

Теория и реализация языков программирования.

Задание 10: LL-анализ

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.11.13

Упражнение 1

Пусть $G = (N, T, P, S)$. Занумеруем правила из P : $P = \{P_1, \dots, P_n\}$.
Определим синтаксический перевод $T_l = (N, T, T', R, S)$:

1. $T' = \{1, \dots, n\}$

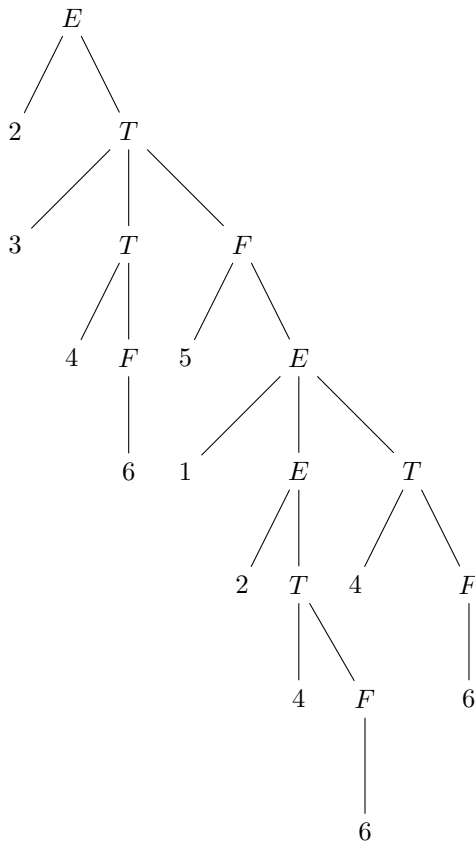
2. R определяется через P : каждому правилу $P \ni P_i = (X, Y_1 \dots Y_n)$ сопоставим правила в R : пусть $Y_{j_1} \dots Y_{j_l}$ — максимальная подпоследовательность из нетерминалов из слова $Y_1 \dots Y_n$. Тогда $X \rightarrow Y_1 \dots Y_n, iY_{j_1} \dots Y_{j_l} \in P'$.

По построению нетерминалы, входящие в $\alpha \equiv Y_1 \dots Y_n$ входят также в $\beta \equiv Y_{j_1} \dots Y_{j_l}$, причем с той же кратностью.

Докажем, что слово $w \in L(G)$ переводится в левый вывод w . **TODO**

Упражнение 2

$w = a * (a + a)$. Построим правый вывод по дереву вывода (из задания):



Чтобы получить правый вывод, обойдем дерево разбора в G' следующим образом:

1. Выпишем самого левого потомка (по структуре правил, это всегда будет номер правила из G)
2. Выполним разбор оставшихся потомков справа налево.

Получаем последовательность правил правого вывода w в G : $P_r = 23514624646$.

Правый вывод (выделен раскрываемый нетерминал): $\underline{E} \xrightarrow{2} \underline{T} \xrightarrow{3} T * \underline{F} \xrightarrow{5} T * (\underline{E}) \xrightarrow{1} T * (E + \underline{T}) \xrightarrow{4} T * (E + \underline{F}) \xrightarrow{6} T * (\underline{E} + a) \xrightarrow{2} T * (\underline{T} + a) \xrightarrow{4} T * (\underline{F} + a) \xrightarrow{6} \underline{T} * (a + a) \xrightarrow{4} \underline{F} * (a + a) \xrightarrow{6} a * (a + a) = w$.

По определению, правый разбор — примененные при правом выводе правила в обратном порядке: $(P_r)^R = 64642641532$.

