Probabilidad y Estadística

M. en C. Eduardo Tirado Bueno

última actualización: 29 de agosto de 2024

Información General

Períodos de Evaluación

- 23 de septiembre al 27 de septiembre.
- 04 de noviembre al 08 de noviembre.
- 09 de diciembre al 13 de diciembre.

Lecturas Achieve

- 08 de septiembre al 14 de septiembre
- 06 de octubre al 12 de octubre
- 17 de noviembre al 23 de noviembre

Criterios de Evaluación

- $60\,\%$ Promedio de Exámenes
- $20\,\%$ Tareas
- $10\,\%$ Lectura Achieve
- $10\,\%$ Libreta y Apuntes

Reglas y Acuerdos

- Asistencia, mínimo el $80\,\%$. (3 Faltas por período = SIN DERECHO A EXAMEN).
- Puntualidad
  - Asistencia al iniciar la clase, e.g. (7:00 am).
  - Falta posterior a los 5 minutos de tolerancia, e.g. (después de 7:05 am en adelante).

Información General

Contenido del Curso

- **I.** Teoría de Conjuntos
- **II.** Introducción a la Probabilidad
- **III.** Cálculo Combinatorio
- **IV.** Probabilidad Simple y Compuesta
- **V.** Estadística
- **VI.** Distribuciones de Probabilidad

Bibliografía

- **Probabilidad y Estadística**, Oteyza, Elena, et.al. (2015), 1era Edición, Editorial Pearson, México.
- **Probabilidad y Estadística**, Sánchez, Octavio (2021), 4ta Edición, Editorial Mc Graw Hill, México.

Contenido

Teoría de Conjuntos

Introducción a la Probabilidad

Cálculo Combinatorio

Probabilidad Simple y Compuesta

Estadística

Distribuciones de Probabilidad

I. Teoría de Conjuntos

Teoría de Conjuntos

Definición:

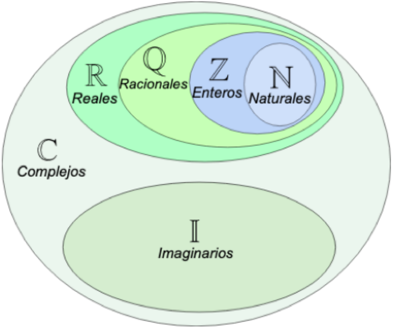
El término *conjunto* se refiere a una colección de objetos, llamados sus elementos, que comparten una característica en común. Los conjuntos deben ser escritos de manera que, dado un objeto, sea posible decidir si éste es o **NO** un elemento del conjunto.

- Si x es un elemento de un conjunto $A \Rightarrow x \in A$.
- Si x **NO** es un elemento de un conjunto $A \Rightarrow x \notin A$

Ejemplo: Encontrar todos los divisores positivos de 28

Solución: Recuérdese que un divisor positivo de un número es un número natural que divide a dicho número. Los divisores de 28 son: 1, 2, 4, 7, 14 y 28. Es decir, el conjunto de los divisores es: $\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$

Conjuntos de Números



- **Números naturales**, son los números de contar empezando por 1

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

- **Números enteros**, los números de contar, sus negativos y cero.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- **Números racionales**, los números que se pueden formar dividiendo un entero por otro (pero no dividiendo por cero).

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q},\ \text{donde}\ p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

- **Números irracionales**, cualquier número que no sea un número racional.

$$\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, e, \pi, \dots\}$$

Escritura y representación de conjuntos

Los conjuntos se representan de dos formas:

1. **Forma Descriptiva o por comprensión.**
   Se hace mención a la característica principal de los elementos del conjunto.
2. **Forma Enumerativa o por extensión.**
   Se enlistan los elementos del conjunto, si algún elemento se repite se considera una sola vez.

Ejemplo:

1. Representa en forma descriptiva el conjunto $Q = \{2, 3, 5, 7, 11\}$
   Solución: $Q = \{q \in \mathbb{N} \mid q \text{ es primo menor que } 12\}$
2. Representa en forma enumerativa el conjunto $M = \{m \in \mathbb{N} \mid m < 5\}$
   Solución: $M = \{1, 2, 3, 4\}$

Cardinalidad

Definición:

Si n es un entero no negativo cualquiera y un conjunto A tiene n elementos, entonces decimos que la *cardinalidad* de A es n. En este caso también se dice que A es un conjunto *finito*.

- El símbolo que representa la cardinalidad de un conjunto A es $n(A)$.

Ejemplo: Encuentra la cardinalidad del conjunto que consta de los números enteros mayores que -2 y menores que 11

Solución: El conjunto es: $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Por lo tanto, la cardinalidad del conjunto es 12.

Conjunto Infinito.

Es aquel cuya cardinalidad no está definida, por ser demasiado grande para cuantificarlo. Es decir, el conjunto continua indefinidamente y no se puede determinar su número de elementos, por tanto, su cardinalidad es infinita.

$$n(C) = \infty$$

Conjunto vacío

Definición:

Un *conjunto vacío* es aquel que **NO** posee elementos y se representa con el símbolo $\emptyset$.

Ejemplo: ¿Qué elementos pertenecen a $C = \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 = 0 \text{ y } z \neq 0\}$?

Solución: No hay ningún entero z que satisfaga las dos condiciones dadas. Por consiguiente C no tiene elementos.

Ejemplo: ¿El conjunto $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 = 0\}$ es vacío?

Solución: El único valor de x que satisface la igualdad es $\frac{1}{2}$ pero **NO** pertenece al conjunto de los números naturales, por lo tanto, el conjunto D es vacío.

$$D = \{\ \} = \emptyset$$

Conjuntos equivalentes e igualdad de conjuntos

Conjuntos Equivalentes

Sean A y B conjuntos no vacíos, se dice que A es equivalente a B si y sólo si tiene la misma cardinalidad; se denota: $A \cong B$ y se lee A es equivalente a B.

Ejemplo: Si $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \textbf{ es divisor de 6}\}$ y $B = \{a, e, i, o\}$ comprueba que A es equivalente a B

Solución: Las cardinalidades son: $n(A) = 4$ y $n(B) = 4$, por tanto, se concluye que ambos conjuntos son equivalentes, $A \cong B$

Igualdad de Conjuntos

- Dos conjuntos A y B son *iguales* si tienen los mismos elementos y tienen la misma cardinalidad, se escribe $A = B$.
- Si los conjuntos no tienen elementos en común reciben el nombre de **conjuntos disjuntos**.

Subconjuntos

Definición:

Para dos conjuntos A y B, se escribe $A \subset B$ si todo elemento del conjunto A es elemento del conjunto B, en tal caso, A es subconjunto de B.

Para cualquier conjunto A se cumplen las siguientes condiciones:

- $A \subset A$.
- Covenimos que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto A, es decir, $\emptyset \subset A$ para cualquier conjunto A.

Ejemplo: $A = \left\{-3, 4.5, 15, \frac{7}{8}\right\}$ **y** $B = \{-3, 15, 4.5\}$**. Probar que** $B \subset A$

Solución: Los elementos de B son: -3, 15 y 4.5, y todos ellos son también elementos de A. Por tanto, $B \subset A$.

Subconjunto propio y número de subconjuntos

Subconjunto Propio

Por último, si $A \subset B$ y $A \neq B$, decimos que A es un **subconjunto propio** de B y denotamos este hecho escribiendo $A \subseteq B$.

- La expresión $A \subseteq B$ significa que $A \subset B$ y $A \neq B$, es decir, $A \subset B$ y $B \not\subset A$.

Ejemplo: Sean los conjuntos $L = \{2, 4, 5, 6, 8\}$ y $M = \{2, 4, 6\}$ verifica que $M \subseteq L$.

Solución: Los elementos de $M \subset L$ y $M \not\subset L$, por tanto, M es un subconjunto propio de L.

Número de subconjuntos de un conjunto

El número de subconjuntos está dado por la fórmula:

$$N_S = 2^n$$

donde n corresponde a la cardinalidad del conjunto

Conjunto potencia

Ejemplo: Determina el número de subconjuntos del conjunto $R = \{a, b, c, d\}$

Solución: La cardinalidad del conjunto es 4, entonces al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\text{Número de Subconjuntos} = N_S = 2^4 = 16$$

Esto es, el conjunto R admite 16 subconjuntos.

Conjunto Potencia

Se le llama así al conjunto que forman todos los subconjuntos de un conjunto.

Ejemplo: Encuentra el conjunto potencia de $T = \{2, 4, 6\}$

Solución: El número de subconjuntos de T es: $N_S = 2^3 = 8$. El conjunto potencia está formado por 8 subconjuntos de cero, uno, dos y tres elementos, los cuales son:

$$\big\{\{\}, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}\big\}$$

Conjunto universal y diagramas de Venn

Conjunto Universo

Sean $A, B, C, \ldots$, subconjuntos de un conjunto U, a este último se le llama *conjunto universo* de los conjuntos dados.

Ejemplo: Sea $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y los conjuntos A, B y C tales que:

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \quad B = \{1, 2, 3, 4\} \quad C = \{1, 2, 6, 7\}$$

Solución: Como $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $C \subseteq U$, siendo U el conjunto universo.

Diagramas de Venn

Son recursos o representaciones gráficas de los conjuntos que permiten visualizar algunas relaciones entre éstos. Estos diagramas consisten en discos cuya finalidad es representar conjuntos, todos ellos incluidos en una región rectángular que expresa al **conjunto universal**.

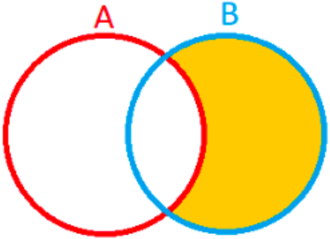
Operaciones con conjuntos

Complemento

En general, podemos considerar los elementos que pertenecen a un conjunto B y no pertencen a un conjunto A, en tal caso escribimos:

$$B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\}$$

y decimos que $B \setminus A$ es el *complemento* del conjunto A con respecto al conjunto B. Otro nombre con el que se denomina a $B \setminus A$ es la *diferencia* de B menos A.



Complemento

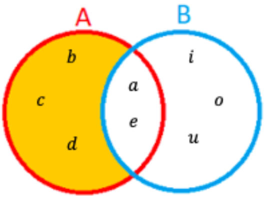
Ejemplo: Si $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$, hallar $A \setminus B$ y su diagrama de Venn asociado.

Solución: El conjunto solución contiene a los elementos que pertenecen a A y que **NO** pertenecen al conjunto B, entonces:

$$A \setminus B = \{a, b, c, d, e\} \setminus \{a, e, i, o, u\}$$

Por tanto, el conjunto es:

$$A \setminus B = \{b, c, d\}$$



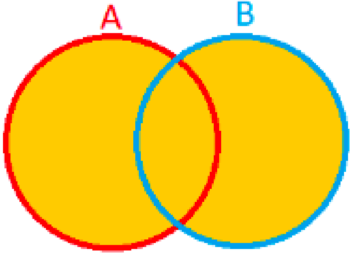
Operaciones con conjuntos

Unión

La *unión de los conjuntos* A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen por lo menos a uno de esos dos conjuntos. Este nuevo conjunto se denota por:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

$A \cup B$ se lee como A **unión** B.



