

1 Introduction

1.1 Estimateurs semi-locaux en une dimension

2 Courbes

2.1 Premières définitions

Définition 2.1 (Courbe). — Une *courbe paramétrée* γ est une application continue d'un intervalle $[a, b]$ dans \mathbb{R}^2 .

- Une *courbe paramétrée fermée simple* γ est une application continue injective d'un intervalle $[a, b]$ dans \mathbb{R}^2 telle que $\lim_{t \rightarrow b} \gamma(t) = \gamma(a)$.
- Une *courbe géométrique* \mathcal{C} est l'image d'une courbe paramétrée γ . On dit alors que γ est une *paramétrisation* de \mathcal{C} .
- Une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^2$ est dite *simple* si les points de $\gamma(]a, b[)$ n'ont qu'un seul antécédent par γ .
- Une *courbe de Jordan* est une courbe géométrique fermée simple.
- Une courbe paramétrée de longueur finie sera dite *rectifiable*.
- La longueur d'une courbe paramétrée sera notée $L(\gamma)$.

Afin de définir l'intérieur et l'extérieur d'une courbe géométrique rappelons le théorème de Jordan.

Théorème 2.2 (Théorème de Jordan). *Dans le plan \mathbb{R}^2 , le complémentaire d'une courbe de Jordan \mathcal{C} est formé d'exactly deux composantes connexes, une bornée, l'autre non.*

On appelle *intérieur de \mathcal{C}* la composante connexe bornée et *extérieur de \mathcal{C}* la composante connexe non-bornée. Si \mathcal{C} est une courbe simple, paramétrée par $\gamma : [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, telle que $[\gamma(s_0), \gamma(s_1)]$ n'intersecte pas \mathcal{C} , on appelle alors *intérieur de \mathcal{C}* la composante connexe non-bornée délimitée par \mathcal{C} et le segment $[\gamma(s_0), \gamma(s_1)]$.

Définition 2.3 (Relation d'ordre). — A chaque courbe paramétrée simple γ , une relation d'ordre est définie pour les points de la courbe géométrique associée par :

$$\gamma(\alpha) \leq_\gamma \gamma(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leq \beta.$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, nous noterons \leq_γ plus simplement \leq .

- Une courbe paramétrée simple munie d'une telle relation d'ordre est appelée *courbe orientée*.
- Un *semi-voisinage à gauche* (respectivement *semi-voisinage à droite*) d'un point x d'une courbe orientée γ est un ensemble de points $\gamma(]t_0, t_1])$ tel que $\gamma(t_1) = x$ (respectivement $\gamma([t_0, t_1[)$ tel que $\gamma(t_0) = x$).
- Un *voisinage* d'un point x d'une courbe orientée γ est un ensemble de points $\gamma(]t_0, t_1[)$ tel qu'il existe $t \in]t_0, t_1[$ tel que $\gamma(t) = x$.

2.2 Courbes latéralement lisses

Les notions définies dans ce paragraphe sont tirées de [AR]. Cependant, contrairement à [AR], nous ne considérons ici que des courbes simples.

Définition 2.4 (Courbes latéralement lisses [AR]). — Un angle entre deux droites orientées D_1 et D_2 est la valeur absolue du représentant dans $] -\pi, \pi]$ de l'angle algébrique

$(x_1 - y_1, x_2 - y_2)$ où x_1, y_1 (respectivement x_2, y_2) sont deux points de D_1 (respectivement de D_2) tels que $x_1 <_{D_1} y_1$ (respectivement $x_2 <_{D_2} y_2$). Un angle entre deux droites est donc compris entre 0 et π .

- Une droite orientée D est appelée *sécante* d'une courbe orientée si elles se coupent en deux points x et y tels que $x \leq_D y \Leftrightarrow x \leq_\gamma y$.
- Une droite orientée D est appelée *tangente à gauche* (respectivement *tangente à droite*) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un semi-voisinage à gauche (respectivement à droite) V_x tel que toute sécante de V_x forme un angle inférieur à ϵ avec D .
- Une courbe orientée est *latéralement lisse* si tout point de la courbe orientée, à l'exception de ses extrémités, admet une tangente à gauche et une tangente à droite.
- Pour chaque point $\gamma(s)$ d'une courbe orientée γ paramétrée par longueur d'arc, on définit $e_l(s)$ (respectivement $e_r(s)$) le *vecteur tangent à gauche* (respectivement à droite) comme étant le vecteur orienté de norme 1, orienté dans le sens de la tangente à gauche (respectivement à droite).

Proposition 2.5 (Théorème 3.1.1. [AR]). *Toute courbe latéralement lisse est rectifiable.*

Définition 2.6. — Un point d'une courbe latéralement lisse dont la tangente à gauche et la tangente à droite coïncident est dit *lisse*.

- Un point d'une courbe latéralement lisse qui n'est pas lisse est dit *angulaire*.

Proposition 2.7 (Théorème 3.3.2, [AR]). *L'ensemble des points angulaires d'une courbe latéralement lisse est dénombrable.*

Proposition 2.8 (Théorème 3.3.3, [AR]). *Soit γ une courbe latéralement lisse paramétrée par longueur d'arc $s \in [0, l]$. Pour tout $s \in [0, l]$, γ admet une dérivée à droite $\gamma'_r(s)$ et une dérivée à gauche $\gamma'_l(s)$. De plus :*

- $\|\gamma'_l(s)\| = \|\gamma'_r(s)\| = 1$,
- l'application γ'_l (respectivement γ'_r) est continue à droite (respectivement continue à gauche)
- pour tout $s \in [0, L]$,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow s \\ t < s}} e_r(t) = \gamma'_l(s)$$

et

$$\lim_{\substack{t \rightarrow s \\ t > s}} e_l(t) = \gamma'_r(s).$$

Indicatrice des tangentes Dans le cas d'une courbe paramétrée simple C^1 de \mathbb{R}^2 , l'indicatrice des tangentes est simplement $(\gamma, \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|})$ reparamétrisée par longueur d'arc. Cette courbe est à image dans $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Construisons l'indicatrice des tangentes dans le cas d'une courbe simple latéralement lisse γ paramétrée par longueur d'arc. Les projections canoniques de $\mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow S^1$ sont respectivement notées p_1 et p_2 .

Définition 2.9. Une *indicatrice des tangentes* τ est une courbe simple paramétrée par longueur d'arc de $\mathbb{R}^2 \times S^1$ telle que

- pour tout $s \in [0, L(\tau)]$, $p_1(\tau(s)) \in \text{Im}(\gamma)$,
- s'il existe $(s, s') \in [0, L(\tau)] \times [0, L(\gamma)]$ tel que $p_1(\tau(s)) = \gamma(s')$, alors $p_2(\tau(s))$ appartient à une géodésique de longueur minimale de S^1 reliant $e_l(s')$ à $e_r(s')$. Si $e_l(s') = e_r(s')$, cette géodésique est réduite à un point et si $e_l(s') \neq -e_r(s')$, cette géodésique est unique.

Remarque 2.10. La projection p_2 de l'indicatrice des tangentes n'est pas nécessairement une courbe simple.

2.3 Courbure totale

Définition 2.11. — Une *chaîne* d'une courbe orientée γ est une suite finie de points de γ croissante.

- Une ligne brisée est *inscrite* dans une courbe orientée γ si ses sommets forment une chaîne de γ .
- Un polygône est inscrit dans une courbe orientée γ fermée si ses sommets forment une chaîne de γ .
- La *courbure totale* $\kappa(L)$ d'une ligne brisée L de sommets x_0, \dots, x_m est définie par :

$$\kappa(L) := \sum_{i=1}^{m-1} \widehat{(x_{i-1}x_i, x_ix_{i+1})}.$$

- La *courbure totale* $\kappa(P)$ d'un polygône P de sommets x_0, \dots, x_m est définie par :

$$\kappa(P) := \sum_{i=1}^m \widehat{(x_{i-1}x_i, x_ix_{i+1})}.$$

où $x_{m+1} := x_0$.