Упражнение 3

Упражнение 4

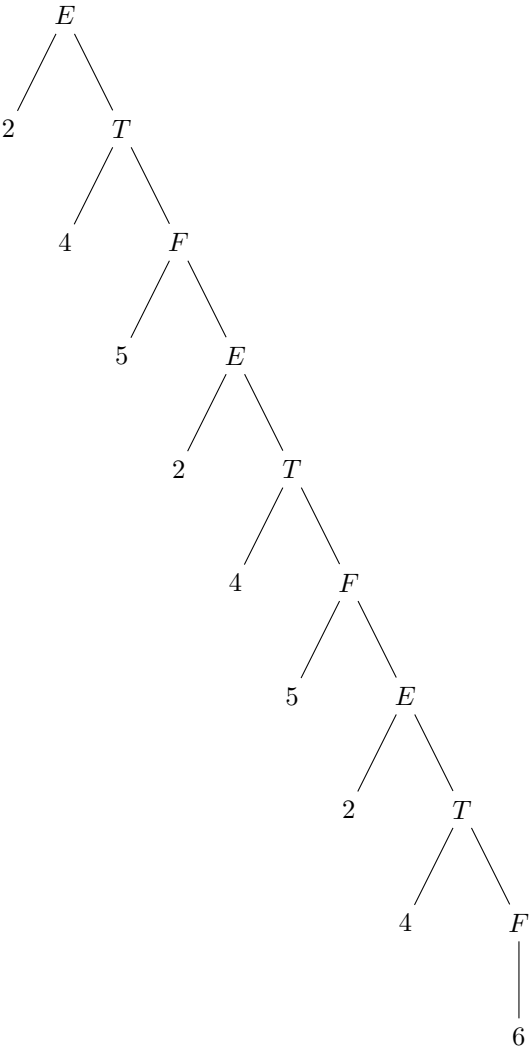
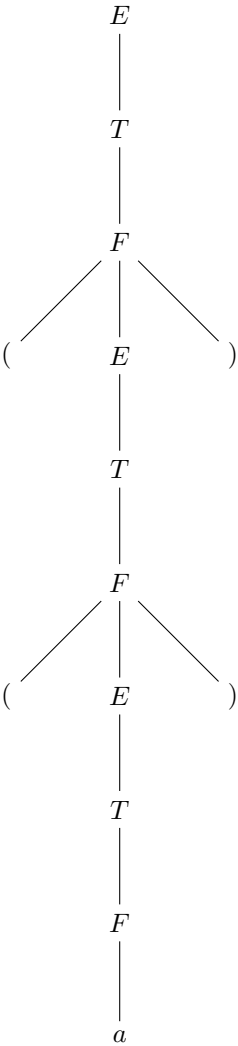
Упражнение 5

Упражнение 6

Задача 1

$w = ((a)) \in L(G): \underline{E} \xrightarrow{2} \underline{T} \xrightarrow{4} \underline{F} \xrightarrow{5} (\underline{E}) \xrightarrow{2} (\underline{T}) \xrightarrow{4} (\underline{F}) \xrightarrow{5} ((\underline{E})) \xrightarrow{2} ((\underline{T})) \xrightarrow{4} ((\underline{F})) \xrightarrow{6} ((a)).$

1. Построим дерево вывода w в G и соответствующее дерево в G' :



- 2. Левый разбор: обойдем второе дерево в глубину, всегда выбирая самого левого непосещенного потомка: $P_l = 245245246$.
- 3. Правый разбор: обойдем второе дерево в глубину, как указано в решении упражнения 2: $(P_r)^R = 245245246 \Rightarrow P_r = 642542542$.

Задача 2

- 1. $\Sigma' = \{0, 1, \$\}$, $N' = \{S', S\}$. Пополненная грамматика $G' = (N', \Sigma', P', S')$, $P = \{ \overbrace{S' \rightarrow S\$}^{(0)}, \overbrace{S \rightarrow 0S}^{(1)}, \overbrace{S \rightarrow 1S}^{(2)}, \overbrace{S \rightarrow \varepsilon}^{(3)} \}$.
- 2. Вычислим FIRST:

	$F_i(0)$	$F_i(1)$	$F_i(\$)$	$F_i(S)$	$F_i(S')$
0. Определим F_0 :	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
0.1. Терминалы: $F_0(0) \stackrel{\text{def}}{=} \{0\}$, $F_0(1) \stackrel{\text{def}}{=} \{1\}$, $F_0(\$) \stackrel{\text{def}}{=} \{\$\}$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	\emptyset	\emptyset
0.2. Есть правило $S \xrightarrow{(3)} \varepsilon \Rightarrow F_0(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varepsilon\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon\}$	\emptyset
0.3. Нет правила $S' \rightarrow \varepsilon \Rightarrow F_0(S') \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon\}$	\emptyset
1. Определим $F_1 = F_0$ Рассмотрим символы правой части правила $S' \xrightarrow{(0)} S\$$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon\}$	\emptyset
1.1. 1. $S\$ F_0(S) = \{\varepsilon\} \ni \varepsilon$. $F_0(S) \setminus \{\varepsilon\} = \emptyset \rightarrow F_1(S')$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\$\}$
2. $S\$ F_0(\$) = \{\$\} \not\ni \varepsilon$. $F_0(\$) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \rightarrow F_1(S')$.					
1.2. Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(1)} 0S$. $F_0(0) = \{0\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_1(S) \leftarrow \{0\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0\}$	$\{\$\}$
1.3. Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(2)} 1S$. $F_0(1) = \{1\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_1(S) \leftarrow \{1\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$\}$
1.4. Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(3)} \varepsilon$. $ \varepsilon = 0 \Rightarrow$ не изменяем F_1	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$\}$
2. Определим $F_2 = F_1$: Рассмотрим символы правой части правила $S' \xrightarrow{(0)} S\$$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$\}$
2.1. 1. $S\$ F_1(S) = \{\varepsilon, 0, 1\} \ni \varepsilon$. $F_1(S) \setminus \{\varepsilon\} = \{0, 1\} \rightarrow F_2(S')$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
2. $S\$ F_1(\$) = \{\$\} \not\ni \varepsilon$. $F_1(\$) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \rightarrow F_2(S')$.					
2.2. Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(1)} 0S$. $F_1(0) = \{0\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_2(S) \leftarrow \{0\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
2.3. Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(2)} 1S$. $F_1(1) = \{1\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_2(S) \leftarrow \{1\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
2.4. Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(3)} \varepsilon$. $ \varepsilon = 0 \Rightarrow$ не изменяем F_2	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3. Определим $F_3 = F_2$: Рассмотрим символы правой части правила $S' \xrightarrow{(0)} S\$$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.1. 1. $S\$ F_2(S) = \{\varepsilon, 0, 1\} \ni \varepsilon$. $F_2(S) \setminus \{\varepsilon\} = \{0, 1\} \rightarrow F_3(S')$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
2. $S\$ F_2(\$) = \{\$\} \not\ni \varepsilon$. $F_2(\$) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \rightarrow F_3(S')$.					
3.2. Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(1)} 0S$. $F_2(0) = \{0\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_3(S) \leftarrow \{0\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.3. Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(2)} 1S$. $F_2(1) = \{1\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_3(S) \leftarrow \{1\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.4. Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(3)} \varepsilon$. $ \varepsilon = 0 \Rightarrow$ не изменяем F_3	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.5. Имеем $F_3 = F_2 \Rightarrow$ выход	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$

3. Вычислим FOLLOW:

	$F_i(S)$	$F_i(S')$
0. Определим F_0 :	\emptyset	\emptyset
1. Определим $F_1 = F_0$:	\emptyset	\emptyset
1.1. Рассмотрим правило $\underbrace{S'}_A \xrightarrow{(0)} \underbrace{\varepsilon}_\alpha \underbrace{S}_X \underbrace{\$}_\beta$ (a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\$\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \rightarrow F_1(S)$. (b) $\varepsilon \notin \text{FIRST}(\beta)$.	$\{\$\}$	\emptyset
1.2. Рассмотрим правило $\underbrace{S}_A \xrightarrow{(1)} \underbrace{0}_\alpha \underbrace{S}_X \underbrace{\varepsilon}_\beta$ (a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \emptyset \rightarrow F_1(S)$. (b) $\varepsilon \in \text{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_1(S) \leftarrow F_0(S) = \emptyset$	$\{\$\}$	\emptyset
1.3. Рассмотрим правило $\underbrace{S}_A \xrightarrow{(2)} \underbrace{1}_\alpha \underbrace{S}_X \underbrace{\varepsilon}_\beta$ (a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \emptyset \rightarrow F_1(S)$. (b) $\varepsilon \in \text{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_1(S) \leftarrow F_0(S) = \emptyset$	$\{\$\}$	\emptyset
1.4. Рассмотрим правило $\underbrace{S}_A \xrightarrow{(3)} \varepsilon$. Оно не имеет вид $A \rightarrow \alpha X \beta$, не изменяем F_1	$\{\$\}$	\emptyset
2. Определим $F_2 = F_1$:	$\{\$\}$	\emptyset
2.1. Рассмотрим правило $\underbrace{S'}_A \xrightarrow{(0)} \underbrace{\varepsilon}_\alpha \underbrace{S}_X \underbrace{\$}_\beta$ (a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\$\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \rightarrow F_2(S)$. (b) $\varepsilon \notin \text{FIRST}(\beta)$.	$\{\$\}$	\emptyset
2.2. Рассмотрим правило $\underbrace{S}_A \xrightarrow{(1)} \underbrace{0}_\alpha \underbrace{S}_X \underbrace{\varepsilon}_\beta$ (a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \emptyset \rightarrow F_2(S)$. (b) $\varepsilon \in \text{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_3(S) \leftarrow F_1(S) = \{\$\}$	$\{\$\}$	\emptyset
2.3. Рассмотрим правило $\underbrace{S}_A \xrightarrow{(2)} \underbrace{1}_\alpha \underbrace{S}_X \underbrace{\varepsilon}_\beta$ (a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \emptyset \rightarrow F_2(S)$. (b) $\varepsilon \in \text{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_3(S) \leftarrow F_2(S) = \{\$\}$	$\{\$\}$	\emptyset
2.4. Рассмотрим правило $\underbrace{S}_A \xrightarrow{(3)} \varepsilon$. Оно не имеет вид $A \rightarrow \alpha X \beta$, не изменяем F_1	$\{\$\}$	\emptyset
2.5. Имеем $F_2 = F_1 \Rightarrow$ выход	$\{\$\}$	\emptyset

