

Алгоритмы и модели вычислений.

Задание 7: потоки

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.27

Определения

(сюда будут ссылки)

$(G(V, E), c: V^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть \Leftrightarrow

$$1. \ c(u, v) \geq 0$$

$$2. \ \forall (u, v) \in V^2 \hookrightarrow ((u, v) \in E \Leftrightarrow c(u, v) > 0)$$

$f: V^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ — поток в этой сети \Leftrightarrow

$$1. \ \forall (u, v) \in V^2 \hookrightarrow (f(u, v) \leq c(u, v))$$

$$2. \ \forall (u, v) \in V^2 \hookrightarrow (f(u, v) = -f(v, u))$$

$$3. \ \forall u \in V^2 \setminus \{s, t\} \hookrightarrow f(u, V) = 0$$

Упражнение 0

1. Пусть $(G(V, E), c: V^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. Пусть $(u, v) \notin E, (v, u) \notin E$. Тогда $f(u, v) = f(v, u) = 0$.

$(u, v) \notin E \xrightarrow{2} c(u, v) = 0. (v, u) \notin E \xrightarrow{2} c(v, u) = 0$. Но $-0 = -c(v, u) \stackrel{1}{\leq} -f(v, u) \stackrel{2}{=} \underline{f(u, v)} \stackrel{1}{\leq} c(u, v) = 0$, откуда $f(u, v) = f(v, u) = 0$ ■

Упражнение 1

Пусть $(G(V, E), c: V^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. Фиксируем $u \notin \{s, t\}$. Пусть $L = \{v \in V \mid (v, u) \in E\}, R = \{v \in V \mid (u, v) \in E\}$ — вершины, из которых (в которые, соответственно) есть ребра в фиксированную. Тогда $f(L, u) = f(u, R)$.

Найдем

$$0 \stackrel{3}{=} f(u, V) \equiv \sum_{v \in V} f(u, v) = \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ (u, v) \in E \\ (v, u) \in E}} f(u, v)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ (u, v) \in E \\ (v, u) \notin E}} f(u, v)}_{S_2} + \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ (u, v) \notin E \\ (v, u) \in E}} f(u, v)}_{S_3} + \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ (u, v) \notin E \\ (v, u) \notin E}} f(u, v)}_{S_4}$$

$$(u, v) \notin E, (v, u) \notin E \xrightarrow{1} f(u, v) = 0, \text{ поэтому } S_4 = 0. \text{ Рассмотрим } S_1 = \sum_{\substack{v \in V \\ (u, v) \in E \\ (v, u) \in E}} f(u, v) \stackrel{2}{=} \sum_{\substack{v \in V \\ (u, v) \in E \\ (v, u) \in E}} (-f(v, u)) = - \sum_{\substack{v \in V \\ (u, v) \in E \\ (v, u) \in E}} f(v, u) \boxed{=}$$

Переобозначим вершины, получим $\boxed{=} - \sum_{\substack{u \in V \\ (v, u) \in E \\ (u, v) \in E}} f(u, v) = -S_1$, откуда $S_1 = 0$.

$$\text{Рассмотрим } f(L, u) = \sum_{(v, u) \in E} f(v, u) = - \sum_{(v, u) \in E} f(u, v) = -(S_1 + S_3) \stackrel{S_1=0}{=} -S_3$$

$$\text{Рассмотрим } f(u, R) = \sum_{(u, v) \in E} f(u, v) = S_1 + S_2 \stackrel{S_1=0}{=} S_2.$$

Из (*) получаем $0 \stackrel{S_1=0}{=} S_2 + S_3$, откуда $S_2 = -S_3$, и $f(L, u) = f(u, R)$ ■

Упражнение 2

Пусть $(G(V, E), c: V^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. f — поток в ней.

