1) - \bar{\gamma}(0)| =< \bar{\gamma}(s_1) - \bar{\gamma}(0), T_0 >= \int_0^{\bar{s_1}} < \bar{\gamma}_l'(s), \bar{\gamma}_l'(\tilde{s}) > ds,$$

or

$$|\bar{\gamma}(s_1) - \bar{\gamma}(0)| = |\gamma(s_1) - \gamma(0)| \geq< \gamma(s_1) - \gamma(0), \gamma_l'(\tilde{s}) >= \int_0^{s_1} < \gamma_l'(s), \gamma_l'(\tilde{s}) > ds,$$

donc

$$\int_0^{\bar{s_1}} < \bar{\gamma}_l'(s), T_0 > ds \geq \int_0^{s_1} < \gamma_l'(s), \gamma_l'(\tilde{s}) > ds,$$

et par l'inégalité 1, $\bar{s_1} \geq s_1$. □

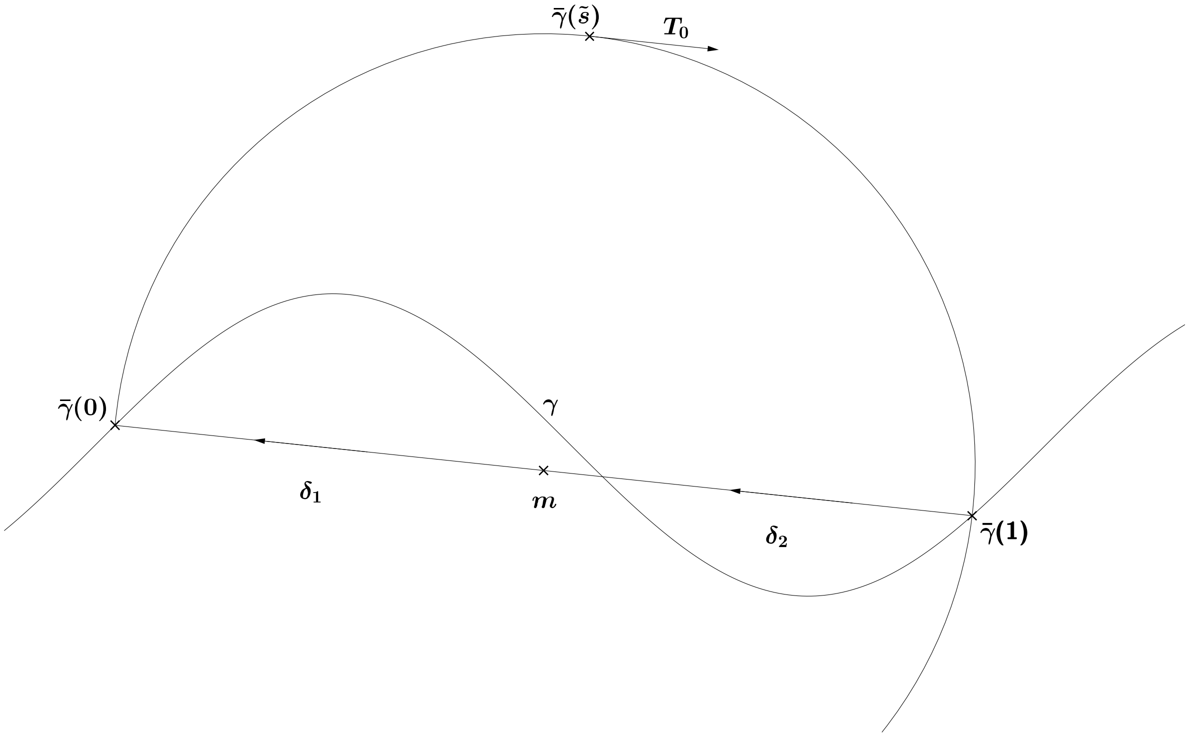


FIGURE 3

L'hypothèse sur les courbures de γ et $\bar{\gamma}$ de la proposition 2.16 est assez restrictive, elle implique que $\bar{\gamma}$ possède au moins autant de points angulaires que γ. En pratique cette proposition risque de n'être utilisable que pour des courbes C^1.

Lemme 2.17 (Comparaison cordes et courbe)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une courbe latéralement lisse telle que toute paramétrisation γ soit de courbure inférieure à celle d'un cercle de rayon $r > 0$, c'est-à-dire pour tout intervalle $I \subset [0, L(\gamma)]$, $\kappa(\gamma|_I) \leq \frac{|I|}{r}$. Soient a et b des points de $\mathcal{C}$, tels que $||a-b||_2 < \sqrt{2}r$. En notant $L(\gamma_{ab})$ la longueur d'arc entre a et b, arc inclus dans $\bar{B}_{||.||_2}(a, \sqrt{2}r)$,*

$$||a-b||_2 \leq L(\gamma_{ab}) \leq 2r\mathrm{arcsin}(\frac{||a-b||_2}{2r}).$$

Démonstration. La distance euclidienne entre a et b est plus faible que la longueur de γ_{ab}, $||a-b||_2 \leq L(\gamma_{ab})$. Notons $\phi := 2\mathrm{arcsin}(\frac{||a-b||_2}{2r})$. Par la proposition , la longueur maximale de γ_{ab} est majorée par celle d'un arc de cercle de longueur $r\phi$.

