Aritmética y Álgebra

M. en C. Eduardo Tirado Bueno

última actualización: 29 de agosto de 2024

Información General

Períodos de Evaluación

- 23 de septiembre al 27 de septiembre.
- 04 de noviembre al 08 de noviembre.
- 09 de diciembre al 13 de diciembre.

Lecturas Achieve

- 08 de septiembre al 14 de septiembre
- 06 de octubre al 12 de octubre
- 17 de noviembre al 23 de noviembre

Criterios de Evaluación

- $60\,\%$ Promedio de Exámenes
- $20\,\%$ Tareas
- $10\,\%$ Lectura Achieve
- $10\,\%$ Libreta y Apuntes

Reglas y Acuerdos

- Asistencia, mínimo el $80\,\%$. (3 Faltas por período $=$ SIN DERECHO A EXAMEN).
- Puntualidad
  - Asistencia al iniciar la clase, e.g. (7:00 am).
  - Falta posterior a los 5 minutos de tolerancia, e.g. (después de 7:05 am en adelante).

Información General

Contenido del Curso

I. Números y Operaciones Básicas.
II. Magnitudes y Números Reales.
III. Sumas y Sucesiones de Números.
IV. Operaciones Algebraicas.
V. Ecuaciones Lineales.
VI. Ecuaciones Cuadráticas.

Bibliografía

- **Álgebra**, Carpinteyro, Eduardo, et.al. (2014), 1era Edición, Editorial Patria, México.
- **Matemáticas I**, Cuellar, Juan Antonio (2018), 5ta Edición, Editorial Mc Graw Hill, México.

Números y operaciones básicas

Magnitudes y números reales

Sumas y sucesiones de números

Operaciones Algebraicas

Ecuaciones Lineales

Ecuaciones Cuadráticas

I. Números y Operaciones Básicas

Números reales

- El conjunto de los números **naturales** es:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

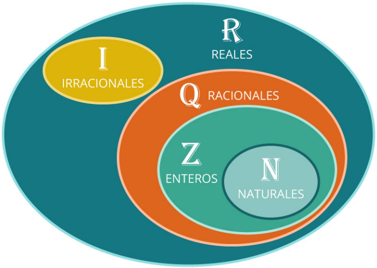
- El conjunto de los números **enteros** es:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números **racionales** consta de todos los números que se pueden expresar como la razón de dos enteros.

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

- El conjunto $\mathbb{I}$ de los números **irracionales** consta de todos los números que no son racionales.



Ejercicio: Determina a qué conjunto pertenecen los números mencionados en las siguientes expresiones.

- En el salón de clases hay 18 mujeres.
- La temperatura es de tres grados bajo cero.
- Decimos que la mitad de la población son mujeres.
- Cuando en un texto de matemáticas dice *sea x un número real*.

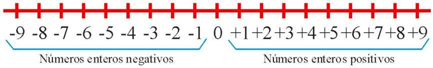
Tipos de Números

- ✓ **Números dígitos**. Forman la base del sistema decimal: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
- ✓ **Número par**. Son los divisibles entre 2: $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \ldots$
- ✓ **Número impar**. Son los **NO** divisibles entre 2: $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots$
- ✓ **Número primo**. Sólo tiene dos divisores, entre sí mismo y la unidad: $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$
- ✓ **Múltiplo de un número**. El múltiplo de un número k, es nk, donde $n \in \mathbb{N}$.

Representación de los números reales en una recta numérica

Recta numérica

Consideremos una línea recta horizontal y elijamos en ella un punto arbitrario, al que llamaremos *origen* (O). Asociemos el número cero con el origen y convengamos en que la dirección positiva se halle a la derecha de O y la negativa a la izquierda.



Utilicemos una unidad de longitud arbitraria y marquemos puntos a una distancia igual de $1, 2, 3, 4, \ldots$ unidades a la derecha de O para representar los números positivos y a la izquierda para los negativos. Así obtenemos una correspondencia uno a uno entre los puntos de la recta y el conjunto de los números enteros.

Relaciones de orden de los números reales

El conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$ se ordena con base en las siguientes relaciones de orden:

- $<$ menor que.
- $>$ mayor que.
- $=$ igual que.

Si a y b son números reales, entonces se tiene lo siguiente:

- Si a es mayor que b, entonces $a - b$ es mayor que cero.
- Si a es menor que b, entonces $a - b$ es menor que cero.
- Si $a = b$, entonces $a - b = 0$.

- **Postulado transitivo**. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$
- **Postulado aditivo**. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a > b$, entonces $a + c > b + c$
- **Postulado multiplicativo**. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a > b$, si $c > 0$, entonces $ac > bc$

Valor absoluto de un número

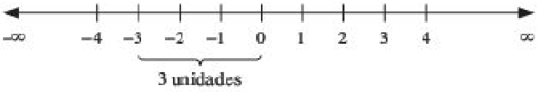
Valor absoluto

Es la distancia que existe desde cero hasta el punto que representa a dicha cantidad en la recta numérica. El valor absoluto de un número a se representa como $|a|$.

Determina el valor absoluto de -3.

Solución: De cero a -3 se observa que hay 3 unidades de distancia, por tanto, el valor absoluto de -3 es igual a 3 y se representa como:

$$|-3| = 3$$



Operaciones fundamentales

Suma

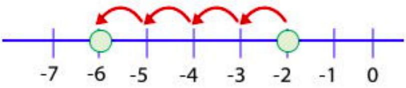
La suma o adición es la operación que tiene por objeto reunir varias cantidades de la misma especie, las cuales se llaman *sumandos*, en una sola cantidad, denominada *suma*.

Propiedades de la suma

- **Conmutativa**. El orden de los sumandos no altera la suma, i.e., $a + b = b + a$ cualesquiera que sean los números reales a y b.
- **Asociativa**. Si se quiere sumar los números reales a, b y c sin cambiar el orden de los sumandos hay dos opciones:
  1. Hallar primero $a + b$ y sumar el resultado con c: $(a + b) + c$
  2. Sumar a con el resultado de la suma de b y c: $a + (b + c)$
- **Elemento Neutro para la suma**. La suma de un número real a y el cero es igual a ese número, o sea $a + 0 = a$
- **Inverso aditivo**. Si se considera un número real a diferente de cero, entonces existe otro número real $(-a)$ tal que la suma de ambos es igual a cero: $a + (-a) = 0$

Suma de números reales en la recta numérica I

La suma de números reales puede ilustrarse con movimientos sobre una recta numérica, como se muestra en seguida:

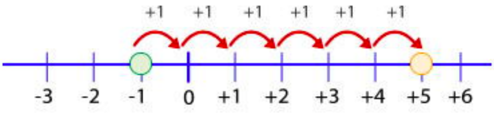


$(-2) + (-4) = -6$

Regla de los signos cuando se suman números reales de igual signo

Cuando se suman dos o más números reales de igual signo se suman sus valores absolutos y al resultado se le antepone el signo común de esos números.

Suma de números reales en la recta numérica II



$$\boxed{(-1) + (+6) = +5}$$

Regla de los signos cuando se suman dos números de signo diferente

Cuando se suman dos números de signo diferente se resta el menor valor absoluto del mayor valor absoluto y al resultado se le antepone el signo del número que tenga mayor valor absoluto.

Ejemplo:

- Resolver $20 + (-15)$
  Solución:
  Como el valor absoluto de 20 es mayor que el de -15, entonces el signo de $20 + (-15)$ es el mismo que tiene el número 20, que es positivo; por tanto,

  $$20 + (-15) = +(20 - 15) = 5$$

- Resolver $8 + (-14)$
  Solución:
  Como el valor absoluto de -14 es mayor que el de 8 el signo de $8 + (-14)$ es el mismo que el de -14, de modo que

  $$8 + (-14) = -(14 - 8) = -6$$

Operaciones fundamentales

Resta

- Si tienes números reales tales que $a = b + c$, se dice que c es la diferencia entre a y b y se escribe $a - b = c$.
- En este caso a recibe el nombre de *minuendo*, b el de *sustraendo* y c el de *resta* o *diferencia*.
- Se dice que la resta es la operación inversa de la suma porque permite, conocida la suma de dos números y el valor de uno de los sumandos, hallar el valor del otro sumando; observa que toda resta puede definirse en términos de la suma:

$$\text{Minuendo} + \text{inverso aditivo del sustraendo} = \text{diferencia}$$

Ejemplo:

- $10 - 7 = 10 + (-7) = 3$
- $2 - 6 = 2 + (-6) = -4$
- $9 - (-3) = 9 + (3) = 12$

Operaciones fundamentales

Multiplicación

- La multiplicación es una operación que tiene por objeto hallar un número, denominado *producto*, a partir de dos o más números, llamados *factores*.
- Si a y b representan dos números reales, entonces la multiplicación de a y b puede representarse mediante cualesquiera de las formas siguientes:
  - ✓ $a \times b$ (en general, esta notación no se emplea en álgebra).
  - ✓ $a \cdot b$
  - ✓ $a(b)$
  - ✓ $(a)(b)$
  - ✓ ab

Propiedades de la multiplicación

- **Ley de unicidad**. El producto tiene un valor único.
- **Conmutativa**. El orden de los factores no altera el producto, i.e., $ab = ba$

Propiedades de la multiplicación

- **Asociativa**. Si a, b y c son tres números reales, entonces: $abc = (ab)c = a(bc)$
- **Elemento neutro**. El producto de todo número por 1 es igual a ese número, de manera que el elemento neutro de la multiplicación es el 1: $(1)(a) = a$
- **Inverso multiplicativo**. Para todo número real a distinto de cero existe un número b, también real, tal que $a \cdot b = 1$. El número b no es otro que $b = \frac{1}{a}$, y se llama inverso multiplicativo de a.
- **Distributiva**. Si a, b y c son números reales cualesquiera, entonces:
  - ✓ $a(b \pm c) = ab \pm ac$
  - ✓ en el caso general: $a(b \pm c \pm d \pm \ldots \pm n) = ab \pm ac \pm ad \pm \ldots \pm an$
- **Cancelación**. Si a, b y c son números reales y se sabe que $ac = bc \rightarrow a = b$
- **Multiplicativa del cero**. Si se multiplica cualquier número real por cero el producto es igual a cero.

Regla de los signos en la multiplicación

1. Si se multiplican dos números reales diferentes de cero y de igual signo el producto es un número real positivo.
2. Si se multiplican dos números reales diferentes de cero y de signo diferente el producto es un número real negativo.
3. De las reglas anteriores se deduce que cuando se multiplican más de dos números diferentes de cero el producto será:
   - ✓ **Positivo** si existe un número par de factores negativos.
   - ✓ **Negativo** si existe un número impar de factores negativos.

División

- La división es la operación inversa de la multiplicación y permite hallar un resultado, llamado *cociente*, a partir de dos cantidades, una llamada *dividendo* y la otra *divisor*.
- Si la división entre dos enteros positivos **NO** es exacta, se determina el múltiplo del divisor más cercano al dividendo y su diferencia con este se llama residuo.

$$\frac{a}{b} \to a = qb + r$$

Observaciones:

- ✓ La división no es conmutativa.
- ✓ El cociente de cero entre cualquier número distinto de cero siempre es igual a cero.
- ✓ La división entre cero no está definida.

Operaciones fundamentales

Potenciación

La potenciación es la operación en la que un número, llamado *base*, se toma como factor tantas veces como lo indica otro número, llamado *exponente*; el resultado de esta operación se llama *potencia* y se representa así:

$$\text{base}^{\text{exponente}} = \text{potencia}$$

Ejemplo:

- $3^2 = 9$, donde la base es 3, el exponente 2 y la potencia 9.
- $2^3 = 8$, donde la base es 2, el exponente 3 y la potencia 8.

De acuerdo con lo anterior, si n es un entero positivo y x un número real, entonces el producto de n factores de x está dado por: $x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$

Leyes de los exponentes

Conviene señalar que si la base es positiva, la potencia será siempre positiva; en cambio, si la base es negativa, la potencia sólo será negativa cuando el exponente sea impar.

Propiedades de los exponentes

- Si x es un número real y n, m son números enteros, entonces:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

- Si x es un número real diferente de cero y n, m son números enteros, entonces:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Observación: $x^0 = 1$, para cualquier número real x.

Leyes de los exponentes

Ejemplo:

- $3^2 \cdot 3 = 3^{2+1} = 3^3 = 27$
- $a^4 \cdot a^3 = a^{4+3} = a^7$
- $b^5 \cdot b^{-2} = b^{5+(-2)} = b^3$

Ejemplo:

- $\frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3 = 125$
- $\frac{2^5}{2^{-2}} = 2^{5-(-2)} = 2^{5+2} = 2^7$
- $\frac{3^2}{3^2} = 3^{2-2} = 3^0 = 1$

Observación:

$$\frac{1}{x^{-n}} = \frac{x^0}{x^{-n}} = x^{0-(-n)} = x^n$$

Propiedades de los exponentes

- Si x es un número real y n, m son números enteros entonces:

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

Leyes de los exponentes

Propiedades de los exponentes

- Si x y y son números reales y n es un entero, entonces:

$$(xy)^n = x^n y^n$$

- Si x y y son números reales con $y \neq 0$ y n es un entero, entonces:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

Ejemplo:

$$(x^2 y z^4)^4 = x^8 y^4 z^{16}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^4 = \frac{x^8}{y^{12}}$$

Radicación

Definición:

La radicación es, por tanto, la operación inversa de la potenciación y tiene como objeto hallar el factor de un producto de varios factores iguales; es decir, permite, cuando se conocen la potencia y el exponente hallar la base correspondiente.