Рассмотрим $A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{u \in V \\ v \in V}} f(u, v)$. Переобозначим, получим $A = \sum_{\substack{v \in V \\ u \in V}} f(v, u) \stackrel{2}{=} - \sum_{\substack{v \in V \\ u \in V}} f(u, v) = -A$, откуда $A = 0$

$$\text{Но } A = \underbrace{\sum_{\substack{u=s \\ v \in V}} f(u, v)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{\substack{u=t \\ v \in V}} f(u, v)}_{S_2} + \underbrace{\sum_{\substack{u \in V \setminus \{s, t\} \\ v \in V}} f(u, v)}_{S_3}.$$

Рассмотрим $S_3 = \sum_{u \in V \setminus \{s, t\}} \sum_{v \in V} f(u, v)$. По свойству 3 каждая подчеркнутая часть равна 0, и $S_3 = 0$

$$\text{Рассмотрим } S_1 = \sum_{v \in V} f(s, v) \equiv |f|$$

$$\text{Рассмотрим } S_2 = \sum_{v \in V} f(t, v) \stackrel{2}{=} - \sum_{v \in V} f(v, t) = -f(V, t).$$

Поскольку $0 = A = S_1 + S_2$, получаем $|f| = f(V, t)$ ■

Задача 1

Пусть $(G(V, E), c: V^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. f — поток в ней.

1. Пусть $X \subseteq V$. Рассмотрим $A \stackrel{\text{def}}{=} f(X, X) \equiv \sum_{\substack{u \in X \\ v \in X}} f(u, v)$. Переобозначим, получим

$$A = \sum_{\substack{v \in X \\ u \in X}} f(v, u) \stackrel{2}{=} - \sum_{\substack{v \in X \\ u \in X}} f(u, v) = -A,$$

откуда $A = 0$ ■

2. Пусть $X, Y \subseteq V$. Рассмотрим $f(X, Y) \equiv \sum_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} f(x, y) \stackrel{2}{=} - \sum_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} f(y, x) \equiv -f(Y, X)$ ■

3. Пусть $X, Y, Z \subseteq V$, $X \cap Y = \emptyset$. Рассмотрим $f(X \cup Y, Z) \stackrel{(*)}{=} \sum_{\substack{u \in X \cup Y \\ v \in Z}} f(u, v) = \underbrace{\sum_{\substack{u \in X \\ u \in Y \\ v \in Z}} f(u, v)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{\substack{u \in X \\ u \notin Y \\ v \in Z}} f(u, v)}_{S_2} + \underbrace{\sum_{\substack{u \notin X \\ u \in Y \\ v \in Z}} f(u, v)}_{S_3}.$

$S_1 = 0$, так как $u \in X \wedge u \in Y \Leftrightarrow u \in X \cap Y \Leftrightarrow u \in \emptyset$

$$\text{По определению, } f(X, Z) = \sum_{\substack{u \in X \\ u \in Y \\ v \in Z}} f(u, v) + \sum_{\substack{u \in X \\ u \notin Y \\ v \in Z}} f(u, v) \equiv S_1 + S_2 \stackrel{S_1=0}{=} S_2$$

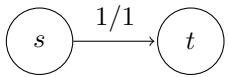
$$\text{По определению, } f(Y, Z) = \sum_{\substack{u \in Y \\ u \in X \\ v \in Z}} f(u, v) + \sum_{\substack{u \in Y \\ u \notin X \\ v \in Z}} f(u, v) \equiv S_1 + S_3 \stackrel{S_1=0}{=} S_3$$

Тогда из (*) получаем $f(X \cup Y, Z) = S_2 + S_3 = f(X, Z) + f(Y, Z)$.