Propiedades de la Unión

- Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$.
- Si $A = B$, entonces $A \cup B = A = B$.
- Si $x \in A \cup B$, entonces x pertenece a A, x pertenece a B o x pertenece a ambos.
- Así, para obtener $A \cup B$ basta con agregar a los elementos del conjunto A aquellos de B que no están en A. Es decir,

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$$

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{3, 5, 6, 8, 10\}$ y $B = \{2, 6, 8, 10, 12\}$, halla $A \cup B$.

Solución: El conjunto solución de la unión de los conjuntos A y B son todos los elementos de ambos conjuntos, **los elementos que se repiten sólo se escriben una vez.**

$$A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 8, 10, 12\}$$

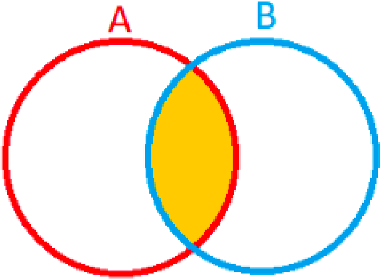
Operaciones con conjuntos

Intersección

La *intersección de los conjuntos* A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen tanto al conjunto A, como al conjunto B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

$A \cap B$ se lee como A **intersección** B.



Propiedades de la Intersección

- $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$.
- Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$.
- Si $A = B$, entonces $A \cap B = A = B$.
- Cuando no hay elementos que pertenezcan a ambos conjuntos A y B, se dice que la intersección es vacía o que el resultado es el *conjunto vacío*, el cual denotamos por $\emptyset$. En este caso llamamos a los conjuntos *ajenos*, *disjuntos* o *mutuamente excluyentes*.

Ejemplo: Si A es el conjunto formado por los primeros ocho naturales que son cuadrados y B es el formado por los primeros cinco que son cubos, encuentra $A \cap B$.

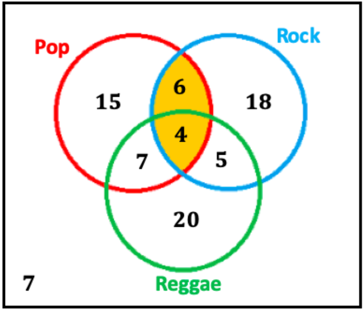
Solución: Tenemos que $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64\}$ y $B = \{1, 8, 27, 64, 125\}$. Por consiguiente,

$$A \cap B = \{1, 64\}$$

Aplicación de las operaciones con conjuntos

Ejemplo: Se realizó una encuesta a 82 alumnos sobre el tipo de música que más les agrada; los resultados fueron los siguientes: a 32 de ellos les gusta el pop, a 33 les agrada el rock, a 36, el reggae, a 10 les gusta el pop y el rock, a 11 el pop y el reggae, a 9 les agrada el rock y el reggae, a 4 les gustan los 3 estilos y únicamente a 7 otros tipos de música.

- ¿Cuántos estudiantes sólo prefieren rock?
- ¿A cuántos alumnos sólo les agrada el reggae?
- ¿Cuántos estudiantes prefieren únicamente pop y reggae?
- ¿Cuántos alumnos prefieren solamente rock y reggae?



Propiedades de las Operaciones entre Conjuntos

Propiedad Asociativa

La intersección y la unión satisfacen las siguientes dos propiedades asociativas de conjuntos:

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Propiedad Distributiva

La intersección y la unión satisfacen las siguientes dos propiedades distributivas de conjuntos:

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Leyes de Morgan

Las siguientes dos igualdades, válidas para dos conjuntos A y B cualesquiera:

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

donde el complemento se toma con respecto a un mismo conjunto, digamos X. Es decir, el complemento de una unión es la intersección de los complementos y el complemento de una intersección es la unión de los complementos.

Segmentos de recta y conjuntos de números

A partir de la correspondencia de los números y los puntos de la recta podemos representar como segmentos a conjuntos de la forma:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Con la siguiente notación:

$$x \in (a, b) = a < x < b$$

Figura: Intervalo Abierto

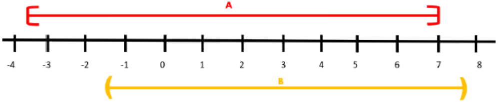
$$x \in [a, b] = a \leq x \leq b$$

Figura: Intervalo Cerrado

Con estas representaciones nos puede resultar más sencillo obtener las operaciones de este tipo de conjuntos.

Ejemplo: Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \leq x \leq 7\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2.5 < x < \frac{22}{3}\}$ encontrar $A \cup B$.

Solución:



Al conjunto $A \cup B$ le corresponde el segmento que une a $-\pi$ y $\frac{22}{3}$, incluido el extremo izquierdo y excluido el derecho, es decir,

$$A \cup B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \leq x < \frac{22}{3}\right\} \rightarrow \left[-\pi, \frac{22}{3}\right)$$

II. Introducción a la Probabilidad

Eventos y Espacios Muestrales

Definición:

Consideraremos experimentos en los que el resultado es producto del azar, los cuales son denominados *experimentos aleatorios*.

La probabilidad de que ocurra un *evento* indica qué tan factible es que éste ocurra. Para calcularla, debemos considerar lo siguiente:

- ¿Cuáles son todos los posibles *resultados* que pueden ocurrir?
- De todos los *resultados* posibles, ¿cuáles resultados son favorables?

En general:

Evento:

Es un conjunto de resultados, a los que llamamos *elementos* del evento.

Espacio muestral asociado a un experimento:

Es la colección de todos los resultados posibles.

Conceptos Básicos

Probabilidad de un Evento:

Cuando cada uno de los resultados posibles es igualmente probable, la probabilidad del evento es el cociente del número de resultados en el evento entre el número total de resultados:

$$P = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados}}$$

Si denotamos por S al espacio muestral y A al evento cuya probabilidad deseamos calcular, escribimos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \tag{1}$$

Como un evento A es subconjunto del espacio muestral S, se escribe: $A \subseteq S$, entonces:

$$0 \leq n(A) \leq n(S) \quad \rightarrow \quad 0 \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq 1 \quad \rightarrow \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \tag{2}$$

Ejemplo: En una clase de ballet hay 23 niñas. De ellas, 11 tienen cabello largo. ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir una niña al azar, ésta tenga cabello corto?

Solución:

Debido a que en total hay 23 niñas y 11 tienen cabello largo, tenemos que:
$23 - 11 = 12$ tienen el cabello corto.
El espacio muestral tiene 23 elementos. El evento favorable es que tenga cabello corto. Como 12 de las niñas lo tienen, entonces:

$$P = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados}} = \frac{12}{23} \approx 0.52$$

Ejercicio:

Ricardo tiene 12 canicas en una bolsa, de las cuales 5 son *agüitas*. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar una canica al azar, ésta sea una *agüita*?

Ejercicio:

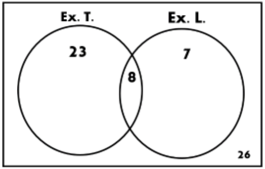
Durante su curso de química, los alumnos tienen que aprobar dos exámenes, uno teórico y otro de laboratorio. 31 alumnos ya aprobaron el teórico; 15, el de laboratorio; 8, ambos y el resto no ha aprobado ninguno. En el curso se encuentran inscritos 64 alumnos. ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir un alumno al azar, éste

a) haya aprobado el examen teórico?

b) haya aprobado el examen de laboratorio?

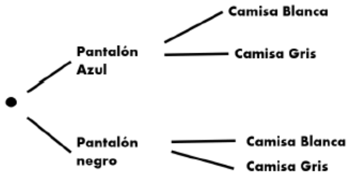
c) haya aprobado ambos exámenes?

d) no haya aprobado ningún examen?



Ejemplo: En un armario hay dos pantalones y dos camisas. Los pantalones son de color azul y negro, las camisas, blanco y gris. ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir al azar un pantalón y una camisa, el pantalón sea negro y la camisa blanca?

Solución:



$$P = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados}} = \frac{1}{4} \approx 0.25$$

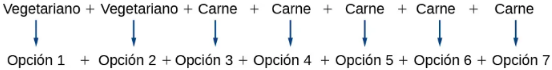
III. Cálculo Combinatorio

Principio de Adición

Si un evento puede ocurrir de m maneras y un segundo evento sin resultados comunes puede ocurrir en n maneras, entonces el primer o el segundo evento puede ocurrir de $m+n$ maneras.

Ejemplo: En el menú de la cena hay 2 opciones de plato principal vegetariano y 5 de carne. ¿Cuál es el número total de opciones de plato principal?

Solución: Podemos sumar el número de opciones vegetarianas al número de opciones de carne para hallar el número total de opciones de platos principales.



Por tanto, hay 7 opciones en total.

Ejercicio:

Un estudiante está comprando una computadora nueva. Está decidiendo entre 3 computadoras de escritorio y 4 portátiles. ¿Cuál es el número total de opciones de computadora?

Principio de Multiplicación

Si un evento puede ocurrir de m maneras y un segundo evento puede ocurrir en n maneras después de que el primer evento haya ocurrido, entonces los dos eventos pueden ocurrir en $m \times n$ maneras.

Ejemplo: Diana empacó 2 faldas, 4 blusas y un suéter para su viaje de negocios. Tendrá que elegir una falda y una blusa para cada conjunto y decidir si se pone el suéter. Utilice el principio de multiplicación para hallar el número total de conjuntos posibles.

Solución: Para hallar el número total de conjuntos, calcule el producto del número de opciones de falda, el número de opciones de blusa y el número de opciones de suéter.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{\# de opciones de falda} & \times & \text{\# de opciones de blusas} & \times & \text{\# de opciones de suéter} & & \\ 2 & \times & 4 & \times & 2 & = & 16 \end{array}$$

Por tanto, hay 16 conjuntos posibles.

Ejercicio:

Un restaurante ofrece un desayuno especial que incluye un sándwich de desayuno, una guarnición y una bebida. Hay 3 tipos de sándwiches de desayuno, 4 opciones de guarniciones y 5 opciones de bebidas. Calcule el número total de desayunos especiales posibles.

Factorial

Factorial

Dado un número natural n, definimos el *factorial* de n como:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

y lo denotamos, mediante el símbolo $n!$

Ejemplo:

- $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
- $1! = 1$

- Es conveniente extender esta definición para incluir al cero, definiremos: $0! = 1$
- Observación: Si $n \geq m$ tenemos que:

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times (m+1) \times m!$$

  Esto facilita la realización de divisiones, ya que se pueden cancelar muchos factores, antes de efectuarlas.

Factorial

Ejemplo:

$$\frac{16!}{14!} = \frac{16 \times 15 \times 14!}{14!} = 16 \times 15 = 240$$

Sería absurdo calcular los factoriales por separado y después hacer la división

$$\frac{16!}{14!} = \frac{20922789888000}{87178291200}$$

Ejemplo:

Calcular,

$$\frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 8 \times 7 = 56$$

Permutación

- Dados n objetos, *una permutación* de ellos es cualquiera de las diferentes maneras en que se pueden acomodar en orden dichos objetos.
- Mediante P_n denotamos el número de permutaciones posibles para n objetos.

- Es posible elegir a un objeto que va a ocupar el primer lugar de n maneras distintas, una vez que lo hemos elegido, quedan $n-1$ maneras para elegir al segundo, el tercero lo podemos seleccionar de $n-2$ maneras y así, sucesivamente, por lo que el número de permutaciones de n objetos es:

$$P_n = n!$$

Ejemplo: Calcular P_6

Solución: $P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

Permutaciones

Ejemplo: Tres niños van a interpretar a los Reyes Magos en una pastorela, ¿de cuántas maneras diferentes pueden elegir los papeles de Melchor, Gaspar y Baltasar?

