Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 2: Арифметические операции и линейные рекуррентные последовательности

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.02.20

Упражнение 3

Определим $A_d \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} c_1 & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{Vmatrix}$

Докажем по индукции $P(d) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\det(A_d - \lambda E) = (-1)^d(\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - c_2\lambda^{d-2} - ... - c_{d-1}\lambda - c_d)\right]$

1. База. $d = 3 \Rightarrow \det(A_3 - \lambda E) = \begin{vmatrix} (c_1-\lambda) & c_2 & c_3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = c_1\lambda^2 - \lambda^3 + c_3 + c_2\lambda = (-1)^3(\lambda^3 - c_1\lambda^2 - c_2\lambda - c_3) \Rightarrow P(3)\,\blacksquare$

2. Пусть $\underline{P(d-1)}$. Рассмотрим $\det(A_d - \lambda E) = \begin{vmatrix} (c_1-\lambda) & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \boxed{=}$.

   Разложим по последнему столбцу: $\boxed{=} -\lambda \underbrace{\begin{vmatrix} (c_1-\lambda) & c_2 & ... & c_{d-1} \\ 1 & -\lambda & ... & 0 \\ & ... & & \\ 0 & 0 & ... & -\lambda \end{vmatrix}}_{\det(A_{d-1}-\lambda E)} + (-1)^{d+1}c_d \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & ... & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix}}_{=1,\ \text{верхн.-треуг.}} \stackrel{P(d-1)}{=}$

   $\stackrel{P(d-1)}{=} -\lambda(-1)^{d-1}(\lambda^{d-1} - c_1\lambda^{d-2} - ... - c_{d-2}\lambda - c_{d-1}) - (-1)^d c_d = (-1)^d(\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - ... - c_{d-1}\lambda - c_d)$. Получаем $\underline{P(d)}\,\blacksquare$

Задача 1*

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ЛРП порядка d: $a_n = \sum\limits_{i=1}^{d} c_i a_{n-i}$. Выпишем матрицу $A = \begin{Vmatrix} c_1 & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. Определим $\vec{a_n} = \begin{Vmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ ... \\ a_{n-d+1} \end{Vmatrix}$. Тогда $\vec{a_n} = A^{n-d}\vec{g}_d$. Обозначим $\vec{a} = \vec{g}_d$. По условию существуют d различных корней $\lambda \in \{\lambda_1, ..., \lambda_d\}$ многочлена $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$. Значит, существует матрица $S = \begin{Vmatrix} s_{11} & ... & s_{1d} \\ ... & & ... \\ s_{d1} & ... & s_{dd} \end{Vmatrix}$, такая что ее i-й столбец является собственным вектором $\vec{h}_i$ матрицы A, соответствующим собственному значению λ_i, и $A' = S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_d)$. S^{-1} существует, так как $\vec{h}_i$ — линейно независимы. Выразим $A = SA'S^{-1}$,

рассмотрим $A^n = \underbrace{SA'\cancelto{0}{S^{-1} \cdot S} A'S^{-1} \cdot ... \cdot SA'\cancelto{0}{S^{-1} \cdot S} A'S^{-1}}_{n} = SA'^n S^{-1}$. Определим $\vec{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{Vmatrix} \in \mathbb{R}^d$. Заметим, что $\vec{a}_n = \vec{\xi}^T \vec{g}_n$, откуда $a_n = \vec{\xi}^T S A'^{n-d} S^{-1}\vec{a}$. Найдем $\vec{\xi}^T S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} s_{11} & ... & s_{1d} \\ ... & & ... \\ s_{d1} & ... & s_{dd} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1d} \end{Vmatrix}$, строка

$\vec{\xi}^T S A'^{n-d} = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1d} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \lambda_1^{n-d} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-d} & ... & 0 \\ & & ... & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_d^{n-d} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda_1^{n-d}s_{11} & ... & \lambda_d^{n-d}s_{1d} \end{Vmatrix}$,