- La *courbure totale* $\kappa(\gamma)$ d'une courbe orientée γ est la borne supérieure des courbures totales de ses lignes brisées inscrites.
- La *courbure totale* $\kappa(\gamma)$ d'une courbe orientée fermée γ est la borne supérieure des courbures totales de ses polygônes inscrits.

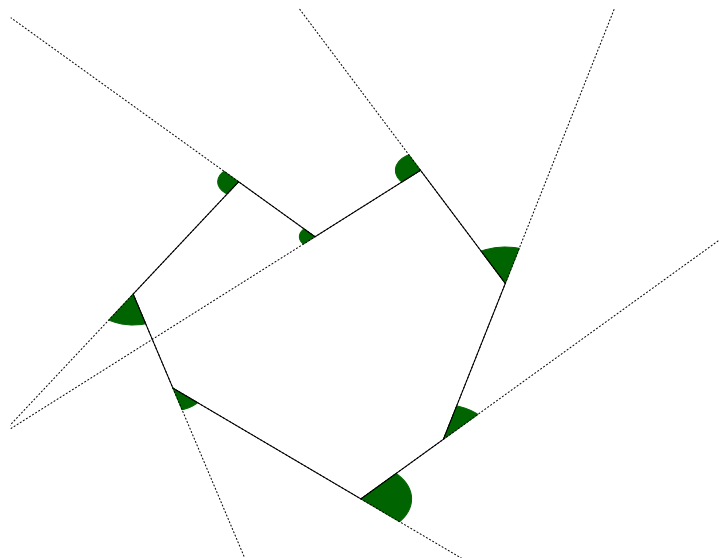


FIGURE 1 – La courbure totale du polygone est la somme de ses angles verts.

Proposition 2.12 (Théorème 5.1.2 [AR]). *Toute courbe de courbure totale finie est latéralement lisse.*

Proposition 2.13 (Théorème 5.4.1 [AR]). *Soit γ une courbe rectifiable paramétrée par la longueur d'arc. Si de plus γ est de courbure totale finie, alors pour tout $s \in [0, L(\gamma)]$, les dérivées*

à gauche $\gamma'_l(s)$ et à droite $\gamma'_r(s)$ existent et les fonctions dérivées à gauche et à droite sont à variation bornée.

Proposition 2.14 (Théorème de Fenchel, théorème 5.1.5 [AR]). *Pour toute courbe fermée γ $\kappa(\gamma) \geq 2\pi$. De plus $\kappa(\gamma) = 2\pi$ si et seulement si γ est le bord d'une partie convexe du plan.*

Proposition 2.15 (Théorème 5.2.2 [AR]). *La courbure totale d'une courbe latéralement lisse est égale à la longueur de la projection p_2 d'une de ses indicatrices des tangentes.*

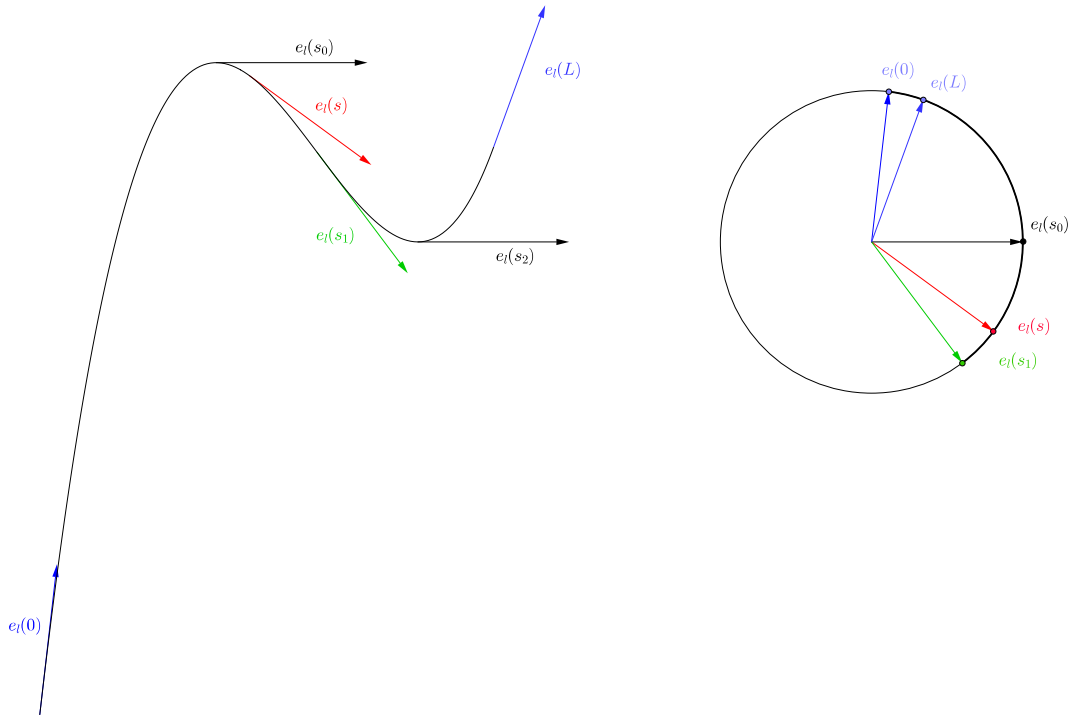


FIGURE 2 – La courbure totale de la courbe est la longueur de la courbe tracée par le vecteur tangent unitaire sur le cercle compté avec multiplicité. Ici le vecteur $e_l(s) = e_r(s)$ (en rouge) parcourt la courbe tracée sur le cercle en partant de $e_l(0)$ (en bleu) va jusqu'à $e_l(s_1)$ et retourne à $e_l(L)$ (en vert). La courbure totale est alors la somme des arcs $e_l(0)e_l(s_1)$ et $e_l(s_1)e_l(L)$.

La proposition suivante est une variante du théorème de comparaison de Schur (Théorème 5.1, Partie II, [BSSZ]) les arguments utilisés sont semblables à ceux du théorème 5.8.1 de [AR].

Proposition 2.16. *Soit γ et $\bar{\gamma}$ deux courbes latéralement lisses paramétrées par longueur d'arc de \mathbb{R}^2 telles que :*

- *γ et $\bar{\gamma}$ ont mêmes extrémités, plus précisément $\gamma(0) = \bar{\gamma}(0)$ et il existe s_1 et \bar{s}_1 tels que $\gamma(s_1) = \bar{\gamma}(\bar{s}_1)$;*
- *l'intérieur de $\bar{\gamma}|_{[0, s_1]}$ existe et est convexe ;*
- *$\bar{\gamma}$ est de courbure supérieure à γ , c'est-à-dire pour tout intervalle $I \subset [0, \bar{s}_1]$, $\kappa(\gamma|_I) \leq \kappa(\bar{\gamma}|_I)$*

Alors la longueur de $\bar{\gamma}$ est supérieure à la longueur de γ , plus précisément $\bar{s}_1 \geq s_1$.

Démonstration. Notons m le milieu du segment $[\bar{\gamma}(1), \bar{\gamma}(0)]$. Notons δ_1 et δ_2 les paramétrisations des segments $[m, \bar{\gamma}(0)]$ et $[\bar{\gamma}(1), m]$ par longueur d'arc. Notons $\xi := \delta_2 \square \bar{\gamma} \square \delta_1$. Soit τ une indicatrice des tangentes de ξ . Par la proposition 2.14, $L(p_2(\tau)) = 2\pi$. Il existe alors s' tel que $L(p_2(\tau|_{[0, s']})) = L(p_2(\tau|_{[s', L(\tau)]})) = \pi$. $p_2 \circ \tau(s')$ est alors orienté dans le même sens que $\bar{\gamma}(1) - \bar{\gamma}(0)$. Notons $\bar{\gamma}(\tilde{s}) := p_1 \circ \tau(s')$ et $T_0 := p_2 \circ \tau(s')$.

