Теория и реализация языков программирования. Задание 4: Замкнутость регулярных языков, теорема Майхилла-Нероуда и минимальные автоматы

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.09.25

Упражнение 1

Задача 1

Будем «искать» представителей классов. Сначала найден $\varepsilon \in C_1$. Если $\varepsilon\sigma \equiv \sigma \notin C(\varepsilon) \Leftrightarrow f(\sigma, \varepsilon) = 0$, найден представитель нового класса. Данную процедуру повторяем для всех найденных классов $\sim n^2$ операций, для них же на каждом шаге определяем $\delta(C_i, \sigma) = C_j$, где $x_i \in C_i$ — найден, $j\colon x_i\sigma \in C_j$. Так будут найдены все классы, потому что на каждом шаге определяются переходы для какого-то состояния ДКА. Состояний конечное число, а когда автомат будет полным, алгоритм можно считать законченным. Корректность следует из построения: $\delta(C_i, \sigma) = C_j \Leftrightarrow x_i\sigma \in C_j$ — см. доказательство теоремы Майхилла-Нероуда.
Более формально: $L \subset \Sigma^* \in \mathsf{REG}, \Sigma^*/\sim_L = \{C_i\} \equiv \{C_1, ..., C_n\}$ (n неизвестно, C_i попарно различны). $f\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow \{0, 1\}$ — задана, $f(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \sim_L y$. Построим ДКА $\mathcal{A}\colon L(\mathcal{A}) = L$.
$Q \overset{\text{def}}{=} \{C_i\}, q_0 \overset{\text{def}}{=} C(\varepsilon)$. Докажем, что на n-м шаге нижеописанного алгоритма выполняется
$P(n) = [\forall i \in \overline{1, n} \hookrightarrow$ найдены $x_i \in C_i, \forall \sigma \in \Sigma \hookrightarrow$ определены $\delta(C_i, \sigma) = C_j \Leftrightarrow C_i\sigma \in C_j]$.

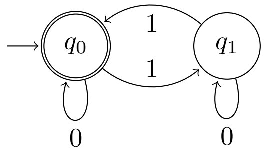
1. $(n = 1)$. $\Sigma^* \ni \varepsilon$ принадлежит какому-то классу. Без ограничения общности $\varepsilon \in C_1$. Рассмотрим все $\sigma_k \in \Sigma$. Если $f(\varepsilon, \sigma_k) = 1$, то x

Задача 2

Задача 3

Задача 4

1. $\Sigma = \{0, 1\}$. Докажем, что $L(\mathcal{A}) = L$, $L = \{w \mid |w|_1 = 2t, t \in \mathbb{Z}\}$, ДКА $\mathcal{A}$:



Докажем утверждение $P(n) = \left[\forall w \in \Sigma^*\colon |w| = n \hookrightarrow \left(q_0 \xrightarrow{w} q_i \Rightarrow i = |w|_1 \mod 2\right)\right]$.

(a) Докажем $P(0)$. Поскольку $|w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$, $P(0) = \left[q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_i \Rightarrow i = |\varepsilon|_1 \mod 2\right]$. Поскольку $\delta(q_0, \varepsilon) = q_{\underline{0}}$, и $\underline{0} = |\varepsilon|_1$, получаем $P(0)$ ■

(b) Пусть доказано $P(n)$, докажем $P(n+1)$. $P(n) = \left[\forall w \in \Sigma^*\colon |w| = n \hookrightarrow \left(q_0 \xrightarrow{w} q_i \Rightarrow i = |w|_1 \mod 2\right)\right]$. Фиксируем $w \in \Sigma^*, |w| = n+1, w = w_0\sigma, |w_0| = n, |\sigma| = 1$. $\mathcal{A}$ — полный $\Rightarrow (q_0, w) \equiv (q_0, w_0\sigma) \vdash^* (q_i, \sigma) \vdash (q_j, \varepsilon)$. $|w_0| = n \overset{P(n)}{\Rightarrow} i = |w_0|_1 \mod 2$. $i \in \{0, 1\}, \sigma \in \{0, 1\} \Rightarrow$ рассмотрим четыре случая:

a. $(i = 0, \sigma = 0)$. $(q_0, w_0 0) \vdash^* (q_0, 0) \vdash (q_0, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_0 \Rightarrow j = 0$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |0|_1 \mod 2 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = j = |w|_1 \mod 2 = 0$.

b. $(i = 0, \sigma = 1)$. $(q_0, w_0 1) \vdash^* (q_0, 1) \vdash (q_1, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_1 \Rightarrow j = 1$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |1|_1 \mod 2 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow 1 = j = |w|_1 \mod 2 = 1$.