Ejemplo:

- Como $5^3 = 125$, entonces la raíz cúbica de 125 es 5: $\sqrt[3]{125} = 5$
- Como $4^2 = 16$, entonces 4 es raíz cuadrada de 16: $\sqrt{16} = 4$. Como $(-4)^2 = 16$, entonces también -4 es raíz cuadrada de 16.

- En resumen, un número a es raíz cuadrada de b cuando $a^2 = b$; un número a es raíz cúbica de un número b cuando $a^3 = b$ y *así sucesivamente*.
- El signo $\sqrt[n]{c}$ se llama radical; n es un número natural mayor o igual que 2 y se llama *índice del radical*. El número que se halla dentro del radical se denomina *radicando*.

Exponentes racionales

Una expresión radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ puede escribirse como una expresión exponencial utilizando la propiedad siguiente:

- Si m y n son números naturales y a es un número real, entonces:

$$\sqrt[n]{a^m} = |\, a \,|^{m/n}$$

Ejemplo: Transformación de raíces en potencias

- $\sqrt{7} = 7^{1/2}$
- $\sqrt[3]{4^5} = 4^{5/3}$
- $\sqrt[7]{3^5} = 3^{5/7}$

Ejemplo: Transformación de potencias en raíces

- $16^{1/2} = \sqrt{16}$
- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2}$
- $x^{5/9} = \sqrt[9]{x^5}$

Consideremos que en la expresión $\sqrt[n]{b^m}$ ocurra que $m = n$. Entonces: $\sqrt[n]{b^n} = b^{n/n} = b$

Jerarquía de operaciones

Al evaluar expresiones matemáticas es común que varias operaciones (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias) estén combinadas en un mismo problema.

Ejemplo:

$$20 \div 5 + 2 \times 3^2 + 3 - 9 \div 3 =$$

Para obtener el valor correcto de una expresión de este tipo hay que seguir la jerarquía u orden de las operaciones.

1. Evalúa los números con exponente.
2. Efectúa todas las multiplicaciones en el orden en que se presentan de izquierda a derecha.
3. Haz todas las divisiones en el orden en que se presentan de izquierda a derecha.
4. Efectúa todas las sumas en el orden en que se presentan de izquierda a derecha.
5. Haz todas las restas en el orden en que se presentan de izquierda a derecha.

Uso de los signos de agrupación

Generalmente, se usan símbolos o signos de agrupación para dejar bien indicado el orden en que han de resolverse las operaciones. Los signos de agrupación son los paréntesis, los corchetes y las llaves.

Jerarquía de las operaciones con signos de agrupación

1. Evalúa las expresiones indicadas dentro de los signos de agrupación.
2. Si hay signos de agrupación contenidos dentro de otros se evalúan de uno en uno y de dentro hacia fuera.
3. Evalúa los números con exponentes.
4. Efectúa todas las multiplicaciones y divisiones en el orden en que se presentan de izquierda a derecha.
5. Efectúa primero las sumas y en seguida las restas que se presentan de izquierda a derecha.

El máximo común divisor (MCD)

de dos o más enteros es el mayor número entero que es divisor de todos ellos, es decir, es el mayor número entero que divide exactamente a cada uno de ellos.

- Si queremos hallar el MCD de dos o más números pequeños elaboramos una lista de sus divisores o factores, respectivamente, y buscamos entre ellos el mayor.

Ejemplo: Hallar el máximo común divisor de 15 y 24

Solución: Hagamos una lista de divisores de ambos números:

- De 15: $1, 3, 5, 15$
- De 24: $1, 2, 3, 4, 8, 12, 24$

Observa que los factores comunes de 15 y 24 son 1 y 3, y este último es el mayor; por consiguiente, el MCD de 15 y 24 es 3, lo que se escribe así: $\mathrm{MCD}(15, 24) = 3$

Para calcular el MCD de varios números se descomponen simultáneamente en sus factores primos, hasta que ya no tengan un divisor primo en común.

Ejemplo: Encuentra el máximo común divisor de 48, 36 y 60

Solución: Se descomponen simultáneamente en factores primos.

$$\begin{array}{ccc|c} 48 & 36 & 60 & 2 \\ \hline 24 & 18 & 30 & 2 \\ 12 & 9 & 15 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & \end{array}$$

4, 3 y 5, no tienen divisores primos en común, los números primos obtenidos se multiplican y el producto es el resultado; $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. Por consiguiente:

$$\text{M.C.D}(48, 36, 60) = 12$$

Criterios de Divisibilidad

Nos permiten visualizar cuándo un número es divisible entre otro sin efectuar la división. A continuación se enuncian los criterios para los tres primeros números primos:

- Un número es divisible entre 2 cuando su última cifra es cero o un número par.
- Un número es divisible entre 3 si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3.
- Un número es divisible entre 5 cuando su última cifra es 5 o cero.

Ejemplo:

- $20, 12, 114, 336, 468$ son divisibles entre 2, ya que terminan en $0, 2, 4, 6$ y 8, respectivamente.
- 51 es divisible entre 3, ya que $5 + 1 = 6$ y 6 es múltiplo de 3.
- 5215 y 340 son divisibles entre 5, ya que terminan en 5 y 0 respectivamente.

Mínimo Común Múltiplo

El mínimo común múltiplo (mcm)

de dos o más números enteros es el menor de todos los múltiplos comunes a esos dos o más números.

- Un método que se usa para hallar el mcm de dos números naturales es hacer una lista de los múltiplos del número mayor y buscar el menor de ellos que también sea múltiplo de otro.

Ejemplo: Hallar el mínimo común múltiplo de 8 y 12

Solución: Hacemos una lista de los múltiplos de ambos números.

- De 12: 12, 24, 36, 48, $\ldots$
- De 8: 8, 16, 24, 32, $\ldots$

El $m.c.m$ de 8 y 12, lo que se expresa: $m.c.m(8, 12) = 24$

Para calcular el $m.c.m$ de varios números se descomponen simultáneamente en factores primos hasta que los cocientes sean igual a 1, si alguno de los números no es divisible entre el factor dado, se baja y se continúa hasta encontrar el factor primo que lo divida.

Ejemplo: Determina el mínimo común múltiplo de 25, 30 y 150

Solución: Se descomponen los números en factores primos.

25	30	150	2
25	15	75	3
25	5	25	5
5	1	5	5
1	1	1	

Por tanto, el $m.c.m(25, 30, 150)$ es: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$

II. Magnitudes y Números Reales

Razones

En la solución de problemas de la vida real a menudo hay que comparar dos cantidades, es decir, determinar cuántas veces contiene una a la otra. Matemáticamente, comparar las cantidades significa dividir la magnitud de una entre la magnitud de la otra, y el resultado de tal comparación recibe el nombre de *razón*.

- La razón entre dos cantidades a y b puede representarse de estas tres formas:

$$a : b \qquad \frac{a}{b} \qquad a \div b$$

Ejemplo: Si en un salón de clases hay 12 hombres y 4 mujeres.

Solución: La razón de hombres a mujeres es $12 : 4$, lo que significa que en el salón hay 3 hombres por cada mujer.

- El primer término de una razón se llama *antecedente* y el segundo *consecuente*. Así, en la razón $7:6$ el antecedente es el 7 y el consecuente 6.
- Para comparar magnitudes de la misma naturaleza deben expresarse en las mismas unidades de medición.

Ejemplo: Hallemos la razón de 80 centavos a 4 pesos.

Solución: Primero hay que convertir los pesos en centavos:

$$1 \text{ peso} = 100 \text{ centavos; por tanto, } 4 \text{ pesos} = 400 \text{ centavos.}$$

La razón de 80 centavos a 4 pesos es igual a

$$\frac{80\,\mathrm{centavos}}{400\,\mathrm{centavos}} = \frac{1}{5} \to 1:5$$

Ejercicio

En una reunión asistieron 20 hombres y 15 mujeres. Raúl afirma que la razón de hombres a mujeres es $5:3$; Magda, que es $3:4$, y José, que es $4:3$. ¿Quién tiene razón?

- Razones como modelos matemáticos.

Ejemplo: En una escuela, la razón de alumnos respecto a alumnas es de $4:3$. Si en la escuela hay 1400 estudiantes, ¿cuántos alumnos hombres (varones) hay en la escuela?

Solución: La razón de $4:3$ es numéricamente equivalente a la fracción $\frac{4}{3}$.

$$\frac{\text{cantidad de hombres}}{\text{cantidad de mujeres}} = \frac{4}{3} = \frac{4x}{3x}$$

De acuerdo con ello, al simplificar la fracción original se canceló el máximo factor común al numerador y al denominador de la fracción original.

es decir, la cantidad de hombres en términos de x es igual a $4x$ y la cantidad de mujeres es igual a $3x$; por consiguiente

$$4x + 3x = 1400 \to 7x = 1400 \to x = 200$$

Por tanto, la cantidad de hombres es $4(200) = 800$.

Ejemplo: En el grupo A de la preparatoria 2, la razón de hombres a mujeres es $6:5$. Si 24 son varones, ¿cuántas mujeres hay en el grupo?

Solución: En este caso, tenemos la razón siguiente

$$\frac{\text{cantidad de hombres}}{\text{cantidad de mujeres}} = \frac{6x}{5x}$$

Como hay 24 hombres en el grupo A, entonces: $6x = 24 \to x = 4$

Por tanto, hay 20 mujeres en el grupo A de la preparatoria 2.

Proporciones

- En matemáticas, una proporción es una expresión que indica que dos razones son iguales. En términos de fracciones, cuando dos fracciones son equivalentes tenemos una proporción.
- En la proporción
$$a : b = c : d,$$
los términos a y d se llaman extremos, mientras que b y c se denominan medios.

Propiedad de los productos cruzados

La propiedad de los *productos cruzados* establece que el producto de los extremos es igual al producto de los medios. De acuerdo con ella si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \Rightarrow ad = bc$$

Ejemplo: Resolver la proporción $\frac{4}{5} = \frac{8}{x}$

Solución: De acuerdo con la propiedad de los *productos cruzados* tenemos que

$$4x = (5)(8) \quad \rightarrow \quad 4x = 40 \quad \rightarrow \quad x = 10$$

Se puede comprobar al sustituir el valor de x en la proporción original.

- Proporciones como modelos matemáticos

Ejemplo: El costo por alfombrar una habitación de 20 metros cuadrados (m^2) fue de \$$1700$. ¿Cuánto cuesta alfombrar una habitación de $32\,\mathrm{m}^2$ con el mismo tipo de alfombra?

Solución: Como se observa, este es un problema de proporciones porque describe dos razones que son equivalentes. Las dos razones indicadas en el problema implican: (1) un costo por alfombrar y (2) una superficie medida en metros cuadrados.

$$\frac{\text{alfombrar } 20\,\mathrm{m}^2}{\$1700} = \frac{\text{alfombrar } 32\,\mathrm{m}^2}{¿\text{costo}? = x}$$

$$\frac{20}{1700} = \frac{32}{x}$$

Luego, según la propiedad de los productos cruzados tenemos que

$$20x = (32)(1700)$$

Para despejar x, debemos dividir ambos miembros de la ecuación anterior entre 20, con lo que queda

$$x = \frac{54400}{20} = 2720$$

Por tanto, alfombrar $32\,\mathrm{m}^2$ cuesta $\$2720$.

Para comprobar si el resultado es correcto observa que alfombrar un metro cuadrado tiene un costo de $\$85$.

El porcentaje es otra forma de expresar una fracción, sólo que en lugar de referirse a las partes que se toman de un entero, se indica el número de tantos que se toman de cada 100 (tantos por cien); es decir, se trata de una comparación por cien.

Ejemplo:

El porcentaje de $\frac{40}{100}$ se escribe $40\,\%$, donde el símbolo $\%$ se lee **por ciento**.

- Cuando expresamos un porcentaje en forma de fracción esta debe tener siempre el término 100 como denominador.
- Observa que si tenemos una fracción, para expresarla como porcentaje se multiplica la fracción por 100 y a la derecha del producto se escribe el símbolo $\%$, es decir

$$\frac{a}{b} = (100)\left(\frac{a}{b}\right)\,\%$$

De por ciento a decimales y de decimales a por ciento

- Para expresar un porcentaje como número decimal primero se elimina el signo de porcentaje (%) y luego se recorre el punto decimal dos lugares a la izquierda, ya que lo que estamos haciendo es dividir el valor del porcentaje entre 100.
- A la vez, para convertir un número decimal a porcentaje se recorre el punto decimal dos lugares a la derecha, ya que lo que estamos haciendo es multiplicar el valor decimal por 100

Ejemplo:

- $26\,\% = 0.26$
- $150\,\% = 1.5$
- $17.8\,\% = 0.178$
- $5\,\% = 0.05$
- $1.2\,\% = 0.012$

Ejemplo:

- $0.72 = 72\,\%$
- $0.48 = 48\,\%$
- $0.03 = 3\,\%$
- $0.005 = 0.5\,\%$

Hallar $25\,\%$ de 104

Solución: El $100\,\%$ corresponde a 104; por tanto, $25\,\%$ corresponde a x. Como $25\,\%$ es una comparación del número x con 104 y hemos visto que una comparación puede representarse como una razón es establece la proporción siguiente:

$$\frac{25}{100} = \frac{x}{104}$$

De acuerdo con la propiedad de los productos cruzados:

$$(25)(104) = 100x \to x = 26$$

Por tanto, $25\,\%$ de 104 es 26.

