

# Алгоритмы и модели вычислений.

## Задание 8: линейное программирование

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.27

**(каноническое) Задача 32**

**(каноническое) Задача 33**

**(каноническое) Задача 34**

$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{m,n}$ .  $P_1 \stackrel{\text{def}}{=} [\exists p \in \mathbb{R}^m: A^T p < 0]$ .  $P_2 \stackrel{\text{def}}{=} [\exists y \in \mathbb{R}^n: y \geq 0, y \neq 0, Ay = 0]$ . Доказать:  $\neg P_1 \Leftrightarrow P_2$

1.  $e_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \underbrace{1}_i & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow e \stackrel{\text{def}}{=} (e_1, \dots, e_n)$  — стандартный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Скалярное произведение  $(\cdot, \cdot)$  — тоже стандартное, т.е. матрица Грама в  $e$  единичная, т.е.  $\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

2. Пусть  $P_2$ .

(a) Тогда  $\exists y: Ay = 0, y \geq 0, y \neq 0$ . Обозначим столбцы матрицы  $A = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \dots & \underline{b}_n \end{pmatrix}$ .  $y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^T$  Тогда

$Ay = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \dots & \underline{b}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \underline{b}_i y_i \stackrel{(*)}{=} 0$ . Условие  $y \neq 0 \Rightarrow \exists i \in \overline{1, n}: y_i \neq 0$ . Без ограничения общности это  $y_1$ . Тогда в  $(*)$  перенесем всё, кроме  $y_1 \underline{b}_1$  в правую часть, и поделим на  $y_1 \neq 0$ :  $\underline{b}_1 = -\frac{y_2}{y_1} \underline{b}_2 - \dots - \frac{y_n}{y_1} \underline{b}_n$

(b) Рассмотрим  $A^T p = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T \\ \dots \\ \underline{b}_n^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\underline{b}_1, p) \\ \dots \\ (\underline{b}_n, p) \end{pmatrix}$

(c) Предположим, что  $P_1$ , т.е.  $\exists p: \forall i \in \overline{1, n} \hookrightarrow (\underline{b}_i, p) < 0$ .

Рассмотрим  $(\underline{b}_1, p) = (-\frac{y_2}{y_1} \underline{b}_2 - \dots - \frac{y_n}{y_1} \underline{b}_n, p) = -\frac{y_2}{y_1} (\underline{b}_2, p) - \dots - \frac{y_n}{y_1} (\underline{b}_n, p)$ . Поскольку  $(\underline{b}_i, p) < 0, \frac{y_i}{y_1} \geq 0$ , то  $(\underline{b}_1, p) \geq 0$  — противоречие.

(d) Значит,  $\neg P_1$ .

**(каноническое) Задача 35**

**(каноническое) Задача 36**

(Тарасов, лекция 2014.04.01)

Фиксируем  $k \in \mathbb{N}, \{t_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$ . Определим  $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4: \vec{r}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} t^4 & t^3 & t^2 & t \end{pmatrix}^T$ . Рассмотрим точки  $\vec{x}_i = \vec{r}(t_i)$ . Рассмотрим  $G \stackrel{\text{def}}{=} \text{conv}(\{\vec{x}_i\}_{i=1}^k)$  — выпуклую оболочку этих точек. Фиксируем  $i_1 \neq i_2 \in \overline{1, k}$ . Докажем, что  $\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}$  — вершины  $G$ , соединенные ребром  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists$  гиперплоскость  $\pi: (\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2} \in \pi)$  и (многогранник  $G$  лежит по одну сторону от  $\pi$ ).

1. Определим многочлен  $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} (t - t_{i_1})^2 \cdot (t - t_{i_2})^2 \equiv t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

2. Определим гиперплоскость  $\pi. \mathbb{R}^4 \ni \vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T \in \pi \Leftrightarrow F(\vec{x}) \equiv x_1 + a_3 x_2 + a_2 x_3 + a_1 x_4 + a_0 = 0$ .

3. Тогда  $F(\vec{r}(t)) = P(t): F(\vec{r}(t)) = F(t^4, t^3, t^2, t) = t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

4.  $t_{i_1}$  и  $t_{i_2}$  — корни  $P(t)$ , откуда  $P(t_{i_1}) = P(t_{i_2}) = 0$ , значит,  $F(\vec{x}_{i_1}) = F(\vec{x}_{i_2}) = 0$ , значит,  $\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2} \in \pi$

5. Фиксируем  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда  $F(\vec{r}(t)) = P(t) \geq 0$ . Значит, все точки  $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^k$  лежат по одну сторону от  $\pi$ . Значит,  $G$  лежит по одну сторону

6. Пусть  $t: \vec{r}(t) \in \pi \Leftrightarrow F(\vec{r}(t)) = 0 \Leftrightarrow P(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{t_{i_1}, t_{i_2}\}$

■

**(каноническое) Задача 37**