Problemas de Análisis de la varianza

1. Doce personas son distribuidas en 4 grupos de personas 3 cada uno. A cada grupo, se le asigna aleatoriamente un tiempo distinto de entrenamiento antes de realizar una tarea. Los resultados en la mencionada tarea, con el correspondiente tiempo de entrenamiento, son los siguientes:

0.5 horas	1 hora	1.5 horas	2 horas
1	4	3	8
3	6	5	10
5	2	7	6

Ver si podemos rechazar la hipótesis nula $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$.

Solución

En primer lugar, tenemos que definir la tabla de datos para poder aplicar el test ANOVA:

```
tarea=c(1,3,5,4,6,2,3,5,7,8,10,6)
tiempo = as.factor(rep(c("0.5","1","1.5","2"),each=3))
(datos=data.frame(tarea,tiempo))
```

```
##    tarea tiempo
## 1      1    0.5
## 2      3    0.5
## 3      5    0.5
## 4      4      1
## 5      6      1
## 6      2      1
## 7      3    1.5
## 8      5    1.5
## 9      7    1.5
## 10     8      2
## 11    10      2
## 12     6      2
```

Una vez definida la tabla, realizamos el contraste ANOVA:

```
summary(aov(datos$tarea ~ datos$tiempo))
```

```
##              Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## datos$tiempo  3     42      14     3.5 0.0695 .
## Residuals     8     32       4
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

El p-valor está en la zona de penumbra, es decir, está entre 0.05 y 1. Por tanto, no podemos tomar una decisión clara. Si ponemos como umbral 0.05, podríamos concluir que no tenemos evidencias suficientes para rechazar que los resultados en el entrenamiento son distintos según el tiempo usado.

Aunque no se pide copmprobaremos la igualdad de varianzas

```r
bartlett.test(datos$tarea ~ datos$tiempo)
```

```
##
##  Bartlett test of homogeneity of variances
##
## data:  datos$tarea by datos$tiempo
## Bartlett's K-squared = 0, df = 3, p-value = 1
```

```r
library(car)
```

```
## Warning: package 'car' was built under R version 3.6.3
```

```
## Loading required package: carData
```

```r
leveneTest(datos$tarea ~ datos$tiempo)
```

```
## Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
##       Df F value Pr(>F)
## group  3       0      1
##        8
```

Comprobemos las sumas de los cuadrados

```r
ni=c(3,3,3,3)
k=4
N=sum(ni)
SST= sum(datos$tarea^2)- sum(datos$tarea)^2/N
SST
```

```
## [1] 74
```

```r
Sumas_col=aggregate(datos$tarea,by=list(datos$tiempo),sum)
Sumas_col$x/ni
```

```
## [1] 3 4 5 8
```

```r
SSTr=sum(Sumas_col$x^2/ni)-sum(datos$tarea)^2/N
SSTr
```

```
## [1] 42
```

```r
SSE=SST-SSTr
SSE
```

```
## [1] 32
```

eL p-valor es

```r
Fest=(SSTr/3)/(SSE/8)
Fest
```

```
## [1] 3.5
```

```r
1-pf(Fest,3,8)
```

```
## [1] 0.06949856
```

```r
pf(Fest,3,8,lower.tail=FALSE)
```

```
## [1] 0.06949856
```

2. Se registraron las frecuencias de los días que llovió a diferentes horas, durante los meses de enero, marzo, mayo y julio. Los datos obtenidos, durante un periodo de 10 años, fueron los siguientes:

Hora	enero	febrero	marzo	julio	Total
9	22	25	24	11	82
10	21	19	18	16	74
11	17	23	26	17	83
12	20	31	25	24	100
13	16	15	23	24	78
14	21	35	23	20	99
Total	117	148	139	112	536

Estudiar la variabilidad entre meses y entre horas.

Solución

En primer lugar, tenemos que definir la tabla de datos para poder aplicar el test ANOVA:

```
frecuencias = c(22,25,24,11,21,19,18,16,17,23,26,17,20,31,25,24,16,15,23,24,21,35,23,20)
horas = as.factor(rep(c("9","10","11","12","13","14"),each=4))
meses = as.factor(rep(c("enero","febrero","marzo","julio"),6))
(datos = data.frame(horas,meses,frecuencias))
```