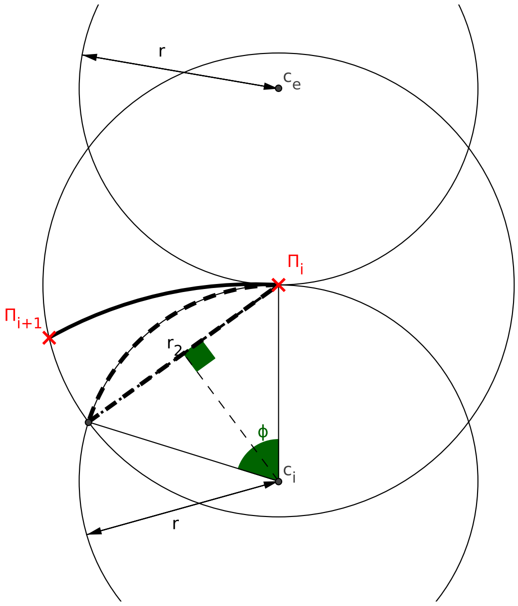


FIGURE 4 – Lemme 2.17 MODIFIER DESSIN

□

3 Courbe discrétisée

3.1 Discrétisation de Gauss

[?]

Définition 3.1. — Le *voisinage 4-connexe* d'un point $a \in \mathbb{R}^2$ est l'ensemble noté

$$V_a := \{a + (0,1), a + (1,0), a + (-1,0), a + (0,-1)\}.$$

— Le *voisinage 8-connexe* d'un point $a \in \mathbb{R}^2$ est l'ensemble noté

$$V_{a,8} := V_a \cup \{a + (1,1), a + (-1,1), a + (-1,-1), a + (1,-1)\}.$$

— A une résolution h fixée, un *pixel* centré en un point $a \in h\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \mathbb{Z}^2\right)$ est noté P_a et est défini par :

$$P_a := \bar{\mathrm{B}}_{||\cdot||_\infty}\left(a, \frac{h}{2}\right).$$

— La *discrétisation de Gauss d'un ensemble A pour le pas h* $G_h(A)$ est définie par :

$$G_h(A) := \bigcup_{z \in A \cap h\mathbb{Z}^2} P_z.$$

Autrement dit $G_h(A)$ est la réunion de tous les carrés formés par le réseau $h\mathbb{Z}^2$ de côté de longueur h, dont le centre est dans A.

— La *discrétisation de Gauss d'une courbe de Jordan $\mathcal{C}$* $\partial_h(\mathcal{C})$ est la frontière de la discrétisation de Gauss de l'intérieur de $\mathcal{C}$.

— Notons de plus :

$$\mathrm{Dig}_h(\mathcal{C}) := \partial_h(\mathcal{C}) \cap h\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \mathbb{Z}^2\right).$$

— Les éléments de $\mathrm{Dig}_h(\mathcal{C})$ sont appelés les *sommets de la discrétisation* et un segment reliant deux sommets consécutifs est appelé une *arête de la discrétisation*.

— Un sommet d' un pixel P_z est dit *intérieur* s'il appartient à l'intérieur de $\mathcal{C}$, *extérieur* s'il appartient à l'extérieur de $\mathcal{C}$ et *frontalier* s'il appartient à $\mathcal{C}$.

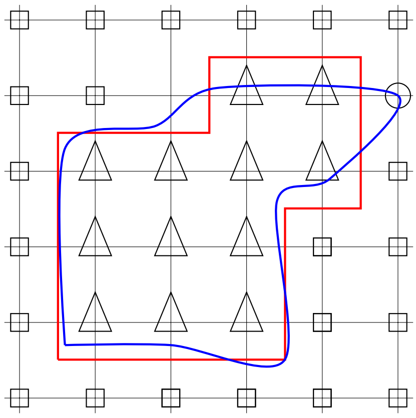


FIGURE 5 – Les intersections de la grille sont dans $h\mathbb{Z}^2$. En bleu, $\mathcal{C}$, en rouge $\partial_h(\mathcal{C})$, les triangles sont les points intérieurs, les cercles les points frontaliers, et les carrés les points extérieurs.

Remarque 3.2. $\partial_h(\mathcal{C})$ étant le bord de $\mathrm{G}_h(A)$, où A est l'intérieur de $\mathcal{C}$, une arête de $\partial_h(\mathcal{C})$ traverse l'arête d'un pixel P_z si et seulement si cette arête possède un point intérieur et un point soit extérieur soit frontalier comme extrémités.

3.2 Autre association

Proposition 3.3. *Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée simple et $h > 0$ tels que $\partial_h(\mathcal{C})$ soit 4-connexe. Il existe alors une application $\xi : Dig_G(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ telle que*

$$\forall z \in Dig_G(\mathcal{C}),\ ||\xi(z) - z||_\infty \leq \frac{h}{2}$$

Démonstration. Si $z \in \mathrm{Dig}_G(\mathcal{C})$ alors z appartient à une arrête de $\partial_h(\mathcal{C})$, qui est elle même frontière de deux carrés $\bar{\mathrm{B}}_{||.||_\infty}(p_i, \frac{h}{2})$ et $\bar{\mathrm{B}}_{||.||_\infty}(p_2, \frac{h}{2})$ tel que p_i soit un point intérieur et p_2 soit un point frontalier ou extérieur. Si p_2 est un point frontalier, alors p_2 est un point de $\mathcal{C}$ à distance inférieure à $\frac{h}{2}$ de z en norme $||.||_\infty$. Sinon p_2 est un point extérieur. L'intérieur et l'extérieur de $\mathcal{C}$ étant deux composante connexes distinctes, $\mathcal{C}$ sépare le pixel P_z en deux composantes connexes, l'une contenant p_i, l'autre p_e. Donc $\mathring{P_z} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. On peut alors définir une telle application ξ. $\square$