Proporción porcentual

¿Cuánto por ciento es 50 de 250?

Solución: Si x representa el tanto por ciento de 250, cuyo número correspondiente es 50 cuando se forma la proporción, entonces tenemos que

$$100\,\% \text{ corresponde a } 250$$

$$x\,\% \text{ corresponde a } 50$$

De acuerdo con esta información, 250 es a 100 como 50 es a x, de forma que podemos escribir la proporción

$$\frac{250}{100} = \frac{50}{x} \to x = 20$$

Entonces, 50 es $20\,\%$ de 250.

Porcentaje de aumento

- Cuando un aumento o una disminución se escribe como porcentaje este recibe el nombre de *porcentaje de aumento o de disminución*, según sea el caso.
- Para encontrar el porcentaje de aumento expresado en forma decimal:

$$\text{Porcentaje de aumento (en decimal)} = \frac{\text{cantidad nueva} - \text{cantidad original}}{\text{cantidad original}}$$

Ejemplo: Luis gana \$2500 por semana, pero a partir del próximo mes recibirá \$2650. ¿Cuál es el porcentaje de aumento de salario que obtuvo Luis?

Solución: En este caso tenemos un porcentaje de aumento, de manera que escribimos

$$\text{Porcentaje de aumento} = \frac{2650 - 2500}{2500} = \frac{150}{2500} = 0.06$$

$$\text{Porcentaje de aumento} = 0.06 \times 100\,\% = 6\,\%$$

Luis recibió, por ende, $6\,\%$ de aumento salarial.

Porcentaje de disminución

- Para hallar el porcentaje de disminución en forma decimal:

$$\text{Porcentaje de disminución (en decimal)} = \frac{\text{cantidad original} - \text{cantidad nueva}}{\text{cantidad original}}$$

Ejemplo: Martha compró un perfume nuevo cuyo precio de lista es de \$$400$. Al llegar a la caja pagó \$$340$. ¿Cuál fue el porcentaje de descuento?

Solución: En este caso queremos hallar un porcentaje de disminución; por consiguiente,

$$\text{Porcentaje de disminución} = \frac{400 - 340}{400} = 0.15$$

$$\text{Porcentaje de disminución} = 0.15 \times 100\,\% = 15\,\%$$

A Martha le hicieron $15\,\%$ de descuento del precio de lista del perfume.

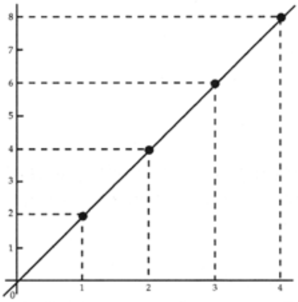
Variaciones de Proporcionalidad

Variación directamente proporcional

Una magnitud y es directamente proporcional a la magnitud x si para $x \neq 0$ la razón es constante, es decir,

$$\frac{y}{x} = k$$

donde la constante k recibe el nombre de *constante de proporcionalidad* o *constante de variación*.



- De acuerdo con lo anterior, en una relación directamente proporcional el valor de una magnitud aumenta en la misma proporción que crece la otra; y a la inversa, disminuye en la misma proporción que lo hace la otra.
- Si x e y son las magnitudes directamente proporcionales con sus respectivos valores $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = \frac{y_n}{x_n} = k$$

Ejemplo:

Según la ley de Boyle, cuando la presión de un gas es constante, el volumen (V) que ocupa el gas es directamente proporcional a su temperatura absoluta (T). Si a una temperatura de 54 grados kelvin (K) un gas ocupa un volumen de 30 metros cúbicos (m^3), ¿cuál es el volumen en m^3 que ocuparía el gas a una temperatura de $180\ \mathrm{K}$?

Solución: De acuerdo con el enunciado del problema, el volumen (V) es directamente proporcional a la temperatura absoluta (T), lo que en símbolos matemáticos significa

$$k = \frac{V}{T} \rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{30\ \mathrm{m}^3}{54\ \mathrm{K}}$$

Como la relación entre las magnitudes es directamente proporcional,

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \rightarrow \frac{30\ \mathrm{m}^3}{54\ \mathrm{K}} = \frac{V_2}{180\ \mathrm{K}} \qquad V_2 = 100\ \mathrm{m}^3$$

Por tanto, cuando la temperatura del gas es $180\ \mathrm{K}$ el gas ocupa un volumen de $100\ \mathrm{m}^3$

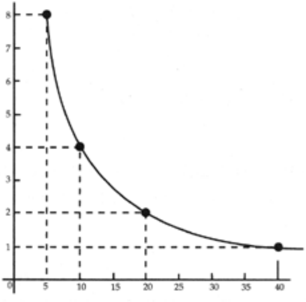
Variaciones de Proporcionalidad

Variación inversamente proporcional

La magnitud y es inversamente proporcional a la magnitud x si y es directamente proporcional al recíproco de x, es decir,

$$y = k\left(\frac{1}{x}\right)$$

donde al resolver para k resulta $k = xy$, con k la constante de proporcionalidad inversa.



- De acuerdo con lo anterior, en una relación inversamente proporcional al aumentar el valor de x disminuye el valor de y. En este caso, la relación entre las variables es inversa.
- Asimismo, el producto $xy = k$ siempre es constante.

Ejemplo:

De acuerdo con la ley de Boyle, el volumen (V) de un gas que se halla a temperatura constante es inversamente proporcional a la presión (P) a que está sujeto. Si a una presión de 24 libras por pulgada cuadrada $(\mathrm{lb/pulg^2})$ el volumen de un gas es de 690 pies cúbicos $(\mathrm{ft^3})$, ¿qué volumen ocuparía el mismo gas si estuviera sujeto a una presión de $144\ \mathrm{lb/pulg^2}$?

Solución: Como la relación entre las variables es inversamente proporcional

$$PV = k \to P_1V_1 = P_2V_2$$

Al sustituir en la ecuación los valores que tenemos en la tabla queda

$$k = (24)(690) = 16560$$

Entonces

$$(144)(V_2) = 16560 \to V_2 = 115\ \mathrm{ft}^3$$

Para una presión de $144\ \mathrm{lb/pulg^2}$, el gas ocupa un volumen de $115\ \mathrm{ft}^3$ cuando su temperatura permanece constante.

III. Sumas y Sucesiones de Números

Sucesiones

Definición

Una *sucesión* es una lista de números ordenados de acuerdo con una regla:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

donde a_1 es el primer término; a_2 es el segundo término y, en general, a_n es el $n-$ésimo término de la sucesión.

- Las sucesiones pueden ser de dos tipos: aritméticas y geométricas.

Sucesión Aritmética

Aquella en la cual la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante.

- Las sucesiones trabajan sobre los naturales pero el resultado es un número real.
- El término general de una sucesión aritmética se calcula con la fórmula:

$$an + b \quad a \text{ y } b \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo: Calcula la expresión algebraica general de la sucesión: $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

Solución: Observa que la diferencia entre cada término es 2 y por lo tanto la expresión puede iniciar como $2n$ sólo falta determinar cuánto valdría b, para ello calculémoslo de alguno de los términos:

$$2n + b = 3 \quad \text{observa que es el segundo término entonces } n = 2$$

$$2(2) + b = 3 \rightarrow b = -1$$

Entonces la expresión general será:

$$a_n = 2n - 1$$

- La suma de n términos de la sucesión aritmética se calcula con la fórmula:

$$(a + b) + (2a + b) + (3a + b) + \ldots + (na + b) = \frac{a}{2}n(n + 1) + bn$$

Ejemplo: Dada la sucesión $8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, \ldots$

- ✓ **Calcula el término** 20 **de la sucesión.**
- ✓ **Calcula la suma de los primeros** 10 **términos de la sucesión.**

Solución: Primero debemos calcular las constantes a y b. La diferencia entre cualquier par de términos es 3, entonces $a = 3$, el término general va tomando la siguiente forma: $3n + b$. Para calcular el valor b utilizamos el primer término, en donde $n = 1$, entonces:

$$3(1) + b = 8 \rightarrow b = 5$$

Por lo tanto, el término general de la sucesión es: $a_n = 3n + 5$
Una vez que hemos calculado esto podemos entonces calcular el término 20 de la sucesión, que es lo que piden:

$$3(20) + 5 = 65$$

Tenemos entonces que el valor 20 que nos piden es 65.

Para calcular la suma de los primeros 10 tenemos que sustituir los valores $a = 3$, $b = 5$ y $n = 10$ en:

$$\frac{a}{2}n(n+1) + bn \to \frac{3}{2}(10)(10+1) + (5)(10) = 215$$

Por tanto, la suma de los primeros 10 términos es: 215.

Ejercicio:

Dada la sucesión: $-13, -19, -25, -31, -37, -43, -49, -55, \ldots$

- ✓ Calcula el término 10.
- ✓ La suma de los primeros 20 términos de la sucesión.

Sucesión Geométrica

Sucesión Geométrica

Aquella en la cual el cociente entre dos términos consecutivos es una constante.

- La fórmula para el término general de una sucesión geométrica es:

$$a \cdot r^{n-1}$$

  donde:

  - a y r son constantes.
  - r es el cociente entre un término y el anterior.
  - n es el número del término deseado.

- Para calcular la suma de n términos de la sucesión geométrica:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Ejemplo: Dada la sucesión: $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \ldots$

✓ **Calcula el término 10 de la sucesión.**

Solución: El cociente o división entre dos términos consecutivos de la sucesión es $r = 2$, entonces la forma del término general sería:

$$(a)2^{n-1}$$

Para encontrar el valor de a podemos utilizar el primer término, en donde $n = 1$:

$$(a)2^{0} = 3 \rightarrow a = 3$$

De aquí tenemos que el término general de la sucesión es:

$$(3)2^{n-1}$$

Para encontrar el término 10 de la sucesión, sustituimos 10 en la fórmula anterior:

$$(3)2^{10-1} = (3)2^{9} = 1536$$

✓ **Calcula la suma de los primeros 10 términos.**

Solución: Para calcular la suma de los primeros 10 términos de esta sucesión sustituimos los datos $a = 3$, $r = 2$ y $n = 10$ en la fórmula:

$$\frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{(3)(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 3069$$

La suma de los primeros 10 términos de la sucesión es 3069.

Ejercicio:

Dada la sucesión: $0.5, -1.5, 4.5, -13.5, 40.5, -121.5, 364.5, \ldots$

✓ Calcula el término 12 de la sucesión.

✓ Calcula la suma de los primeros 10 términos.

IV. Operaciones Algebraicas

Término algebraico

Es una expresión compuesta por números y letras (las cuales también representan números) relacionados entre sí mediante las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplo:

- $5x \rightarrow$ el producto del número 5 por el número literal x.
- $3ab \rightarrow$ el triple producto del número literal a por el número literal b.
- $4x^2 \rightarrow$ el producto del número 4 por el cuadrado del número literal x.
- $\sqrt{5x} \rightarrow$ la raíz cuadrada del producto de 5 por el número literal x.

Elementos de un término algebraico

Signo de un término

Respecto al signo de un término, será negativo si le precede el signo menos $(-)$ y positivo si le precede el signo más $(+)$. En caso de que se omita el signo de un término, se considera que tiene signo positivo.

Coeficiente numérico

Si un término algebraico es el producto de un número por una o más literales, dicho número es su coeficiente numérico.

Parte literal

La parte literal la constituyen las letras del término algebraico con sus respectivos exponentes.

Término	Coeficiente numérico	Parte literal
$9x^3$	9	x^3
a^5b	1	a^5b
$-xy^2$	-1	xy^2

Grado

- El grado **absoluto** de un término es la suma de los exponentes de sus factores literales.
- El grado de un término **respecto a una variable** es el exponente de dicha variable.

Ejemplo:

Determinemos el grado absoluto de los términos algebraicos siguientes:

- $-6x^2y$ el grado es 3.
- $2x^4y^3$ el grado es 7
- m^2y^2 el grado es 4.

Modelado matemático

En la resolución de problemas matemáticos se requiere escribir una expresión algebraica que represente un enunciado verbal y viceversa.