```
##    horas   meses frecuencias
## 1      9   enero          22
## 2      9 febrero          25
## 3      9   marzo          24
## 4      9   julio          11
## 5     10   enero          21
## 6     10 febrero          19
## 7     10   marzo          18
## 8     10   julio          16
## 9     11   enero          17
## 10    11 febrero          23
## 11    11   marzo          26
## 12    11   julio          17
## 13    12   enero          20
## 14    12 febrero          31
## 15    12   marzo          25
## 16    12   julio          24
## 17    13   enero          16
## 18    13 febrero          15
## 19    13   marzo          23
## 20    13   julio          24
## 21    14   enero          21
## 22    14 febrero          35
## 23    14   marzo          23
## 24    14   julio          20
```

Una vez definida la tabla, realizamos el contraste ANOVA:

```
summary(aov(datos$frecuencias ~ datos$horas + datos$meses))
```

```
##             Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## datos$horas  5  149.5   29.90   1.395  0.282
## datos$meses  3  149.0   49.67   2.317  0.117
## Residuals   15  321.5   21.43
```

Como los p-valores por horas y por meses son grandes, concluimos que no tenemos evidencias para rechazar que el número de días que llueve por mes no depende ni del mes ni de la hora del día en que llueve.

3. Se realizó un estudio para determinar el nivel de agua y el tipo de planta sobre la longitud global del tronco de las plantas de guisantes. Se utilizaron 3 niveles de agua y 2 tipos de plantas. Se dispone para el estudio de 18 plantas sin hojas. Las plantas se dividen aleatoriamente en 3 subgrupos y después se los asigna los niveles de agua aleatoriamente. Se sigue un procedimiento parecido con 18 plantas convencionales. Se obtuvieron los resultados siguientes (la longitud del tronco se da en centímetros):

		FACTOR AGUA		
		bajo	medio	alto
FACTOR PLANTA	Sin Hojas	69.0	96.1	121.0
		71.3	102.3	122.9
		73.2	107.5	123.1
		75.1	103.6	125.7
		74.4	100.7	125.2
		75.0	101.8	120.1
	Con Hojas	71.1	81.0	101.1
		69.2	85.8	103.2
		70.4	86.0	106.1
		73.2	87.5	109.7
		71.2	88.1	109.0
		70.9	87.6	106.9

Se desea saber si hay diferencias entre los niveles de agua y entre los diferentes tipos de planta. También se quiere saber si hay interacción entre los niveles de agua y el tipo de planta.

Solución

En primer lugar, tenemos que definir la tabla de datos para poder aplicar el test ANOVA:

```
longitud = c(69,96.1,121,71.3,102.3,122.9,73.2,107.5,123.1,75.1,103.6,125.7,74.4,100.7,125.2,
             75,101.8,120.1,71.1,81,101.1,69.2,85.8,103.2,70.4,86,106.1,73.2,87.5,109.7,
             71.2,88.1,109,70.9,87.6,106.9)
factor.agua = as.factor(rep(c("bajo","medio","alto"),12))
factor.planta = as.factor(rep(c("sin hojas","con hojas"),each=18))
(datos=data.frame(factor.agua,factor.planta,longitud))
```

```
##    factor.agua factor.planta longitud
## 1         bajo     sin hojas     69.0
## 2        medio     sin hojas     96.1
## 3         alto     sin hojas    121.0
## 4         bajo     sin hojas     71.3
## 5        medio     sin hojas    102.3
## 6         alto     sin hojas    122.9
## 7         bajo     sin hojas     73.2
## 8        medio     sin hojas    107.5
## 9         alto     sin hojas    123.1
## 10        bajo     sin hojas     75.1
## 11       medio     sin hojas    103.6
## 12        alto     sin hojas    125.7
## 13        bajo     sin hojas     74.4
## 14       medio     sin hojas    100.7
## 15        alto     sin hojas    125.2
## 16        bajo     sin hojas     75.0
## 17       medio     sin hojas    101.8
## 18        alto     sin hojas    120.1
## 19        bajo     con hojas     71.1
## 20       medio     con hojas     81.0
## 21        alto     con hojas    101.1
```