Une telle application ξ sera appelée *association*. Le but de cette sous-section est de montrer une propriété 3.10 de conservation de l'ordre défini sur $\partial_h(\mathcal{C})$ par une association. Si « localement », il se peut qu'une association ne conserve pas l'ordre d'une suite de points de $\mathrm{Dig}_h(\mathcal{C})$, l'ordre sera « globalement » respecté. Cette propriété repose sur l'hypothèse que la courbe possède une certaine épaisseur 3.6. La démonstration de cette propriété repose essentiellement sur trois arguments basiques : la séparation de sommets de différentes nature dans des composantes connexes différentes de $\mathbb{R}^2\mathcal{C}$ utilisé dans la preuve de la proposition 3.2, le lemme 3.3 et le corollaire 3.5.

Lemme 3.4. *Soit $h > 0$. Soit $\mathcal{C}$ une courbe géométrique fermée admettant une paramétrisation par longueur d'arc γ telle que*

— *si la courbe γ sort d'un pixel P_z en $\gamma(s_0)$ et rentre de nouveau dans ce pixel en $\gamma(s_1)$, c'est-à-dire,*

$$\exists z \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } \gamma(s_0) \in \partial P_z \text{ et } \gamma(]s_0, s_1[) \cap P_z = \emptyset$$

trois

— *$\gamma(s_0)$ et $\gamma(s_1)$ n'appartiennent pas à la même arête de P_z,*

alors

$$\kappa(\gamma([s_0, s_1]) \geq \frac{\pi}{2}.$$

Plus précisément,

$$\kappa(\gamma([s_0, s_1]) \geq n_s \frac{\pi}{2}$$

où n_s est le nombre de sommets de P_z compris dans l'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$.

Démonstration. Trois cas sont possibles, l'intérieur de l'arc $[\gamma(s_0), \gamma(s_1)]$ contient soit un seul sommet p_1 de $\partial(P_z)$ ($\gamma(s_1)$ est sur une face adjacente à $\gamma(s_0)$), soit deux sommets p_1, p_2 ($\gamma(s_1)$ est sur une face opposée à $\gamma(s_0)$), soit trois sommets p_1, p_2, p_3, ($\gamma(s_1)$ est sur une face adjacente à $\gamma(s_0)$).

— Si l'intérieur contient un seul sommet p_1 (figure 6a), alors les droites $(\gamma(s_0), p_1)$ et $(\gamma(s_1), p_1)$ intersectent $\gamma(]s_0, s_1[)$ en deux points A et B tels que $A \leq_\gamma B$. Notons θ_1 l'angle formé entre $(\gamma(0), A)$ et (A, B), θ_2 l'angle formé entre (A, B) et $(B, \gamma(1))$, ϕ_1 l'angle formé entre $(\gamma(0), A)$ et $(\gamma(0), B)$ et ϕ_2 l'angle formé entre $(\gamma(1), A)$ et $(\gamma(1), B)$. Comme la somme des angles d'un triangle fait π et que $(\gamma(0), B)$ et $(\gamma(1), A)$ forme un angle droit en p_1,

$$\phi_1 + \frac{\pi}{2} + \pi - \theta_1 + \frac{\pi}{2} + \pi - \theta_2 + \phi_2 + \frac{\pi}{2} = 3\pi,$$

donc

$$\theta_1 + \theta_2 = \phi_1 + \phi_2 + \frac{\pi}{2},$$

donc

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 + \theta_2 \leq \frac{3\pi}{2}.$$

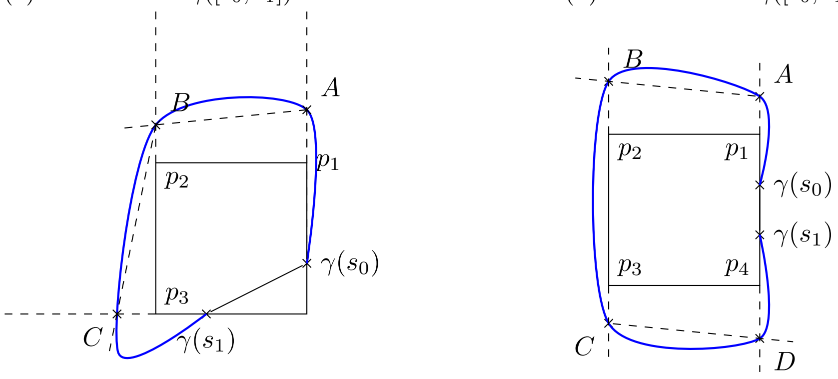
Par définition de la courbure totale, $\kappa(\gamma|_{[s_0,s_1]}) \geq \theta_1 + \theta_2 \geq \frac{\pi}{2}$.
trois

— Si l'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient deux sommets consécutifs p_1 et p_2 de P_z (figure 6b), alors les droites $(\gamma(s_0), p_1)$ et $(\gamma(s_1), p_2)$ intersectent $\gamma(]s_0, s_1[)$ en deux points A et B tels que $A \leq_\gamma B$. Notons θ_1 l'angle entre $(\gamma(0), A)$ et (A, B), θ_2 l'angle entre (A, B) et $(B, \gamma(1))$. $\theta_1 + \theta_2 = \pi$. Par définition de la courbure totale, $\kappa(\gamma|_{[s_0,s_1]}) \geq \theta_1 + \theta_2 = \pi$.