Donc pour tout point p de τ , $\widehat{(p, \tau(s'))} \leq \frac{1}{2}L(\tau) = \pi$. Pour tout $s \in [0, \bar{s}_1]$, $\widehat{(\bar{\gamma}'_l(s), T_0)} \leq \pi$, donc

$$\widehat{(\gamma'_l(s), \gamma'_l(\tilde{s}))} \leq \kappa(\gamma|_{[\tilde{s}, s]}) \leq \kappa(\bar{\gamma}|_{[\tilde{s}, s]}) \leq \widehat{(\bar{\gamma}'_l(s), T_0)} \leq \pi$$

Par décroissance de cosinus, pour tout $s \in [0, \bar{s}_1]$,

$$\langle \bar{\gamma}'_l(s), T_0 \rangle = \cos(\widehat{T_0, \bar{\gamma}'_l(s)}) \leq \cos(\widehat{\gamma'_l(\tilde{s}), \gamma'_l(s)}) = \langle \gamma'_l(s), \gamma'_l(\tilde{s}) \rangle. \quad (1)$$

De plus,

$$|\bar{\gamma}(s_1) - \bar{\gamma}(0)| = \langle \bar{\gamma}(s_1) - \bar{\gamma}(0), T_0 \rangle = \int_0^{\bar{s}_1} \langle \bar{\gamma}'_l(s), \bar{\gamma}'_l(\tilde{s}) \rangle ds,$$

or

$$|\bar{\gamma}(s_1) - \bar{\gamma}(0)| = |\gamma(s_1) - \gamma(0)| \geq \langle \gamma(s_1) - \gamma(0), \gamma'_l(\tilde{s}) \rangle = \int_0^{s_1} \langle \gamma'_l(s), \gamma'_l(\tilde{s}) \rangle ds,$$

donc

$$\int_0^{\bar{s}_1} \langle \bar{\gamma}'_l(s), T_0 \rangle ds \geq \int_0^{s_1} \langle \gamma'_l(s), \gamma'_l(\tilde{s}) \rangle ds,$$

et par l'inégalité 1, $\bar{s}_1 \geq s_1$. □

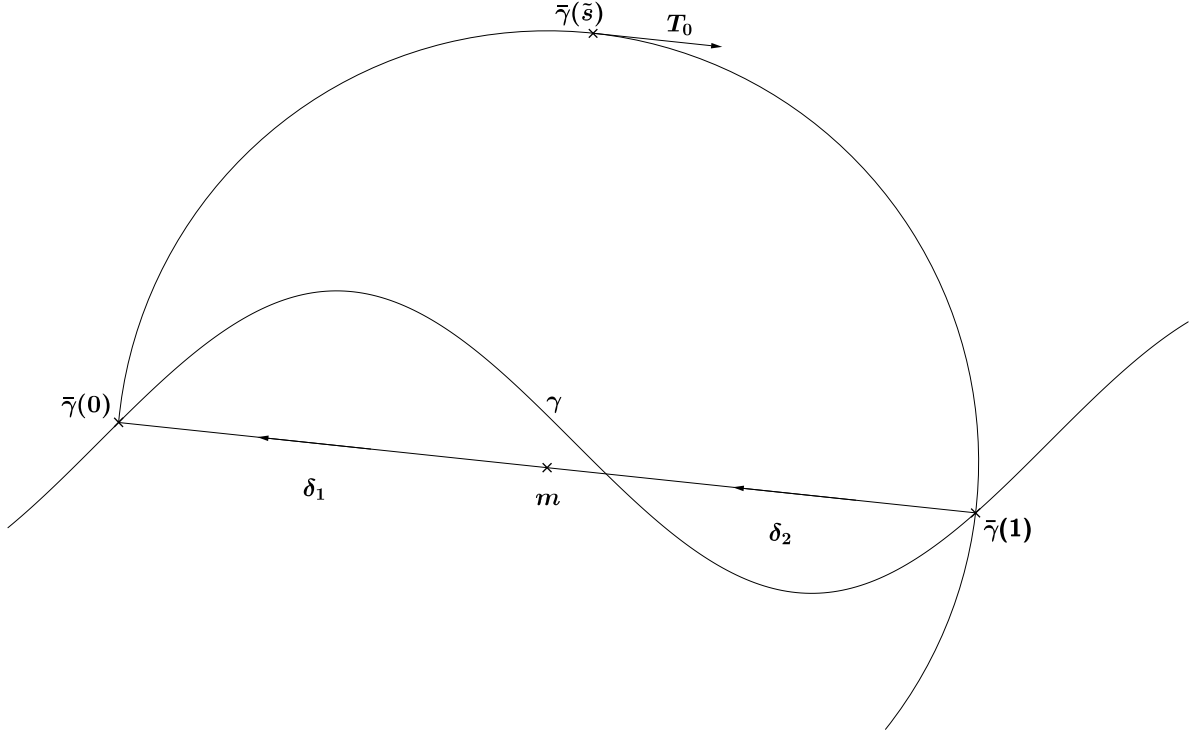


FIGURE 3

L'hypothèse sur les courbures de γ et $\bar{\gamma}$ de la proposition 2.16 est assez restrictive, elle implique que $\bar{\gamma}$ possède au moins autant de points angulaires que γ . En pratique cette proposition risque de n'être utilisable que pour des courbes C^1 . Dans le cas plus général des courbes à courbure totale finie, les propositions suivantes prennent le relais.

Proposition 2.17 (Théorème 5.8.1 [AR]). *Soit $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbf{R}^2$ une courbe telle que , alors*

$$L(\gamma) \leq \frac{|\gamma(1) - \gamma(0)|}{\cos\left(\frac{\kappa(\gamma)}{2}\right)}.$$

De plus, les deux termes de l'inégalité sont égaux si et seulement si γ est une ligne brisée composée de deux arrêtes de même longueur.

Corollaire 2.18 (Comparaison cordes et courbe). *Soit \mathcal{C} une courbe latéralement lisse telle que toute paramétrisation γ soit de courbure inférieure à celle d'un cercle de rayon $r > 0$, c'est-à-dire pour tout intervalle $I \subset [0, L(\gamma)]$, $\kappa(\gamma|_I) \leq \frac{|I|}{r}$. Soient a et b des points de \mathcal{C} , tels que $\|a - b\|_2 < 2r$. En notant $L(\gamma_{ab})$ la longueur d'arc entre a et b , arc inclus dans $\overset{\circ}{B}_{\|\cdot\|_2}(a, r)$,*

$$\|a - b\|_2 \leq L(\gamma_{ab}) \leq 2r \arcsin\left(\frac{\|a - b\|_2}{2r}\right).$$

Démonstration. La distance euclidienne entre a et b est plus faible que la longueur de γ_{ab} , $\|a - b\|_2 \leq L(\gamma_{ab})$. Notons $\phi := 2\arcsin\left(\frac{\|a - b\|_2}{2r}\right)$. Par la proposition , la longueur maximale de γ_{ab} est majorée par celle d'un arc de cercle de longueur $r\phi$.