Solución: Para encontrar la respuesta, bastará con encontrar las permutaciones de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Así que pueden elegir sus papeles de 6 maneras diferentes.

Ejercicios:

- En un torneo participan 4 equipos: *Toros*, *Pumas*, *Águilas* y *Chivas*. ¿De cuántas maneras diferentes pueden asignarse el primero, segundo, tercero y cuarto lugares? Da la lista de todas las maneras posibles y elabora la gráfica de árbol correspondiente.
- ¿Cuántos números telefónicos de 7 cifras se pueden formar empleando $1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7, si en dichos números telefónicos no pueden repetirse los dígitos?

Ordenaciones

Ordenación

Dados n objetos y $m \leq n$, una *ordenación* de n objetos, tomados de m en m es cualquiera de las diferentes maneras en que estos m objetos pueden ser elegidos en orden.

- Denotaremos mediante O_m^n al número de ordenaciones de n objetos tomados de m en m.
- Podemos elegir el primer objeto de n maneras diferentes; el segundo, de $n-1$ maneras diferentes, y así sucesivamente, hasta elegir al $m-$ésimo objeto, así que el número de ordenaciones es:

$$O_m^n = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(m-1))}_{m \text{ factores}}$$

- Observa que, en la expresión O_m^n ponemos arriba el número de elementos que tiene el conjunto y, abajo, el número de elementos que queremos elegir.

Al generalizar lo anterior, observamos que podemos utilizar la notación de factoriales para expresar O_m^n. Es decir:

$$O_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Ejemplo: Calcular O_3^7

Solución:

- $$O_3^7 = \underbrace{7 \times 6 \times 5}_{\text{3 factores}} = 210$$
- O bien,
$$O_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

Ordenaciones

Ejemplo:

En un torneo de futbol participan 8 equipos y se otorgará medalla de oro, plata y bronce a los tres primeros lugares. ¿De cuántas maneras diferentes pueden quedar los tres primeros lugares?

Solución: Observemos que, para resolver este planteamiento, es necesario considerar de cuántas maneras diferentes se pueden elegir en orden 3 equipos de un total de 8, así que es un problema de ordenaciones:

$$O_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

así que los tres primeros lugares pueden quedar determinados de 336 maneras diferentes.

Observación: Cuando $n = m$, las ordenaciones de n elementos tomados de m en m son simplemente las permutaciones de n elementos, ya que:

$$O_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$$

Ordenaciones

Ordenaciones con repetición

Dados n objetos y cualquier número entero positivo m llamaremos *ordenación con repetición* de n objetos, tomados de m en m a cualquiera de las diferentes maneras en que se pueden llenar m lugares con los n objetos, permitiendo que éstos se repitan.

- Mediante la expresión $OR\,_m^n$ se denota el número de ordenaciones con repetición de n elementos tomados de m en m.
- Si tenemos n elementos y m lugares, podemos ocupar el primer lugar de n maneras diferentes. Como es posible repetir los elementos, el segundo lugar también puede ser ocupado de n maneras diferentes y así consecutivamente. Como hay m lugares, tenemos que:

$$OR\,_m^n = n^m$$

- Observa que, a diferencia de las ordenaciones, como aquí podemos repetir los elementos del conjunto de n elementos tantas veces como lo deseemos, m no necesariamente es menor o igual que n.

Ordenaciones

Ejemplo: Calcular $OR\,^6_4$,

Solución:

$$OR\,^6_4 = 6^4 = 1296$$

Ejemplo:

¿De cuántas maneras diferentes podemos colorear una bandera de 3 franjas verticales, si disponemos de 5 colores, si consideramos que es posible que dos o más bandas sean del mismo color?

Solución: Como debemos ordenar 3 elementos de un conjunto de 5 y podemos repetir elementos, el número de maneras diferentes es:

$$OR\,^5_3 = 5^3 = 125$$

Combinaciones

Combinación

Dados n objetos y $m \leq n$, una *combinación* de n objetos, tomados de m en m es cualquiera de las diferentes maneras en que se pueden elegir m objetos los n disponibles *sin importar el orden en que se presentan*.

- Es decir, el número de subconjuntos de m elementos que tiene un conjunto de n elementos.
- Para determinar el total de combinaciones de n elementos tomados de m en m, debemos encontrar el número de las ordenaciones de n elementos tomados de m en m y dividir el resultado entre las permutaciones de m elementos,

$$\binom{n}{m} = \frac{O_m^n}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)! \times m!}$$

La expresión $\binom{n}{m}$ recibe el nombre de *coeficiente binomial*.

Combinaciones

Ejemplo:

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{(7-5)! \times 5!} = \frac{7!}{2! \times 5!} = 21$$

Ejemplo:

Un grupo de 20 alumnos debe elegir una comisión de festejos, formada por 4 alumnos, ¿de cuántas maneras la puede integrar?

Solución: El número de comisiones de 4 alumnos es el número de subconjuntos de 4 elementos que se pueden formar con 20 elementos así que hay:

$$\binom{20}{4} = \frac{20!}{(20-4)! \times 4!} = \frac{20!}{16! \times 4!} = 4845$$

comisiones distintas.

Combinaciones con repetición

Combinación con repetición

Dados n objetos y $m \geq 0$, una *combinación con repetición* de n objetos, tomados de m en m es cualquiera de las diferentes maneras en que se pueden elegir m objetos sin importar el orden en que se presentan y permitiendo elegir varias veces el mismo.

- El símbolo para expresar las posibles combinaciones de n objetos tomados de m en m y su fórmula general:

$$\left(\binom{n}{m}\right) = \binom{m+(n-1)}{n-1}$$

Ejemplo:

$$\left(\binom{4}{2}\right) = \binom{2+(4-1)}{4-1} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

Combinaciones con repetición

Ejemplo:

$$\left(\!\!\binom{2}{4}\!\!\right) = \binom{4+(2-1)}{2-1} = \binom{5}{1} = \frac{5!}{4! \times 1!} = 5$$

Ejemplo: Encontrar todos los números de tres dígitos que pueden formarse con 1, 2, 3 y 4, de manera que el dígito de las centenas sea menor o igual al de las decenas, y el dígito de las decenas sea menor o igual que el correspondiente a las unidades.

Solución: La finalidad es encontrar todas las maneras en que se pueden elegir 3 elementos con repetición de un conjunto de 4 elementos, con la condición de orden; por ejemplo: 312 es inválido, pero 123 es correcto. Así es que, de las tercias posibles con los mismos dígitos sólo se considera una:

$$\left(\!\!\binom{4}{3}\!\!\right) = \binom{3+(4-1)}{4-1} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

Propiedades de los coeficientes binomiales

✓
$$\binom{n}{0} = 1; \quad \text{además} \binom{n}{n} = 1$$

✓
$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

✓
$$\binom{n}{1} = n$$

✓
$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

- Estas propiedades de los coeficientes binomiales son las que permiten obtener el triángulo de Pascal que permite determinar los coeficientes que aparecen en el desarrollo del binomio
$$(x+y)^n$$
- Después de esto se hace ver que cada uno de tales coeficientes es en realidad el valor de una combinación de n elementos tomados de m en m.

Teorema del Binomio

- Cuando expandimos $(x+y)^n$ multiplicando, el resultado se llama **expansión binomial**, e incluye coeficientes binomiales.
- Si examinamos algunas expansiones binomiales simples, podemos hallar patrones que nos lleven a un atajo para calcular expansiones binomiales más complicadas.

$$(x+y)^1 = (1)x^1\boldsymbol{y^0} + (1)\boldsymbol{x^0}y^1$$
$$(x+y)^2 = (1)x^2\boldsymbol{y^0} + (2)x^1y^1 + (1)y^2\boldsymbol{x^0}$$
$$(x+y)^3 = (1)x^3\boldsymbol{y^0} + (3)x^2y^1 + (3)x^1y^2 + (1)\boldsymbol{x^0}y^3$$
$$(x+y)^4 = (1)x^4\boldsymbol{y^0} + (4)x^3y^1 + (6)x^2y^2 + (4)x^1y^3 + (1)\boldsymbol{x^0}y^4$$

- Con cada término sucesivo, el exponente de x disminuye y el exponente de y aumenta.
- La suma de los dos exponentes es n para cada término.
- Observe que los coeficientes aumentan y luego disminuyen siguiendo un patrón simétrico.

Teorema del Binomio

Los coeficientes siguen un patrón:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

Estos patrones nos llevan al **teorema del binomio**, que se puede usar para expandir cualquier binomio.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n x^0$$

- Notemos que los lugares se numeran desde el 0 hasta el n, así que hay $n+1$ sumandos en el desarrollo.

El triángulo de Pascal y las combinaciones

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Ejemplo: Encontrar los coeficientes en el desarrollo $(x+y)^{11}$

Solución: Los doce coeficientes son:

$$\binom{11}{0}=1 \quad \binom{11}{1}=11 \quad \binom{11}{2}=55 \quad \binom{11}{3}=165 \quad \binom{11}{4}=330 \quad \binom{11}{5}=462$$

$$\binom{11}{6}=462 \quad \binom{11}{7}=330 \quad \binom{11}{8}=165 \quad \binom{11}{9}=55 \quad \binom{11}{10}=11 \quad \binom{11}{11}=1$$

- Por lo tanto, el término $x^{n-\ell}y^{\ell}$ en el desarrollo binomial equivale a:

$$\binom{n}{\ell}x^{n-\ell}y^{\ell}=\frac{n!}{(n-\ell)!\times \ell!}x^{n-\ell}y^{\ell}$$

Observación:

Debe tenerse cuidado en observar que éste es el término en el lugar ℓ, pero en realidad es el $\ell + 1$ término en el desarrollo ya que ℓ corre desde 0.