Enunciado verbal	Expresión o modelado algebraico
El doble de un número	$2x,\ 2y,\ 2z$ etc.
La diferencia de dos números	$a-b,\ x-y,\ w-m$ etc.
La raíz cuadrada de un número	$\sqrt{x},\ \sqrt{a},\ \sqrt{y}$ etc.
El triple del cubo de un número	$3x^3,\ 3a^3,\ 3y^3$ etc.
El producto de dos números	$ab,\ xy,\ mn$ etc.
El cociente de dos números	$\frac{x}{y},\ \frac{a}{b},\ \frac{m}{n}$ etc.
El doble de un número disminuido en 5	$2x-5,\ 2a-5,\ 2m-5$ etc.

Ejercicios: expresa en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

- Un número disminuido en tres.
- El triple de un número excedido en ocho.
- El cociente de dos números cualesquiera.
- Tres números enteros pares consecutivos.
- El cuadrado de la suma de dos números cualesquiera.
- La suma de los cuadrados de dos números cualesquiera.
- La raíz cúbica de la diferencia de dos números cualesquiera.
- La suma de las raíces cuadradas de dos números cualesquiera.
- Diez unidades menos que cinco veces un número.
- La sexta parte de la suma de dos números.

Términos semejantes

Términos semejantes

Son los que tienen las mismas letras afectadas de iguales exponentes, es decir, tienen la misma parte literal.

Ejemplo:

- $-3n^2$ y $\frac{5}{4}n^2$
- $6x^2yz^4$ y $-8x^2yz^4$
- $9xw^2$ y $-8xw^2$

✓ Los términos $6nm^3$ y $8n^2m$, no son semejantes, pues si bien tienen las mismas literales, estas no tienen los mismos exponentes.

✓ Los términos ab^5 y mn^5, no son semejantes, si bien tienen los mismos exponentes, las literales no son las mismas.

Reducción de términos semejantes

- Esta operación consiste en sustituir dos o más términos semejantes por uno sólo, que resulta de la suma o de la resta de sus coeficientes numéricos multiplicados por su parte literal.
- Para realizar la reducción de términos semejantes se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación.

Ejemplo:

✓ $5a + 7a = a(5 + 7) = 12a$

✓ $6x^2 - x^2 = x^2(6 - 1) = 5x^2$

✓ $3b - 5b = b(3 - 5) = -2b$

✓ $-3y - 6y = y(-3 - 6) = -9y$

✓ $-8a + 3a - 6a + a = a(-8 + 3 - 6 + 1) = a(-10) = -10a$

- Observa cómo en todos los casos las operaciones de suma y resta separan términos semejantes.

Reducción de términos semejantes

Ejemplo

Reduce la expresión:

$$-10x^{2a}y^6 + 5x^{2a}y^6 - 6x^{2a}y^6 + 11x^{2a}y^6 = (-10 + 5 - 6 + 11)x^{2a}y^6 = 0x^{2a}y^6 = 0$$

Ejemplo:

Reduce la expresión:

$$\frac{1}{2}a^3b - 3ab^3 - 5a^3b + \frac{3}{4}ab^3 - \frac{2}{3}a^3b = \left(\frac{1}{2} - 5 - \frac{2}{3}\right)a^3b + \left(-3 + \frac{3}{4}\right)ab^3$$

$$= -\frac{31}{6}a^3b - \frac{9}{4}ab^3$$

Ejercicios: Simplifica las siguientes expresiones:

- $5a^2 - 7a^2 + 3a^2 - 2a^2 =$
- $-m + n + m + n =$
- $-3a^{x+1} + 2a^{x+1} - a^{x+1} + 2a^{x+1} =$
- $0.25b - 0.4b + 0.2b =$
- $4m^{x+2} - 10m^{x+2} + 3m^{x+2} =$
- $8x - 3y - 9x + 5y - 2x + y =$
- $10a - 7b + 4a + 5b - 14a + 3b =$
- $12a^2b + 3ab^2 - 8a^2b - 10ab^2 - 3a^2b + 6ab^2 =$
- $9a^3b^2c - 5a^2bc^2 - 12a^3b^2c + 3a^2bc^2 + 4a^3b^2c =$
- $-3x^2 + 2y^2 - 7 + 10x^2 - 12y^2 + 15 =$

Valor numérico

El valor numérico de una expresión algebraica se obtiene al sustituir a las literales o letras con sus respectivos valores numéricos y entonces se realizan las operaciones indicadas siguiendo la jerarquía de operaciones.

Ejemplo: Determina el valor numérico de la expresión: $x^4y^2z^3$, si $x = 4$, $y = 3$, $z = \frac{1}{2}$.

Solución: Se sustituyen los respectivos valores de x, y, z y se efectúan las operaciones indicadas para obtener el valor númerico de la expresión:

$$x^4y^2z^3 = (4)^4(3)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = (256)(9)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{2304}{8} = 288$$

Entonces, el resultado: 288

Ejemplo: ¿Cuál es el valor numérico de $\frac{5x^2}{3} - \frac{2xy}{5} + \frac{y}{3x}$ si $x = 2$, $y = \frac{1}{4}$?

Solución: Al sustituir los respectivos valores y realizar las operaciones indicadas:

$$\frac{(5)(2)^2}{3} - \frac{(2)(2)\left(\frac{1}{4}\right)}{5} + \frac{\frac{1}{4}}{(3)(2)} = \frac{(5)(4)}{3} - \frac{\frac{4}{4}}{5} + \frac{\frac{1}{4}}{6} = \frac{20}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{24} = \frac{781}{120}$$

Por tanto, el valor numérico de la expresión es igual a: $\frac{781}{120}$.

Ejemplo: Encuentra el valor numérico de $3m^2 - 2mn + n^2p$; si $m = -3$, $n = 4$, $p = -5$.

Solución: Al sustituir los respectivos valores y realizar las operaciones indicadas:

$$3(-3)^2 - 2(-3)(4) + (4^2)(-5) = (3)(9) - 2(-3)(4) + (16)(-5) = 27 + 24 - 80 = -29$$

Por consiguiente, el valor numérico es -29.

Ejercicios: Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones si:

$$m = -2,\ n = 3,\ p = \frac{1}{4},\ x = \frac{1}{3},\ y = 10,\ z = \frac{1}{2}$$

- $$\frac{m^n}{32} - p^n + z^n$$
- $$(m - n)(p - x)$$
- $$(6x - 2p)(3m^2 - z^3)$$
- $$\frac{2(p - x)}{z} \div \frac{m^2 + n^2}{p}$$
- $$\frac{5\sqrt{m^2 n^2}}{2} + \frac{3\sqrt{6 + y}}{4} - 3\sqrt{p}$$

Polinomios

Definición:

Un *polinomio* es cualquier expresión algebraica constituida por un conjunto finito de términos, en cada uno de los cuales aparecen números y letras relacionadas sólo mediante productos y potencias de exponentes que son números naturales.
De acuerdo con el número de términos que tienen, los *polinomios* se clasifican como

- Monomio: consta de un sólo término.
- Binomio: consta de dos términos.
- Trinomio: consta de tres términos.

Ejemplo:

- $x^2 - 7x + 6$
- $3x^2y - 5ab^6 + 7n^4$
- $6ab^2 - 15ab^4 - 6ab^5$

Suma de polinomios

Suma

Para sumar dos o más polinomios primero es aconsejable reducir los términos semejantes de los polinomios que se suman. Para ello pueden escribirse los polinomios en renglones sucesivos de forma que los términos semejantes queden en una misma columna y a continuación se reducen términos semejantes.

- Es importante que los polinomios que se suman se ordenen todos respecto a una misma letra, ya sea en forma descendente o ascendente, es decir, que los exponentes de una letra escogida vayan aumentando o disminuyendo de uno en uno

Ejemplo: Sumar $(-x^4+4x^3+6x^2-9x-8)+(-x^4+x^3-4x^2+2x-5)$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & -x^4 & +4x^3 & +6x^2 & -9x & -8 \\
+ & -x^4 & +x^3 & -4x^2 & +2x & -5 \\
\hline
 & -2x^4 & 7x^3 & 2x^2 & -7x & -13
\end{array}
$$

Resta de polinomios

Resta

En principio, toda resta de polinomios puede expresarse como una suma aplicando la regla siguiente

$$x - y = x + (-y)$$

En otras palabras, para restar dos polinomios se suma el minuendo con el inverso aditivo del sustraendo.

- Para obtener el inverso aditivo de un polinomio se cambian los signos de todos sus términos; mejor dicho, se multiplican estos por -1.

Ejemplo: Restar $(-10x^4 + 8x^3 + 5x^2 - 7x - 4)$ **de** $(-6x^4 - x^3 + 10x^2 + x - 10)$

$$\begin{array}{cccccc} & -6x^4 & -x^3 & +10x^2 & +x & -10 \\ + & +10x^4 & -8x^3 & -5x^2 & +7x & +4 \\ \hline & 4x^4 & -9x^3 & +5x^2 & +8x & -6 \end{array}$$

Ejemplo: Dados los polinomios siguientes, restemos C de la suma de A y B

- $A = 8a + 3x - 4y - 6$
- $B = 3y - 7x - a - 10$
- $C = 8 + y - x + 5a$

Solución:

$$\begin{array}{ccccc} A: & 8a & +3x & -4y & -6 \\ B: & -a & -7x & +3y & -10 \\ -C: & -5a & +x & -y & -8 \\ \hline (A+B)-C= & 2a & -3x & -2y & -24 \end{array}$$

Ejercicios: Resta el segundo polinomio del primero.

- ✓ $a^3 - 6b^2 - c^0;\ 3c^3 + 6b^2 - 2a^3$
- ✓ $x^2 - 3x + y + 6;\ -12 - 6y + 2x + 2x^2$

Multiplicación de polinomios

Multiplicación

Respecto a la multiplicación de polinomios conviene que empecemos por distinguir tres casos:

- multiplicación de monomios.
- multiplicación de un monomio por un polinomio.
- multiplicación de un polinomio por un polinomio.

Multiplicación de dos o más monomios

1. Se determina el signo del producto.
2. Se multiplican los coeficientes numéricos.
3. Se multiplican las partes literales aplicando las leyes de los exponentes.

$$x^m x^n = x^{n+m}; \quad (x^n)^m = x^{nm}$$

Ejemplo:

- $(-6m^2n^4y)(-2mn^2y^4) = (-6)(-2)(m^{2+1})(n^{4+2})(y^{1+4}) = 12m^3n^6y^5$
- $(-3x^2y^4)^3 = (-3)^3(x^2)^3(y^4)^3 = -27x^6y^{12}$
- $(-2a^3b^2c^5)^3 = (-2)^3(a^3)^3(b^2)^3(c^5)^3 = -8a^9b^6c^{15}$
- $(3x^{2a-1}y^{3a})(-2x^{4a-3}y^{2a}) = -6x^{2a-1+(4a-3)}y^{3a+2a} = -6x^{6a-4}y^{5a}$

Ejercicios: Realiza las siguientes multiplicaciones

- $(6a^3b)(2ab^5) =$
- $(-4m^2b)(-5m^3b) =$
- $(-4a^3b^2)^3 =$
- $(6x^2y)(-9x^5) =$
- $(4a^2b)(-5ab^3)(-2a^2b^4c) =$
- $(-2x^2yz^3)^3(-2x^3y)^2 =$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para efectuar esta operación se utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación, la cual, postula lo siguiente:

$$a(b \pm c \pm d \pm \ldots \pm k) = ab \pm ac \pm ad \pm \ldots \pm ak$$

En los ejemplos que siguen se muestra cómo aplicar esta propiedad al multiplicar un monomio por un polinomio.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(-3a^2b)(5a^3 - b^2 + 4 &= (-3a^2b)(5a^3) + (-3a^2b)(-b^2) + (-3a^2b)(4) \\ &= -15a^5b + 3a^2b^3 - 12a^2b\end{aligned}$$

Ejercicios: Realiza las multiplicaciones que se indican

- $(4y^2)(y^3 - 5y^2 + y - 1) =$
- $(-2a^3b)(a^3 - 2a^2b^2 - 6ab^3) =$
- $(7x^2)(x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x - 5) =$
- $(-5xy^3)(2x^3 - x^2y - 6) =$

Multiplicación de un polinomio por un polinomio

- Si bien la multiplicación de polinomios puede hacerse como en el ejemplo anterior, al multiplicar dos polinomios se acostumbra escribirlos en dos renglones y multiplicar uno a uno los términos del polinomio que se encuentra en el renglón inferior por el polinomio que se encuentra en el renglón superior y luego reducir términos semejantes.
- Es importante ordenar los términos semejantes que resultan del producto en una misma columna para así facilitar la reducción.

Ejemplo: Multiplicar $(2x-5)(4x^3-7x^2+2x-3)$

Solución: Acomodemos los polinomios en dos renglones y hagamos la operación:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 4x^3 & -7x^2 & +2x & -3 & \\
\times & & & 2x & -5 & \\
\hline
 & 8x^4 & -14x^3 & +4x^2 & -6x & \\
+ & & -20x^3 & +35x^2 & 10x & +15 \\
\hline
 & 8x^4 & -34x^3 & +39x^2 & -16x & +15
\end{array}
$$

Ejemplo: Multiplicar $(5x^2-3x-2)(-3x^2+4x-6)$

Solución:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 5x^2 & -3x & -2 & & \\
\times & -3x^2 & +4x & -6 & & \\
\hline
 & -15x^4 & +9x^3 & +6x^2 & & \\
+ & & +20x^3 & -12x^2 & -8x & \\
 & & & -30x^2 & +18x & +12 \\
\hline
 & -15x^4 & +29x^3 & -36x^2 & +10x & +12
\end{array}
$$

Ejemplo:

$$(5x^4y - 3x^2y^3 - 6xy) \times (3x^4y - 4x^2y^3 + 3xy)$$

(resolver en el pizarrón.)