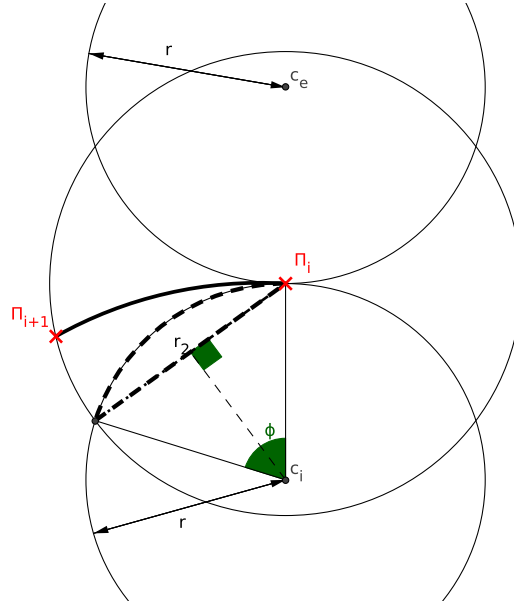


FIGURE 4 – Lemme 2.18 MODIFIER DESSIN

□

3 Courbe discrétisée

3.1 Discrétisation de Gauss

[LT]

Définition 3.1. — Le *voisinage 4-connexe* d'un point $a \in \mathbb{R}^2$ est l'ensemble noté

$$V_a := \{a + (0, 1), a + (1, 0), a + (-1, 0), a + (0, -1)\}.$$

— Le *voisinage 8-connexe* d'un point $a \in \mathbb{R}^2$ est l'ensemble noté

$$V_{a,8} := V_a \cup \{a + (1, 1), a + (-1, 1), a + (-1, -1), a + (1, -1)\}.$$

— A une résolution h fixée, un *pixel* centré en un point $a \in h \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mathbb{Z}^2 \right)$ est noté P_a et est défini par :

$$P_a := \bar{B}_{\|\cdot\|_\infty} \left(a, \frac{h}{2} \right).$$

— La *discrétisation de Gauss* d'un ensemble A pour le pas h $G_h(A)$ est définie par :

$$G_h(A) := \bigcup_{z \in A \cap h\mathbb{Z}^2} P_z.$$

Autrement dit $G_h(A)$ est la réunion de tous les carrés formés par le réseau $h\mathbb{Z}^2$ de côté de longueur h , dont le centre est dans A .

— La *discrétisation de Gauss d'une courbe de Jordan* $\partial_h(\mathcal{C})$ est la frontière de la discrétisation de Gauss de l'intérieur de \mathcal{C} .

— Notons de plus :

$$\text{Dig}_h(\mathcal{C}) := \partial_h(\mathcal{C}) \cap h \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mathbb{Z}^2 \right).$$

- Les éléments de $\text{Dig}_h(\mathcal{C})$ sont appelés les *sommets de la discrétisation* et un segment reliant deux sommets consécutifs est appelé une *arête de la discrétisation*.
- Un sommet d'un pixel P_z est dit *intérieur* s'il appartient à l'intérieur de \mathcal{C} , *extérieur* s'il appartient à l'extérieur de \mathcal{C} et *frontalier* s'il appartient à \mathcal{C} .

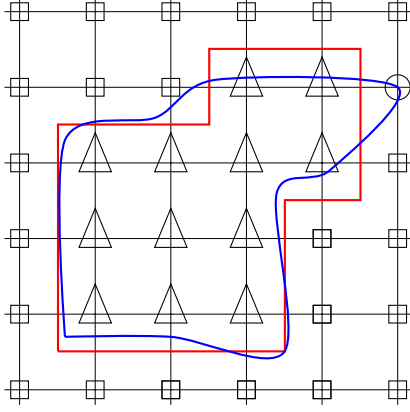


FIGURE 5 – Les intersections de la grille sont dans $h\mathbb{Z}^2$. En bleu, \mathcal{C} , en rouge $\partial_h(\mathcal{C})$, les triangles sont les points intérieurs, les cercles les points frontaliers, et les carrés les points extérieurs.

Remarque 3.2. $\partial_h(\mathcal{C})$ étant le bord de $G_h(A)$, où A est l'intérieur de \mathcal{C} , une arête de $\partial_h(\mathcal{C})$ traverse l'arête d'un pixel P_z si et seulement si cette arête possède un point intérieur et un point soit extérieur soit frontalier comme extrémités.

3.2 Association courbe discrète courbe continue

Proposition 3.3. Soit \mathcal{C} une courbe fermée simple et $h > 0$. Il existe alors une application $\xi : \text{Dig}_G(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ telle que

$$\forall z \in \text{Dig}_G(\mathcal{C}), \|\xi(z) - z\|_\infty \leq \frac{h}{2}$$

Démonstration. Si $z \in \text{Dig}_G(\mathcal{C})$ alors z appartient à une arête de $\partial_h(\mathcal{C})$, qui est elle-même frontière de deux carrés $\bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(p_i, \frac{h}{2})$ et $\bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(p_2, \frac{h}{2})$ tel que p_i soit un point intérieur et p_2 soit un point frontalier ou extérieur. Si p_2 est un point frontalier, alors p_2 est un point de \mathcal{C} à distance inférieure à $\frac{h}{2}$ de z en norme $\|\cdot\|_\infty$. Sinon p_2 est un point extérieur. L'intérieur et l'extérieur de \mathcal{C} étant deux composantes connexes distinctes, \mathcal{C} sépare le pixel P_z en deux composantes connexes, l'une contenant p_i , l'autre p_e . Donc $\overset{\circ}{P}_z \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. On peut alors définir une telle application ξ . \square

Une telle application ξ sera appelée *association*. Le but de cette sous-section est de montrer la propriété 3.11 de conservation de l'ordre défini sur $\partial_h(\mathcal{C})$ par une association. Si « localement », il se peut qu'une association ne conserve pas l'ordre d'une suite de points de $\text{Dig}_h(\mathcal{C})$, l'ordre sera « globalement » respecté. Cette propriété repose sur l'hypothèse que la courbe possède une certaine épaisseur 3.7. La démonstration de cette propriété repose essentiellement sur trois arguments basiques : la séparation de sommets de différentes nature dans des composantes connexes différentes de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ utilisé dans la preuve de la proposition 3.3, le lemme 3.4 et le corollaire 3.6.

Lemme 3.4. Soit $h > 0$. Soit C une courbe géométrique fermée admettant une paramétrisation par longueur d'arc γ telle que

- si la courbe γ sort d'un pixel P_z en $\gamma(s_0)$ et rentre de nouveau dans ce pixel en $\gamma(s_1)$, c'est-à-dire,

$$\exists z \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } \gamma(s_0), \gamma(s_1) \in \partial P_z \text{ et } \gamma([s_0, s_1]) \cap P_z = \emptyset$$

- $\gamma(s_0)$ et $\gamma(s_1)$ n'appartiennent pas à la même arête de P_z ,
- alors

$$\kappa(\gamma([s_0, s_1])) \geq \frac{\pi}{2}.$$

Plus précisément,

$$\kappa(\gamma([s_0, s_1])) \geq n_s \frac{\pi}{2}$$

où n_s est le nombre de sommets de P_z compris dans l'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$.

Démonstration. Quatre cas sont possibles, l'intérieur de l'arc $\gamma([s_0, s_1])$ contient soit un seul sommet p_1 de $\partial(P_z)$ ($\gamma(s_1)$ est sur une face adjacente à $\gamma(s_0)$), soit deux sommets p_1, p_2 ($\gamma(s_1)$ est sur une face opposée à $\gamma(s_0)$), soit trois sommets p_1, p_2, p_3 , ($\gamma(s_1)$ est sur une face adjacente à $\gamma(s_0)$), soit quatre sommets p_1, p_2, p_3, p_4 , ($\gamma(s_1)$ est sur la même face que $\gamma(s_0)$).