```
## 22        bajo     con hojas     69.2
## 23       medio     con hojas     85.8
## 24        alto     con hojas    103.2
## 25        bajo     con hojas     70.4
## 26       medio     con hojas     86.0
## 27        alto     con hojas    106.1
## 28        bajo     con hojas     73.2
## 29       medio     con hojas     87.5
## 30        alto     con hojas    109.7
## 31        bajo     con hojas     71.2
## 32       medio     con hojas     88.1
## 33        alto     con hojas    109.0
## 34        bajo     con hojas     70.9
## 35       medio     con hojas     87.6
## 36        alto     con hojas    106.9
```

Una vez definida la tabla, realizamos el contraste ANOVA:

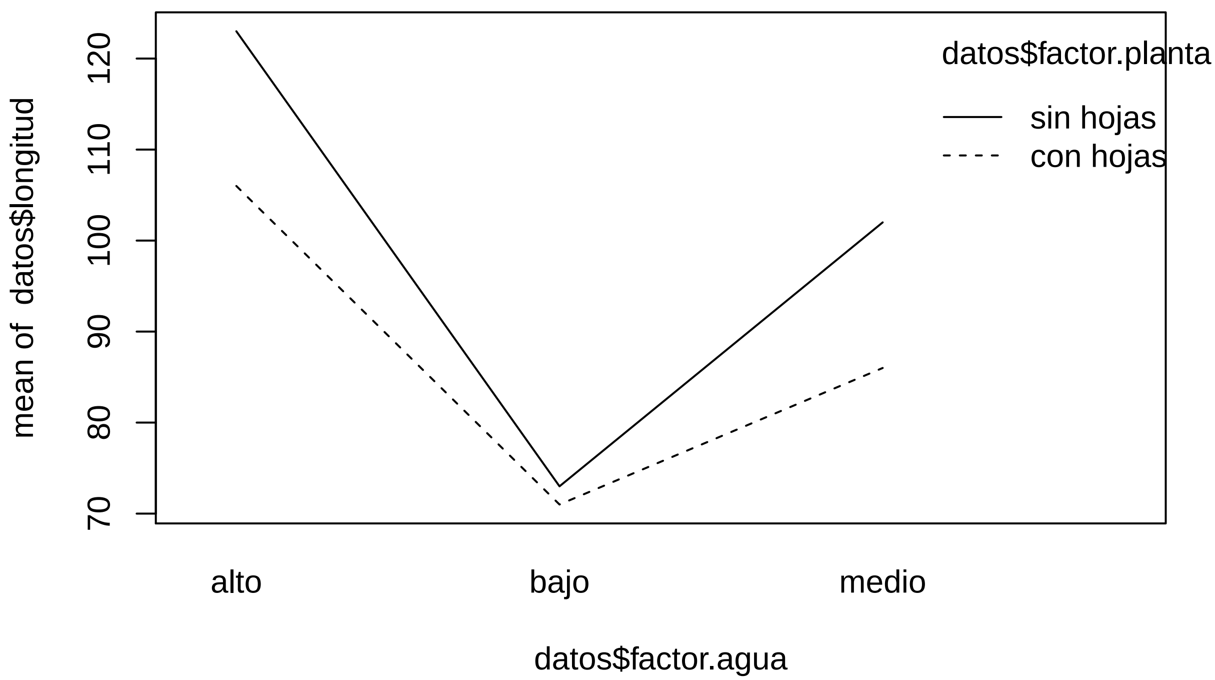
```r
summary(aov(datos$longitud ~ datos$factor.agua * datos$factor.planta))
```

```
##                                        Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)    
## datos$factor.agua                       2  10842    5421  734.49  < 2e-16 ***
## datos$factor.planta                     1   1225    1225  165.97 9.27e-14 ***
## datos$factor.agua:datos$factor.planta  2    422     211   28.59 1.12e-07 ***
## Residuals                              30    221       7                     
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Como todos los p-valores son pequeños, concluimos lo siguiente:

- tenemos evidencias suficientes para afirmar que la longitud de la planta depende del nivel de agua,
- tenemos evidencias suficientes para afirmar que la longitud de la planta depende del tipo de planta, es decir, si ésta es sin hojas o con hojas y,
- tenemos evidencias suficientes para afirmar que existe interacción entre el nivel de agua y el tipo de planta. Realizemos un gráfico de la interacción para comprobar gráficamente dicha evidencia:

```r
interaction.plot(datos$factor.agua,datos$factor.planta,datos$longitud)
```



Observamos que los segmentos anteriores están lejos de ser paralelos.

4. Las variables aleatorias X_i siguen la distribución $N(m_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Consideramos las siguientes muestras de tamaños $n_i = 7$ de las mencionadas variables aleatorias:

X_1	20	26	26	24	23	26	21
X_2	24	22	20	21	21	22	20
X_3	16	18	20	21	24	15	17
X_4	19	15	13	16	12	11	14

a) Comprobar si las varianzas son iguales.
b) Contrastar la igualdad de medias.