Ejercicios: Resuelve las multiplicaciones que siguen

- $(6y - 5)(4y^3 - 5y^2 - 3x + 4)$
- $(4b - 3)(6b^3 - b^2 - 7b - 1)$
- $(2x^2 - 5x - 3)(3x^2 + 2x - 5)$
- $(5x^2 - 7y^2 - 4xy)(3x - 2y)$
- $(4b^2 - 9a^2 - 4ab)(3a - 7b)$
- $(2a^3 - 3a + 4)(2a - 1)$
- $(5x^4 - 3x^2 - 6)(3x - 4)$
- $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 1)$

División de un monomio entre otro monomio

Cuando se dividen monomios, primero se realiza la división de los coeficientes y después se aplica la ley de los exponentes para las bases.

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}; \quad x^0 = 1; \quad x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

Si la división de los coeficientes no es exacta, entonces se deja especificada; si las bases no son iguales, entonces se deja expresado el cociente.

Ejemplo:

$$\frac{-16a^5b^4c^6}{8a^2b^3c} = -\frac{16}{8}a^{5-2}b^{4-3}c^{6-1} = -2a^3bc^5$$

Ejemplo:

$$\frac{-10x^7y^6c}{-6x^2y^2c} = \frac{5}{3}x^{7-2}y^{6-2}c^{1-1} = \frac{5}{3}x^5y^4c^0 = \frac{5}{3}x^5y^4$$

Ejemplo:

$$\frac{-xyz}{-xyz} = x^{1-1}y^{1-1}z^{1-1} = x^0y^0z^0 = 1$$

Ejemplo:

$$\frac{8x^{3a-1}y^{5a-4}}{2x^{2a+3}y^{3a-1}} = 4x^{3a-1-(2a+3)}y^{5a-4-(3a-1)} = 4x^{a-4}y^{2a-3}$$

División de un polinomio entre un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio se aplica la propiedad distributiva de la división, es decir, se divide cada término del polinomio entre el monomio.

Ejemplo:

$$\frac{6x^3y^2 - 4x^2y^3 - 8xy^3}{-2x^2y^3} = \frac{6x^3y^2}{-2x^2y^3} + \frac{-4x^2y^3}{-2x^2y^3} + \frac{-8xy^3}{-2x^2y^3} = -\frac{3x}{y} + 2 + \frac{4}{x}$$

Ejemplo:

$$\frac{2x^4 - 5x^3 + x^2}{-x^2} = \frac{2x^4}{-x^2} + \frac{-5x^3}{-x^2} + \frac{x^2}{-x^2} = -2x^2 + 5x - 1$$

Ejercicios: Realiza las divisiones siguientes

- $(6x^4y^2 - 4x^3y^3 - 8x^2y^4) \div (-2x^2y^2)$
- $(9x^6y^3 - 6x^4y^2 - 3x^2y^5) \div (-3x^2y)$
- $(12a^3b - 8a^2b^2 - 2ab) \div (2ab)$
- $(15a^3b^3 - 12a^2b^2 + 6ab^4 - 3ab^2) \div (3ab^2)$

División de un polinomio entre otro polinomio

La división euclidiana de los polinomios, igual que la división entre números enteros, permite encontrar como resultado del proceso de la división un polinomio cociente y un polinomio residuo.

- Para efectuar la división se siguen los pasos descritos a continuación:

I. Se ordenan los dos polinomios de forma descendente respecto a una de las literales comunes a ambos polinomios, incluidos los términos con coeficiente cero para las potencias faltantes.

II. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, con lo que se obtiene el primer término del cociente.

III. Se multiplica el primer término del cociente por el divisor y el producto obtenido se resta del dividendo, y se obtiene un nuevo dividendo.

IV. Con el nuevo dividendo se repiten las operaciones de los pasos II y III hasta que el polinomio resultante sea cero o contenga la literal respecto a la cual se hizo el procedimiento del paso I con un exponente menor que el que posee dicha literal en el divisor.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 4x^2 & -3x & -7 & \\
\hline
3x-4 & 12x^3-25x^2 & -9x & -28 & \\
 & -12x^3+16x^2 & & & \\
\hline
 & -9x^2 & -9x & & \\
 & 9x^2 & -12x & & \\
\hline
 & & -21x & -28 & \\
 & & 21x & -28 & \\
\hline
 & & & -56 &
\end{array}
$$

División sintética

Al dividir polinomios con una sola variable es muy común tener que dividir el polinomio entre un binomio de la forma $x - r$, donde r es un número real cualquiera.

Hagamos la división:
$(3x^2 - 7x + 4) \div (x - 1)$

$$
\begin{array}{r}
3x - 4 \\
x - 1 \overline{)\; 3x^2 - 7x + 4} \\
\underline{-3x^2 + 3x } \\
-4x + 4 \\
\underline{4x - 4} \\
0
\end{array}
$$

Veamos ahora una forma más sencilla de realizar la división:

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 3 & -7 & 4 \\
1 & & 3 & -4 \\
\hline
 & 3 & -4 & 0
\end{array}
$$

De los números de la tercera hilera horizontal $(-3, 4, 0)$, el último es el residuo de la división y los demás son los coeficientes del cociente, que tendrá un grado menor que el dividendo.

División sintética (generalizada)

Ejemplo: Dividir $(4x^3 - 5x^2 + 10x + 6) \div (4x + 3)$ usando división sintética.

Solución: Para obtener un divisor de la forma $(x + r)$, dividimos entre 4 el dividendo y el divisor y aplicamos la propiedad siguiente si dividimos el dividendo y el divisor por un mismo número el cociente no varía, pero el residuo queda multiplicado por dicho número. De forma analoga: si multiplicamos el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no cambia, pero el residuo queda dividido entre dicho número.

De acuerdo con lo anterior,

$$\frac{4x^3 - 5x^2 + 10x - 6}{4} \div \frac{4x+3}{4} \to \left(x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{10}{4}x + \frac{6}{4}\right) \div x + \frac{3}{4}$$

Ahora sí, usamos la división sintética

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} & & -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & -3 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -\frac{3}{2} \end{array}$$

Entonces, en la división $(4x^3 - 5x^2 + 10x + 6) \div (4x + 3)$ el cociente es $x^2 - 2x + 4$ y el residuo de la división original es $(4)(-1.5) = -6$.

Nota:

Como dividimos entre 4 el dividendo y el divisor de la división original el residuo de la división $(x^3 - 1.25x^2 + 2.5x + 1.5) \div (x + 0.75)$ se multiplica por 4.

Ejercicios: Haz las divisiones de polinomios siguientes:

- $(x^3 + 8x^2 + 6x + 1) \div (x + 5) =$
- $(x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 10x + 11) \div (x - 2) =$
- $(x^2 + 64) \div (x + 4) =$
- $(2x^3 + 5x^2 - 7x + 6) \div (x + 4) =$
- $(x^3 + 5x^2 - x - 21) \div (x + 3) =$

Productos notables

Al multiplicar algunos tipos de expresiones algebraicas se obtienen productos en los que se distinguen algunos rasgos notables, los cuales permiten efectuar esa operación rápidamente aplicando la regla respectiva.

Producto de dos binomios conjugados

- Si se tiene el binomio $(x + y)$, entonces $(x - y)$ es su conjugado y viceversa. Para multiplicar dos binomios conjugados se aplica la regla siguiente:
- El producto de un binomio por su conjugado es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término, es decir:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

- Observa que hemos considerado como primer término el que tiene signo positivo en ambos binomios y como segundo el otro término.
- El producto de dos binomios conjugados se llama *diferencia de cuadrados*.

Ejemplo:

- $(y-6)(y+6) = y^2 - 36$
- $(4x+3)(4x-3) = 16x^2 - 9$
- $(w^2-1)(w^2+1) = w^4 - 1$

Producto de un binomio al cuadrado

- Consideremos que se trata de la suma de dos términos, ambos positivos, por ejemplo, $(x+y)^2$.
- El producto de un binomio al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término, es decir:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

- Veamos el caso particular en que el número literal y tenga signo negativo

$$(x-y)^2 = x^2 + 2(x)(-y) + (-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Ejemplo:

- $(n+6)^2 = n^2 + 12n + 36$
- $(y-4)^2 = y^2 - 8y + 16$
- $(3y+2x)^2 = 9y^2 + 12xy + 4x^2$
- $(8a-3b)^2 = 64a^2 - 48ab + 9b^2$

- El producto de un binomio al cuadrado se llama *trinomio cuadrado perfecto*.

Producto de dos binomios con término común

- Cuando dos binomios que se multiplican tienen un factor común podemos obtener el producto aplicando la regla enunciada en seguida.
- El producto de dos binomios que tienen un término común es igual al cuadrado del término común, más el producto del término común, por la suma de los **NO** comunes, más el producto de los términos **NO** comunes, es decir:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab$$

Ejemplo:

- $(x+9)(x+3) = x^2 + x(9+3) + (9)(3) = x^2 + 12x + 27$
- $(y+7)(y-3) = y^2 + y[7+(-3)] + (7)(-3) = y^2 + 4y - 21$
- $(b-6)(b-4) = b^2 + b[(-6)+(-4)] + (-4)(-6) = b^2 - 10b + 24$
- $(w+2)(w-9) = w^2 + w[2+(-9)] + (2)(-9) = w^2 - 7w - 18$
- $(3a+7)(3a+2) = (3a)^2 + (3a)(7+2) + (7)(2) = 9a^2 + 27a + 14$

Cubo de un binomio

- El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo, es decir:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

- Veamos el caso en el que el número literal y tenga signo negativo

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Ejemplo:

- $(3n+5)^3 = (3n)^3 + 3(3n)^2(5) + 3(3n)(5)^2 + (5)^3$

$$27n^3 + 135n^2 + 225n + 125$$

- $(5b-3)^3 = (5b)^3 + 3(5b)^2(-3) + 3(5b)(-3)^2 + (-3)^3$

$$125b^3 - 225b^2 + 135b - 27$$

Ejercicios:

- ✓ $(a-5)(a+5)$
- ✓ $(y+8)(y-8)$
- ✓ $(2b-7)(2b+7)$
- ✓ $(y+5)(y+4)$
- ✓ $(a+9)(a+5)$
- ✓ $(b+8)(b-5)$
- ✓ $(b-9)(b+4)$
- ✓ $(w+3)^2$
- ✓ $(y-2)^2$
- ✓ $(x+1)^2$
- ✓ $(w+4)^3$
- ✓ $(n-3)^3$

Triángulo de Pascal

- Este triángulo fue ideado para desarrollar las potencias de binomios. Las potencias de binomios vienen dadas por la fórmula: $(a+b)^n$, donde a y b son constantes cualesquiera y n el exponente que define la potencia.

$$(x+y)^0 = (1)$$

$$(x+y)^1 = (1)x^1\boldsymbol{y^0} + (1)\boldsymbol{x^0}y^1$$

$$(x+y)^2 = (1)x^2\boldsymbol{y^0} + (2)x^1y^1 + (1)y^2\boldsymbol{x^0}$$

$$(x+y)^3 = (1)x^3\boldsymbol{y^0} + (3)x^2y^1 + (3)x^1y^2 + (1)\boldsymbol{x^0}y^3$$

$$(x+y)^4 = (1)x^4\boldsymbol{y^0} + (4)x^3y^1 + (6)x^2y^2 + (4)x^1y^3 + (1)\boldsymbol{x^0}y^4$$

$$(x+y)^5 = (1)x^5\boldsymbol{y^0} + (5)x^4y^1 + (10)x^3y^2 + (10)x^2y^3 + (5)\boldsymbol{x^1}y^4 + (1)\boldsymbol{x^0}y^5$$

- Todas las cifras escritas en cada fila del triángulo corresponden a los coeficientes del desarrollo de las potencias del binomio de Newton.
- De esta forma, los coeficientes desarrollados de la forma $(a+b)^n$ se encuentran en la fila $n+1$ del Triángulo de Pascal.

Ejemplo: Expandir el binomio: $(3x-y)^4$

$$(3x-y)^4 = (1)(3x)^4(-y)^0 + (4)(3x)^3(-y)^1 + (6)(3x)^2(-y)^2 + (4)(3x)^1(-y)^3 + (1)(3x)^0 y^4$$

$$(3x-y)^4 = 81x^4 - 108x^3y + 54x^2y^2 - 12xy^3 + y^4$$

- Observación: Note los signos alternos. Esto sucede porque $(-y)$ elevado a potencias impares es negativo, pero $(-y)$ elevado a potencias pares es positivo. Esto ocurrirá siempre que el binomio contenga un signo de resta.