Ejemplo:

Encontrar el quinto coeficiente binomial en el desarrollo de $(x + y)^{10}$

Solución: El quinto coeficiente es el del quinto término y éste ocupa el lugar $\ell = 4$. Entonces el quinto coeficiente es:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{(10-4)! \times 4!} = 210$$

Ejemplo:

Escribir el término correspondiente a a^6b^7 en el desarrollo de

$$\left(6a - \frac{1}{3}b\right)^{13}$$

Solución: Hagamos $x = 6a$ y $y = -\frac{1}{3}b$. Como $n = 13$ y el exponente de y es 7, entonces el término buscado es:

$$\binom{13}{7} x^{13-7} y^7 \to \binom{13}{7} (6a)^6 \left(-\frac{1}{3}b\right)^7$$

$$\frac{13!}{(13-7)! \times 7!} (6a)^6 \left(-\frac{1}{3}b\right)^7 = -36608a^6b^7$$

IV. Probabilidad Simple y Compuesta

Ley de Laplace

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados en } A \text{ (favorables)}}{\text{número total de resultados}}$$

- Hay veces en que para calcular la probabilidad de que un evento A ocurra, es más fácil calcular primero la probabilidad de que no ocurra, es decir, calculamos $P(A^C)$.
- Si A es un evento y A^C es su complemento, entonces:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

Ejemplo: Una fábrica de productos eléctricos de dudosa calidad empaca 12 focos en una caja, de los cuales 5 están fundidos. El inspector de control de calidad elige 3 focos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que

a. **los tres estén fundidos?**

b. **al menos uno esté fundido?**

Solución: El espacio muestral S está formado por todas las maneras posibles en las que el inspector puede elegir 3 focos. La cantidad de maneras posibles es:

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{9! \times 3!} = 220 \quad \therefore\ n(S) = 220$$

a. Si A denota al evento que consiste en que los 3 focos elegidos estén fundidos, es el número de maneras en que se pueden elegir 3 focos del conjunto de 5 focos fundidos:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

Esto quiere decir, que de las 220 maneras en que se pueden elegir tercias de focos, en 10 de ellas los 3 focos están fundidos. Así que la probabilidad de que los 3 estén fundidos es:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{220} \approx 0.0454$$

b. Para calcular la probabilidad de que al menos uno esté fundido, Llamaremos B al evento que consiste en que los 3 focos estén buenos. Como en total hay 7 focos buenos:

$$n(B) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \times 3!} = 35$$

Así que de las 220 maneras en las que se pueden elegir las tercias de focos, en 35 de ellas los tres focos están buenos. Por tanto, la probabilidad de que los 3 focos sean buenos es:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{35}{220} \approx 0.159,$$

como el evento que consiste en que al menos uno de los focos esté fundido es el complemento de B, entonces, su probabilidad es:

$$P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{35}{220} \approx 0.841$$

Probabilidad compuesta

Si la probabilidad de cada evento elemental, en un espacio muestral S, es la misma, entonces la probabilidad del evento $A \cup B$ es:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Dos eventos son mutuamente excluyentes, si no tienen elementos en común.
- Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces $P(A \cap B) = 0$, así que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Observa que cualquier evento A y su complemento A^C son mutuamente excluyentes y que $A \cup A^C = S$, donde S es el espacio muestral, entonces:

$$1 = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$$

Probabilidad compuesta

Un evento y su complemento son llamados eventos complementarios.

En general, supongamos que A y B son dos eventos; entonces:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

Dado que:

$$A = [A \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B) \quad \text{y} \quad (A \setminus (A \cap B)) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

Entonces, se sigue a partir de la fórmula para la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes que:

$$P(A) = P(A \setminus (A \cap B)) + P(A \cap B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

Al despejar obtenemos:

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de obtener 7 u 11 al lanzar dos dados?

Solución: Llamamos A al evento de que la suma sea 7, y B al que la suma sea 11. De acuerdo a la tabla podemos establecer que:

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{2}{9}$$

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar dos dados, la suma sea un número par o mayor que 8?

Solución: Si A es el evento que consiste en obtener un número par, entonces: usando la tabla

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8) + P(10) + P(12) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{2}$$

Si B es el evento que consiste en que la suma sea mayor que 8, entonces:

$$P(B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Necesitamos calcular la probabilidad de la intersección $A \cap B$. De acuerdo con la tabla, tenemos:

$$P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Entonces:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{5}{18} - \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo: Un experimento consiste en elegir una carta de una baraja de póker de 52 cartas. Juan gana si la carta elegida es rey o as. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Juan?

Solución: Llamamos S al espacio muestral que consiste en elegir una de las 52 cartas. Es decir, $n(S) = 52$.

Sea A el evento que consiste en obtener un *as*. Como la baraja tiene cuatro ases, entonces: $n(A) = 4$, y sea K el evento que consiste en obtener un *rey*, $n(K) = 4$. Como una carta no puede ser simultáneamente *as* y *rey*, entonces $A \cap K = \emptyset$, es decir, los eventos son mutuamente excluyentes.

$$P(A \cup K) = P(A) + P(K) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

Es decir, la probabilidad de que Juan gane es ≈ 0.15385

Ejercicio

Un hotel consta de 76 habitaciones: 36 tienen cama individual, 22 matrimonial y el resto *king size*. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir una habitación al azar, ésta tenga cama matrimonial o *king size*?

Ejemplo: Para obtener el título de biólogo es necesario, además de aprobar las materias del plan de estudios, realizar el servicio social y aprobar el examen de inglés. En una generación de 393 estudiantes, 205 han realizado el servicio social, 300 aprobaron el examen de inglés y 121 han cumplido con ambos requisitos. ¿Cuál es la probabilidad de que al considerar un estudiante al azar, éste haya

a. cumplido con al menos uno de los requisitos?

b. realizado el servicio social, pero no haya aprobado el examen de inglés?

Solución: La probabilidad que buscamos es $P(I \cup Ss)$, y sabemos que:

$$P(I \cup Ss) = P(I) + P(Ss) - P(I \cap Ss)$$

Entonces:

$$P(I \cup Ss) = \frac{300}{393} + \frac{205}{393} - \frac{121}{393} \approx 0.97$$

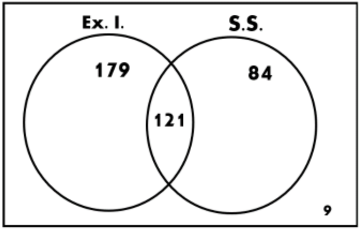
La probabilidad de que al tomar un estudiante al azar, éste haya cumplido con al menos uno de los requisitos es aproximadamente el $97\,\%$.

Solución (cont): La probabilidad que buscamos es $P(Ss \setminus I)$ y sabemos que:

$$P(Ss \setminus I) = P(Ss) - P(Ss \cap I)$$

De tal forma que:

$$P(Ss \setminus I) = \frac{205}{393} - \frac{121}{393} = \frac{28}{131} \approx 0.21$$



Producto de Espacios Muestrales

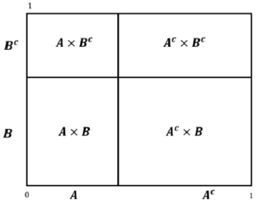
Espacio Producto

Si X y Y son espacios muestrales, el espacio $X \times Y$, formado por las parejas (x, y) donde $x \in X$ y $y \in Y$, se denomina *espacio producto* de X y Y.

- Si A es un evento en X, y B es un evento en Y, entonces el evento $A \times B \subset X \times Y$ está formado por las parejas (x, y), donde $x \in A$ y $y \in B$.
- La probabilidad de que ocurra el evento $A \times B$ es:

$$P(A \times B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Veamos la interpretación geométrica del resultado anterior.



Ejemplo: Se tiene una urna con 5 canicas rojas, 4 verdes y 2 azules. Se extrae una canica, se verifica su color, se regresa a la urna y se saca otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera canica sea roja y la segunda azul?

Solución: Llamemos R al evento que consiste en sacar una canica roja. La probabilidad de que ocurra R es $P(R) = \frac{5}{11}$, ya que hay 11 canicas en total, de las cuales 5 son rojas. De la misma manera, si A representa al evento de obtener una canica azul, $P(A) = \frac{2}{11}$.

- ✓ Como la primera canica se regresa a la urna, el resultado de la segunda extracción no depende de la primera.

$$P(R \times A) = P(R) \cdot P(A) = \frac{5}{11} \times \frac{2}{11} = \frac{10}{121} \approx 0.083$$

Ejemplo: Con la misma urna de canicas, ¿cuál es la probabilidad de que una de las canicas sea roja y la otra azul, sin importar el orden?

Solución: El evento que consiste en que una canica sea roja y la otra azul es:

$$(R \times A) \cup (A \times R)$$

Dado que estos dos eventos son ajenos, su probabilidad es:

$$P((R \times A) \cup (A \times R)) = P(R \times A) + P(A \times R) = \frac{10}{121} + \frac{10}{121} = \frac{20}{121} \approx 0.165$$

Ejemplo: Se tienen 3 dados de distinto color. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar los dados, salgan los números 2, 4 y 5 sin importar el orden?

Solución: La probabilidad de que al tirar el primer dado salga un 2 es: $P(A) = \dfrac{1}{6}$ La probabilidad de que al tirar el segundo dado salga un 4 es: $P(B) = \dfrac{1}{6}$ La probabilidad de que al tirar el tercer dado salga un 5 es: $P(C) = \dfrac{1}{6}$ De tal forma que:

$$P(A \times B \times C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6^3}$$

Como no importa el orden, debemos pensar en todas las maneras en las que pueden aparecer estos números dependiendo del color del dado, lo cual sucede de

$$P_3 = 3! = 6$$

Así, la probabilidad es:

$$(6)\left(\frac{1}{6^3}\right) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \approx 0.028$$

Probabilidad Condicional

Probabilidad Condicional

La probabilidad condicional es la probabilidad de ocurrencia de un evento B dado que ha ocurrido un evento A. La fórmula que se emplea para determinar la probabilidad de B dado A es:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow \underbrace{P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A)}_{\text{Teorema de Multiplicación.}}$$

- Es decir, la probabilidad de un evento está condicionada a la ocurrencia de algún otro.

Ejemplo:

Si queremos calcular la probabilidad de que mañana haya buen tiempo, lo primero que debemos hacer es relacionarlo con otros datos como la época del año, la cantidad de humedad en el ambiente, la temperatura el viento, etc., ya que si alguno de estos factores cambia, también el tiempo para tal día cambiará.

Ejemplo: En un experimento aleatorio se lanza un dado, si el número de la cara que queda hacia arriba es par, ¿cuál es la probabilidad de que sea primo?

Solución:

- Sea $A = \{\text{El número de la cara superior es par.}\}$ $\quad A = \{2, 4, 6\} \rightarrow P(A) = \frac{3}{6}$
- Sea $B = \{\text{El número de la cara superior es primo.}\}$ $\quad B = \{2, 3, 5\}$
- Sea $B \mid A = \{\text{El número de la cara superior es primo, dado que es par}\}$

El evento $A \cap B = \{2\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

- Al aplicar la fórmula de probabilidad condicional:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Eventos independientes

En términos generales, consideramos que dos eventos A y B son independientes si la probabilidad de uno de ellos no depende de la ocurrencia del otro evento, es decir:

$$P(B) = P(B \mid A)$$

La probabilidad de que ocurra B es igual a la probabilidad de que ocurra B sabiendo que ocurrió A. Si los eventos A y B son independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ y a partir de la fórmula de *probabilidad condicional* se tiene lo siguiente:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Ejemplo: Se lanzan una moneda y un dado. ¿Son independientes los eventos de que salga un 2 en el dado y que en la moneda salga un águila? ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 2 en el dado sabiendo que en la moneda salió un águila?

Solución: Llamamos A al evento de que salga un *águila* al tirar la moneda, entonces: $P(A) = \dfrac{1}{2}$ y B al que salga un 2 al tirar el dado, entonces: $P(B) = \dfrac{1}{6}$. De tal forma que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$$

es decir, los eventos son independientes. Así:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B) = \frac{1}{6}$$

Es posible verificar este resultado usando un diagrama de árbol.

Ejemplo: Se lanzan 2 dados de distinto color. El evento A es aquel que la suma obtenida sea 3, el evento B es que dicha suma sea múltiplo de 3.

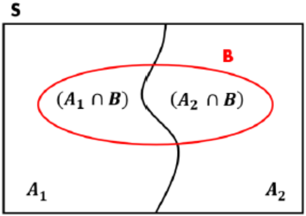
a. **Decir si los eventos A y B son independientes.**

b. **Calcular la probabilidad de que ocurra el evento A sabiendo que ocurrió B.**

Solución:

Probabilidad total

Supongamos un experimento aleatorio con eventos A_1 y A_2 mutuamente excluyentes que forman una partición del espacio muestral S. Consideremos a B un evento cualquiera en S.