Solución

En primer lugar, tenemos que definir la tabla de datos para poder aplicar el test ANOVA:

```
valores=c(20,26,26,24,23,26,21,24,22,20,21,21,22,20,16,18,20,
          21,24,15,17,19,15,13,16,12,11,14)
variable.aleatoria = as.factor(rep(c("X1","X2","X3","X4"),each=7))
(datos=data.frame(valores,variable.aleatoria))
```

```
##    valores variable.aleatoria
## 1       20                 X1
## 2       26                 X1
## 3       26                 X1
## 4       24                 X1
## 5       23                 X1
## 6       26                 X1
## 7       21                 X1
## 8       24                 X2
## 9       22                 X2
## 10      20                 X2
## 11      21                 X2
## 12      21                 X2
## 13      22                 X2
## 14      20                 X2
## 15      16                 X3
## 16      18                 X3
## 17      20                 X3
## 18      21                 X3
## 19      24                 X3
## 20      15                 X3
## 21      17                 X3
## 22      19                 X4
## 23      15                 X4
## 24      13                 X4
## 25      16                 X4
## 26      12                 X4
## 27      11                 X4
## 28      14                 X4
```

Para contrastar si las varianzas son iguales, usamos el test de Bartlett:

```
bartlett.test(valores ~ variable.aleatoria)
```

```
##
##  Bartlett test of homogeneity of variances
##
## data:  valores by variable.aleatoria
## Bartlett's K-squared = 3.4291, df = 3, p-value = 0.3301
```

Como el p-valor es grande, concluimos que no tenemos evidencias suficientes para rechazar que las varianzas de las muestras de las 4 variables aleatorias no sean iguales.

Contrastemos a continuación si las medias son iguales usando el test ANOVA:

```
summary(aov(valores ~ variable.aleatoria))
```

```
##                    Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## variable.aleatoria  3    345  114.99   18.16 2.29e-06 ***
## Residuals          24    152    6.33
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Como el p-valor es muy pequeño concluimos que tenemos evidencias suficientes para afirmar que las medias de las 4 variables aleatorias no son iguales.

Comprobemos las sumas de cuadrados del ANOVA

```
summary(aov(valores ~ variable.aleatoria))->sol_aov
ni=c(7,7,7,7)
k=4
N=sum(ni)
SST= sum(valores^2)- sum(valores)^2/N
SST
```

```
## [1] 496.9643
```

```
Sumas_col=aggregate(valores,by=list(variable.aleatoria),sum)
Sumas_col$x/ni
```

```
## [1] 23.71429 21.42857 18.71429 14.28571
```

```
SSTr=sum(Sumas_col$x^2/ni)-sum(valores)^2/N
SSTr
```

```
## [1] 344.9643
```

```
SSE=SST-SSTr
SSE
```

```
## [1] 152
```

Comparamos con los resultados del summary

```
summary(aov(valores ~ variable.aleatoria))
```

```
##                    Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## variable.aleatoria  3    345  114.99   18.16 2.29e-06 ***
## Residuals          24    152    6.33
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```r
pairwise.t.test(valores,variable.aleatoria,p.adjust.method = "none")
```

```
##
##  Pairwise comparisons using t tests with pooled SD
##
## data:  valores and variable.aleatoria
##
##    X1      X2      X3
## X2 0.1022  -       -
## X3 0.0011  0.0549  -
## X4 3.0e-07 1.9e-05 0.0031
##
## P value adjustment method: none
```

```r
pairwise.t.test(valores,variable.aleatoria,p.adjust.method = "bonferroni" )
```

```
##
##  Pairwise comparisons using t tests with pooled SD
##
## data:  valores and variable.aleatoria
##
##    X1      X2      X3
## X2 0.61328 -       -
## X3 0.00644 0.32957 -
## X4 1.8e-06 0.00011 0.01842
##
## P value adjustment method: bonferroni
```

```r
pairwise.t.test(valores,variable.aleatoria,p.adjust.method = "holm" )
```

```
##
##  Pairwise comparisons using t tests with pooled SD
##
## data:  valores and variable.aleatoria
##
##    X1      X2      X3
## X2 0.1099  -       -
## X3 0.0043  0.1099  -
## X4 1.8e-06 9.5e-05 0.0092
##
## P value adjustment method: holm
```

```r
library(agricolae)
```

```
## Warning: package 'agricolae' was built under R version 3.6.3
```

```r
resultado.anova=aov(valores~variable.aleatoria)
duncan.test(resultado.anova,"variable.aleatoria",group=TRUE,alpha = 0.05)$group
```

```
##     valores groups
## X1 23.71429      a
## X2 21.42857     ab
## X3 18.71429      b
## X4 14.28571      c
```