Ejercicios:

- $(3x-2y)^4 =$
- $(4x-3y)^5 =$
- $(2x+3y)^4 =$
- $(4x+2y)^5 =$

Radicación

Radical como exponente

Sea $\sqrt[n]{a}$ un número real, entonces este radical se expresa como:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

además, se cumple que: $(\sqrt[n]{a})^n = a$

Representación de un exponente fraccionario como radical

Dada la expresión $a^{\frac{m}{n}}$ su representación como radical es: $\sqrt[n]{a^m}$, donde el numerador es el exponente del radical y el denominador el índice de la raíz.

Ejemplo: Transforma a radical la siguiente expresión: $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$

Solución: Se transforma a radical cada uno de los sumandos y se obtiene:

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$$

Leyes de Radicales

- Los teoremas de los exponentes también se aplican a los radicales, ya que se expresan como exponentes fraccionarios.

✓
$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

✓
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

✓
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

✓
$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo: Leyes de los exponentes para los números racionales

$$\left(\frac{x^{3/4}}{x^{1/3}}\right)^2 = \frac{x^{(3/4)(2)}}{x^{(1/3)(2)}} = \frac{x^{6/4}}{x^{2/3}} = x^{6/4-2/3} = x^{5/6} = \sqrt[6]{x^5}$$

Simplificación de radicales

Un radical está simplificado cuando se halla en su forma más simple

1. Se han sacado fuera del radical todas las potencias $n-$ésimas perfectas, de manera que el radicando no contenga factores afectados de exponentes mayores o iguales que el índice del radical.
2. El índice del radical es el menor posible.
3. No hay fracciones en el radicando.

Ejemplos: Simplificar los radicales siguientes

- $\sqrt{32} = \sqrt{(16)(2)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- $\sqrt{48} = \sqrt{(16)(3)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
- $\sqrt{y^7} = \sqrt{(y^6)(y)} = y^{6/2} \cdot \sqrt{y} = y^3\sqrt{y}$

Reducción de radicales semejantes

Los radicales semejantes son aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo:

$$7\sqrt[3]{ab} \quad \text{y} \quad -6\sqrt[3]{ab}$$

son radicales semejantes, pues tienen el mismo índice, 3, y el mismo radicando ab.

Para reducir dos o más radicales, primero se simplifican, es decir, se escriben en su forma más simple y luego se reducen términos semejantes.

Ejemplo:

$$\sqrt{18a}+\sqrt{50a}-\sqrt{72a}=\sqrt{(9)(2a)}+\sqrt{(25)(2a)}-\sqrt{(36)(2a)}$$
$$3\sqrt{2a}+5\sqrt{2a}-6\sqrt{2a}=\sqrt{2a}(3+5-6)=2\sqrt{2a}$$

Racionalización del denominador

El proceso de eliminar radicales de un denominador recibe el nombre de *racionalización del denominador*.

- Cuando el denominador de una fracción es un radical de la forma $\sqrt{a}$ se multiplica el numerador y denominador por $\sqrt{a}$ y se simplifica la expresión que resulta.

Ejemplo:

$$\frac{6x}{\sqrt{x}} = \frac{6x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{6x\sqrt{x}}{x} = 6\sqrt{x}$$

Cuando el denominador de una fracción es una expresión de dos términos que contiene radicales de índice 2, se multiplican el numerador y el denominador por el conjugado de la expresión de dicho denominador para racionalizarlo.

Ejemplos:

- $$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \left(\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right) = \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$$

- $$\frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} = \left(\frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}\right)\left(\frac{5+\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}\right) = \frac{25+10\sqrt{2}+2}{25-2} = \frac{27+10\sqrt{2}}{23}$$

Ejercicios: Racionaliza los denominadores de las expresiones con radicales que siguen.

- $$\frac{9x}{\sqrt{3x}} =$$

- $$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} =$$

Factorización de expresiones algebraicas

Definición:

Factorizar es expresar una suma o diferencia de términos como el producto indicado de sus factores; éstos se presentan en la forma más simple.

Caso I. Factor Común

Es la expresión común que tienen todos los términos de una expresión algebraica.

Ejemplo:

- Factoriza: $x^6 - x^5 + x^2$

  Solución:

  Para encontrar el factor común se toma la letra que se repite y de menor exponente x^2, después cada uno de los términos de la expresión algebraica se divide entre el factor común; los resultados se expresan de la siguiente manera:

$$x^6 - x^5 + x^2 = x^2(x^4 - x^3 + 1)$$

Ejemplos:

- Factoriza: $16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10}$
  Solución:
  Se busca el factor común de los coeficientes, que es el máximo común de ellos y también se busca el factor común de las literales:

  $$\mathrm{MCD}(16, 12, 20) = 4 \qquad \text{Factor común literal} = a^3b^2$$

  Se realizan las divisiones término a término y el resultado de la factorización es:

  $$16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10} = 4a^3b^2(4a^3b^5c - 3a^2c^3 + 5b^8)$$

- Factoriza $(2a - 3b)^2(5a - 7b)^3 - (2a - 3b)^3(5a - 7b)^2$
  Solución:
  En esta expresión el factor común está compuesto por binomios, por consiguiente, se toma de cada uno de ellos el de menor exponente y se realiza la factorización de la siguiente manera:

  $$(2a-3b)^2(5a-7b)^3-(2a-3b)^3(5a-7b)^2 = (2a-3b)^2(5a-7b)^2[(5a-7b)-(2a-3b)]$$

Caso II. Factor común por agrupación de términos

Se agrupan los términos que tengan algún factor en común, de tal modo que la expresión restante pueda factorizarse.

Ejemplo:

- Factoriza: $am + bm + a^2 + ab$

  Solución:

  Se agrupan los términos y de los primeros se factoriza m y de los segundos a.

  $$am + bm + a^2 + ab = (am + bm) + (a^2 + ab) = m(a + b) + a(a + b)$$

  La última expresión se vuelve a factorizar tomando como factor común el binomio $(a + b)$ y se obtiene como resultado:

  $$= (a + b)(m + a)$$

Factor común por agrupación de términos

Ejemplo:

- ¿Cuál es el resultado de factorizar $6ax + 3a^2 - 4bx - 2ab$?
  Solución:
  Se agrupan los términos y se buscan los respectivos factores comunes de cada uno para poder factorizarlos y obtener como resultado:

$$6ax + 3a^2 - 4bx - 2ab = (6ax + 3a^2) + (-4bx - 2ab) = 3a(2x + a) - 2b(2x + a)$$

$$= (2x + a)(3a - 2b)$$

- Factoriza: $6a^2x + 4ab + 2a - 3abx - 2b^2 - b$
  Solución:
  Se repiten los mismos pasos que en los ejemplos anteriores y se obtiene:

$$6a^2x + 4ab + 2a - 3abx - 2b^2 - b = (6a^2x + 4ab + 2a) + (-3abx - 2b^2 - b)$$

$$= 2a(3ax + 2b + 1) - b(3ax + 2b + 1)$$

$$= (3ax + 2b + 1)(2a - b)$$

Diferencia de Cuadrados

Caso III. Diferencia de Cuadrados

La diferencia de cuadrados es de la forma $a^2 - b^2$ y su factorización es:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Lo que da como resultado el producto de binomios conjugados.

Ejemplo:

- Factoriza la expresión: $x^2 - 9$
  Solución:
  Se extrae la raíz cuadrada del primer y segundo términos; los resultados se acomodan como se indica en la fórmula.

  $$\sqrt{x^2} = x \qquad \sqrt{9} = 3$$

  Finalmente, la factorización es: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

Diferencia de Cuadrados

Ejemplos:

- Factoriza: $\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25}$
  Solución: Se aplica la fórmula y se obtiene como resultado:

$$\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25} = \left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right)$$

- ¿Cuál es el resultado de factorizar $x^{2a-4} - y^{6b}$?
  Solución: Se expresan los exponentes de la siguiente manera:

$$x^{2a-4} - y^{6b} = x^{2(a-2)} - y^{2(3b)}$$

Se extraen las raíces cuadradas de ambos términos:

$$\sqrt{x^{2(a-2)}} = x^{a-2} \qquad \sqrt{y^{2(3b)}} = y^{3b}$$

Finalmente, se obtiene: $x^{2a-4} - y^{6b} = (x^{a-2} + y^{3b})(x^{a-2} - y^{3b})$

Trinomio Cuadrado Perfecto

Caso IV. Trinomio Cuadrado Perfecto

Se conoce así a toda expresión de la forma:

$$a^2 \pm 2ab + b^2$$

Pasos para factorizar un trinomio cuadrado perfecto:

- Para factorizar esta expresión, se debe verificar que los términos se encuentren ordenados con respecto a los exponentes de mayor a menor o viceversa.
- Se extraen las raíces cuadradas de los términos extremos (primer y último términos):

$$\sqrt{a^2} = a \qquad \sqrt{b^2} = b$$

- Para comprobar que la expresión es un trinomio cuadrado perfecto, se realiza el doble producto de las raíces:

$$\text{Comprobación} = 2ab$$

  Si el resultado del producto es igual al segundo término del trinomio, entonces éste es cuadrado perfecto y su factorización es igual al cuadrado de una suma o diferencia de las raíces cuadradas de los términos extremos.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Ejemplo:

- Factoriza $4x^2 + 9y^2 - 12xy$
  Solución:
  Se ordenan los términos de la siguiente manera:

  $$4x^2 + 9y^2 - 12xy = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

  Se extraen las raíces de los términos extremos y se verifica que el trinomio perfecto:

  $$\sqrt{4x^2} = 2x \qquad \sqrt{9y^2} = 3y \qquad \text{Comprobación} = -2(2x)(3y) = -12xy$$

  Finalmente, el resultado de la factorización es: $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$
- Factoriza la expresión $x^2 + 6x + 9$
  Solución:
  Se obtienen las raíces cuadradas y se comprueba que el trinomio es cuadrado perfecto:

  $$\sqrt{x^2} = x \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad \text{Comprobación} = 2(x)(3) = 6x$$

  Al tomar el signo del segundo término, la factorización es: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

Caso V. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Esta expresión resulta del producto de binomios con término común.

Ejemplo:

- Factoriza la expresión: $x^2 + 11x + 24$

  Solución:

  Se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático y se coloca el resultado en ambos factores:

  $$x^2 + 11x + 24 = (x \quad)(x \quad)$$

  Se coloca el signo del segundo término $(+11x)$ en el primer factor y se multiplica el signo del segundo término por el del tercer término $(+)(+) = +$ para obtener el signo del segundo factor:

  $$x^2 + 11x + 24 = (x+ \quad)(x+ \quad)$$

  Al ser los signos de los factores iguales, se buscan dos cantidades cuyo producto sea igual al tercer término (24) y cuya suma sea igual a 11; estos números son 8 y 3, que se colocan en el primer factor, el mayor, y en el segundo factor, el menor:

  $$x^2 + 11x + 24 = (x + 8)(x + 3)$$

Ejemplo:

- Factoriza la expresión: $m^2 - 13m + 30$
  Solución:
  La raíz cuadrada del término cuadrático es m; el primer factor va acompañado del signo del segundo término $(-13m)$ y el segundo factor va con el signo que resulta del producto de los signos del segundo y tercer términos $(-)(+) = -$

$$m^2 - 13m + 30 = (m- \quad)(m- \quad)$$

  Se buscan dos cantidades que multiplicadas den 30 y sumadas 13, estas cantidades son 10 y 3, se acomodan de la siguiente forma y el resultado de la factorización es:

$$m^2 - 13m + 30 = (m - 10)(m - 3)$$

Cuando los signos de los factores son iguales (positivos o negativos), los números buscados se suman, pero si los signos de los factores son diferentes, entonces los números buscados se restan.

Ejemplo:

- Factoriza la expresión $x^4 - x^2 - 6$
  Solución:
  Se extrae la raíz cuadrada del primer término, se escriben los signos y se buscan dos números que al multiplicar den 6 y al restarse 1 para que la expresión factorizada sea:

$$x^4 - x^2 - 6 = (x^2 - 3)(x^2 + 2)$$

- Factoriza la expresión: $x^2 + xy - 20y^2$
  Solución:
  Después de extraer la raíz cuadrada, acomodar los signos y buscar los números, la factorización es:

$$x^2 + xy - 20y^2 = (x + 5y)(x - 4y)$$

Caso VI. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

En este trinomio el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno.