- Si l'intérieur contient un seul sommet p_1 (figure 6a), alors les droites $(\gamma(s_0), p_1)$ et $(\gamma(s_1), p_1)$ intersectent $\gamma([s_0, s_1])$ en deux points A et B tels que $A \leq_\gamma B$. Notons θ_1 l'angle formé entre $(\gamma(0), A)$ et (A, B) , θ_2 l'angle formé entre (A, B) et $(B, \gamma(1))$, ϕ_1 l'angle formé entre $(\gamma(0), A)$ et $(\gamma(0), B)$ et ϕ_2 l'angle formé entre $(\gamma(1), A)$ et $(\gamma(1), B)$. Comme la somme des angles d'un triangle fait π et que $(\gamma(0), B)$ et $(\gamma(1), A)$ forme un angle droit en p_1 ,

$$\phi_1 + \frac{\pi}{2} + \pi - \theta_1 + \frac{\pi}{2} + \pi - \theta_2 + \phi_2 + \frac{\pi}{2} = 3\pi,$$

donc

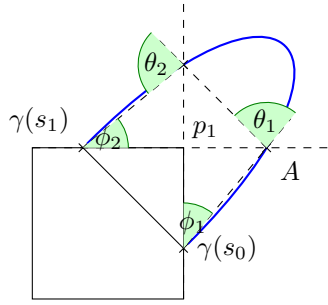
$$\theta_1 + \theta_2 = \phi_1 + \phi_2 + \frac{\pi}{2},$$

donc

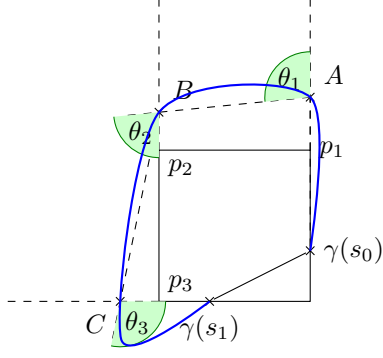
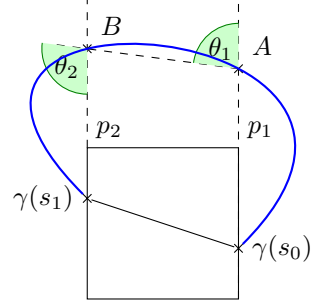
$$\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 + \theta_2 \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Par définition de la courbure totale, $\kappa(\gamma|_{[s_0, s_1]}) \geq \theta_1 + \theta_2 \geq \frac{\pi}{2}$.

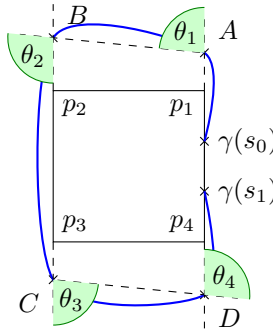
- Si l'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient deux sommets consécutifs p_1 et p_2 de P_z (figure 6b), alors les droites $(\gamma(s_0), p_1)$ et $(\gamma(s_1), p_2)$ intersectent $\gamma([s_0, s_1])$ en deux points A et B tels que $A \leq_\gamma B$. Notons θ_1 l'angle entre $(\gamma(0), A)$ et (A, B) , θ_2 l'angle entre (A, B) et $(B, \gamma(1))$. $\theta_1 + \theta_2 = \pi$. Par définition de la courbure totale, $\kappa(\gamma|_{[s_0, s_1]}) \geq \theta_1 + \theta_2 = \pi$.
- Si l'intérieur $\gamma([s_0, s_1])$ contient trois sommets consécutifs p_1, p_2, p_3 de P_z (figure 6c), avec p_1 sur la même arête que $\gamma(s_0)$ et p_3 sur celle de $\gamma(s_1)$ alors les droites $(\gamma(s_0), p_1)$, $(\gamma(s_1), p_2)$ et (p_3, p_2) intersectent $\gamma([s_0, s_1])$ en trois points A, B et C tels que $A \leq_\gamma B \leq_\gamma C$. Notons θ_1 l'angle entre $(p_1 A)$ et (AB) , θ_2 l'angle entre (AB) et (BC) et θ_3 l'angle entre (BC) et $(C p_3)$. Alors $\pi - \theta_1 - \theta_2$, $\pi - \theta_3$ et $\frac{\pi}{2}$ sont les trois angles du triangle $p_3 B C$. Donc $\pi - \theta_1 - \theta_2 + \pi - \theta_3 + \frac{\pi}{2} = \pi$. Par définition de la courbure totale, $\kappa(\gamma([s_0, s_1])) \geq \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{3\pi}{2}$.
- Si l'intérieur $\gamma([s_0, s_1])$ contient trois quatre sommets consécutifs p_1, p_2, p_3, p_4 de P_z (figure 6d), avec p_1 sur la même arête que $\gamma(s_0)$ et p_4 sur celle de $\gamma(s_1)$ alors les droites $(\gamma(s_0), p_1)$, $(\gamma(s_1), p_4)$ et (p_3, p_2) intersectent $\gamma([s_0, s_1])$ en quatre points A, B, C et D tels que $A \leq_\gamma B \leq_\gamma C \leq_\gamma D$. Notons θ_1 l'angle entre $(\gamma(s_0) A)$ et (AB) , θ_2 l'angle entre (AB) et (BC) , θ_3 l'angle entre (BC) et (CD) et θ_4 l'angle entre (CD) et $(D \gamma(s_1))$. $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ et $\theta_3 + \theta_4 = \pi$, donc $\kappa(\gamma([s_0, s_1])) \geq \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \geq 2\pi$



(a) L'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient un seul sommet. (b) L'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient deux sommets.

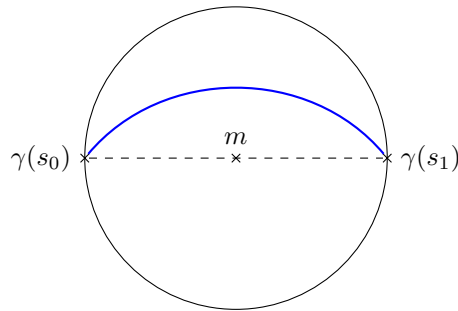


(c) L'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient trois sommets. (d) L'intérieur de $\gamma([s_0, s_1])$ contient quatre sommets.



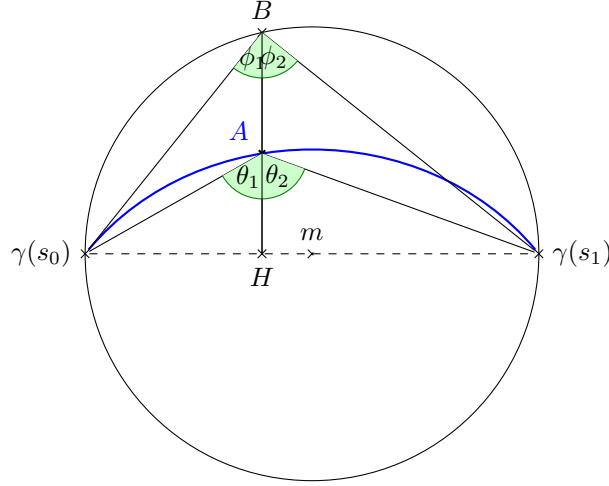
□

Lemme 3.5. Soient \mathcal{C} une courbe fermée simple de paramétrisation par longueur d'arc γ et $s_0, s_1 \in [0, L(\gamma)]$ tels que $s_0 < s_1$ et $\kappa(\gamma([s_0, s_1])) < \frac{\pi}{2}$, alors $\gamma([s_0, s_1]) \subset \overset{\circ}{B}_{\|\cdot\|_2}(c, \frac{l}{2})$ où c est le milieu de $[\gamma(s_0), \gamma(s_1)]$ et $l := \|\gamma(s_1) - \gamma(s_0)\|_2$.