$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ es decir, es la unión de dos eventos mutuamente excluyentes.

Probabilidad total

Por lo que es posible, calcular la probabilidad de B:

$$P(B) = P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)$$

- Al generalizar lo anterior para n eventos, nos queda que la fórmula para calcular la probabilidad total de un evento B es:

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n)P(B \mid A_n)$$

Ejemplo: Dos máquinas X y Y envasan conservas de diferentes tipos. La máquina X produce $75\,\%$ de los envasados, pero con $1\,\%$ de defecto. La máquina Y produce $25\,\%$ de los artículos con $2\,\%$ de envasados defectuosos. Se selecciona al azar una máquina y se saca un envase, ¿cuál es la probabilidad de que dicho artículo esté defectuoso?

Solución: El problema no indica de qué máquina proviene el artículo, así que tenemos que calcular las probabilidades de cada máquina y de que sea defectuoso. Sean los eventos:

- $X = \{\text{el artículo se produce por la máquina } X.\} \quad P(X) = 0.75$
- $Y = \{\text{el artículo se produce por la máquina } Y.\} \quad P(Y) = 0.25$
- $D = \{\text{el artículo es defectuoso.}\} \quad P(D \mid X) = 0.01,\ P(D \mid Y) = 0.02$

Por lo tanto,

$$P(D) = P(X)P(D \mid X) + P(Y)P(D \mid Y) = (0.75)(0.01) + (0.25)(0.02) = 0.0125$$

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

Si deseamos calcular la probabilidad condicional de un evento de la partición, por ejemplo, la del evento A_1 dada la ocurrencia de B, entonces, por definición de probabilidad condicional, tenemos:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

Si en la ecuación anterior reemplazamos $P(B)$ por la expresión de la probabilidad total y sustituimos $P(A_1)P(B \mid A_1)$ por $P(A \cap B)$, entonces obtenemos el:

Teorema de Bayes para dos particiones

Para el evento A_1:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$

Para el evento A_2:

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$

Teorema de Bayes Generalizado

Spongamos un experimento en el que los eventos A_1, A_2, A_3, ..., A_n son una partición del espacio muestral y sea B un evento cualquiera de S, donde $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$ es la unión de eventos mutuamente excluyentes, en consecuencia, tenemos:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

Por el teorema de multiplicación tenemos:

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n)P(B \mid A_n)$$

Por otro lado, la probabilidad condicional de cualquier evento A_i dado B queda definida como:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Teorema de Bayes Generalizado

Teorema de Bayes

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n)P(B \mid A_n)}$$

Ejemplo: Una fábrica de ensamblaje de computadoras trabaja en tres turnos A, B y C, en donde se realiza $35\,\%$, $45\,\%$ y $20\,\%$ del ensamblaje total, respectivamente. Los gerentes saben por experiencia que $2\,\%$, $1\,\%$ y $3\,\%$ de las computadoras ensambladas por cada turno, respectivamente, son defectuosas. Supóngase que se hace un control de calidad y se selecciona una computadora al azar:

a. **¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?**

b. **Si la computadora resultó ser defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea del turno B?**

Solución: Sean los eventos:

- $A = \{\text{computadora ensamblada por el turno } A.\}$
- $B = \{\text{computadora ensamblada por el turno } B.\}$
- $C = \{\text{computadora ensamblada por el turno } C.\}$

Primero calcularemos la probabilidad de que la computadora sea defectuosa: sea el evento

- $D = \{\text{la computadora es defectuosa.}\}$, entonces:

$$P(D) = P(A)P(D \mid A) + P(B)P(D \mid B) + P(C)P(D \mid C)$$

$$P(D) = (0.35)(0.02) + (0.45)(0.01) + (0.20)(0.03) = 0.0175$$

Empleando el teorema de Bayes, calcularemos la probabilidad de que la computadora sea ensamblada por el turno B dado que es defectuosa, esto es $P(B \mid D)$:

$$P(B \mid D) = \frac{P(B)P(D \mid B)}{P(A)P(D \mid A) + P(B)P(D \mid B) + P(C)P(D \mid C)} = \frac{9}{35} = 0.2571$$

Ejercicio:

Un convicto, antes de escaparse de una cárcel, había planeado seguir uno de tres caminos posibles C_1, C_2 y C_3 que se dirigen a distintas ciudades. Según los investigadores, las probabilidades con las que puede elegir cada camino son 0.20, 0.50 y 0.30, respectivamente. En cada ciudad a la que puede llegar el fugitivo hay un sistema policiaco cuyas probabilidades de atrapar al delincuente son 0.30, 0.40 y 0.20, respectivamente. Si el delincuente ya fue capturado, ¿cuál es la probabilidad de que esto haya sido en la ciudad C_1?

Ensayos de Bernoulli

- Un *ensayo de Bernoulli* consiste en un experimento aleatorio en el que se repite varias veces un ensayo que tiene únicamente dos resultados posibles, que podemos llamar *éxito* y *fracaso*. El éxito tiene probabilidad p de suceder, así que el fracaso tiene probabilidad $(1-p)$.
- En general, en un *ensayo de Bernoulli*, tenemos un juego en el que tenemos dos resultados A y B, el primero con probabilidad p y el segundo con probabilidad $q = 1-p$, si se juega n veces, la probabilidad de obtener m veces B y, por consiguiente $(n-m)$ veces A es igual al término $c_m p^{n-m} q^m$ del desarrollo:

$$(p+q)^n = c_0 p^n + c_1 p^{n-1} q^1 + c_2 p^{n-2} q^2 + \ldots + c_n q^n$$

Ejemplo: Encontrar la probabilidad de obtener 6 águilas y 14 14 soles al tirar 20 volados.

Solución: Es necesario calcular de forma directa el coeficiente de $p^6 q^{14}$ en el desarrollo de $(p+q)^{20}$:

$$\binom{20}{6} = \frac{20!}{6! \times 14!} = 38\ 760$$

Entonces la probabilidad de obtener 6 *águilas* es:

$$P(6\ \acute{a}guilas) = 38\ 760 \left(\frac{1}{2^6}\right) \left(\frac{1}{2^{14}}\right) \approx 0.03696$$

V. Estadística

Conceptos básicos de estadística

Población

Es el conjunto de todos los elementos de un grupo que se estudia.

- En ocasiones el tamaño de una *población* puede resultar muy grande para analizarla en su totalidad, de modo que, en general, se trabaja con una parte de ella.

Muestra

Es un subconjunto de una población, el cual se selecciona mediante distintos métodos.

Ejemplo:

Si se quiere determinar la estatura promedio de 4000 estudiantes es lógico suponer que tomar la medida de cada uno de ellos resultaría impráctico. Por ende, puede obtenerse al azar una muestra de esa población; por ejemplo, una muestra de 500 estudiantes y entonces proceder a medir su estatura.

- La muestra debe ser representativa de la población para que las conclusiones que se obtengan puedan extenderse a toda ella.

Conceptos básicos de estadística

Variable y dato

Una variable es una característica de interés que presentan los elementos de una población o muestra. Por su parte, un dato es el valor de la variable asociado a un elemento de una población o de una muestra.

Ejemplo:

Son variables la edad de los estudiantes que ingresan en la preparatoria, su estatura, su peso, etcétera. A la vez, si tenemos, por ejemplo, que Rubén entró en la preparatoria a los 15 años, mide 1.74 metros y pesa 65 kilogramos, entonces cada una de estas mediciones es un valor individual, es decir, es un dato para cada una de las variables citadas de la muestra.

- Es importante señalar que una variable puede ser discreta o continua.
  - Variables discretas
  - Variables continuas

Experimento

Es la actividad mediante la cual se obtiene un conjunto de datos.

Estadístico

Estadístico es un número que resume los datos recopilados de una muestra.

Ejemplo:

Se encontró que a $62\,\%$ de una muestra de 250 estudiantes de una preparatoria no les gusta la matemática. Este porcentaje es un estadístico, ya que se basa en una muestra, no en la población completa, no en toda la población estudiantil de la preparatoria.

Parámetro

Parámetro es un número que resume los datos recopilados de una población.

Distribución de frecuencias

Conceptos fundamentales de una distribución de frecuencias

- El número de clases o categorías en que se agruparán los datos.
- El intervalo o ancho nominal de clase, delimitado por los valores mínimo y máximo aceptables en cada clase.
- La frecuencia o número de elementos de cada clase.

Ejemplo:

Distribución de frecuencias con sus elementos fundamentales

Clase	Límite inferior	Límite superior	Frecuencia (egresados)
A	Enero 1, 2005	Diciembre 31, 2005	415
B	Enero 1, 2006	Diciembre 31, 2006	381
C	Enero 1, 2007	Diciembre 31, 2007	472
D	Enero 1, 2008	Diciembre 31, 2008	589
E	Enero 1, 2009	Diciembre 31, 2009	723

Intervalos de Clase y Unidad de Variación

Intervalo de clase

- Se puede definir como la diferencia entre el límite inferior de la clase siguiente y el límite inferior de la clase.
- También puede considerarse como la diferencia entre el límite superior y el inferior de cada clase, más la *unidad de variación* de los datos.

$$\text{Intervalo de clase} = \text{Límite inferior de la clase siguiente} - \text{Límite inferior de la clase}$$

Unidad de Variación

Se define como la mínima diferencia que puede presentarse entre dos datos del conjunto que se analiza.

Ejemplo:

Si los datos son las estaturas en metros (m) y centímetros (cm) de un grupo de personas, la mínima diferencia entre ellas será un centímetro, es decir, en este ejemplo la unidad de variación será 0.01 metros.

Ejemplo:

Determina el intervalo de la siguiente tabla:

Clase	Límite inferior	Límite superior
A	1010	1150
B	1160	1300
C	1310	1450
D	1460	1600
	1610	

- El intervalo es 150.

Nota: el límite inferior de la clase siguiente a la última es igual al límite superior de la última clase más la diferencia entre el límite inferior de la última clase y el límite superior de la penúltima clase.

Determinación de frecuencias de datos

Pasos para la elaboración de tablas de distribución de frecuencias

1. Recopilación de datos.
2. Clasificación de los datos de menor a mayor.
3. Determinación del número de clases.
4. Cálculo del tamaño exacto del intervalo o ancho de clase.
5. Determinación del tamaño ajustado del intervalo o ancho de clase.
6. Identificación de los límites de clase.
7. Conteo de los datos.

- El número de clases puede determinarse, por ejemplo, en función de la raíz cuadrada del número de datos, es decir:

$$\text{Número de clases} = \sqrt{\text{Número de datos}}$$

- Si el ancho de cada clase es uniforme, deberá calcularse dividiendo la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de los datos entre el número de clases.

El siguiente paso en la elaboración de una tabla de distribución de frecuencias es:

Ajustar el tamaño calculado del ancho de clase. Esto se logra aumentando el ancho de clase calculado por lo menos a la siguiente unidad de variación.

Ejemplo:

Si el ancho calculado de un grupo de datos cuya *unidad de variación* es 1 resulta ser 193.4, el ancho ajustado debe ser por lo menos 194, aunque también podría ser 195 o incluso 200.