4. Таблица переходов для $LL(1)$ -анализатора:

	0	1	\$
S'	$S' \xrightarrow{(0)} S\$$	$S' \xrightarrow{(0)} S\$$	$S' \xrightarrow{(0)} S\$$
S	$S \xrightarrow{(1)} 0S$	$S \xrightarrow{(2)} 1S$	$S \xrightarrow{(3)} \varepsilon$
0	ε	Err.	Err.
1	Err.	ε	Err.
\$	Err.	Err.	Acc.

(a) $(S', 0)$: правило $S' \xrightarrow{(0)} S\$$: $\text{FIRST}(S\$) = \text{FIRST}(S) \oplus \text{FIRST}(\$) = \{0, 1, \$\} \ni 0$

(b) $(S', 1)$: правило $S' \xrightarrow{(0)} S\$$: $\text{FIRST}(S\$) = \text{FIRST}(S) \oplus \text{FIRST}(\$) = \{0, 1, \$\} \ni 1$

(c) $(S', \$)$: правило $S' \xrightarrow{(0)} S\$$: $\text{FIRST}(S\$) = \text{FIRST}(S) \oplus \text{FIRST}(\$) = \{0, 1, \$\} \ni \$$

(d) $(S, 0)$: правило $S \xrightarrow{(1)} 0S$: $\text{FIRST}(0S) = \{0\} \ni 0$

(e) $(S, 1)$: правило $S \xrightarrow{(2)} 1S$: $\text{FIRST}(1S) = \{1\} \ni 1$

(f) $(S, \$)$: правило $S \xrightarrow{(3)} \varepsilon$: $\text{FOLLOW}(S) = \{\$ \} \ni \$$

Задача 3

$N \stackrel{\text{def}}{=} \{E, T, F\}$, $T \stackrel{\text{def}}{=} \{a, (,), +, *\}$, $G \stackrel{\text{def}}{=} (N, T, P, E)$, $P \stackrel{\text{def}}{=} \{E \rightarrow E + T | T | \varepsilon, T \rightarrow T * F | F, F \rightarrow (E) | a\}$

Построим FIRST_1 :

i	$F_i(\cdot)$							
	a	$($	$)$	$+$	$*$	E	T	F
0	$\{a\}$	$\{(\}$	$\{ \}$	$\{+\}$	$\{*\}$	$\{\varepsilon\}$	\emptyset	\emptyset
1	$\{a\}$	$\{(\}$	$\{ \}$	$\{+\}$	$\{*\}$	$\{\varepsilon, +\}$	\emptyset	$\{(, a\}$
2	$\{a\}$	$\{(\}$	$\{ \}$	$\{+\}$	$\{*\}$	$\{\varepsilon, +\}$	$\{(, a\}$	$\{(, a\}$
3	$\{a\}$	$\{(\}$	$\{ \}$	$\{+\}$	$\{*\}$	$\{\varepsilon, +, (, a\}$	$\{(, a\}$	$\{(, a\}$
4	$\{a\}$	$\{(\}$	$\{ \}$	$\{+\}$	$\{*\}$	$\{\varepsilon, +, (, a\}$	$\{(, a\}$	$\{(, a\}$

Ответ: $\text{FIRST}(E) = \{\varepsilon, +, (, a\}$

Задача 4

1. $\Sigma' \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \$\}$, $N' \stackrel{\text{def}}{=} (S', S, A)$, пополненная грамматика $G' = (N', \Sigma', P', S)$.