Démonstration. Soit A un point de $\gamma([s_0, s_1])$. Comme $\kappa(\gamma([s_0, s_1])) < \frac{\pi}{2}$, l'angle géométrique $\bar{\theta} := (\gamma(s_0) - A, \gamma(s_1) - A) = \pi - \theta > \frac{\pi}{2}$. Notons H (respectivement B) l'intersection de $[\gamma(s_0), \gamma(s_1)]$ (respectivement du cercle de centre c et de rayon $\frac{l}{2}$) et de la perpendiculaire à $[\gamma(s_0), \gamma(s_1)]$ passant par A . Notons également $\bar{\theta}_1$ l'angle entre les droites $(A\gamma(s_0))$ et (AH) ,

$\tilde{\theta}_2$ l'angle entre les droites (AH) et $(A\gamma(s_1))$, ϕ_1 l'angle entre les droites $(B\gamma(s_0))$ et (BH) , ϕ_2 l'angle entre les droites (BH) et $(B\gamma(s_1))$. $\phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$. Donc $\theta_1 > \phi_1$ ou $\theta_2 > \phi_2$.
Donc $AH < \frac{\gamma(s_0)H}{\tan \phi_1} = BH$ ou $AH < \frac{\gamma(s_1)H}{\tan \phi_2} = BH$. Donc A est sur le segment $]BH[$, donc $A \in \overset{\circ}{B}_{||\cdot||_2}(c, \frac{h}{2})$.



□

Corollaire 3.6. Soit \mathcal{C} une courbe fermée simple de paramétrisation par longueur d'arc γ telle que $\gamma(s_0)$ et $\gamma(s_1)$ appartiennent à une même arête $[p_1, p_2]$ d'un pixel P_z telle que $\gamma([s_0, s_1]) \cap P_z = \emptyset$ et $\kappa(\gamma([s_0, s_1])) < \frac{\pi}{2}$, alors $\gamma([s_0, s_1]) \subset \overset{\circ}{B}_{||\cdot||_2}(c, \frac{h}{2})$ où c est le milieu de $[p_1, p_2]$.

Définition 3.7. L'épaisseur e d'une courbe fermée \mathcal{C} est la borne inférieure des réels positifs tels que pour toute paramétrisation γ de \mathcal{C} si $\kappa(\gamma([s_0, s_1])) \geq \frac{\pi}{2}$, alors $\|\gamma(s_1) - \gamma(s_0)\| \geq e$.

Remarque 3.8. Une courbe d'épaisseur non-nulle, ne peut pas avoir des points angulaires aigus.

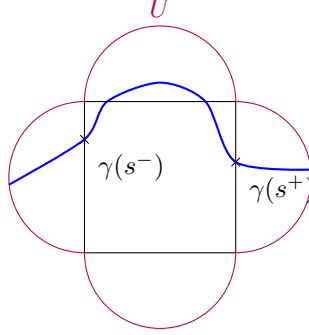
Lemme 3.9. Soit \mathcal{C} une courbe fermée simple d'épaisseur $e > 0$. Soient $\sqrt{2}h < e$, $N \in \mathbb{N}$, $a_i \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$. Soit γ une paramétrisation de \mathcal{C} par longueur d'arc telle que $\gamma(0) \notin P_{a_i}$. Notons

$$s^+ := \max \{s \in [0, L(\gamma)] | \gamma(s) \in P_{a_i}\},$$

$$s^- := \min \{s \in [0, L(\gamma)] | \gamma(s) \in P_{a_i}\}.$$

Autrement dit $\gamma(s^-)$ est le premier point de la courbe \mathcal{C} à être dans le pixel P_{a_i} et $\gamma(s^+)$ le dernier. Alors $\gamma([s^-, s^+]) \subset U$ où

$$U := P_{a_i} \cup \bigcup_{b \in \frac{1}{2}V_{a_i}} \overset{\circ}{B}_{||\cdot||_2}(b, \frac{h}{2})$$



Démonstration. Comme le diamètre de P_{a_i} est $\sqrt{2}h$, par l'hypothèse $e > \sqrt{2}h$, $\kappa(\gamma([s^-, s^+])) < \frac{\pi}{2}$. Si la courbe $\gamma([s, s^+])$ sort de $\mathring{B}_{\|\cdot\|_\infty}(a_i, \frac{h}{2})$, elle intersecte ∂P_{a_i} en un point $\gamma(s_0)$. Par le lemme 3.4 elle rentre alors de nouveau dans P_{a_i} en passant par une arête fermée d sur laquelle est $\gamma(s_0)$. Si la courbe $\gamma([s, s^+])$ sort puis rentre de nouveau par une certaine arête de P_{a_i} , alors, par le lemme 3.6 la courbe $\gamma([s^-, s^+])$ ne peut sortir de U . \square

Lemme 3.10. Soient \mathcal{C} une courbe fermée simple d'épaisseur e et h tels que $0 < \sqrt{2}h < e$ et $\partial_h(\mathcal{C})$ soit simple fermée. , $N \in \mathbb{N}$, $a_i \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$. Soit γ une paramétrisation de \mathcal{C} par longueur d'arc telle que $\gamma(0) \notin P_{a_i}$. Notons

$$s^+ := \max \{s \in [0, L(\gamma)] \mid \gamma(s) \in P_{a_i}\},$$

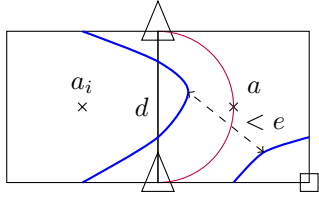
$$s^- := \min \{s \in [0, L(\gamma)] \mid \gamma(s) \in P_{a_i}\}.$$

Soit ξ une association. S'il existe j tel que $\xi(a_j) \in \gamma([s^-, s^+])$, alors $j \in [i-2, i+2]$.

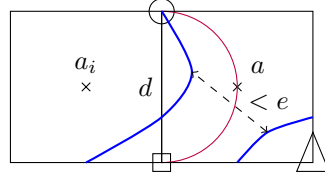
Démonstration. Soit j tel que $\xi(a_j) \in \gamma([s^-, s^+])$. Par définition d'une association, les points de $\gamma([s^-, s^+])$ qui sont dans l'image de $\xi(\text{Dig}_h(\mathcal{C}) \setminus \{a_i\})$ sont en dehors de \mathring{P}_{a_i} . Par le lemme 3.9, les seuls points $a \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$ tels que $\xi(a) \in \gamma([s^-, s^+])$ sont les voisins 8-connexes de a_i . Il « suffit » alors de montrer que si un voisin 8-connexe a de a_i est tel que $\xi(a) \in \gamma([s^-, s^+])$, alors $a \in \{a_{i-2}, a_{i-1}, a_{i+1}, a_{i+2}\}$. De plus, par le lemme 3.9 et l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$ si $\gamma([s^-, s^+])$ sort de P_{a_i} par une certaine arête et si elle rentre de nouveau, alors elle rentre par la même arête. Plus précisément, s'il existe $s_0, s_1 \in [s^-, s^+]$ (éventuellement $s_0 = s_1$) tels que $\gamma(s_0), \gamma(s_1) \in \partial P_{a_i}$ et $\gamma([s_0, s_1]) \notin \mathring{P}_{a_i}$. Soit $a \in V_{a_i, 8}$ tel que $\xi(a) \in \gamma([s^-, s^+])$, seuls deux cas sont alors possibles : dans le premier cas a est adjacent à a_i pour la 4-connexité, dans le second cas a n'est pas adjacent à a_i pour la 4-connexité.