- La estructura de una tabla de distribución de frecuencias queda definida por los límites inferior y superior de cada clase.
- El primer *límite inferior* puede ser el valor más pequeño de los datos (y el último *límite superior* podría ser el valor más grande).

El primer límite inferior y superior de las clases siguientes se obtiene sumando el ancho de clase al valor de la clase anterior:

$$\text{Límite Inferior de la Clase} = \text{Límite Inferior de la Clase Anterior} + \text{Ancho de Clase}$$

$$\text{Límite Superior de la Clase} = \text{Límite Inferior de la Clase} + \text{Ancho de Clase} - \text{U.V.}$$

En todos los casos debe comprobarse que la diferencia entre los límites superior (L.S) e inferior (L.I) de cada clase sea igual al ancho de clase (A.C) menos una unidad de variación (U.V.), es decir:

$$\text{L.S.} - \text{L.I.} = \text{A.C.} - \text{U.V.}$$

El último paso de este proceso consiste en determinar la frecuencia de la clase, esto es, establecer, mediante conteo, el número de elementos incluidos en cada clase.

Ejemplo:

Estos valores corresponden a la producción mensual, en toneladas (ton), de una empacadora de plátanos. Clasifica estos datos en clases de tamaño uniforme:

515	542	643	696	700
704	739	782	784	814
832	956	987	1023	1023
1052	1296	1333	1475	1482

Cuadro: Datos ordenados

Solución:

- Se determina el número de clases:

$$\text{Número de Clases} = \sqrt{\text{Número de datos}} = \sqrt{20} \approx 4.47 = 5$$

Ejemplo (cont).

- Se calcula el tamaño del ancho de clase o intervalo:

$$\text{Intervalo exacto} = \frac{\text{Valor mayor} - \text{Valor menor}}{\text{Número de clases}} \rightarrow \frac{1482 - 515}{5} = 193.4$$

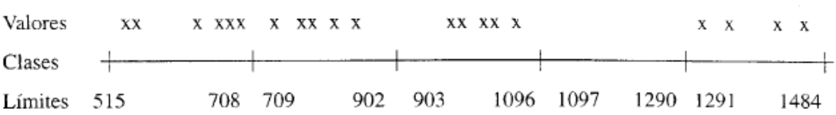
- Se establece el tamaño exacto del intervalo. En este ejemplo, la unidad de variación de los datos es 1, por lo que el tamaño ajustado o ancho de clase debe ser por lo menos igual a la siguiente unidad de variación después de 193.4, es decir, por lo menos 194, mientras que el límite inferior de la primera clase será 515, aunque podría ser un valor menor.
- Se identifican los límites de clase:

Límite inferior de la clase $B = 709$
Límite inferior de la clase $C = 903$
Límite inferior de la clase $D = 1097$
Límite inferior de la clase $E = 1291$

Límite superior de la clase $A = 708$
Límite superior de la clase $B = 902$
Límite superior de la clase $C = 1096$
Límite superior de la clase $D = 1290$
Límite superior de la clase $E = 1484$

Ejemplo (cont.)

Clase	Límite inferior	Límite superior	Frecuencia
A	515	708	6
B	709	902	5
C	903	1096	5
D	1097	1290	0
E	1291	1484	4



Límites exactos

Límites Exactos

- Los *límites inferiores exactos* de cada clase se calculan restando la mitad de la diferencia entre el límite inferior de la clase siguiente y el límite superior de la clase, esto es, la mitad de la unidad de variación de los datos.

$$\text{Límite inferior (E)} = \text{L. I. de la clase} - \frac{\text{L. I. de la clase siguiente} - \text{L. S. de la clase}}{2}$$

- Los *límites superiores exactos* de cada clase se calculan sumando la mitad de la diferencia entre el límite inferior de la clase siguiente y el límite superior de la clase, es decir, la mitad de la unidad de variación de los datos.

$$\text{Límite superior (E)} = \text{L. S. de la clase} + \frac{\text{L. I. de la clase siguiente} - \text{L. S. de la clase}}{2}$$

Observación: El límite inferior de la penúltima clase es el límite superior de la última clase, más la diferencia entre el límite inferior de la última clase y el límite superior de la penúltima clase.

Marca de clase y frecuencia relativa

Marca de Clase

La marca de clase es el punto medio entre los límites de una clase. Se calcula sumando el límite inferior y el superior de la clase y dividiendo el resultado entre dos.

$$\text{Marca de la clase} = \frac{\text{Límite Inferior de la clase} + \text{Límite Superior de la clase}}{2}$$

Frecuencia Relativa

- La *frecuencia relativa* de una clase es la proporción de la frecuencia de esa clase, respecto al total de frecuencias de la tabla, por ejemplo, si la frecuencia de una clase es 315 y la frecuencia total es 14596, la frecuencia relativa será $315/14596 \approx 0.0216$.
- La *frecuencia relativa* también puede expresarse en porcentaje si se multiplica por 100 la frecuencia relativa en proporción. En el ejemplo anterior será: $(0.0216)(100) = 2.16\,\%$.

Frecuencias acumuladas y complementarias

Frecuencia acumulada

- Las *frecuencias acumuladas* presentan las sumas parciales de todas las frecuencias.
- La *frecuencia acumulada* de una clase se calcula sumando la frecuencia de esa clase con la frecuencia acumulada de la clase anterior (la frecuencia acumulada de la primera clase es la frecuencia de esa clase, y la frecuencia acumulada de la última clase es el total de frecuencias).

Frecuencia complementaria

- La *frecuencia complementaria* indica el complemento o lo que le falta a la frecuencia acumulada.
- La *frecuencia complementaria* de una clase se calcula restando la frecuencia acumulada de la clase a la frecuencia total (la frecuencia complementaria de la última clase es cero, y para cada clase, la suma de la frecuencia acumulada y la frecuencia complementaria es igual al total de frecuencias de la tabla)

Frecuencias acumuladas y complementarias

CLASE	FRECUENCIA	FRECUENCIA ACUMULADA	CLASE	FRECUENCIA	FRECUENCIA COMPLEMENTARIA
1	f_1	$f_1 = f_{a1}$	1	f_1	$F - f_{a1} = f_{c1}$
2	f_2	$f_{a1} + f_2 = f_{a2}$	2	f_2	$F - f_{a2} = f_{c2}$
3	f_3	$f_{a2} + f_3 = f_{a3}$	3	f_3	$F - f_{a3} = f_{c3}$
4	f_4	$f_{a3} + f_4 = f_{a4}$	4	f_4	$F - f_{a4} = f_{c4}$
5	f_5	$f_{a4} + f_5 = f_{a5}$	5	f_5	$F - f_{a5} = f_{c5} = 0$

$$\sum f_i = F$$

Tablas de distribución de frecuencias

Ejercicio: Con base en la tabla de distribución de frecuencias absolutas siguiente, determina la marca de clase, frecuencia acumulada y complementaria

Clase	L.I.	L.S.	Frec.	L.I. (E)	L.S. (E)	Marca	Frec. Acumulada	Frec. Complementaria
A	40	59	385	39.5	59.5			
B	60	79	292	59.5	79.5			
C	80	99	475	79.5	99.5			
D	100	119	129	99.5	119.5			
E	120	139	48	119.5	139.5			

Ejercicio:

Realiza una tabla de distribución de frecuencias que contenga: clases, límite inferior, límite superior, frecuencia, límite inferior (exacto), límite superior (exacto), marca de clase, frecuencia relativa, frecuencia acumulada y frecuencia complementaria. Para los siguientes datos:

$$74, 83, 73, 56, 64, 65, 59, 75, 86, 66, 61, 64, 83, 61, 89, 77, 58, 84,$$

$$78, 72, 68, 76, 57, 58, 85, 87, 68, 80, 82, 85$$

Medidas de tendencia central

Un conjunto de datos puede conocerse numéricamente por medio de algunas medidas que lo describen; por ejemplo, la media y la desviación estándar, entre otras. De esta manera, es posible comparar entre sí varios grupos de datos.

Medidas de tendencia central

- Media, media aritmética o promedio.
- Mediana.
- Moda.
- Promedio ponderado.
- Promedio móvil.
- Media geométrica.
- Cuantiles.

Datos individuales

Media

La *media*, o promedio, es el valor correspondiente a una línea imaginaria que compensa los valores que se exceden de la media y los que quedan por debajo de ella; así, la media es mayor que el valor más pequeño y menor que el valor más grande. Se calcula con la fórmula siguiente:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Propiedades de la media aritmética

1. La suma de las desviaciones o diferencias de cada valor respecto a la media es igual a cero, es decir:
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$
2. La media se afecta sustancialmente hacia arriba o hacia abajo con la presencia de valores extremos (muy grandes o muy pequeños) respecto a la media.

Mediana

La *mediana* es el valor del elemento que ocupa la posición central de los datos individuales, ordenados de menor a mayor (o viceversa); por tanto, es el punto que marca la mitad de valores menores que él, es decir, está a la mitad, con $50\,\%$ de valores a su derecha y $50\,\%$ de valores a su izquierda.

Pasos para calcular la mediana

1. Ordena los datos de menor a mayor o viceversa.
2. Calcula la posición de la mediana usando la fórmula:

$$\text{Posición de la mediana} = \frac{\text{Número de elementos} + 1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

3. Determina el elemento que se halla en la posición central del conjunto de datos. Si la cantidad de éstos es par, debes obtener el promedio del valor de los dos elementos centrales.

Observación: Cuando el número de datos es impar, la posición de la mediana es única.

Moda

La *moda* es el valor más frecuente de un conjunto de datos. A veces se presentan dos o más valores que se repiten con mayor frecuencia. En este caso, a los datos se les conoce como *bimodales* o *multimodales*, respectivamente.

Promedio ponderado

Cuando los valores por promediar tienen diferentes grados de importancia entre sí debe utilizarse, entonces, el *promedio ponderado*, en el que se aplica un factor de ponderación (o importancia relativa) a cada uno de los valores que van a promediarse.

$$\text{Promedio ponderado} = \frac{\sum(x_i \times f_i)}{\text{Número de valores}}$$

Promedio ponderado

Ejemplo:

Al seleccionar a su personal, una empresa considera que los conocimientos tienen una importancia relativa de 50, la puntualidad vale 30 y la presentación cuenta 20. Cinco solicitantes de empleo obtuvieron las calificaciones que se presentan en la tabla siguiente. Determina cuál de ellos obtuvo la mejor calificación global.

Solicitante	Cal. Conocimientos	Cal. Puntualidad	Cal. Presentación	Prom. Simple	Prom. Ponderado
1	10	6	7	7.667	820
2	6	10	8	8.000	760
3	8	9	8	8.333	830
4	9	8	6	7.667	810
5	7	9	10	8.667	820

La calificación global de cada solicitante no es el promedio simple, puesto que los conceptos evaluados tienen diferente importancia entre sí, de manera que hay que aplicar un promedio ponderado.

El solicitante con la mejor calificación global es el tercer solicitante.

Promedio móvil

Promedio móvil

- El *promedio móvil* de m datos es el que resulta de promediar sucesivamente sólo los últimos m datos de un conjunto mayor de datos.
- El *promedio móvil* reduce los datos originales a un conjunto de valores cuyas variaciones son menores que los datos originales, con lo que se reduce el impacto de los valores originales extremos (muy grandes o muy pequeños), y se obtienen promedios más adecuados para efectos de análisis de tendencias.