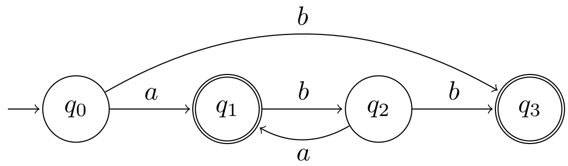
c. $(i = 1, \sigma = 0)$. $(q_0, w_0 0) \vdash^* (q_1, 0) \vdash (q_1, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_1 \Rightarrow j = 1$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |0|_1 \mod 2 = 1 + 0 = 1 \Rightarrow 1 = j = |w|_1 \mod 2 = 1$.

d. $(i = 1, \sigma = 1)$. $(q_0, w_0 1) \vdash^* (q_1, 1) \vdash (q_0, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_0 \Rightarrow j = 0$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |1|_1 \mod 2 = (1 + 1) \mod 2 = 0 \Rightarrow 0 = j = |w|_1 \mod 2 = 0$.

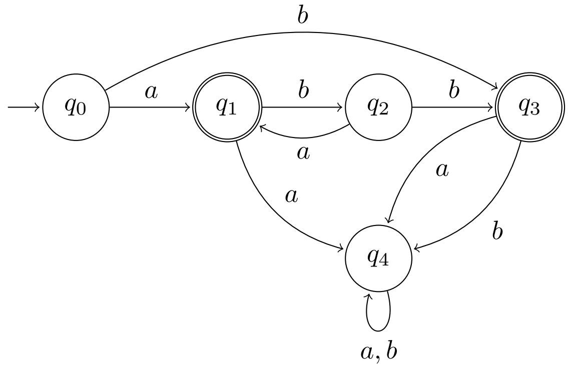
Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \hookrightarrow P(n) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \hookrightarrow \left[\forall w \in \Sigma^*\colon |w| = n \hookrightarrow \left(q_0 \xrightarrow{w} q_i \Rightarrow i = |w|_1 \mod 2\right)\right] \Rightarrow$
$\forall w \in \Sigma^* \hookrightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_{|w|_1 \mod 2}$. Пусть $w \in L \Leftrightarrow |w|_1 \mod 2 = 0 \Leftrightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_0 \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A})$ ■

Задача 5

Исходный автомат $\mathcal{A}$:

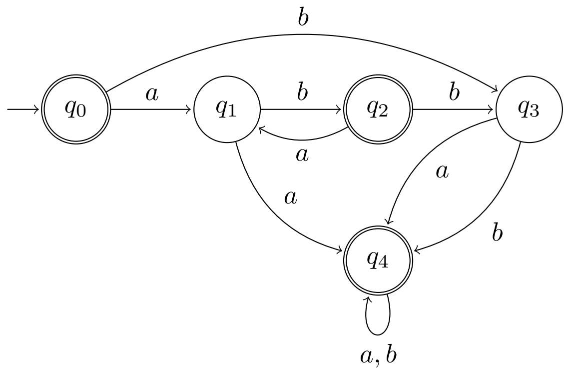


Пополним автомат $\mathcal{A}$ до $\mathcal{A}'$ и удалим недостижимые из q_0 состояния: добавим $q_4 \in Q'$, $q_4 \notin F'$, в него направим недостающие переходы:



$L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$, так как $x \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow x \in L(\mathcal{A}')$, потому что $Q \subset Q'$, $F = F', \delta \subset \delta'$. $x \notin L(\mathcal{A}) \Rightarrow$ либо $q_0 \xrightarrow{x} q \notin F$, но тогда $q_0 \xrightarrow{x} q \notin F' \Rightarrow x \notin L(\mathcal{A}')$, либо $\delta(q_0, x) = \varnothing$, тогда $\delta'(q_0, x) = q_4$, потому что был выполнен переход в q_4, которого не было в $\mathcal{A}$ (по построению, добавлены переходы только в q_4), и при обработке последующих символов $\mathcal{A}'$ остается в q_4.

Построим A'': $L(\mathcal{A}'') = \overline{L(\mathcal{A}')} \equiv \overline{L(\mathcal{A})}$ по полному автомату $\mathcal{A}'$, определив $F'' \stackrel{\text{def}}{=} Q' \setminus F'$:

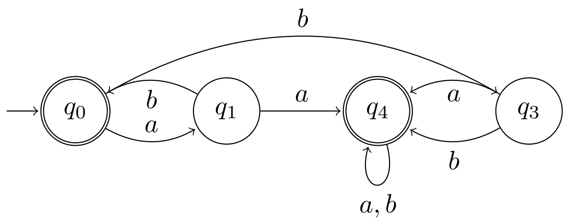


Далее построим по $\mathcal{A}''$ минимальный $\mathcal{A}'''$ по алгоритму:

1. $\{\ 0 \quad 2 \quad 4 \mid 1 \quad 3\ \}$

2. $\{\ 0 \quad 2 \mid 4 \mid 1 \mid 3\ \}$ — OK

3. $\{\ 0 \quad 2 \mid 4 \mid 1 \mid 3\ \}$ — OK



Задача 6