Методы оптимизации. Сдача, задача 3

Сергей Володин, 374 гр.

7 мая 2016 г.

Задача 3

Пусть $\{a_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$. $\rho > 0$. Функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(y) = \left(\sum |(a_i, y)|^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

Задача (1):

$$\sup_{||y||_2 \leqslant 1} f(y)$$

Требуется построить двойственную задачу.
Перепишем (1):

$$\min_{||y|| \leqslant 1} -f(y)$$

Функция Лагранжа:

$$L(y, \lambda) = -f(y) + \lambda(||y|| - 1)$$

Двойственная задача:

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} L(y, \lambda) \to \max_{\lambda \geqslant 0}$$

Перепишем и получим двойственную задачу:

$$-\inf_{y \in \mathbb{R}^n} L(y, \lambda) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} -L(y, \lambda) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (f(y) - \lambda||y|| + \lambda) = \underbrace{\sup_{y \in \mathbb{R}^n} (f(y) - \lambda||y||_2) + \lambda}_{g(\lambda)} \to \min_{\lambda \geqslant 0}$$

Осталось найти $g(\lambda)$. Обозначим

$$v(\lambda) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \underbrace{f(y) - \lambda||y||_2}_{M(y,\lambda)}.$$

Тогда $g(\lambda) = \lambda + v(\lambda)$. Найдем v.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Заметим, что $f(\alpha y) = \left(\sum\limits_{i=1}^m |(a_i, \alpha y)|^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} = \left(|\alpha|^\rho \sum\limits_{i=1}^m |(a_i, y)|^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} = |\alpha| f(y)$. Также $||\alpha y||_2 = |\alpha| \cdot ||y||_2$, откуда $M(\alpha y, \lambda) = |\alpha|(f(y) - \lambda||y||_2)$.

Фиксируем $\lambda \geqslant 0$. Пусть $\exists y \in \mathbb{R}^n\colon\ f(y) - \lambda||y||_2 > 0$. Тогда возьмем $0 < \alpha_k \to \infty$ и получим $M(\alpha_k y, \lambda) = \alpha_k \underbrace{M(y, \lambda)}_{>0} \to +\infty$.

То есть, $v(\lambda) = +\infty$

Пусть верно обратное, то есть, $\forall y \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow f(y) - \lambda||y||_2 \leqslant 0$. Но это значит, что $v(\lambda) \leqslant 0$. Но $v(\lambda) \geqslant M(0, \lambda) = 0$, значит, $v(\lambda) = 0$.

Перепишем условие $\forall y \in \mathbb{R}^n f(y) - \lambda||y||_2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \lambda \geqslant \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{||y||_2} = \lambda^*$.

Получаем, что $g(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \lambda \geqslant \lambda^* \\ +\infty & \lambda \in [0, \lambda^*] \end{cases}$

Заметим, что решением двойственной задачи $\inf\limits_{\lambda \geqslant 0} g(\lambda)$ является число λ^*, так как $\inf g(\mathbb{R}_+) = \inf[\lambda^*, +\infty] = \lambda^*$.

Также

$$\lambda^* = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{||y||} = \sup_{||y||=1, t \in \mathbb{R}_+} \frac{f(ty)}{||ty||} = \sup_{||y||=1} f(y) = \sup_{||y||=1, t \in [0,1]} tf(y) = \sup_{||y|| \leqslant 1} f(y)$$

То есть, число λ^* является решением исходной задачи (1).
Вопрос: этого достаточно, или нужно найти λ^* (т.е. решить исходную задачу)?
Поиск λ^*
Рассмотрим $\lambda^* = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{||y||}$. Найдем

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \frac{f(y)}{||y||_2} = \frac{1}{||y||^2}(f_j||y|| - f\frac{y_j}{||y||}), \text{ где } f_j = \frac{\partial f}{\partial y_j}$$

. Приравняем нулю, получим

$$f_j||y||^2 = y_j f$$

Найдем

$$f_j = \frac{1}{\rho}\left(\sum_{i=1}^m |(a_i,y)|^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1} \sum_{i=1}^m \rho|(a_i,y)|^{\rho-1}\frac{\partial|(a_i,y)|}{\partial y_j} = f^{1-\rho}\sum_{i=1}^m |(a_i,y)|^{\rho-1}\frac{\partial|(a_i,y)|}{\partial y_j}$$

Подставим, получим

$$f^{1-\rho}\sum_{i=1}^m |(a_i,y)|^{\rho-1}\frac{\partial|(a_i,y)|}{\partial y_j}||y||^2 = y_j f$$

$$\sum_{i=1}^m |(a_i,y)|^{\rho-1}\frac{\partial|(a_i,y)|}{\partial y_j}||y||^2 = y_j f^\rho$$

То есть, $\lambda^* = f(y)$, где $||y|| = 1$ и

$$y_j\sum_{i=1}^m |(a_i,y)|^\rho = \sum_{i=1}^m |(a_i,y)|^{\rho-1}\frac{\partial|(a_i,y)|}{\partial y_j}$$

Заметим, что в этой точке также выполнено $f^2 = f_1^2 + ... + f_n^2$