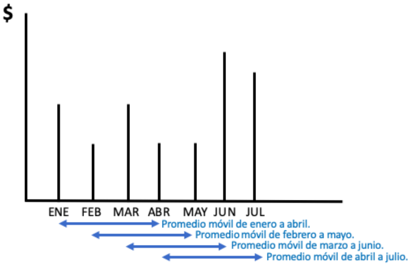
Ejemplo: Con base en los siguientes datos, correspondientes a las ventas mensuales de una empresa, determine el promedio móvil mensual de cuatro meses.

Mes	Ventas
Enero	$\$22\,500$
Febrero	$\$18\,900$
Marzo	$\$23\,700$
Abril	$\$20\,400$
Mayo	$\$20\,800$
Junio	$\$27\,200$
Julio	$\$25\,000$

Solución: El promedio móvil de cuatro meses se calcula como sigue:

$$\text{Promedio móvil de 4 meses} = \frac{\text{Mes } 1 + \text{Mes } 2 + \text{Mes } 3 + \text{Mes } 4}{4}$$

Promedio móvil de enero a abril:	\$21 375
Promedio móvil de febrero a mayo:	\$20 950
Promedio móvil de marzo a junio:	\$23 025
Promedio móvil de abril a julio:	\$23 350



Media geométrica

Ésta es una medida que puede aplicarse al crecimiento exponencial o interés compuesto, pues obtiene la raíz n-ésima de un grupo de n datos multiplicados entre sí. El resultado obtenido, al elevarse a la potencia n-ésima, produce el producto de todos los datos multiplicados entre sí.

Ejemplo: Determine la media geométrica de $6.15, 32.9, 23.8$ y 67.5.

Solución:
El número de datos es cuatro, por lo que se deberá obtener la raíz cuadrada del producto de los cuatro datos.

$$\text{Media geométrica} = \sqrt[4]{(6.15)(32.9)(23.8)(67.5)} \approx 23.877$$

Media armónica

La media armónica de n números se calcula como n dividida entre la suma de los recíprocos de los n números.

$$\text{Media armónica} = \frac{n}{\frac{1}{r_1} + \ldots + \frac{1}{r_n}}$$

Cuantiles

Los cuantiles permiten identificar los valores ubicados en diferentes posiciones de un grupo de datos.

Cuartiles

Los cuartiles (primero, segundo y tercero) señalan el valor que está al 25, 50 y $75\,\%$ de la totalidad de datos (el segundo cuartil equivale a la mediana).

Deciles

Los deciles (del primero al noveno) marcan el valor ubicado al $10, 20, \ldots, 80$ y $90\,\%$ de los datos (el quinto decil equivale a la mediana).

Percentiles

Los percentiles (del primero al nonagésimo nono) indican el valor que está al $1, 2, \ldots, 98$ y $99\,\%$ de los datos. Observe que los deciles primero, segundo, etc., equivalen a los percentiles décimo, vigésimo, etc., y los cuartiles equivalen a los percentiles $25, 50$ y 75.

Fórmulas para obtener los cuantiles

- Cuartiles de datos individuales:

$$\text{Posición del cuartil } i = 1 + \frac{i(n-1)}{4}$$

$$\text{Valor del cuartil } i = \text{Valor del dato en la posición } i$$

- Deciles de datos individuales:

$$\text{Posición del decil } i = 1 + \frac{i(n-1)}{10}$$

$$\text{Valor del decil } i = \text{Valor del dato en la posición } i$$

- Percentiles de datos individuales:

$$\text{Posición del percentil } i = 1 + \frac{i(n-1)}{100}$$

$$\text{Valor del percentil } i = \text{Valor del dato en la posición } i$$

Ejemplo: Determine el valor del tercer cuartil, del cuarto decil y del decimoséptimo percentil de los siguientes 25 valores ordenados:

$$3, 5, 6, 11, 14, 18, 18, 20, 24, 25, 27, 27, 28, 31, 33, 34, 36, 44, 45, 47, 48, 50, 50, 52$$

Estos valores representan las edades, en años, de los pasajeros de un autobús.

Solución:

- La posición del tercer cuartil es la siguiente:

$$\text{Posición de } Q_3 = 1 + \frac{3(25-1)}{4} = 19$$

  El valor que corresponde a la posición 19 es 45, por lo que el valor del tercer cuartil es 45 años.

- La posición del cuarto decil es la siguiente:

$$\text{Posición de } D_4 = 1 + \frac{4(25-1)}{10} = 10.6$$

Solución (cont).
Para determinar el valor que corresponde a la posición 10.6, debe sumarse al valor de la décima posición (25) seis décimas de la diferencia entre el valor de la décima posición y el de la undécima posición $(27 - 25 = 2)$, es decir:

$$25 + 0.6(2) = 26.2$$

El cuarto decil es 26.2 años.

- La posición del decimoséptimo percentil es la siguiente:

$$\text{Posición de } P_{17} = 1 + \frac{17(25-1)}{100} = 5.08$$

Para determinar el valor que corresponde a la posición 5.08, debe sumarse al valor de la quinta posición (14), 8 centésimas de la diferencia entre el valor de la quinta posición y el de la sexta $(18 - 14 = 4)$, es decir:

$$14 + 0.08(4) = 14.23$$

El decimoséptimo percentil es 14.32 años.

Datos agrupados

Media, mediana y moda

La media, la mediana y la moda de datos agrupados son los mismos conceptos que cuando se aplican a datos individuales, aunque su cálculo es más complejo y su exactitud es sólo aproximada en comparación con el cálculo basado en los datos individuales.

Ejemplo: La siguiente tabla presenta la distribución de frecuencias de la edad de los padres o tutores de los alumnos de sexto año de una zona escolar. Determine la media, la mediana y la moda correspondientes.

Clase	L.I. (E)	L.S. (E)	Marca	Frecuencia	F. A.	Contenido (del)	Contenido (al)
1	30.5	35.5	33	3758	3758	1	3758
2	35.5	40.5	38	3635	7393	3759	7393
3	40.5	45.5	43	3084	10477	7394	10477
4	45.5	50.5	48	3796	14273	10477	14273
5	50.5	55.5	53	435	14708	14274	14708

Media para datos agrupados

Media aritmética (o promedio simple)

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(M_j \cdot f_j)}{\sum_{j=1}^{n} f_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(M_j \cdot f_j)}{N}$$

Solución:

$$\text{Media} = \frac{(33)(3758) + (38)(3635) + (43)(3084) + (48)(3796) + (53)(435)}{3758 + 3635 + 3084 + 3796 + 435}$$

$$\text{Media} = \frac{600\,019}{14708} = 40.795 \text{ años}$$

Mediana para datos agrupados

Posición de la mediana

$$= \frac{\sum(\text{Frecuencia de cada clase}) + 1}{2}$$

Solución:

$$\frac{(14\,708 + 1)}{2} = 7354.5$$

Mediana

$$\text{Mediana} = \widetilde{X} = L_{\text{inferior}}(E)_{cm} + \left(\frac{(N/2) - f_{\text{acumulada } cm-1}}{f_i}\right) \cdot \Delta_{cm}$$

Solución:

$$\widetilde{X} = 35.5 + \left(\frac{(14\,708 \div 2) - 3758}{3635}\right) \cdot (5) = 40.45 \text{ años}$$

Moda para datos agrupados

Moda

$$\hat{X} = L_{\text{inferior}}(E)_{mo} + \left(\frac{f_{\text{modal}} - f_{\text{modal}-1}}{2f_{\text{modal}} - f_{\text{modal}-1} - f_{\text{modal}+1}} \right) \cdot \Delta_{mo}$$

donde f_{modal} es la clase más abundante o clase modal.

Solución:

$$\hat{X} = 45.5 + \left(\frac{3796 - 3084}{2(3796) - 3084 - 435} \right) \cdot (5) = 46.37 \text{ años.}$$

- La marca de clase más abundante (en este caso, 48 años) puede considerarse un valor aproximado de la moda.

Cuantiles para datos agrupados

- Cuartiles de datos individuales:

$$\text{Posición del cuartil } Q_i = 1 + \frac{i(n-1)}{4}$$

$$\text{Valor del cuartil } i = L_{j(E)} + \left(\frac{i(N/4) - f_{a_j - 1}}{f_j} \right) \cdot \Delta$$

- Deciles de datos individuales:

$$\text{Posición del decil } D_i = 1 + \frac{i(n-1)}{10}$$

$$\text{Valor del decil } i = L_{j(E)} + \left(\frac{i(N/10) - f_{a_j - 1}}{f_j} \right) \cdot \Delta$$

- Percentiles de datos individuales:

$$\text{Posición del percentil } i = 1 + \frac{i(n-1)}{100}$$

$$\text{Valor del percentil } P_i = L_{j(E)} + \left(\frac{i(N/100) - f_{a_j - 1}}{f_j} \right) \cdot \Delta$$

Medidas de dispersión

Medidas de dispersión para datos individuales

- Rango o amplitud.
- Desviación media.
- Varianza.
- Desviación estándar.
- Coeficiente y porcentaje de variación.
- Coeficiente de asimetría de Pearson

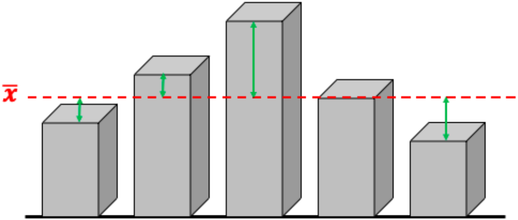
Rango

El rango de un grupo de datos, conocido como *amplitud* es la diferencia entre los valores mayor y menor de los datos. Esta sencilla medida permite identificar la variación máxima entre dos datos del conjunto que se analiza.

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

Desviación media

La primera propiedad de la media indica que la suma de las diferencias de cada valor respecto a la media es igual a cero. Esto es fácil de entender si se considera que los valores mayores que la media son mayores en la misma proporción que los valores menores que la media.



