Projet de mathématiques

Ce projet est à réaliser par groupe de deux. Il doit comprendre une interface web et les fonctions mathématiques doivent être implémentées en PHP.
Il vise à implémenter un algorithme permettant de calculer le polynôme caractéristique d'une matrice carrée. On se limitera aux matrices carrées d'ordre 3 bien que cet algorithme soit valable pour toute matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$.

1 Phase 1 : racines entières d'un polynôme de degré 3

On rappelle qu'un entier relatif $x_0 \in \mathbb{Z}$ est racine d'un polynôme[1] $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ si

$$a_3(x_0)^3 + a_2(x_0)^2 + a_1x_0 + a_0 = 0$$

Par exemple 1 est racine du polynôme $-X^3 + 5X^2 - 8X + 4$.

Il s'agit, dans cette première phase, de déterminer toutes les racines entières entre -10 et 10 d'un polynôme de degré 3.

En entrée, vous devez demander les coefficients du polynôme de degré 3 : a_3, a_2, a_1 et a_0 et en sortie vous devez afficher les racines entières (entre -10 et 10) de ce polynôme.

Trois cas de figures sont possibles illustrés par les exemples suivants :

- Exemple 1 : $a_3 = -1$, $a_2 = 6$, $a_1 = -11$ et $a_0 = 6$. Vous devez afficher : « les racines entières de ce polynôme sont 1, 2 et 3 ».

  En effet 1, 2 et 3 sont bien racines du polynôme $-X^3 + 6X^2 - 11X + 6$.

- Exemple 2 : $a_3 = -1$, $a_2 = 0$, $a_1 = 12$ et $a_0 = -16$. Vous devez afficher : « les deux racines entières de ce polynôme sont 2 et -4 ».

  En effet 2 et -4 sont bien racines du polynôme $-X^3 + 12X - 16$.

- Exemple 3 : $a_3 = -1$, $a_2 = 3$, $a_1 = -3$ et $a_0 = 1$. Vous devez afficher : « la racine entière de ce polynôme est 1 ».

  En effet 1 est bien racine du polynôme $-X^3 + 3X^2 - 3X + 1$.

1. Les polynômes de degré 3 seront tous à coefficients entiers c'est-à-dire tous les $a_i \in \mathbb{Z}$.

2 Phase 2 : factorisation d'un polynôme de degré 3

A l'aide de la phase 1, vous devez donner la factorisation complète du polynôme initial de degré 3.

On rappelle que si x_0 est racine d'un polynôme $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ alors ce polynôme est factorisable par $(X - x_0)$ c'est-à-dire il existe un polynôme Q de degré 2 tel que

$$a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = (X - x_0)Q$$

Illustrons cette phase par la reprise des trois exemples de la phase 1 :

- Exemple 1 : $a_3 = -1$, $a_2 = 6$, $a_1 = -11$ et $a_0 = 6$. Vous devez afficher (en utilisant bien entendu la phase 1) : « $-X^3 + 6X^2 - 11X + 6 = -(X - 1)(X - 2)(X - 3)$ ».
- Exemple 2 : $a_3 = -1$, $a_2 = 0$, $a_1 = 12$ et $a_0 = -16$.
  Vous devez afficher : « $-X^3 + 12X - 16 = -(X - 2)^2(X + 4)$ »
- Exemple 3 : $a_3 = -1$, $a_2 = 3$, $a_1 = -3$ et $a_0 = 1$.
  Vous devez afficher : « $-X^3 + 3X^2 - 3X + 1 = (1 - X)^3$ »

Aucune méthode ne vous est imposée pour cette phase.
Lorsque votre polynôme de degré 3, $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, possède 3 racines entières x_0, x_1 et x_2, vous pouvez directement afficher la factorisation du polynôme sous la forme

$$a_3(X - x_0)(X - x_1)(X - x_2)$$

Pour l'exemple 2, une méthode consiste d'abord à implémenter un algorithme[2] de division du polynôme de degré 3 initial par le polynôme de degré 2 : $(X - x_0)(X - x_1)$ où x_0 et x_1 sont les racines entières déterminées dans la phase 1. Cette implémentation vous permettra d'obtenir directement le dernier facteur manquant dans la factorisation.

Pour l'exemple 3, utiliser l'algorithme de division polynomiale de l'exemple 2. Vous obtenez d'abord

$$-X^3 + 3X^2 - 3X + 1 = (X - 1)(-X^2 + 2X - 1)$$

2. il faudra alors veiller à ce que cet algorithme fonctionne aussi pour diviser un polynôme de degré 2 par un polynôme de degré 1 et un polynôme de degré 3 par un polynôme de degré 1 car cela vous sera utile dans l'exemple 3 qui suit.

puis chercher une racine entière du polynôme $-X^2 + 2X - 1$. Vous trouvez la racine 1 donc à nouveau vous appliquez l'algorithme de division polynomiale et vous pouvez afficher le résultat :

$$-X^3 + 3X^2 - 3X + 1 = (1 - X)^3$$

ou si vous préférez

$$-X^3 + 3X^2 - 3X + 1 = -(X - 1)^3$$

3 Phase 3 : détermination du polynôme caractéristique

En entrée vous devez demander les coefficients de la matrice carrée d'ordre 3 en affichant par exemple à l'écran

$$A = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

puis en sortie vous devez afficher le résultat du polynôme caractéristique P_A sous forme développée puis sous forme factorisée grâce aux phases 1 et 2.
Pour déterminer le polynôme caractéristique de votre matrice carrée d'ordre 3 sous forme développée, vous devez implémenter l'algorithme suivant :
Soient les matrices F_0, F_1 et F_2 définies par

$$\begin{cases} F_0 = A \\ F_1 = A\big(A - \operatorname{tr}(A) I_3\big) \\ F_2 = A\left(F_1 - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(F_1) I_3\right) \end{cases}$$

où tr désigne la trace et I_3 la matrice identité d'ordre 3 c'est-à-dire $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Alors

$$P_A(X) = -X^3 + \operatorname{tr}(A)X^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(F_1)X + \frac{1}{3}\operatorname{tr}(F_2)$$

Comme des produits matriciels sont en jeu, vous pouvez bien entendu utiliser votre projet de l'an passé.

Illustrons cet algorithme par un exemple.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$F_0 = A$.

$\mathrm{tr}(A) = -1 - 1 + 4 = 2$ et $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

donc

$$F_1 = A(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}(F_1) = 2$ et $F_1 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(F_1)I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

donc

$$F_2 = A\left(F_1 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(F_1)I_3\right) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$P_A(X) = -X^3 + \mathrm{tr}(A)X^2 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(F_1)X + \frac{1}{3}\mathrm{tr}(F_2) = -X^3 + 2X^2 + X - 2$$

Vous devez donc afficher, pour cette matrice, le résultat ci-dessus puis la factorisation sous la forme [3]

$$P_A(X) = -(X + 1)(X - 2)(X - 1)$$

puis afficher ensuite le spectre et la multiplicité des valeurs propres c'est-à-dire afficher

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 1, 2\} \text{ avec } m(-1) = 1,\ m(1) = 1 \text{ et } m(2) = 1$$

3. vous pouvez aussi l'afficher par exemple sous la forme $P_A(X) = (-X - 1)(X - 2)(X - 1)$.

4 Matrices tests

Vous pouvez tester votre implémentation des phases 1 à 3 en utilisant les deux exemples suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   $P_A(X) = -X^3 + 2X^2 - X = -X(1-X)^2$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

   $P_A(X) = -X^3 + 6X^2 - 12X + 8 = (2-X)^3$.