— Si l'intérieur $\gamma([s_0, s_1])$ contient trois sommets consécutifs p_1, p_2 p_3 de P_z (figure 6c), avec p_1 sur la même arête que $\gamma(s_0)$ et p_3 sur celle de $\gamma(s_1)$ alors les droites $(\gamma(s_0), p_1)$, $(\gamma(s_1), p_2)$ $[p_3, p_2)$ intersectent $\gamma(]s_0, s_1[)$ en trois points A, B et C tels que $A \leq_\gamma B \leq_\gamma C$. Notons θ_1 l'angle entre (p_1A) et (AB), θ_2 l'angle entre (AB) et (BC) et θ_3 l'angle entre (BC) et (Cp_3). Alors $\pi - \theta_1 - \theta_2$, $\pi - \theta_3$ et $\frac{\pi}{2}$ sont les trois angles du triangle p_3BC. Donc $\pi - \theta_1 - \theta_2 + \pi - \theta_3 + \frac{\pi}{2} = \pi$. Par définition de la courbure totale, $\kappa(\gamma([s_0, s_1])) \geq \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{3\pi}{2}$.

— Si l'intérieur $\gamma([s_0, s_1])$ contient trois quatre sommets consécutifs p_1, p_2, p_3, p_4 de P_z (figure 6d), avec p_1 sur la même arête que $\gamma(s_0)$ et p_4 sur celle de $\gamma(s_1)$ alors les droites $(\gamma(s_0), p_1)$, $(\gamma(s_1), p_4)$ (p_3, p_2) intersectent $\gamma(]s_0, s_1[)$ en quatre points A, B, C et D tels que $A \leq_\gamma B \leq_\gamma C \leq_\gamma D$. Notons θ_1 l'angle entre $(\gamma(s_0)A)$ et (AB), θ_2 l'angle entre (AB) et (BC), θ_3 l'angle entre (BC) et (CD) et θ_4 l'angle entre (CD) et $(D\gamma(s_1))$. $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ et $\theta_3 + \theta_4 = \pi$, donc $\kappa(\gamma([s_0, s_1])) \geq \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \geq 2\pi$

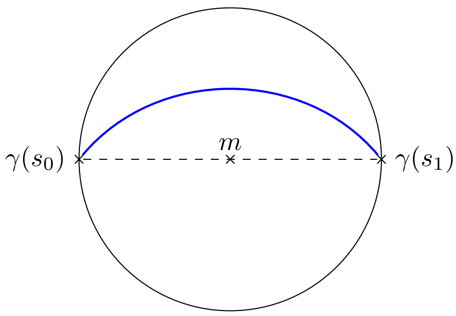
(a) L'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient un seul sommet. (b) L'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient deux sommets.



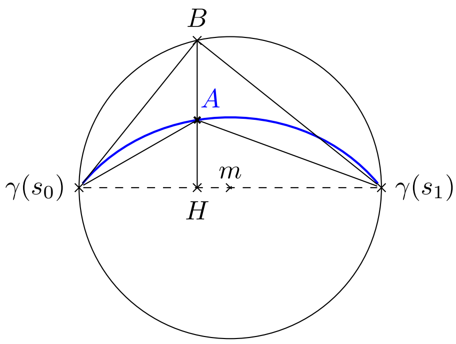
(c) L'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient trois sommets. (d) L'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient quatre sommets.

$\square$

Lemme 3.5. *Soient $\mathcal{C}$ une courbe fermée simple de paramétrisation par longueur d'arc γ et $s_0, s_1 \in [0, L(\gamma)]$ tels que $s_0 < s_1$ et $\kappa(\gamma([s_0, s_1]) < \frac{\pi}{2}$, alors $\gamma(]s_0, s_1[) \subset \overset{\circ}{B}_{||.||_2}(c, \frac{l}{2})$ où c est le milieu de $[\gamma(s_0), \gamma(s_1)]$ et $l := ||\gamma(s_1) - \gamma(s_0)||_2$.*



Démonstration. Soit A un point de $\gamma(]s_0,s_1[)$. Comme $\kappa(\gamma([s_0,s_1])) < \frac{\pi}{2}$, l'angle géométrique $\bar{\theta} := (\gamma(s_0)-\widehat{A,\gamma(s_1)}-A) = \pi - \theta > \frac{\pi}{2}$. Notons H (respectivement B) l'intersection de $[\gamma(s_0),\gamma(s_1)]$ (respectivement du cercle de centre c et de rayon $\frac{l}{2}$) et de la perpendiculaire à $[\gamma(s_0),\gamma(s_1)]$ passant par A. Notons également $\bar{\theta_1}$ l'angle entre les droites $(A\gamma(s_0))$ et (AH), $\bar{\theta_2}$ l'angle entre les droites (AH) et $(A\gamma(s_1))$, ϕ_1 l'angle entre les droites (Bp_1) et (BH), ϕ_2 l'angle entre les droites (BH) et (Bp_2). $\phi_1+\phi_2 = \frac{\pi}{2}$ et $\bar{\theta_1}+\bar{\theta_2} > \frac{\pi}{2}$. Donc $\bar{\theta_1} > \phi_1$ ou $\bar{\theta_2} > \phi_2$. Donc $AH < \frac{\gamma(s_0)H}{\tan\phi_1} = BH$ ou $AH < \frac{\gamma(s_1)H}{\tan\phi_2} = BH$. Donc A est sur le segment $]BH[$, donc $A \in \mathring{\mathrm{B}}_{||.||_2}(c,\frac{h}{2})$.