Si se suma el valor absoluto de las diferencias de cada valor respecto a la media y luego se divide entre el número de datos se obtiene el promedio de las diferencias de cada valor respecto a la media. Esta medida se conoce como *desviación media*.

$$\text{Desviación media} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} \mid x_i - \bar{x} \mid$$

Varianza y desviación estándar

La segunda propiedad de la media afirma que la suma de los cuadrados de las diferencias de cada valor respecto a la media es un valor mínimo. Si ese valor se divide entre el número de datos se obtiene una importante medida de dispersión conocida como *varianza*.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \text{Varianza} = \sigma^2$$

- La desviación estándar es una de las medidas de dispersión más utilizadas porque refleja fielmente la medida de las diferencias (elevadas al cuadrado) de cada valor respecto a la media.
- La desviación estándar se calcula como la raíz cuadrada de la varianza, e indica cuán diferentes son entre sí los datos que se analizan

$$\text{desviación estándar} = s = \sqrt{\sigma^2}$$

Ejemplo: Un microbús urbano realizó ayer 15 recorridos por su ruta autorizada, transportando en cada viaje el número de pasajeros que se indica abajo. Determina el rango, la desviación media, la varianza y la desviación estándar del pasaje de dicho microbús. Número de pasajeros por recorrido:

$$13, 14, 15, 9, 5, 9, 2, 14, 10, 6, 10, 11, 13, 14, 14$$

Solución: El rango se calcula utilizando la fórmula:

$$\text{Rango} = X_{\text{max}} - X_{\text{min}} \quad \rightarrow \quad \text{Rango} = 15 - 2 = 13 \text{ pasajeros.}$$

La desviación media se obtiene como sigue:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} \mid X_i - \bar{x} \mid$$

Aunque primero es necesario calcular la media, que como vimos con anterioridad se obtiene con la fórmula:

$$\frac{1}{N} = \sum_{i=1}^{n} X_i = 10.6 \text{ pasajeros.}$$

Por tanto, la desviación media es:

$$\text{DM} = 3.093 \text{ pasajeros.}$$

La varianza puede calcularse así:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2 \quad \rightarrow \quad 13.973 \text{ pasajeros al cuadrado.}$$

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza:

$$\text{Desviación estándar} = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma \quad \rightarrow \quad 3.783 \text{ pasajeros.}$$

Desviación estándar de muestras

- La *varianza* (y, por tanto, la *desviación estándar*) se calcula como la suma de los cuadrados de las diferencias de cada valor respecto a la media, dividida entre el número de datos o valores. Cuando los datos se refieren a una muestra, no a la población, es necesario que la suma de los cuadrados se divida entre el número de datos menos 1 $(n-1)$. Esta varianza modificada se denomina varianza muestral, y consecuentemente su raíz cuadrada produce la desviación estándar muestral.

$$\text{Varianza muestral} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2$$

Ejemplo: Los datos siguientes corresponden al saldo, en miles de pesos, de 15 cuentas bancarias tomadas al azar. Determina la desviación estándar de esta muestra:

$$13, 14, 15, 9, 5, 9, 2, 14, 10, 6, 10, 11, 13, 14, 14$$

Solución: Primero es necesario calcular la media:

$$\text{Media} = \frac{\text{Suma de valores}}{\text{Número de valores}} = \frac{13+14+15+9+5+9+2+14+10+6+10+11+13+14+14}{15}$$

$= \$10\ 600$

Solución (cont.):

$$\text{Varianza muestral} = \frac{(13-10.6)^2 + (14-10.6)^2 + (15-10.6)^2 + \ldots + (14-10.6)^2}{15-1}$$

$$\text{Varianza muestral} = \frac{209.6}{15-1} = \$14.971 \text{ miles de pesos al cuadrado}$$

$$\text{Desviación estándar muestral} = \sqrt{\text{Varianza muestral}}$$

$$\text{Desviación estándar muestral} = \sqrt{14.971} = 3.869 = \$3869$$

Coeficiente y Porcentaje de Variación

Coeficiente de variación

- Es una sencilla medida que permite comparar el grado de dispersión, es decir, qué tan diferentes son, en valor relativo, dos o más conjuntos de datos.

$$\text{Coeficiente de variación} = \frac{\text{Desviación estándar}}{\text{Media}}$$

- Si el coeficiente de variación se multiplica por 100, se convierte en el porcentaje de variación.

Ejemplo: Si la desviación estándar es 8.3 metros y la media es 68 metros. Determine su coeficiente y porcentaje de variación.

Solución:

$$\text{Coeficiente de variación} = \frac{8.3}{60} = 0.122$$

(observe que el coeficiente pierde las unidades de los datos)

$$\text{Porcentaje de variación} = (0.122)(100) = 12.2\,\%$$

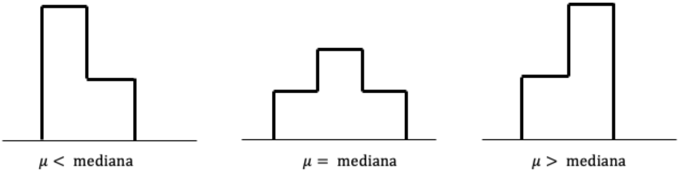
Coeficiente de asimetría de Pearson

La asimetría o sesgo de una distribución de frecuencias expresa su deformación respecto al eje vertical.

- asimetría positiva o derecha (la media es mayor que la mediana)
- asimetría negativa o izquierda (la media es menor que la mediana)
- asimetría nula (la media es igual a la mediana)

La asimetría puede cuantificarse mediante el segundo coeficiente de Pearson:

$$\text{Segundo coeficiente de Pearson} = 3\left(\frac{\bar{X} - \text{mediana}}{\sigma}\right)$$



Puntuaciones estándar

Las puntuaciones estándar son otra forma de comparar entre sí varios grupos de datos; la más común se conoce como puntuación Z y se calcula de la siguiente forma:

$$Z = \frac{\text{Punto de comparación} - \text{Media}}{\text{Desviación estándar}} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z indica la distancia en unidades estándar, del punto de comparación respecto a la media de un grupo de datos.

Ejemplo: Determinar la puntuación Z del valor 18.9, para una población cuya media es 22.643 y cuya desviación estándar es 2.669.

Solución:

$$Z = \frac{18.9 - 22.643}{2.669} = -1.402$$

El resultado anterior significa que el valor 18.9 se localiza a 1.402 unidades estándar a la izquierda de la media de la población.

Medidas de tendencia central para datos agrupados

Rango

$$\text{Rango} = L.S.(E)_{\text{de la última clase}} - L.I.(E)_{\text{de la primera clase}}$$

Varianza

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}[(M_i - \mu)^2 \cdot f_i]}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Desviación estándar

$$\text{Desviación estándar} = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}[(M_i - \mu)^2 \cdot f_i]}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

Ejemplo: La siguiente tabla presenta la distribución de frecuencias de la edad de los padres o tutores de los alumnos de sexto año en una zona escolar. Determine el rango, la varianza y la desviación estándar correspondiente.

Clase	L.I.	L.S.	L.I. (E)	L.S. (E)	Marca	Frecuencia absoluta
1	31	35	30.5	35.5	33	3558
2	36	40	35.5	40.5	38	2135
3	41	45	40.5	45.5	43	3084
4	46	50	45.5	50.5	48	3796
5	51	55	50.5	55.5	53	2135

VI. Distribuciones de Probabilidad

Variables aleatorias

Variable aleatoria

Función definida en un espacio muestral Ω y que toma valores reales. El calificativo *aleatoria* se debe a que regularmente los elementos del espacio muestral Ω son los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Probabilidad de una variable aleatoria

Cuando el espacio muestral es finito, podemos definir una variable aleatoria X en un valor x de Ω como la probabilidad $P(\{x\})$ del evento elemental $\{x\}$. Es decir,

$$X(x) = P(\{x\})$$

La probabilidad $P(x)$ es el valor de la variable aleatoria X en el punto x.

Variables aleatorias

Ejemplo: Al lanzar una moneda, consideramos el espacio muestral $\Omega = \{\acute{a}guila, sol\}$ y la variable aleatoria $X(\acute{a}guila) = 1$, $X(sol) = 0$.

Es decir, X identifica tanto el resultado de obtener *águila* con el número 1, como el resultado de obtener *sol* con el número 0. Consideramos al conjunto $\{0, 1\}$ de los posibles valores que toma X. Como la probabilidad de obtener *águila* al lanzar una moneda es $\dfrac{1}{2}$, entonces la probabilidad de que la variable X tome el valor 1 es $P(1) = \frac{1}{2}$ y, similarmente, $P(0) = \frac{1}{2}$.

Ejemplo: Recordemos el problema de lanzar dos dados y considerar la suma de los números obtenidos.

El espacio muestral es el conjunto de las 36 parejas ordenadas que pueden obtenerse al lanzar los dos dados:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (6,6)\}$$

Un ejemplo de variable aleatoria, en este espacio es la definida como: $X\left((a,b)\right) = a + b$
Así:

$$X((2,4) = 6, \quad X((3,5)) = 8$$

La imagen de X, es decir, el conjunto de valores que puede tomar es:

Valor esperado

Ejemplo (cont.):

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Y la probabilidad con la que X toma cada uno de esos valores es:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Valor esperado

- La *esperanza* o *valor esperado* de X es el valor promedio que obtendríamos si pudiéramos repetir el experimento infinidad de veces.
- Este número se obtiene calculando el promedio ponderado de los valores posibles que toma X, multiplicados por la probabilidad de obtenerlos. Si $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es el conjunto de valores que toma la variable aleatoria X, cada una con probabilidad $p(x_i)$ entonces el valor esperado de X es:

$$E[X] = p(x_1)x_1 + p(x_2)x_2 + \ldots + p(x_n)x_n$$

Ejemplo: Consideremos la variable aleatoria X que toma los valores: 0 (si al lanzar la moneda sale águila) y 1 (si sale sol). ¿Cuál es el valor esperado de X?

Solución: La probabilidad de que salga *águila* o que salga *sol* es $\frac{1}{2}$ en ambos casos, así que:

$$E[X] = \left(\frac{1}{2} \times 0\right) + \left(\frac{1}{2} \times 1\right) = \frac{1}{2} = 0.5$$

Ejemplo: ¿Cuál es el valor esperado de la variable aleatoria X, que toma el valor de la suma de los números obtenidos al lanzar dos dados?

Solución: La probabilidad de obtener los valores $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ al lanzar dos dados es:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

De tal modo que:

$$E[X] = \frac{1}{36}(2) + \frac{2}{36}(3) + \frac{3}{36}(4) + \frac{4}{36}(5) + \frac{5}{36}(6) + \frac{6}{36}(7) + \frac{5}{36}(8) + \frac{4}{36}(9) + \frac{3}{36}(10) + \frac{2}{36}(11) + \frac{1}{36}(12) = 7$$

Medidas de dispersión para variables aleatorias

Varianza para una variable aleatoria

Consideremos una variable aleatoria X y su media $\mu = E[X]$. La varianza de X es la esperanza del cuadrado de la desviación de dicha variable respecto a su media:

$$\nu = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

Otra fórmula para calcular la varianza que, en general, es más fácil es la siguiente:

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

Esto es, la varianza es la diferencia entre la esperanza de la variable X^2 y el cuadrado de la esperanza de X.

Desviación estándar para una variable aleatoria

$$\sigma = \sqrt{Var[X]}$$

Ejemplo: Consideremos el resultado del experimento de lanzar un sólo dado. El espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la variable aleatoria X es el valor obtenido al lanzar el dado $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La probabilidad de obtener cada uno de estos es $p(x) = \dfrac{1}{6}$. ¿Cuál es la varianza de X?

Solución: Primero calculamos el valor esperado de X:

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{6} \frac{i}{6} = \frac{1}{6}(1) + \frac{1}{6}(2) + \frac{1}{6}(3) + \frac{1}{6}(4) + \frac{1}{6}(5) + \frac{1}{6}(6) = \frac{7}{2} = 3.5$$

Vamos a calcular mediante las dos fórmulas que tenemos para la varianza:

$$\nu = E\left[(X - \mu)^2\right] \Rightarrow \sum_{i=1}^{6} \left(x_i - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} \approx 2.92$$

Con la otra fórmula es necesario el cuadrado de la variable X

$$X^2 = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$$

Solución (cont.) como la probabilidad de cada x_i es $\frac{1}{6}$, la probabilidad de x_i^2 también es $\frac{1}{6}$. Entonces calculamos:

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{6} \frac{i^2}{6} = \frac{91}{6}$$

y:

$$E[X]^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4},$$

entonces:

$$Var[X] = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \approx 2.92$$