4. Пусть $X, Y, Z \subseteq V$, $X \cap Y = \emptyset$. Тогда $f(Z, X \cup Y) \stackrel{2}{=} -f(X \cup Y, Z) \stackrel{3}{=} -(f(X, Z) + f(Y, Z)) \equiv -f(X, Z) - f(Y, Z) \stackrel{2}{=} f(Z, X) + f(Z, Y)$

Задача 2

Нет, не обязательно. Пример. Рассмотрим $(G(V, E), c: V^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. f — поток в ней:



Определим $V \supseteq X \stackrel{\text{def}}{=} \{s\}$, $Y \stackrel{\text{def}}{=} X$. Тогда $A = f(X, Y) \stackrel{X=Y}{=} f(X, X) \stackrel{1}{=} 0$.

$$\text{Рассмотрим } B = -f(V - X, Y) \equiv f(\{t\}, \{s\}) = - \sum_{\substack{u \in \{t\} \\ v \in \{s\}}} f(u, v) \equiv -f(t, s) \stackrel{2}{=} f(s, t) = 1$$

Получаем $A = 0 \neq 1 = B$ ■

Упражнение 3

Пусть $(G(V, E), c: V^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. f_1 и f_2 — потоки, для которых выполнено 3, 2 (заметим, что функция c не участвует в этой части определения).

Определим функцию $f: V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ как $f(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(u, v) + f_2(u, v)$. По определению, f — поток в данной транспортной сети \Leftrightarrow

3. 3. Фиксируем $u \in V$. Рассмотрим $f(u, V) = \sum_{v \in V} f(u, v) = \sum_{v \in V} [f_1(u, v) + f_2(u, v)] \equiv \sum_{v \in V} f_1(u, v) + \sum_{v \in V} f_2(u, v) \equiv$

$$\overset{0}{f_1(u, V)} + \overset{0}{f_2(u, V)} = 0 \text{ — выполнено всегда (зачеркнуто по свойству 3).}$$

2. 2. Фиксируем $(u, v) \in V^2$. Рассмотрим $f(u, v) \equiv f_1(u, v) + f_2(u, v) \stackrel{2}{=} -f_1(v, u) - f_2(v, u) \equiv -(f_1(v, u) + f_2(v, u)) = -f(v, u)$ — выполнено всегда.

1. 1. Нужно: $\forall (u, v) \in V^2 \hookrightarrow f(u, v) \leq c(u, v)$. Поэтому третье свойство выполнено для $f \Leftrightarrow \forall (u, v) \in V^2 \hookrightarrow f_1(u, v) + f_2(u, v) \leq c(u, v)$.

Поэтому сумма потоков $f_1 + f_2$ — поток $\Leftrightarrow \boxed{\forall (u, v) \in V^2 \hookrightarrow f_1(u, v) + f_2(u, v) \leq c(u, v)}$.

Упражнение 4

Пусть $N = (G(V, E), c: V^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. Пусть f_1 — поток в ней. Пусть $N' = (G'(u, v), c', s, t)$ — остаточная сеть для N и f_1 . Пусть найден увеличивающий путь в остаточной сети, т.е. последовательность вершин $s \equiv v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k \equiv t$, такая, что $M \stackrel{\text{def}}{=} \min_{i \in \overline{0, k-1}} c'(v_i, v_{i+1}) > 0$. Считаем путь простым (если путь не простой, выкенем

цикл, получится простой путь). Определим функцию $f_2(u, v) = \sum_{i=0}^{k-1} \begin{cases} M, & (v_i, v_{i+1}) = (u, v) \\ -M, & (v_i, v_{i+1}) = (v, u) \end{cases}$. Поскольку путь простой, то каждое (неориентированное) ребро встречается в нем только один раз. Значит, в сумме максимум один элемент ненулевой,

и получаем $f_2(u, v) = \begin{cases} M, & \exists i: (u, v) = (v_i, v_{i+1}) \\ -M, & \exists i: (v, u) = (v_i, v_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$:

$$1. f_2(u, v) = \begin{cases} M, & \exists i: (u, v) = (v_i, v_{i+1}) \\ -M, & \exists i: (v, u) = (v_i, v_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} -M, & \exists i: (v, u) = (v_i, v_{i+1}) \\ M, & \exists i: (u, v) = (v_i, v_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = - \begin{cases} M, & \exists i: (v, u) = (v_i, v_{i+1}) \\ -M, & \exists i: (u, v) = (v_i, v_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = -f_2(v, u), \text{ поэтому для } f_2 \text{ и } N \text{ выполнено свойство 2}$$

2. Фиксируем $u \in V \setminus \{t, s\}$.