- Dans le premier cas, montrons que a et a_i sont deux points consécutifs de $\partial_h(\mathcal{C})$. Supposons par l'absurde que a et a_i ne sont pas connectés par une arête de $\partial_h(\mathcal{C})$. P_{a_i} et P_a possède une arête un commun d . Seuls trois sous-cas sont possibles : dans le premier sous-cas, les extrémités de d sont toutes les deux des points intérieurs ou toutes les deux des points extérieurs ; dans le deuxième sous-cas, une extrémité de d est un point frontalier et l'autre sommet un point extérieur ; dans troisième sous-cas : les deux extrémités de d sont des points frontaliers.
- Dans le premier sous-cas (figure 7a), par le lemme 3.6, la courbe $\gamma([s, s^+])$ ne permet pas d'isoler les sommets de P_a en deux composantes connexes distinctes de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$. De plus, la courbe \mathcal{C} ne peut passer dans P_a en dehors de $\gamma([s^-, s^+])$. En effet par la contraposée du lemme 3.4, cela contredirait l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$. Donc il n'y a pas

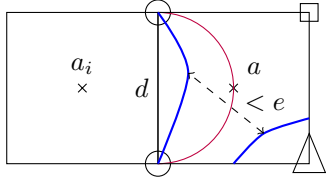
- de sommets frontaliers dans P_a ni de sommets extérieurs si les extrémités de d sont des sommets intérieurs et intérieurs si les extrémités de d sont des sommets extérieurs. Donc $a \notin \text{Dig}_h(\mathcal{C})$. Contradiction!
- Dans le deuxième sous-cas (figure 7b), $a \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$ si et seulement si P_a possède un point intérieur comme sommet. Si tel était le cas, alors par le lemme 3.6, $\gamma([s^-, s^+])$ ne permettrait pas d'isoler le point extérieur et le point intérieur sans enfreindre la contrainte $\sqrt{2}h < e$. Donc $a \notin \text{Dig}_h(\mathcal{C})$.
 - Dans le troisième sous-cas, $a \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$ si et seulement si P_a possède un point intérieur comme sommet. Si tel était le cas, alors le dernier sommet de P_a serait aussi un point intérieur, sinon la courbe devrait passer par une autre arête de P_a que d soit en passant par l'extérieur de P_a , ce qui est impossible par le lemme 3.4 (figure 7c) soit en passant par l'intérieur de P_a ce qui est impossible par le lemme 3.6. P_a posséderait donc deux sommets frontaliers (ce sont les extrémités de d) et deux sommets intérieurs. De plus $a_i \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$, donc P_{a_i} possède au moins un point intérieur. Dans $P_a \cup P_{a_i}$, il y a donc un segment \tilde{d} de longueur $2h$ perpendiculaire à d ayant pour extrémités des points intérieurs et pour milieu un point frontalier. La courbe \mathcal{C} ne doit pas isoler les deux extrémités de d . Elle doit alors soit repasser par \tilde{d} soit ne pas repasser par \tilde{d} , auquel cas, elle ne traverse pas \tilde{d} mais lui est juste tangente. Si \mathcal{C} repasse par \tilde{d} (figure 7d), alors par le lemme 3.6 et l'hypothèse $\sqrt{2}h$, \mathcal{C} ne peut atteindre la seconde extrémité de d qui est un point frontalier. Absurde! Si \mathcal{C} ne repasse pas par \tilde{d} (figure 7e), par le lemme 3.4 et l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$, \mathcal{C} ne peut pas atteindre la seconde extrémité de d qui est un point frontalier. Absurde! Donc $a \notin \text{Dig}_h(\mathcal{C})$.
 - Dans le second cas, montrons qu'il existe $b \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$, voisin 4-connexe de a_i et a tel que P_b possède $\xi(a)$ comme sommet ainsi que deux sommets intérieurs diagonalement opposés. Comme $a, a_i \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$, il est nécessaire que P_a et P_{a_i} aient chacun un point intérieur comme sommet. De plus, si aucun des sommets de P_a adjacent à $\xi(a)$ n'était intérieur, alors le sommet opposé à $\xi(a)$ serait intérieur, et la courbe \mathcal{C} couperait les arêtes de P_a ayant pour extrémité le sommet intérieur, par le lemme 3.5 et l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$, $\xi(a)$ ne pourrait pas être un point frontalier. Absurde! Donc il existe un sommet intérieur adjacent à $\xi(a)$ de P_a noté p_1 et par le même raisonnement de P_{a_i} noté p_2 . Si $p_1, \xi(a), p_2$ ne sont pas alignés, il existe alors P_b possédant $\xi(a)$ comme sommet ainsi que les sommets p_1 et p_2 qui sont diagonalement opposés, donc $b \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$. Si au contraire $p_1, \xi(a)$ et p_2 sont alignés, montrons qu'il existe un point intérieur adjacent à $\xi(a)$. Par l'absurde supposons que les deux autres sommets adjacents à $\xi(a)$ ne sont pas des points intérieurs. D'une part, p_1 et p_2 étant dans la même composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$, $\gamma([s^-, s^+])$ est tangente au segment $[p_1, p_2]$ au point $\xi(a)$ ou elle repasse par un point y de $[p_1, p_2]$. Si $\gamma([s^-, s^+])$ est tangente au segment $[p_1, p_2]$ sans repasser par $[p_1, p_2]$, alors par le lemme 3.4 et l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$, $\gamma([s^-, s^+])$ ne peut pas repasser soit par P_a soit par P_{a_i} (figure 8c). Si au contraire $\gamma([s^-, s^+])$ repasse par $[p_1, p_2]$ en un point y , alors par l'hypothèse $\sqrt{2}h < e$, la courbure totale d'un arc entre $\xi(a)$ et y est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, donc par le lemme 3.6 et 3.4, \mathcal{C} ne peut pas repasser soit par ∂P_a soit par ∂P_{a_i} soit par ∂P_b en dehors de $[p_1, p_2]$ où P_b est un pixel adjacent à P_a et P_{a_i} . D'autre part, il existe sur une arête de P_a n'ayant pas $\xi(a)$ pour extrémité, un point x de la courbe \mathcal{C} en effet, il existe un sommet frontalier ou une arête possédant un sommet intérieur et un sommet extérieur pour extrémités. Idem pour P_{a_i} et P_b . Contradiction! Donc il existe P_b possédant $\xi(a)$ comme sommet ainsi que deux sommets intérieurs diagonalement, opposés donc $b \in \text{Dig}_h(\mathcal{C})$. Donc a, b et a_i sont des points consécutifs de $\partial_h(\mathcal{C})$. Donc $a = a_{i-2}$ ou $a = a_{i+2}$.



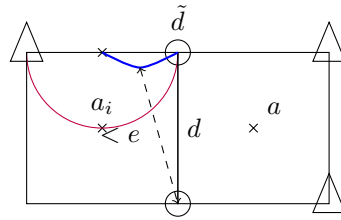
(a)



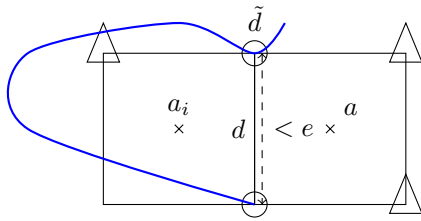
(b)



(c)

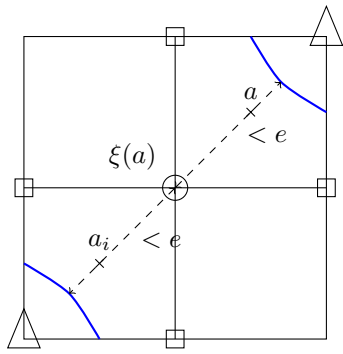


(d)

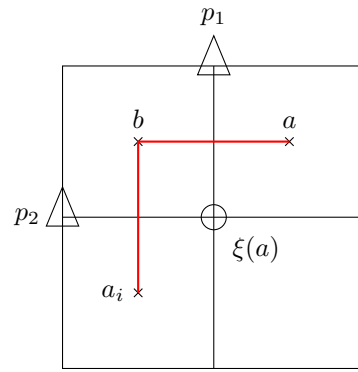


(e)