Ejemplo:

- Factoriza la expresión: $6x^2 - 7x - 3$

  Solución:

  Se ordenan los términos según la forma $ax^2 + bx + c$, se multiplica y se divide por el coeficiente del término cuadrático, en el caso del segundo término sólo se deja indicada la multiplicación.

$$\frac{6(6x^2 - 7x - 3)}{6} = \frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6}$$

  La expresión del numerador se factoriza como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

$$\frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6}$$

Se obtiene el factor común de cada binomio y se simplifica la fracción:

$$\frac{3(2x-3)2(3x+1)}{6} = \frac{6(2x-3)(3x+1)}{6} = (2x-3)(3x+1)$$

Finalmente, la factorización de $6x^2 - 7x - 3 = (2x-3)(3x+1)$

- Factoriza $3x^2 - 5x - 2$
  Solución:
  Se multiplica y divide la expresión por 3, para que se transforme el numerador en una expresión de la forma $x^2 + bx + c$

  $$3x^2 - 5x - 2 = \frac{3(3x^2-5x-2)}{3} = \frac{9x^2 - 5(3x) - 6}{3} = \frac{(3x)^2 - 5(3x) - 6}{3}$$

  Se factoriza la expresión y se simplifica para obtener como resultado de la factorización:

  $$= \frac{(3x-6)(3x+1)}{3} = \frac{3(x-2)(3x+1)}{3} = (x-2)(3x+1)$$

Suma o diferencia de cubos

Caso VII. Suma o diferencia de cubos

- Dadas las expresiones de la forma $a^3 + b^3$ y $a^3 - b^3$, para factorizarlas es necesario extraer la raíz cúbica del primer y segundo términos, para después sustituir los resultados en las respectivas fórmulas.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \qquad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo:

- Factoriza: $27x^3 + 8$
  Solución:
  Se extrae la raíz cúbica de ambos términos:

$$\sqrt[3]{27x^3} = 3x \qquad \sqrt[3]{8} = 2$$

Se sustituye en su fórmula respectiva, se desarrollan los exponentes y se obtiene:

$$27x^3 + 8 = (3x + 2)((3x)^2 - (3x)(2) + (2)^2) = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$$

Ejemplo:

- Factoriza $m^6 - 216$.
  Solución:
  Se extraen las raíces cúbicas de los términos y se sustituyen en la fórmula para obtener:

$$m^6 - 216 = (m^2 - 6)\left((m^2)^2 + (m^2)(6) + (6)^2\right)$$

$$m^6 - 216 = (m^2 - 6)(m^4 + 6m^2 + 36)$$

Estrategias generales para la factorización de polinomios

- Determina si los términos del polinomio tienen un factor común diferente de 1; de ser así, debe extraerse.
- Si el polinomio tiene dos términos, establece si es una diferencia de cuadrados, una diferencia de cubos o una suma de cubos.
- Si el polinomio es un trinomio cuadrado, establece si se trata de un cuadrado perfecto. Si no lo es, busca un par de factores de primer grado.
- Si el polinomio tiene cuatro o más términos, trata de factorizar por agrupamiento.
- Factoriza completamente el polinomio, es decir, en caso de que se haya utilizado una técnica de factorización es preciso que revises si los factores obtenidos pueden factorizarse aún más.

Simplificación de fracciones algebraicas

- Una expresión racional o fracción algebraica está simplificada cuando se expresa en sus términos mínimos, es decir, cuando su numerador y denominador solo tienen como factor común el 1 o el -1.
- Para simplificar una fracción algebraica se cancelan los factores comunes a su numerador y denominador; esto con base en la propiedad de los números racionales siguiente

$$\frac{\cancel{k}a}{\cancel{k}b} = \frac{a}{b}, \text{ con } k \text{ y } b \neq 0$$

- Para simplificar una fracción hay que factorizar completamente tanto el numerador como el denominador y cancelar los factores comunes a ambos, si los hubiere.

Ejemplo: Simplifica la fracción

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 16}$$

Solución:

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 16} = \frac{\cancel{(x-4)}(x-3)}{\cancel{(x-4)}(x+4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

Ejercicios: Simplifica las fracciones algebraicas siguientes

- $$\frac{x^2-49}{x^2-10x+21}$$
- $$\frac{6x^2+24x}{x^2+8x+16}$$
- $$\frac{2x-14}{x2+4x-21}$$
- $$\frac{b-b^2}{b^2-1}$$
- $$\frac{x^2-9x}{x^2-7x-18}$$
- $$\frac{4w+8}{w^2+w}$$

Multiplicación de fracciones algebraicas

- El producto de dos o más fracciones algebraicas es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \text{ con } b \text{ y } d \neq 0$$

- Hay que tener presente que la expresión racional que resulta al multiplicar dos o más fracciones algebraicas siempre debe escribirse en forma simplificada

Ejemplo: Multiplica estas fracciones algebraicas y simplifica el resultado

$$\frac{x^2+4x-21}{x^2-49} \cdot \frac{3x-21}{6x-18}$$

Solución:

$$\frac{x^2+4x-21}{x^2-49} \cdot \frac{3x-21}{6x-18} = \frac{(x^2+4x-21)(3x-21)}{(x^2-49)(6x-18)}$$

$$= \frac{\cancel{(x+7)}\cancel{(x-3)}3\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-7)}\cancel{(x+7)}6\cancel{(x-3)}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

División de fracciones algebraicas

- La operación de dividir una fracción entre otra consiste en multiplicar la fracción que corresponde al dividendo por el inverso multiplicativo de la que corresponde al divisor, es decir

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo: Haz la división y simplifica el resultado

$$\frac{a^2+a}{x^2} \div \frac{1-a^2}{ax^2-x^2}$$

Solución:

$$\frac{a^2+a}{x^2} \div \frac{1-a^2}{ax^2-x^2} = \frac{a^2+a}{x^2} \cdot \frac{ax^2-x^2}{1-a^2} = \frac{(a^2+a)(ax^2-x^2)}{x^2(1-a^2)}$$

Ahora factoricemos los términos de la fracción anterior

$$\frac{a(a+1)x^2(a-1)}{x^2(1-a)(1+a)} = \frac{a\cancel{x^2}\cancel{(1+a)}(a-1)}{\cancel{x^2}\cancel{(1+a)}(1-a)} = -a$$

Ejercicios: Multiplica las fracciones algebraicas que siguen y simplifica el resultado

- $$\frac{x^2+7x}{2x-6}\cdot\frac{x^2-10x+21}{x^2-49}$$
- $$\frac{a^2+6a}{5a-30}\cdot\frac{a^2-36}{a^2+12a+36}$$

Ejercicios: Divide las fracciones algebraicas que siguen y simplifica el resultado

- $$\frac{2y-14}{y^2-2y-35}\div\frac{6y-30}{y^2-25}$$
- $$\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}\div\frac{4x+16}{x^2-x}$$

Suma y resta de fracciones homogéneas

- Cuando dos o más fracciones tienen el mismo denominador son *homogéneas*.
- Para sumar o restar fracciones *homogéneas* se suman o restan sus numeradores y el resultado se divide entre el denominador común, para luego reducir la expresión, en caso de que sea posible.

Ejemplo:

$$\frac{x}{x^2-9}+\frac{3}{x^2-9}$$

Solución:

$$\frac{x}{x^2-9}+\frac{3}{x^2-9}=\frac{\cancel{x+3}}{\cancel{(x+3)}(x-3)}=\frac{1}{x-3}$$

Suma y resta de fracciones algebraicas

Suma y resta de fracciones heterogéneas

- Dos o más fracciones son *heterogéneas* cuando no tienen el mismo denominador.
- Para sumar o restar dos o más fracciones *heterogéneas* se multiplica el numerador y el denominador de cada fracción por los factores necesarios a fin de obtener fracciones equivalentes a las originales y que, a la vez, sean *homogéneas* todas entre sí.

Ejemplo:

$$\frac{21x}{x^2-3x-10}-\frac{15}{x-5}=$$

Solución: Al factorizar $x^2-3x-10$ resulta

$$\frac{21x}{(x-5)(x+2)}-\frac{15}{x-5}$$

Observa que para obtener la diferencia de dos fracciones *homogéneas* se requiere:

$$\frac{21x}{(x-5)(x+2)}-\frac{15}{x-5}\cdot\frac{x+2}{x+2}=\frac{21x-15(x+2)}{(x-5)(x+2)}=\frac{6x-30}{(x-5)(x+2)}=\frac{6\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x+2)}=\frac{6}{x+2}$$

Ejercicios: Resuelve y simplifica las siguientes operaciones

- $$\frac{4a}{a^2-9} - \frac{3a+3}{a^2-9}$$
- $$\frac{7x-2}{x^2-4} - \frac{3}{x-2}$$
- $$\frac{ax}{x-y} - \frac{ay}{x-y}$$
- $$\frac{10x+35}{x^2+7x+12} - \frac{5}{x+3}$$
- $$\frac{5x-27}{x^2-9} + \frac{2}{x-3}$$
- $$\frac{2y-5}{7} + \frac{y-2}{2}$$

V. Ecuaciones Lineales

Conceptos generales

- **Igualdad.** Dos cantidades son iguales o equivalentes cuando tienen el mismo valor.
- **Ecuación.** Es una igualdad con una o varias incógnitas que se representan con literales.
- **Solución de una ecuación.** La solución o soluciones de una ecuación son los valores que hacen que la igualdad se cumpla.
- **Grado de una ecuación.** El grado de una ecuación se obtiene del término de mayor grado que contenga a la(s) incógnita(s).

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Ecuaciones que se resuelven mediante la aplicación de ecuaciones equivalentes con operaciones elementales (suma, resta, multiplicación o división) a ambos miembros de la ecuación, hasta obtener el valor de la incógnita.

Teorema. Sea la ecuación de primer grado $ax = b$

i. Si $a \neq 0$, $x = \frac{b}{a}$ es solución única.
ii. Si $a = 0$ pero $b \neq 0$, entonces, $ax = b$ no tiene solución.
iii. Si $a = 0$ y $b = 0$, todo $k \in \mathbb{R}$ es solución de de $ax = b$.

Determina el conjunto solución de la ecuación $2x - 7 - 5x = 11x - 6 - 14x$.

Solución: Al resolver la ecuación se obtiene:

$$2x - 5x - 11x + 14x = -6 + 7 \quad \rightarrow \quad 0x = 1$$

El conjunto solución es vacío, ya que todo número multiplicado por cero es cero.

Ejemplo: Determina el conjunto solución de la ecuación $3y + 5y + 6 = 10y - 2 - 2y$

Solución: Al resolver la ecuación se obtiene:

$$3y + 5y - 10y + 2y = -2 + 8 - 6 \quad \rightarrow \quad 0y = 0$$

El conjunto solución son todos los números reales, ya que cualquier número multiplicado por cero es cero.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Estrategia para resolver ecuaciones de primer grado

1. Si en la ecuación aparecen coeficientes fraccionarios, se deben multiplicar ambos miembros de la ecuación por el *mínimo común múltiplo* de los denominadores numéricos presentes en ella para obtener así una ecuación sin coeficientes fraccionarios.
2. Es preciso eliminar los signos de agrupación en caso de que los haya.
3. Se reducen términos semejantes en ambos miembros de la ecuación.
4. Mediante la transposición, se agrupan en un mismo miembro de la ecuación todos los términos que contienen la incógnita y en el otro miembro los que no la tienen.
5. Se reducen nuevamente términos semejantes, lo que permitirá obtener una ecuación de la forma:

   $$ax = b$$

   .
6. Se comprueba que la solución sea correcta sustituyendo en la ecuación original la incógnita por la solución obtenida.

Ejemplo: Resolver la ecuación $4(x-5)-3(7+2x)+57=6(4-x)+2(x-8)$

Solución: Primero se debe eliminar los signos de agrupación aplicando la *propiedad distributiva* de la multiplicación respecto a la suma

$$4x-20-21-6x+57=24-6x+2x-16$$

Se reducen términos semejantes en ambos miembros de la ecuación y obtenemos:

$$-2x+16=-4x+8$$

Ahora se debe trasponer términos: se pasa $-4x$ al miembro izquierdo con signo positivo y el 16 al miembro derecho con signo negativo

$$-2x+4x=8-16 \rightarrow 2x=-8 \rightarrow x=\frac{-8}{2}$$

Por tanto, la solución es: $x=-4$

Ejemplo: Encuentra el valor de x en la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{6} + 5 = \frac{1}{3} - x$$

Solución: Se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores, en este caso 6:

$$6\left(\frac{x}{6} + 5\right) = 6\left(\frac{1}{3} - x\right) \rightarrow \frac{6x}{6} + 30 = \frac{6}{3} - 6x \quad \text{se simplifica:}$$

$$x + 30 = 2 - 6x \rightarrow x + 6x = 2 - 30 \rightarrow 7x = -28$$

Por consiguiente, el resultado es: $x = -4$

Ejercicios: Resuelve las siguientes ecuaciones fraccionarias de primer grado:

- $$\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}x = 33$$
- $$\frac{5}{2}x - \frac{5}{6}x = \frac{4}{3}$$

Ecuaciones lineales como modelos matemáticos

En las matemáticas a menudo es posible construir, por medio de ecuaciones, un modelo que permita describir y resolver problemas enunciados en lenguaje coloquial. Para resolver este tipo de problemas se recomienda seguir estos pasos:

- **I.** Lee el problema con atención para identificar la o las incógnitas y las cantidades conocidas.
- **II.** Elige las letras que utilizarás para representar las incógnitas del problema.
- **III.** Plantea una ecuación que relacione los datos conocidos con los **no** conocidos (incógnitas).
- **IV.** Resuelve la ecuación.
- **V.** Comprueba la solución.

Ejemplo: Ana es 8 años mayor que Carlos, pero hace 3 años ella tenía el triple de edad que él. Determina qué edad tiene hoy cada uno de ellos.