(а) Пусть u не входит в увеличивающий путь. Тогда $\forall v \in V \forall i \in \overline{0, k-1} \hookrightarrow (u, v) \neq (v_i, v_{i+1})$, значит, $f_2(u, v) = 0$, и $\sum_{v \in V} f_2(u, v) = 0$.

(б) Пусть u входит в увеличивающий путь. $u \neq s \wedge u \neq t$, поэтому u — не первая, и не последняя вершина в пути. Значит, $\exists v_1, v_2: (v_1, u), (u, v_2)$ — смежные ребра из пути, и других ребер из пути, инцидентных u нет (путь простой). Тогда $\sum_{v \in V} f_2(u, v) = 0 + \dots + 0 + f_2(u, v_1) + f_2(u, v_2) + 0 + \dots + 0 = (-M) + M = 0$ ■

Получаем для f_2 свойство 3

$$3. f_2(u, v) = \begin{cases} M, & \exists i: (u, v) = (v_i, v_{i+1}) & (1) \\ -M, & \exists i: (v, u) = (v_i, v_{i+1}) & (2) \\ 0, & \text{иначе} & (3) \end{cases}$$

(1). $\exists i: (u, v) = (v_i, v_{i+1})$. $f_2(u, v) = M = \min_{j \in \overline{0, k-1}} c'(v_j, v_{j+1}) \leq c'(v_i, v_{i+1})$ (минимум меньше каждого)

(2). $\exists i: (v, u) = (v_i, v_{i+1})$. $f_2(u, v) = -M < 0 \leq c'(u, v)$ (пропускная способность $c' = c - f_1$ неотрицательна, так как f_1 — поток в N , откуда $f_1 \leq c$).

(3). $f_2(u, v) = 0 \leq c'(u, v)$ (пропускная способность неотрицательна)

Получаем, что для f_2 выполнено свойство 1 для сети N'

Получаем, что f_2 — поток в N' . Докажем, что $f_1 + f_2$ — поток в N . По это выполнено, если $\forall (u, v) \in V^2 \hookrightarrow f_1(u, v) + f_2(u, v) \leq c(u, v)$. Фиксируем $(u, v) \in V^2$. f_2 — поток в N' , поэтому $f_2(u, v) \leq c'(u, v) \equiv c(u, v) - f_1(u, v)$, поэтому $f_1(u, v) + f_2(u, v) \leq f_1(u, v) + c(u, v) - f_1(u, v) \equiv c(u, v)$ ■

Докажем, что $f_1 + f_2$ — поток в исходной сети N после этой итерации ФФ: алгоритм добавляет к $f_1(v_i, v_{i+1})$ величину M , вычитает из $f_1(v_{i+1}, v_i)$ M . Рассмотрим разность $(f_1 + f_2) - f_1 = f_2$, которая как равна этой величине (M в случае (v_i, v_{i+1}) в пути, $-M$ в случае (v_{i+1}, v_i) в пути, 0 иначе) ■

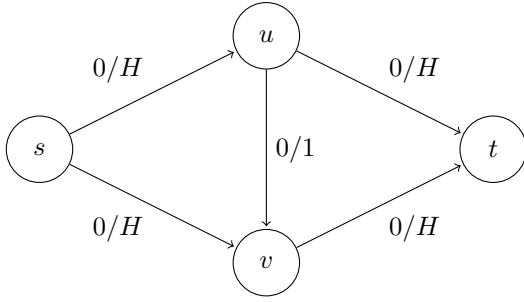
(каноническое) Задача 28

(каноническое) Задача 29

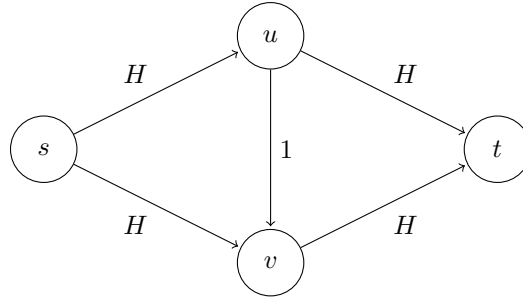
(Кормен)