□

Corollaire 3.6. *Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée simple de paramétrisation par longueur d'arc γ telle que $\gamma(s_0)$ et $\gamma(s_1)$ appartiennent à une même arête $[p_1,p_2]$ d'un pixel P_z telle que $\gamma(]s_0,s_1[)\cap P_z = \emptyset$ et $\kappa(\gamma([s_0,s_1]) < \frac{\pi}{2}$, alors $\gamma(]s_0,s_1[) \subset \mathring{B}_{||.||_2}(c,\frac{h}{2})$ où c est le milieu de $[p_1,p_2]$.*

Définition 3.7. *L'épaisseur* e d'une courbe fermée $\mathcal{C}$ est la borne inférieure des réels positifs tels que pour toute paramétrisation γ de $\mathcal{C}$ si $\kappa(\gamma([s_0,s_1]) \geq \frac{\pi}{2}$, alors $||\gamma(s_1)-\gamma(s_0)|| \geq e$.

Remarque 3.8. Une courbe d'épaisseur non-nulle, ne peut pas avoir des points angulaires aigus.

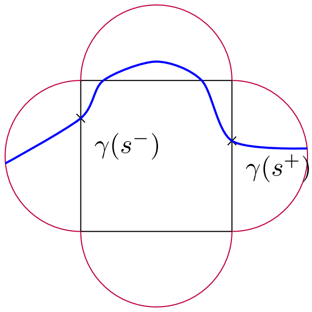
Lemme 3.9. *Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée simple d'épaisseur e. Soient $\sqrt{2}h < e$, $N \in \mathbb{N}$, $a_i \in Dig_h(\mathcal{C})$. Soit γ une paramétrisation de $\mathcal{C}$ par longueur d'arc telle que $\gamma(0) \notin P_{a_i}$. Notons*

$$s^+ := \max\{s \in [0,L(\gamma)] | \gamma(s) \in P_{a_i}\},$$

$$s^- := \min\{s \in [0,L(\gamma)] | \gamma(s) \in P_{a_i}\}.$$

Autrement dit $\gamma(s^-)$ est le premier point de la courbe $\mathcal{C}$ à être dans le pixel P_{a_i} et $\gamma(s^+)$ le dernier. Alors $\gamma(]s^-,s^+[) \subset U$ où

$$U := P_{a_i} \cup \bigcup_{b\in\frac{1}{2}V_{a_i}} \mathring{B}_{||.||_2}(b,\frac{h}{2})$$



Démonstration. Comme le diamètre de P_{a_i} est $\sqrt{2}h$, par l'hypothèse $e > \sqrt{2}h$, $\kappa(\gamma([s^-, s^+])) < \frac{\pi}{2}$. Si la courbe $\gamma(]s, s^+[)$ sort de $\bar{\mathrm{B}}_{||.||_\infty}(a_i, \frac{h}{2})$, elle intersecte ∂P_{a_i} en un point $\gamma(s_0)$. Par le lemme 3.3 elle rentre alors de nouveau dans P_{a_i} en passant par une arête fermée d sur laquelle est $\gamma(s_0)$. Si la courbe $\gamma(]s, s^+[)$ sort puis rentre de nouveau par une certaine arête de P_{a_i}, alors, par le lemme 3.5 la courbe $\gamma([s^-, s^+])$ ne peut sortir de U. $\partial_h(\mathcal{C})$ 4-connexe. $\square$

Lemme 3.10. *Soient $\mathcal{C}$ une courbe fermée simple d'épaisseur e et h tels que $0 < \sqrt{2}h < e$ et $\partial_h(\mathcal{C})$ soit 4-connexe simple fermée. , $N \in \mathbb{N}$, $a_i \in Dig_h(\mathcal{C})$. Soit γ une paramétrisation de $\mathcal{C}$ par longueur d'arc telle que $\gamma(0) \notin P_{a_i}$. Notons*

$$s^+ := \max\left\{s \in [0, L(\gamma)] | \gamma(s) \in P_{a_i}\right\},$$

$$s^- := \min\left\{s \in [0, L(\gamma)] | \gamma(s) \in P_{a_i}\right\}.$$

Soit ξ une association. S'il existe j tel que $\xi(a_j) \in \gamma(]s^-, s^+[)$, alors $j \in [|i-2, i+2|]$.

Démonstration. Soit j tel que $\xi(a_j) \in \gamma(]s^-, s^+[)$. Par définition d'une association, les points de $\gamma([s^-, s^+])$ qui sont dans l'image de $\xi(\mathrm{Dig}_h(\mathcal{C}) \backslash \{a_i\})$ sont en dehors de $\overset{\circ}{P}_{a_i}$. Par le lemme 3.8, les seuls points $a \in \mathrm{Dig}_h(\mathcal{C})$ tels que $\xi(a) \in \gamma([s^-, s^+])$ sont les voisins 8-connexes de a_i. Il « suffit » alors de montrer que si un voisin 8-connexe a de a_i est tel que $\xi(a) \in \gamma([s^-, s^+])$, alors $a \in \{a_{i-2}, a_{i-1}, a_{i+1}, a_{i+2}\}$. De plus, par le lemme 3.8 et l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$ si $\gamma(]s^-, s^+[)$ sort de P_{a_i} par une certaine arête et si elle rentre de nouveau, alors elle rentre par la même arête. Plus précisément, s'il existe $s_0, s_1 \in [s^-, s^+]$ (éventuellement $s_0 = s_1$) tels que $\gamma(s_0), \gamma(s_1) \in \partial P_{a_i}$ et $\gamma(]s_0, s_1[) \notin \overset{\circ}{P}_{a_i}$. Soit $a \in V_{a_i,8}$ tel que $\xi(a) \in \gamma([s^-, s^+])$, seuls deux cas sont alors possibles : dans le premier cas a est adjacent à a_i pour la 4-connexité, dans le second cas a n'est pas adjacent à a_i pour la 4-connexité.