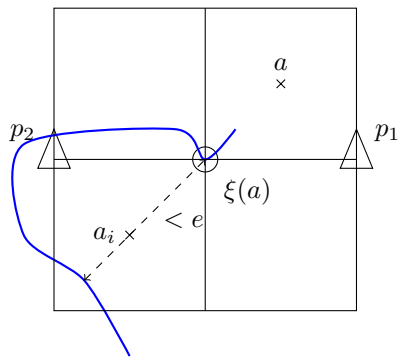
FIGURE 7



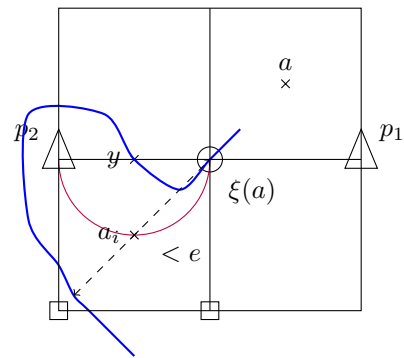
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 8

□

Proposition 3.11. *Soient \mathcal{C} une courbe fermée simple d'épaisseur e et $h < e$ tels que $\partial_h(\mathcal{C})$ soit fermée simple. $N \in \mathbb{N}$, $(a_i)_{i \in [1, N]}$ une suite de points de $\text{Dig}_h(\mathcal{C})$ croissante pour une certaine paramétrisation de $\partial_h(\mathcal{C})$ telle que pour tout (i, j) la longueur d'un arc de $\partial_h(\mathcal{C})$ reliant a_i et a_j est supérieure à $2h$, il existe alors une paramétrisation de \mathcal{C} pour laquelle la suite $(\xi(a_i))$ est croissante.*

Démonstration. Pour trois points sur une courbe fermée simple, il existe toujours une certaine paramétrisation de cette courbe pour laquelle ces trois points sont ordonnés dans l'ordre souhaité. Notons $(a_{i,k})$ la suite croissante des sommets de $\text{Dig}_h(\mathcal{C})$ entre a_i et a_{i+1} avec $a_{i,1} := a_i$ et $a_{i,K} := a_{i+1}$. Par le lemme 3.9, il existe un arc \mathcal{C}_i de \mathcal{C} d'extrémités $\xi(a_i)$ et $\xi(a_{i+1})$ inclus entièrement dans la réunion des $U_{a_{i,k}}$, $k \in [1, K]$ où

$$U_{a_{i,k}} := \bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(a_{i,k}, \frac{h}{2}) \cup \bigcup_{b \in \frac{1}{2}V_{a_{i,k}}} \mathring{B}_{\|\cdot\|_2}(b, \frac{h}{2}).$$

Donc \mathcal{C}_i peut être recouverte par les $\gamma([s_k^-, s_k^+])$ où

$$s_k^+ := \max \{s \in [0, L(\gamma)] | \gamma(s) \in P_{a_{i,k}}\},$$

$$s_k^- := \min \{s \in [0, L(\gamma)] | \gamma(s) \in P_{a_{i,k}}\}.$$

Donc par le lemme 3.10, il n'existe pas terme a_j de la suite (a_i) tel que $\xi(a_j) \in \mathcal{C}_i$. Donc il existe une paramétrisation γ de \mathcal{C} telle que la suite $(\xi(a_i))_{i \in [1, N]}$ soit croissante. \square

4 Convergence des estimateurs semi-locaux dans l'espace 2D

Lemme 4.1 (Comparaison courbe discrétisée et cordes). *Soit \mathcal{C} une courbe fermée simple. Soient $h > 0$, $\xi : \text{Dig}_h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ une association. Soient a_i et a_j deux points de $\text{Dig}_h(\mathcal{C})$,*

$$||a_i - a_j||_2 - ||\xi(a_i) - \xi(a_j)||_2 \leq \sqrt{2}h.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} ||\xi(a_i) - \xi(a_j)||_2 &\leq ||\xi(a_i) - a_j||_2 + ||a_i - a_j||_2 + ||\xi(a_i) - a_j||_2, \\ &\leq ||a_i - a_j||_2 + \sqrt{2}h. \end{aligned}$$

De même :

$$||a_i - a_j||_2 \leq ||\xi(a_i) - \xi(a_j)||_2 + \sqrt{2}h.$$

\square

Proposition 4.2. *Soit \mathcal{C} une courbe C^1 d'épaisseur $e > 0$ telle que pour toute paramétrisation γ et s'il existe k tel que pour tout intervalle $I \subset [0, L(\gamma)]$, $\kappa(\gamma|_I) \leq k|I|$. Soit \mathcal{A} une fonction de motifs telle que*

- $hM_{+\infty}(\mathcal{A}(\partial_h(\mathcal{C}), h)) < \frac{2}{k} - \sqrt{2}h$,
- en notant $(a_i^h)_{i=0}^{N_h} := h\mathcal{A}(\partial_h(\mathcal{C}), h)$, $\forall (i, j) \in [0, N_h]$, $i \neq j$, a_j^h et a_i^h ne sont pas connectés par un arc de $\partial_h(\mathcal{C})$ de longueur inférieure ou égale à $2h$.

Alors :

$$\left| L(\mathcal{C}) - \sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_k(\|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}h) + \sqrt{2}hN_h.$$

où

$$\psi_k(x) := \frac{2}{k} \arcsin\left(\frac{kx}{2}\right) - x.$$

De plus :

$$\sum_{i=0}^{N_h} \psi_k(\|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}h) = O_{h \rightarrow 0} \left(h^3 N_h \left(M_3(\mathcal{A}(\partial_h(\mathcal{C}), h)) + \sqrt{2} \right)^3 \right).$$

Démonstration. Soit $\xi : \text{Dig}_h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ une association. Par le lemme 2.18 et la proposition 3.11,

$$\begin{aligned} \left| L(\mathcal{C}) - \sum_{i=0}^{N_h} \|\xi(a_i^h) - \xi(a_{i+1}^h)\|_2 \right| &\leq \sum_{i=0}^{N_h} \left(\frac{2}{k} \arcsin\left(\frac{k\|\xi(a_{i+1}^h) - \xi(a_i^h)\|_2}{2}\right) - \|\xi(a_{i+1}^h) - \xi(a_i^h)\|_2 \right), \\ \left| L(\mathcal{C}) - \sum_{i=0}^{N_h} \|\xi(a_{i+1}^h) - \xi(a_i^h)\|_2 \right| &\leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_k(\|\xi(a_{i+1}^h) - \xi(a_i^h)\|_2) \end{aligned}$$

Donc par le lemme 4.1,

$$\left| L(\mathcal{C}) - \sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h} \psi_k(\|\xi(a_{i+1}^h) - \xi(a_i^h)\|_2) + \sqrt{2}hN_h.$$

De plus par développement limité de l'arcsinus :

$$\psi_k(h\|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}h) = O_{h \rightarrow 0}((h\|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}h)^3)$$

et par l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=0}^{N_h} \psi_k(\|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}h) \right)^{1/3} \leq hN_h^{1/3} M_3(\mathcal{A}(\partial_h(\mathcal{C}), h)) + h\sqrt{2}N_h^{1/3}$$

donc

$$\sum_{i=0}^{N_h} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\|_2 + \sqrt{2}h) = O_{h \rightarrow 0} \left(h^3 N_h \left(M_3(\mathcal{A}(\partial_h(\mathcal{C}), h)) + \sqrt{2} \right)^3 \right).$$

□

Références

- [AR] ALEXANDROV et RESHETNYAK : *General Theory of Irregular Curves*.
- [BSSZ] BOBENKO, SCHRÖDER, SULLIVAN et ZIEGLER : *Discrete Differential Geometry*.
- [LT] Jacques-Olivier LACHAUD et Boris THIBERT : Properties of gauss digitized shapes and digital surfaces integration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*.