Solución: Si x representa la edad actual de Carlos, entonces tenemos que

- La expresión en términos de x que representa la edad actual de Ana es $x+8$.
- La expresión que representa la edad de Carlos hace 3 años es $x-3$.
- La expresión que representa la edad de Ana hace 3 años es $x+8-3=x+5$.

- La ecuación que relaciona la edad de ambos hace 3 años y que debemos resolver para determinar sus edades es

$$x + 5 = 3(x - 3) \quad \rightarrow \quad x = 7$$

Carlos tiene 7 años; por tanto, la edad actual de Ana es 15 años.

Ejemplo: La máquina A requiere 36 horas para realizar un trabajo; la máquina B, 24 horas, y la máquina C tarda 72 horas. Si las tres trabajan simultáneamente, ¿cuántas horas les llevará en realizar el trabajo?

Solución: Sea x el tiempo que se precisa para realizar el trabajo si las máquinas A, B y C trabajan simultáneamente. Es claro que x no es $(36 + 24 + 72)$ horas, pues esto significaría que juntas las tres tardarían más tiempo para realizar el trabajo. Entonces se analiza la fracción de trabajo que puede hacer cada una de las máquinas en una hora.

- Máquina A: trabajo realizado por esta máquina en una hora $= \frac{1}{36}$.
- Máquina B: trabajo realizado por esta máquina en una hora $= \frac{1}{24}$.
- Máquina C: trabajo realizado por esta máquina en una hora $= \frac{1}{72}$.
- x trabajo realizado por las tres máquinas cuando trabajan simultáneamente $= \frac{1}{x}$.

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{24} + \frac{1}{72} = \frac{1}{x}$$

Observa que 72 divide exactamente a 24 y 36; es decir, el mínimo común múltiplo de $36, 24$ y 72 es 72; por consiguiente, se multiplican a ambos miembros de la ecuación anterior por $72x$ para obtener una ecuación equivalente:

$$2x + 3x + x = 72 \quad \rightarrow \quad x = 12$$

Si trabajan al mismo tiempo las máquinas harán el trabajo en 12 horas.

Ecuación Lineal con dos variables

Toda igualdad de forma $ax + by = c$, donde a, b y c son constantes arbitrarias y tanto a como b son diferentes de cero, se llama ecuación lineal o de primer grado con dos variables.

Sistema de ecuaciones lineales de 2×2

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Al resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas pueden presentarse los tres casos siguientes:

1. Que el sistema tenga una solución única; entonces el sistema es consistente independiente.
2. Que el sistema **NO** tenga solución; es decir, que no exista al menos un par de valores, uno para cada incógnita, que satisfaga ambas ecuaciones simultáneamente; en este caso el sistema es inconsistente.
3. Que el sistema tenga un conjunto infinito de soluciones; en este caso, el sistema es consistente dependiente.

Método de eliminación (suma y resta)

Este método consiste en eliminar una de las incógnitas de manera que el sistema de ecuaciones se reduzca a una sola ecuación con una sólo incógnita. Lo anterior se puede lograr al aplicar la siguiente propiedad de la igualdad: si a ambos miembros de una igualdad se le suman o restan los de otra igualdad se obtiene otra igualdad.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x+4y & = & 20 \\ 3x+4y & = & -10 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+4y & = & 7 \\ -3x-7y & = & 2 \end{array}\right\}$$

Método de sustitución

- Este método consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones del sistema, en caso de que sea necesario, y después sustituir su expresión equivalente en la otra.
- Como resultado de la sustitución se obtiene una ecuación con una incógnita cuyo valor se obtiene al resolver aquella. Por último, se sustituye el valor de la incógnita obtenida en la ecuación en la que está despejada la otra incógnita y así se determina el valor de esta última.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x+7y & = & 1 \\ 3x+2y & = & 5 \end{array}\right\}$$

Método de igualación

- Este método consiste en despejar primero una misma incógnita en ambas ecuaciones del sistema, luego igualar las expresiones equivalentes de ellas y finalmente resolver la ecuación obtenida en dicha igualación.
- Al resolver la ecuación que resulta de la igualación de las expresiones equivalentes a la incógnita despejada se obtiene el valor de la incógnita contenida en ella. Para obtener el de la otra incógnita se sustituye el valor que resultó de la ecuación anterior en cualquiera de las expresiones donde la incógnita está despejada.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{rcl} 8x - 3y & = & 17 \\ 7x - 4y & = & 8 \end{array}\right\}$$

Determinantes

- Un determinate es un arreglo de números encerrados entre dos barras verticales.
- Cuando un determinante tiene el mismo número de columnas que de renglones se trata de un determinantes cuadrado; si un arreglo de este tipo tiene dos columnas y dos renglones entonces es de segundo orden.
- La *diagonal principal* de un determinante de segundo orden es la línea de números de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha, mientras que la *diagonal secundaria* es la línea de los elementos de la esquina inferior izquierda a la superior derecha.
- Un determinante de segundo orden es el número que resulta de restar el producto de los números de la diagonal secundaria del producto de los de la diagonal principal, es decir,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Métodos de solución

Regla de Cramer

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1x - b_1y & = & c_1 \\ a_2x + b_2y & = & c_2 \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

- Si al evaluar el determinante D resulta que es igual a cero, la regla de Cramer no puede aplicarse, ya que la división entre cero no está definida.

VI. Ecuaciones Cuadráticas

Ecuaciones cuadráticas

La ecuación de la forma $ax^2 + bx + c$, donde a, b, $c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, es una ecuación de segundo grado; al término ax^2 se le llama cuadrático, a bx lineal, c es el término independiente y se clasifican de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \text{Ecuaciones de segundo grado} \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{array} \begin{cases} \text{incompletas} \begin{cases} \text{puras:} \\ ax^2 + c = 0 \\ \text{mixtas:} \\ ax^2 + bx = 0 \end{cases} \\ \\ \text{completas:} \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{cases}$$

Solución de una ecuación de segundo grado completa

Las ecuaciones de segundo grado tienen dos soluciones, también se denominan raíces.

Completar el trinomio cuadrado perfecto

Para completar el trinomio cuadrado perfecto se suman, en ambos miembros de la igualdad, el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal de la ecuación $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Ejemplo: Resuelve la ecuación: $x^2 + 4x + 3 = 0$

Solución: Se dejan los términos en x en el lado izquierdo de la ecuación.

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4x = -3$$

Se suma $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$ en ambos miembros: $x^2 + 4x + 4 = -3 + 4$
Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto: $(x+2)^2 = 1$
Se extrae la raíz cuadrada en ambos miembros: $x + 2 = \pm\sqrt{1}$
Se despeja la incógnita de la igualdad se y se obtienen los valores de x,

$$x_1 = -2 + 1 = -1 \qquad x_2 = -2 - 1 = -3$$

Ejemplo: Resuelve la ecuación: $2x^2+7x+3=0$

Solución: Se divide la ecuación entre 2 y se completa el trinomio cuadrado perfecto,

$$2x^2+7x+3=0 \quad \rightarrow \quad x^2+\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0 \quad \rightarrow \quad x^2+\frac{7}{2}x=-\frac{3}{2}$$

Se suma $\left(\frac{\frac{7}{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$ en ambos miembros $x^2+\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}=-\frac{3}{2}+\frac{49}{16}$

Se factoriza el miembro izquierdo, $\left(x+\frac{7}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$

Se aplica raíz cuadrada en ambos miembros: $x+\frac{7}{4}=\pm\frac{5}{4}$

$$x=-\frac{7}{4}\pm\frac{5}{4}$$

Finalmente, las raíces de la ecuación son: $x_1=-\frac{1}{2}$ o $x_2=-3$

Fórmula general

Sea la ecuación general de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$

Las soluciones o raíces de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo: Resuelve la ecuación $3x^2 - 5x - 2 = 0$

Solución: Se identifican los valores de a, b y c de acuerdo con la ecuación dada.

$$a = 3 \quad b = -5 \quad c = -2$$

Se sustituyen en la fórmula general:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-2)}}{(2)(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

Para concluir, las raíces son: $x_1 = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2$ o $x_2 = \frac{5-7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

Ejemplo: Determina las raíces de la ecuación $2x^2 - 3x = 0$

Solución: De acuerdo con la ecuación: $a = 2$, $b = -3$, $c = 0$, los valores se sustituyen en la fórmula general,

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(0)}}{(2)(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{9-0}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{3 \pm 3}{4}$$

Por tanto, las raíces son: $x_1 = \frac{3+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ o $x_2 = \frac{3-3}{4} = \frac{0}{4} = 0$

Ejemplo: Encuentra las soluciones de la ecuación $x^2 - 9 = 0$

Solución: De acuerdo con la ecuación: $a = 1$, $b = 0$, $c = -9$, se sustituyen los valores en la fórmula general,

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-9)}}{(2)(1)} = \frac{-0 \pm \sqrt{0+36}}{2} = \frac{\pm\sqrt{36}}{2} = \pm 3$$

Por consiguiente, las soluciones son: $x_1 = 3$ o $x_2 = -3$

Ejemplo: Determina las raíces de la ecuación $x^2+4x+5=0$

Solución: De acuerdo con la ecuación $a=1$, $b=4$, $c=5$, los valores se sustituyen en la fórmula general,

$$x=\frac{-(4)\pm\sqrt{(4)^2-4(1)(5)}}{(2)(1)}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}$$

Finalmente, las raíces de la ecuación son: $x_1=\dfrac{-4+\sqrt{-4}}{2}$ o $x_2=\dfrac{-4-\sqrt{-4}}{2}$

Propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado

La expresión $I=b^2-4ac$ es el discriminante de una ecuación de segundo grado, y permite determinar si las raíces son reales o imaginarias.

1. Si $I>0$, las raíces son reales y diferentes.
2. Si $I=0$, entonces las raíces son reales e iguales y su valor es: $x=-\dfrac{b}{2a}$.
3. Si $I<0$, entonces las raíces son complejas.

Ejemplo: Determina el carácter de las raíces de la ecuación $20x^2 - x - 1 = 0$

Solución: Al sustituir los valores de $a = 20$, $b = -1$, $c = -1$ en el discriminante, se obtiene:

$$I = (-1)^2 - (4)(20)(-1) = 1 + 80 = 81$$

De acuerdo con el resultado $I > 0$, se deduce que la ecuación tiene 2 soluciones reales y diferentes

Ejemplo: Encuentra el carácter de las raíces de la ecuación $4y^2 - 8y + 7 = 0$

Solución: Al sustituir los valores de $a = 4$, $b = -8$, $c = 7$ en el discriminante, se determina que:

$$I = (-8)^2 - (4)(4)(7) = 64 - 112 = -48$$

En este caso $I < 0$, por tanto, las raíces son complejas.

Factorización

Otra forma de resolver una ecuación de segundo grado es factorizando la expresión e igualando a cero cada factor, para posteriormente despejar a la incógnita.

Ejemplo: Resuelve la ecuación $x^2 - 7x + 10 = 0$

Solución: Con la forma $x^2 + bx + c$ se factoriza el trinomio.

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-5)(x-2) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación.

$$x - 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 5 \quad \text{o} \quad x = 2$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son: $x_1 = 5$ o $x_2 = 2$.

Solución de una ecuación de segundo grado incompleta I

Mixtas

Tiene la forma $ax^2 + bx = 0$; para obtener las raíces de la expresión se aplica el factor común, y una de sus raíces siempre es cero.

Ejemplo: Determina las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x = 0$

Solución: Se factoriza por factor común.

$$x^2 - 5x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x-5) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación de primer grado.

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

Finalmente, las soluciones de la ecuación son: $x_1 = 0$ o $x_2 = 5$

Solución de una ecuación de segundo grado incompleta II

Puras

Son de la forma $ax^2 + c = 0$, para obtener sus raíces o soluciones se despeja x o se factoriza la expresión.

Ejemplo: Resuelve la ecuación $x^2 - 9 = 0$

Solución: Se realiza el despeje para obtener los siguientes valores de x,

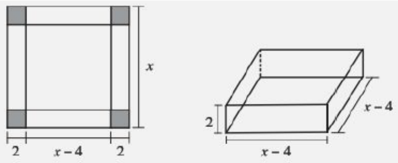
$$x^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

Por tanto, $x_1 = 3$ o $x_2 = -3$

Ejemplo: A partir de una pieza cuadrada de hoja de lata, se desea construir una caja con base cuadrada y sin tapa, quitando cuadrados en las esquinas de 2 cm por lado y doblando hacia arriba los lados; si la caja debe tener $98\ \mathrm{cm}^3$, ¿cuáles son las dimensiones de la pieza de hoja de lata que deberá usarse?

Solución:
Se construye una figura con los datos que se proporcionaron.



El volumen de la caja es:
$V = (\text{Alto})(\text{Largo})(\text{Ancho})$

$$V = (2)(x-4)^2 = 2(x^2 - 8x + 16) =$$

$$2x^2 - 16x + 32 = 98\ \mathrm{cm}^3$$

Se resuelve la ecuación:

$$x^2 - 8x - 33 = 0 \rightarrow (x-11)(x+3) = 0$$

Los valores son: $x = 11$ o $x = -3$, la longitud de los lados de la hoja de lata no pueden ser negativos. Finalmente, la longitud del cuadrado es de 11 cm por lado.