- Dans le premier cas, montrons que a et a_i sont deux points consécutifs de $\partial_h(\mathcal{C})$. Supposons par l'absurde que a et a_i ne sont pas connectés par une arête de $\partial_h(\mathcal{C})$. P_{a_i} et P_a possède une arête un commun d. Seuls trois sous-cas sont possibles : dans le premier sous-cas, les extrémités de d sont toutes les deux des points intérieurs ou toutes les deux des points extérieurs ; dans le deuxième sous-cas, une extrémité de d est un point frontalier et l'autre sommet un point extérieur ; dans troisième sous-cas : les deux extrémités de d sont des points frontaliers.
  - Dans le premier sous-cas (figure 7a), par le lemme 3.5, la courbe $\gamma([s, s^+])$ ne permet pas d'isoler les sommets de P_a en deux composantes connexes distinctes de $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{C}$. De plus, la courbe $\mathcal{C}$ ne peut passer dans P_a en dehors de $\gamma([s^-, s^+])$. En effet par la contraposée du lemme 3.3, cela contredirait l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$. Donc il n'y a pas de sommets sommets frontaliers dans P_a ni de sommets extérieurs si les extrémités de d sont des sommets intérieurs et intérieurs si les extrémités de d sont des sommets extérieurs. Donc $a \notin \mathrm{Dig}_h(\mathcal{C})$. Contradiction !

— Dans le deuxième sous-cas (figure 7b), $a \in \mathrm{Dig}_h(\mathcal{C})$ si et seulement si P_a possède un point intérieur comme sommet. Si tel était le cas, alors par le lemme 3.5, $\gamma([s^-, s^+])$ ne permettrait pas d'isoler le point extérieur et le point intérieur sans enfreindre la contrainte $\sqrt{2}h < e$. Donc $a \notin \mathrm{Dig}_h(\mathcal{C})$.

— Dans le troisième sous-cas, $a \in \mathrm{Dig}_h(\mathcal{C})$ si et seulement si P_a possède un point intérieur comme sommet. Si tel était le cas, alors le dernier sommet de P_a serait aussi un point intérieur, sinon la courbe devrait passer par un une autre arête de P_a que d soit en passant par l'extérieur de $\mathring{P}_a$, ce qui est impossible par le lemme 3.3 (figure 7c) soit en passant par l'intérieur de $\mathring{P}_a$ ce qui est impossible par le lemme 3.5. P_a posséderait donc deux sommets frontaliers (ce sont les extrémités de d) et deux sommets intérieurs. De plus $a_i \in \mathrm{Dig}_h(\mathcal{C})$, donc P_{a_i} possède au moins un point intérieur. Dans $P_a \cup P_{a_i}$, il y a donc un segment $\tilde{d}$ de longueur $2h$ perpendiculaire à d ayant pour extrémités des points intérieurs et pour milieu un point frontalier. La courbe $\mathcal{C}$ ne doit pas isoler les deux extrémités de d. Elle doit alors soit repasser par $\tilde{d}$ soit ne pas repasser par $\tilde{d}$, auquel cas, elle ne traverse pas $\tilde{d}$ mais lui est juste tangente. Si $\mathcal{C}$ repasse par $\tilde{d}$ (figure 7d), alors par le lemme 3.5 et l'hypothèse $\sqrt{2}h$, $\mathcal{C}$ ne peut atteindre la seconde extrémité de d qui est un point frontalier. Absurde ! Si $\mathcal{C}$ ne repasse pas par $\tilde{d}$ (figure 7e), par le lemme 3.3 et l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$, $\mathcal{C}$ ne peut pas atteindre la seconde extrémité de d qui est un point frontalier. Absurde ! Donc $a \notin \mathrm{Dig}_h(\mathcal{C})$.