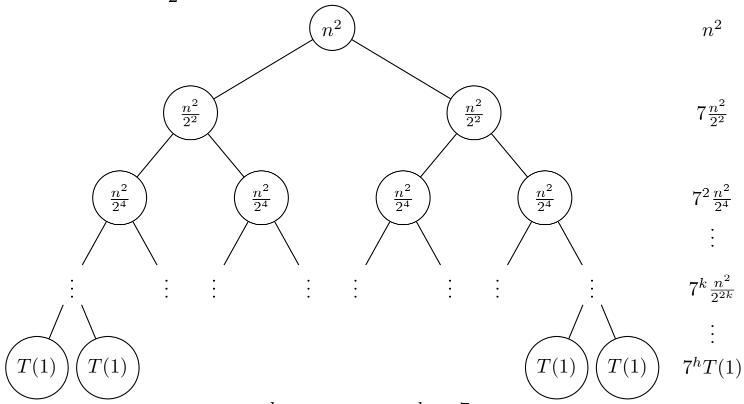
i-й элемент этой строки $(\vec{\xi}^T S A'^{n-d})_i = \lambda_i^{n-d} s_{1i}$

Найдем $S^{-1}\vec{a} = \begin{Vmatrix} s'_{11} & ... & s'_{d1} \\ ... & & ... \\ s'_{1d} & ... & s'_{dd} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_d \\ a_{d-1} \\ ... \\ a_1 \end{Vmatrix}$ (s'_{ij} — элементы матрицы S^{-1}), i-й элемент в этом столбце равен $(S^{-1}\vec{a})_i = \sum\limits_{j=1}^{d} a_{d-j+1}s'_{ji}$

Получаем $a_n = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-d} s_{1i} \sum\limits_{j=1}^{d} a_{d-j+1}s'_{ji} \stackrel{?}{=} \sum\limits_{i=1}^{d} k_i\lambda_i^n$. Это равенство верно: в случае $\lambda_i = 0$ можно взять любое k_i (например, $k_i = 0$), иначе — $k_i = \lambda_i^{-d} s_{1i} \sum\limits_{j=1}^{d} a_{d-j+1}s'_{ji}$ ■

(каноническое) Задача 6

$T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + f(n)$, $f(n) = O(n^2)$. Дерево рекурсии:



Высота дерева $h = \log_2 n$.

$T(n) = \sum\limits_{k=0}^{h-1} 7^k f(\frac{n}{2^k}) + 7^h T(1) \boxed{\leqslant}$.

Из определения O $\exists C > 0\, \exists n_0 \colon \forall n \geqslant n_0\, f(n) \leqslant Cn^2$, откуда первая сумма $\sum\limits_{k=0}^{h-1} 7^k f(\frac{n^2}{2^{2k}}) \leqslant Cn^2 \sum\limits_{k=0}^{h-1} (\frac{7}{4})^k = Cn^2 \frac{(7/4)^{h-1}-1}{7/4-1} = C_1n^2((7/4)^{\log_2 n} - C_2) = C_1n^2n^{\log_2 \frac{7}{4}} - C_3n^2 = C_1n^{\log_2 7} - C_3n^2$. Второе слагаемое $7^hT(1) = 7^{\log_2 n}T(1) = Cn^{\log_2 7}$

Поэтому $T(n) \leqslant n^{\log_2 7} - C_5n^2$

Оценка снизу $T(n) \geqslant 7^hT(1) = O(n^{\log_2 7})$, откуда

Ответ: $\boxed{T(n) = \Theta(n^{\log_2 7})}$

(каноническое) Задача 7

Вход: точки $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$.

Алгоритм: считаем массив квадратов расстояний $r_i^2 \stackrel{\text{def}}{=} x_i^2 + y_i^2$ *(можно r_i^2)*. Ищем медиану r_m в массиве за $O(n)$

for i := *1* **to** n **do**
| R[i] := X[i] * X[i] + Y[i] * Y[i] $\to t_1$
end
Res := Median(R, 1, n) $\to t_2$
Res := Sqrt(Res)$\to t_3$

Более формально:

1. Задача найти $r_m = \min\limits_{r \in \mathbb{R}} r \colon |D_r(\vec{0}) \cap \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n| \geqslant \frac{n}{2}$ $(*)$

2. Очевидно, что $r_m = r_i$ (одна из точек лежит на гранце круга).
Пусть иначе. Поскольку $n > 0$, из условия $(*)$ следует, что внутри есть хотя бы одна точка. Выберем из них точку с максимальным r_i. Из предположения получаем $r_i < r_m$. Рассмотрим круг меньшего радиуса $D_{r_i}(\vec{0})$, который содержит столько же точек, получаем противоречие с $(*)$ (условие min).
Таким образом, min можно искать только среди $r \in \{(x_i, y_i)_{i=1}^n\}$.