Рассмотрим транспортную сеть:

Сеть

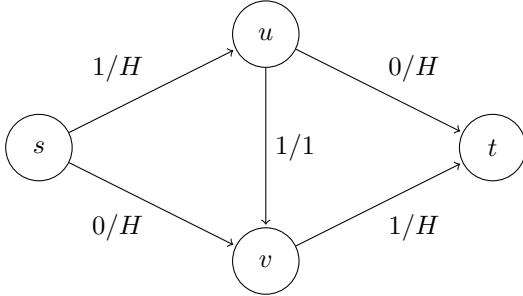


Остаточная сеть

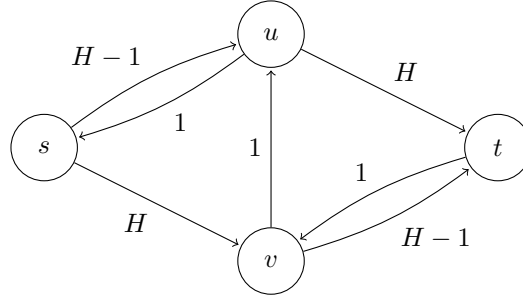


1. На каждом шаге алгоритм выбирает увеличивающий путь.
2. Пусть на первом шаге выбран увеличивающий путь $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow t$ величины 1. После первой итерации исходная сеть и остаточная сеть:

Сеть

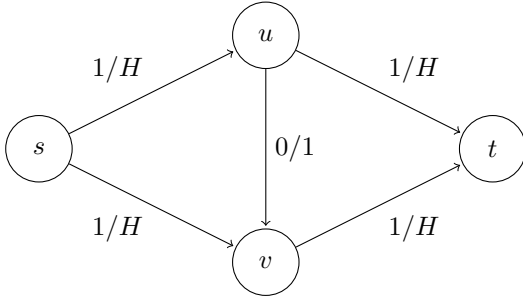


Остаточная сеть

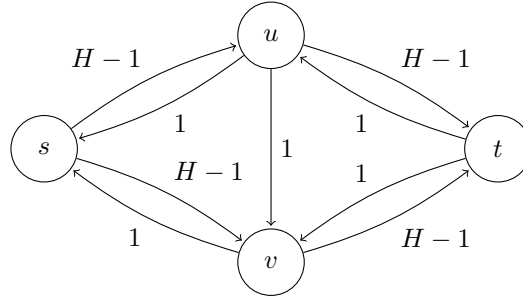


3. Пусть на втором шаге выбран увеличивающий путь $s \rightarrow v \rightarrow u \rightarrow t$ величины 1. После второй итерации исходная сеть и остаточная сеть:

Сеть



Остаточная сеть



4. Остаточная сеть после второй итерации содержит остаточную сеть для входной сети при $H - 1$, поэтому при таком выборе путей будет совершено $2H$ итераций (максимальный поток равен $2H$).
5. Размер входа $f(H) = \Theta(\log H)$ (описание сети — константа), время $T(H) = \Omega(H)$ (по количеству итераций), откуда

$$\forall c \geq 1 \Rightarrow \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{T(H)}{f^c(H)} \geq \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{C_1 \cdot H}{C_2^c \log^c H} = \lim_{H \rightarrow \infty} c_3 \frac{H}{\log^c H} = +\infty \Rightarrow T(H) \neq \text{poly}(f(H)).$$

То есть, время работы неполиномиально по длине битовой записи входа.