— Dans le second cas, montrons qu'il existe $b \in \mathrm{Dig}_h(\mathcal{C})$, voisin 4-connexe de a_i et a tel que P_b possède $\xi(a)$ comme sommet ainsi que deux sommets intérieurs diagonalement opposés. Comme $a, a_i \in \mathrm{Dig}_h(\mathcal{C})$, il est nécessaire que P_a et P_{a_i} aient chacun un point intérieur comme sommet. De plus, si aucun des sommets de P_a adjacent à $\xi(a)$ n'était intérieur, alors le sommet opposé à $\xi(a)$ serait intérieur, et la courbe $\mathcal{C}$ couperait les arêtes de P_a ayant pour extrémité le sommet intérieur, par le lemme 3.4 et l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$, $\xi(a)$ ne pourrait pas être un point frontalier. Absurde ! Donc il existe un sommet intérieur adjacent à $\xi(a)$ de P_a noté p_1 et par le même raisonnement de P_{a_i} noté p_2. Si p_1, $\xi(a)$, p_2 ne sont pas alignés, il existe alors P_b possédant $\xi(a)$ comme sommet ainsi que les sommets p_1 et p_2 qui sont diagonalement opposés, donc $b \in \mathrm{Dig}_h(\mathcal{C})$. Si au contraire p_1, $\xi(a)$ et p_2 sont alignés, montrons qu'il existe un point intérieur adjacent à $\xi(a)$. Par l'absurde supposons que les deux autres sommets adjacents à $\xi(a)$ ne sont pas des points intérieurs. D'une part, p_1 et p_2 étant dans la même composante connexe de $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{C}$, $\gamma([s^-, s^+])$ est tangente au segment $[p_1, p_2]$ au point $\xi(a)$ ou elle repasse par un point y de $[p_1, p_2]$. Si $\gamma([s^-, s^+])$ est tangente au segment $[p_1, p_2]$ sans repasser par $[p_1, p_2]$, alors par le lemme 3.3 et l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$, $\gamma([s^-, s^+])$ ne peut pas repasser soit par P_a soit par P_{a_i} (figure 8c). Si au contraire $\gamma([s^-, s^+])$ repasse par $[p_1, p_2]$ en un point y, alors par l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$, la courbure totale d'un arc entre $\xi(a)$ et y est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, donc par le lemme 3.5 et 3.3, $\mathcal{C}$ ne peut pas repasser soit par ∂P_a soit par ∂P_{a_i} soit par ∂P_b en dehors de $[p_1, p_2]$ où P_b est un pixel adjacent à P_a et P_{a_i}. D'autre part, il existe sur une arête de P_a n'ayant pas $\xi(a)$ pour extrémité, un point x de la courbe $\mathcal{C}$ en effet, il existe un sommet frontalier ou une arête possédant un sommet intérieur et un sommet extérieur pour extrémités. Idem pour P_{a_i} et P_b. Contradiction ! Donc il existe P_b possédant $\xi(a)$ comme sommet ainsi que deux sommets intérieurs diagonalement, opposés donc $b \in \mathrm{Dig}_h(\mathcal{C})$. Donc a, b et a_i sont des points consécutifs de $\partial_h(\mathcal{C})$. Donc $a = a_{i-2}$ ou $a = a_{i+2}$.