3. Медиана массива $(r_1, ..., r_n)$ — r_j, такое что $\frac{n}{2} \leqslant |\{i | r_i \leqslant r_j\}| < \frac{n}{2} + 1$. Поэтому $r_j = r_m$, т.е. алгоритм корректен.

4. В алгоритме используется другой массив $(r_1^1, ..., r_n^2)$, но это не изменяет ответ, так как $r_i < r_j \Leftrightarrow r_i^2 < r_j^2$, $r_i = r_j \Leftrightarrow r_i^2 = r_j^2$ для неотрицательных r_i

5. Время работы: $T(n) = nt_1 + t_2 + t_3$. t_1 — константа (модель RAM), $t_2 = O(n)$ — доказано на лекции, $t_3 = O(\log n)$ — бинпоиск корня в модели RAM. Получаем $T(n) = O(n) + O(n) + O(\log n) = O(n)$.

(каноническое) Задача 9

Пусть $\Sigma = \{\underbrace{0}_{\sigma_0}, \underbrace{1}_{\sigma_1}, \underbrace{2}_{\sigma_2}\}$, $\Sigma^* \supset G = \{w | \exists n \colon w = w_1...w_n, \underbrace{\forall i \in \overline{1, n-1} \hookrightarrow |w_i - w_{i+1}|}_{(*)} \leqslant 1\}$. Пусть $g_n = |\{w \in L | |w| = n\}|$ — количество слов длины n в языке G. Определим $g_n^i = |\{w \in G | |w| = n, w_n = \sigma_i\}|$ — количество слов длины n из G, оканчивающихся на i-й символ. Поскольку каждое слово оканчивается на один из символов σ_i, получаем $g_n = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$.

1. Найдем рекуррентное соотношение для последовательностей g_n^i. Получим слово $w \in G$ длины $n+1$: $w = w_1...w_nw_{n+1}$. Поскольку слово из языка, для него верно $(*)$. Но это условие верно и для подслова $w_1...w_n$. Рассмотрим последний символ слова w — w_{n+1}:

(a) $w_{n+1} = 0$. Но тогда предпоследний символ слова w — w_n может быть 0 либо 1 для выполнения $(*)$. Слово $w_1 ... w_n$ может быть получено g_n^0 и g_n^1 способами соответственно. Поэтому количество способов получить w в этом случае $g_{n+1}^0 = g_n^0 + g_n^1$ $(**)$.

(b) $w_{n+1} = 1$. Тогда $w_n \in \{0, 1, 2\}$, и $g_{n+1}^1 = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$.

(c) $w_{n+1} = 2$. Тогда $w_n \in \{1, 2\}$, и $g_{n+1}^2 = g_n^1 + g_n^2$.

2. Определим вектор $\mathbb{R}^3 \ni \vec{g_n} = \begin{Vmatrix} g_n^0 \\ g_n^1 \\ g_n^2 \end{Vmatrix}$. Определим матрицу $A \overset{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

Снова рассмотрим соотношения $\begin{cases} 1a \\ 1b \\ 1c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_{n+1}^0 = g_n^0 + g_n^1 \\ g_{n+1}^1 = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2 \\ g_{n+1}^2 = g_n^1 + g_n^2 \end{cases}$.

Заметим, что в матричном виде они записываются как $\vec{g_{n+1}} = A\vec{g_n}$ $(***)$

3. Найдем $g_1^0 = g_1^1 = g_1^2 = 1$, так как слово из одного символа удовлетворяет $(*)$. Определим $\vec{\xi} \overset{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

Тогда, применяя $(***)$ *(доказывается тривиально по индукции)* получаем $\vec{g_n} = A^{n-1}\vec{\xi}$

4. $g_n = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$. Но это равно $g_n = (\vec{\xi}, A^{n-1}\vec{\xi}) = \vec{\xi}^T A^{n-1}\vec{\xi}$

5. Найдем ОНБ, в котором A имеет диагональный вид

(a) Характеристический многочлен $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ 1 & (1-\lambda) & 1 \\ 0 & 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda) = (1-\lambda)\cdot(1 + \lambda^2 - 2\lambda - 2) = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 2\lambda - 1)$. Корни характеристического уравнения $\lambda = 1$ и $\lambda \in \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Далее ищем собственные векторы.