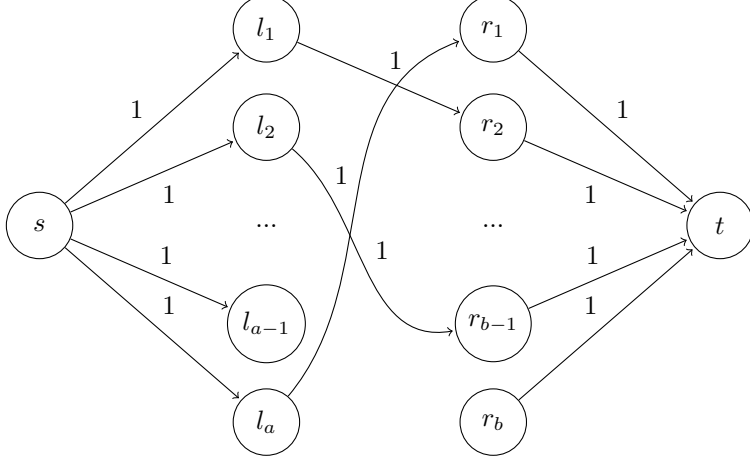
(каноническое) Задача 30

Пусть $G(V, E)$ — двудольный граф с долями L и R . Считаем, что $E \subseteq L \times R$ (только слева направо). Задача: найти максимальное по мощности $E_0 \subseteq E$, такое что любые два ребра из E_0 не смежны, то есть, каждая вершина $v \in V$ инцидентна не более, чем одному ребру из E' . Определим $G'(V', E')$:

$$V' = V \cup \{s, t\}, E' = \left(\bigcup_{l \in L} \{(s, l)\} \right) \cup E \cup \left(\bigcup_{r \in R} \{(r, t)\} \right).$$

Зададим все пропускные способности $c(u, v) = \begin{cases} 1, & (u, v) \in E' \\ 0, & (u, v) \notin E' \end{cases}$. Тогда $N \stackrel{\text{def}}{=} (G', c, s, t)$ — транспортная сеть.

Обозначим $a = |L|$, $b = |R|$. Поясняющая картинка:



1. Пусть f — поток в N . Тогда $|f|$ задает некоторое паросочетание E_0 , причем $|f| = |E_0|$

(a) Вершина s соединена только с вершинами из L . Фиксируем одну $l \in L$. Предположим, что $f(s, l) < 0$. Тогда (2) $f(l, s) > 0$. Но $c(l, s) = 0$, так как $(l, s) \notin E'$. Получаем противоречие (1): $f(l, s) > 0 = c(l, s)$. Значит, $f(s, l) \geq 0$, т.е. $f(s, l) \in \{0, 1\}$.

(b) Обозначим $L_0 = \{l \in L \mid f(s, l) = 1\}$. Тогда $f(s, L) = |L_0|$, так как $c(\cdot, \cdot) \in \{0, 1\}$. s инцидентна только вершинам из L , поэтому для остальных вершин $v \notin L$ по 1 имеем $f(s, v) = 0$. Значит, $f(s, V) = |L_0|$. Аналогично получаем $f(r, t) \geq 0$, обозначим $R_0 = \{r \in R \mid f(r, t) = 1\}$, и $f(R, t) \equiv f(V, t) = |R_0|$. Но по $f(s, V) = f(V, t)$, откуда $|L_0| = |R_0|$.

(c) Фиксируем $l \in L$. Пусть $l \in L_0$. Тогда $\exists! r \in R$: $f(l, r) = 1$:

i. Фиксируем $r \in R$. Пусть $f(l, r) < 0$. Тогда $f(r, l) > 0$. Но $(r, l) \notin E \subseteq L \times R$, откуда $c(r, l) = 0 < f(r, l)$ — противоречие (1)

ii. (\exists) Пусть иначе. Тогда $\forall r \in R \hookrightarrow f(l, r) \leq 0$. Из 1(c)i получаем, что $f(l, r) = 0$. Тогда $f(l, R) = 0$. Но l и t не смежны, поэтому (свойство 1) $f(l, V \setminus \{s\}) = 0$. Получим $0 \stackrel{3}{=} f(l, V) \stackrel{3}{=} f(l, s) + f(l, V \setminus \{s\})$. Первое слагаемое равно -1 , так как $f(s, l) = 1$ ($l \in L_0$), второе равно нулю, получаем $0 = -1$ — противоречие ■

iii. (!) Пусть иначе. Поскольку $\forall r \in R \hookrightarrow f(l, r) \geq 0$ (1(c)i), найдем $0 \stackrel{3}{=} f(l, V) \stackrel{3}{=} \underbrace{f(l, s) + f(l, t)}_{=-1} + \underbrace{f(l, R)}_{\geq 2} = 0$ — противоречие.