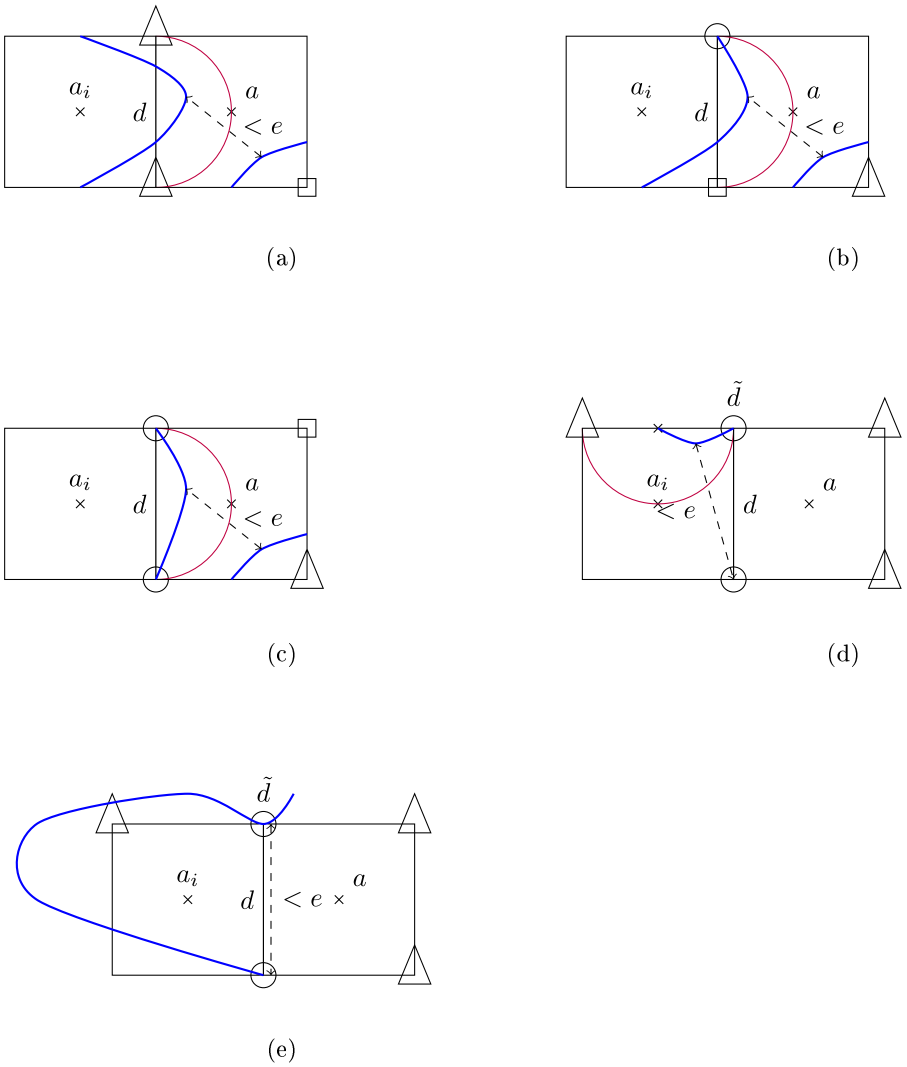


FIGURE 7

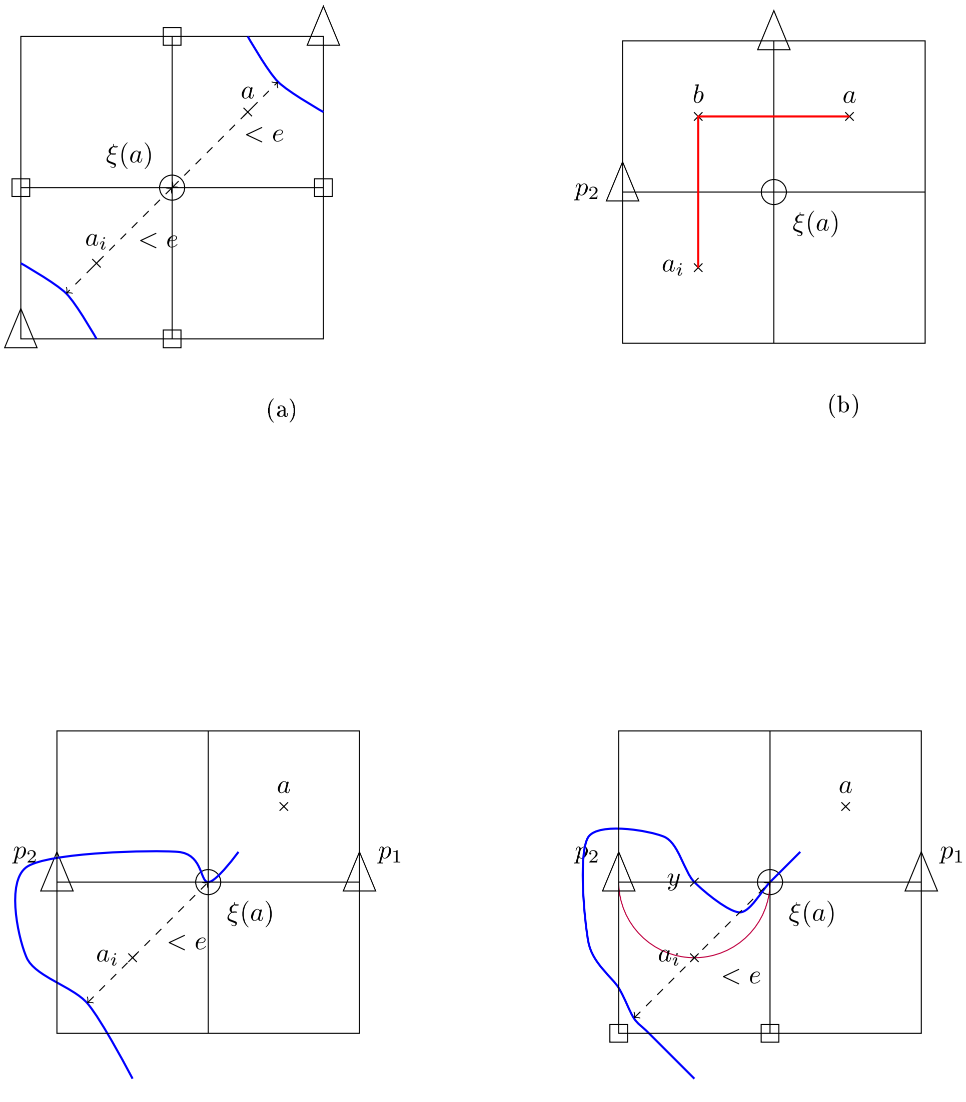


FIGURE 8

$\square$

Proposition 3.11. *Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée simple d'épaisseur e. Soient $h < e$, $N \in \mathbb{N}$, $(a_i)_{i\in[|1,N|]}$ une suite de points de $Dig_h(\mathcal{C})$ croissante pour une certaine paramétrisation de $\partial_h(\mathcal{C})$ telle que pour tout (i,j) la longueur d'un arc de $\partial_h(\mathcal{C})$ reliant a_i et a_j est supérieure à 2, il existe alors une paramétrisation de $\mathcal{C}$ pour laquelle la suite $(\xi(a_i))$ est croissante.*

Démonstration. Pour trois points sur une courbe fermée simple, il existe toujours une certaine paramétrisation de cette courbe pour laquelle ces trois points sont ordonnés dans l'ordre souhaité. Notons $(a_{i,k})$ la suite croissante des sommets de $\mathrm{Dig}_h(\mathcal{C})$ entre a_i et a_{i+1} avec $a_{i,1} := a_i$ et $a_{i,K} := a_{i+1}$. Par le lemme 3.8, il existe un arc $\mathcal{C}_i$ de $\mathcal{C}$ d'extrémités $\xi(a_i)$ et $\xi(a_{i+1})$ inclus entièrement dans la réunion des $U_{a_{i,k}}$, $k \in [|1,K|]$ où

$$U_{a_{i,k}} := \bar{\mathrm{B}}_{||.||_\infty}(a_{i,k}, \frac{h}{2}) \cup \bigcup_{b\in\frac{1}{2}V_{a_{i,k}}} \mathring{\mathrm{B}}_{||.||_2}(b, \frac{h}{2}).$$

Donc $\mathcal{C}_i$ peut être recouverte par les $\gamma([s_k^-, s_k^+])$ où

$$s_k^+ := \max\left\{s \in [0, \mathrm{L}(\gamma)] | \gamma(s) \in P_{a_{i,k}}\right\},$$

$$s_k^- := \min\left\{s \in [0, \mathrm{L}(\gamma)] | \gamma(s) \in P_{a_{i,k}}\right\}.$$

Donc par le lemme 3.9, il n'existe pas terme a_j de la suite (a_i) tel que $\xi(a_j) \in \mathcal{C}_i$. Donc il existe une paramétrisation γ de $\mathcal{C}$ telle que la suite $(\xi(a_i))_{i\in[|1,N|]}$ soit croissante. $\square$