(b) $(\lambda = \lambda_1 = 1)$. $A - 1 \cdot E = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$, откуда $\vec{h}_1^0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^T$, $\vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}$

(c) $(\lambda = \lambda_2 = 1 + \sqrt{2})$. $A - (1+\sqrt{2}) \cdot E = \begin{Vmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim$

$\sim \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix}$, откуда $\vec{h}_2^0 = \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}^T$, $\vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{Vmatrix} \perp \vec{h}_1$

(d) $(\lambda = \lambda_3 = 1 - \sqrt{2})$. $A - (1-\sqrt{2}) \cdot E = \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}$,

откуда $\vec{h}_3^0 = \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}$, $\vec{h}_3 = \begin{Vmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{Vmatrix} \perp \vec{h}_1, \vec{h}_2$

Получаем $S \overset{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/2 & 1/2 \end{Vmatrix}$ — ортогональная матрица перехода к базису из собственных векторов.

Тогда $A' = S^{-1}AS \Rightarrow A = SA'S^{-1} \equiv SA'S^T$, Но $A' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & (1-\sqrt{2}) \end{Vmatrix}$, поэтому

$A'^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)$

6. $A^n = \underbrace{SA' \overset{E}{\cancel{S^T \cdot S}} A'S^T \cdot ... \cdot SA' \overset{E}{\cancel{S^T \cdot S}} A'S^T}_{n} = SA'^n S^T = S\text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)S^T$

7. Вернемся к $g_n = \vec{\xi}^T A^{n-1}\vec{\xi} = \vec{\xi}^T S\text{diag}(\lambda_1^{n-1}, \lambda_2^{n-1}, \lambda_3^{n-1})S^T\vec{\xi} = \boxed{\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right]}$

8. Попробуем найти рекуррентное соотношение следующим образом. Предположим, что последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ЛРП порядка d, причем все корни характеристического многочлена ее матрицы вещественные и различные. Тогда (Задача 1) $\exists k_1, ..., k_d \colon g_n = k_1\lambda_1^n + ... + k_2\lambda_d^n$. Сравнивая с выражением выше, получаем $d = 2$, т.е. ищем рекуррентное соотношение вида $g_n = c_1 g_{n-1} + c_2 g_{n-2}$. Подставляя выражение 7 для g_n, получаем $(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1} = c_1(1+\sqrt{2})^n + c_1(1-\sqrt{2})^n + c_2(1+\sqrt{2})^{n-1} + c_2(1-\sqrt{2})^{n-1} \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})^{n-1}(3 + 2\sqrt{2} - c_1(1+\sqrt{2}) - c_2) + (1-\sqrt{2})^{n-1}(3 - 2\sqrt{2} - c_1(1-\sqrt{2}) - c_2) = 0$, что будет выполнено при любых n при $\begin{cases} (1+\sqrt{2})c_1 + c_2 = 3 + 2\sqrt{2} \\ (1-\sqrt{2})c_1 + c_2 = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$,

т.е. $\boxed{g_n = 2g_{n-1} + g_{n-2}}$

9. Найдем $g_{2014} =$ 9816936009995503230901557247246041662063072822494753312759700362719597435946538528221300925
671858801599363935274622877500162506956619048900408718181041413222318236818715345484376136537862497272785
247720491012219807232607980494871964788980842814109033161842422339596260323417836542815901642749689573589
070088974641306848102517213985023530762354797649521475871449969940200866323482540594978486708923597366885
750142187523485222503097287926012700695073990739801458896041837993605326294700244522632962855241858966782
631798710557997423351374248485616450622394012426366144662745043995902048923883147167702198223719419200759
471729710067440801808039863672079281506822373369234466827616569206575038689737028383771817685667299606446
92272395910326789357589123767900512319408352202559