(d) Пусть $l \in L_0$, $r \in R$: $f(l, r) > 0$. Тогда $r \in R_0$. Пусть иначе. Тогда $f(r, t) = 0$ (ребра (t, r) нет в E'). Получаем $f(r, V) = f(r, l) + f(r, t) = -1 \neq 0$ — противоречие с 3.

(e) Пусть $r \in R_0$. Тогда $\exists l \in L$: $f(l, r) = 1$. Пусть иначе. r смежна (возможно) только с вершинами из L , поэтому $f(r, V) = \underbrace{f(r, t) + f(r, L)}_{=1} = 1$ — противоречие. По 1d эта существующая $l \in L_0$.

(f) Построена функция $E_0: L_0 \rightarrow R_0$. Действительно, для каждой $l \in L$ найдена единственная (1c) вершина $r \in R_0$ (1d). По 1e эта функция сюръективная (все значения достигаются), и по 1b она — биекция ($|R_0| = |L_0|$). Значит, E_0 — паросочетание ■

(g) Было доказано (1b), что $|L_0| = |R_0| = f(s, V) \equiv |f|$, откуда мощность паросочетания равна величине потока ■

2. Пусть $E_0 \subseteq E \subseteq L \times R$ — паросочетание. Тогда существует поток f в N , причем $|f| = |E_0|$

(a) Определим

- $f(E_0) = 1$ (для каждой пары)
- $f(s, L_0) = 1$, где $L_0 = \{l \in L \mid \exists r \in R: (l, r) \in E_0\}$
- $f(R_0, t) = 1$, где $R_0 = \{r \in R \mid \exists l \in L: (l, r) \in E_0\}$
- $f(E_0^T) = -1$ ($E_0^T = \{(r, l) \mid (l, r) \in E_0\}$)
- $f(L_0, s) = -1$
- $f(t, R_0) = -1$

- $f(u, v) = 0$ в остальных случаях

(b) Тогда $\forall (u, v) \in E' \hookrightarrow f(u, v) = -f(v, u)$

(c) Единицы добавлены только на существующих ребрах, поэтому $f(u, v) \leq c(u, v)$

(d) E_0 — паросочетание, поэтому функция $E_0: L_0 \rightarrow R_0$ — биекция.

(e) Рассмотрим $l \in L \setminus L_0$. Получаем, что (рассматриваем только существующие ребра) $f(l, V) = \cancel{f(l, s)}^0 + \cancel{f(l, R)}^0 = 0$

(f) Рассмотрим $l \in L$. Получаем, что (рассматриваем только существующие ребра) $f(l, V) = \underbrace{f(l, s)}_{=-1} + \underbrace{f(l, R)}_{=1} = 0$.

$f(l, R) = 1$, так как E_0 — биекция.

(g) Аналогично для $r \in R$: $\forall r \in R \hookrightarrow f(r, V) = 0$

(h) Получаем свойство 3

(i) Получаем, что f — поток в N ■

(j) Найдем $|f| = f(s, V) = f(s, L) = f(s, L_0) = |L_0| = |E_0|$ ■

Алгоритм: По $G(V, E)$ строим сеть N (конструкция выше), ищем максимальный поток f , по нему построим паросочетание E_0 (см. 1).

Оно будет максимально. Пусть иначе. Тогда по большему паросочетанию $E'_0: |E'_0| > |E_0|$ найдем поток f' , такой что $f' = |E'_0|$ (см. 2). Получим $|f'| \stackrel{2}{=} |E'_0| > |E_0| \stackrel{1}{=} |f|$, т.е. f — не максимальный поток — противоречие.

(каноническое) Задача 31