$P' \stackrel{\text{def}}{=} \{S' \xrightarrow{(0)} S\$, S \xrightarrow{(1)} aAaa, S \xrightarrow{(2)} bAba, A \xrightarrow{(3)} b, A \xrightarrow{(4)} \varepsilon\}$

2. Найдем FIRST_1 :

i	$F_i(a)$	$F_i(b)$	$F_i(\$)$	$F_i(S)$	$F_i(S')$	$F_i(A)$
0	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	\emptyset	\emptyset	$\{\varepsilon\}$
1	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{a, b\}$	\emptyset	$\{b, \varepsilon\}$
2	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{b, \varepsilon\}$
3	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{b, \varepsilon\}$

3. Возьмем $\alpha = ba$, $w = b$, $\beta = b$, $\gamma = \varepsilon$, нетерминал A . Тогда $A \xrightarrow{(3)} b \equiv \beta$, $A \xrightarrow{(4)} \varepsilon \equiv \gamma$, $S' \xrightarrow{(0)} S\$ \xrightarrow{(2)} \underbrace{b}_w A \underbrace{ba\$}_\alpha$.

Имеем $F \stackrel{\text{def}}{=} \text{FIRST}(\beta\alpha) \equiv \text{FIRST}(ba\$) = \{b\}$ и $G \stackrel{\text{def}}{=} \text{FIRST}(\gamma\alpha) = \text{FIRST}(bba\$) = \{b\}$ и $F \cap G = \{b\} \neq \emptyset$.

Получаем $\exists A \exists \alpha, \beta: A \rightarrow \alpha, A \rightarrow \beta \in P'$, $\exists w \exists \alpha: S' \Rightarrow_l^* wA\alpha$, $\text{FIRST}(\beta\alpha) \cap \text{FIRST}(\gamma\alpha) \neq \emptyset$ — формальное отрицание утверждения Теоремы 1 из задания. Получаем, что G' — не $LL(1)$ -грамматика.

4. Найдем FIRST_2 :

i	$F_i(a)$	$F_i(b)$	$F_i(\$)$	$F_i(S)$	$F_i(S')$	$F_i(A)$
0	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{ab, aa, bb\}$	\emptyset	$\{b, \varepsilon\}$
2	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{ab, aa, bb\}$	$\{ab, aa, bb\}$	$\{b, \varepsilon\}$
3	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{ab, aa, bb\}$	$\{ab, aa, bb\}$	$\{b, \varepsilon\}$

5. Докажем, что G' — $LL(2)$ -грамматика, пользуясь Теоремой 1. Рассмотрим пары правил $X \rightarrow \beta$, $X \rightarrow \gamma$:

(a) $S \xrightarrow{(1)} \underbrace{aAaa}_\beta, S \xrightarrow{(2)} \underbrace{bAba}_\gamma$. Тогда $\forall \alpha \hookrightarrow$ слова из $F \stackrel{\text{def}}{=} \text{FIRST}_2(\beta\alpha)$ начинаются с a , слова из $G \stackrel{\text{def}}{=} \text{FIRST}_2(\gamma\alpha)$ начинаются с b , поэтому $F \cap G = \emptyset$

(b) $A \xrightarrow{(3)} \underbrace{b}_\beta, A \xrightarrow{(4)} \underbrace{\varepsilon}_\gamma$. Пусть $S \Rightarrow_l^* wA\alpha$. Тогда $\alpha[1, 2] \in \{aa, ba\}$ — действительно, нетерминал A может появиться только после применения (1) или (2). Рассмотрим эти два случая:

i. $\alpha[1, 2] = aa$. Тогда $F \stackrel{\text{def}}{=} \text{FIRST}_2(\beta\alpha) = \text{FIRST}_2(baa) = \{ba\}$, $G \stackrel{\text{def}}{=} \text{FIRST}_2(\gamma\alpha) = \text{FIRST}_2(aa) = \{aa\}$. Поэтому $F \cap G = \emptyset$

ii. $\alpha[1, 2] = ba$. Тогда $F \stackrel{\text{def}}{=} \text{FIRST}_2(\beta\alpha) = \text{FIRST}_2(bba) = \{bb\}$, $G \stackrel{\text{def}}{=} \text{FIRST}_2(\gamma\alpha) = \text{FIRST}_2(ba) = \{ba\}$. Поэтому $F \cap G = \emptyset$

6. Найдем FOLLOW₂:

i	$F_i(S)$	$F_i(S')$	$F_i(A)$
0	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	$\{\$$	\emptyset	$\{aa, ba\}$
2	$\{\$$	\emptyset	$\{aa, ba\}$

Задача 5

- $N \stackrel{\text{def}}{=} \{S, A\}$, $T \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$, $G \stackrel{\text{def}}{=} \{N, T, P, S\}$. $P = \{S \rightarrow ba|A, A \rightarrow a|Aab|Ab\}$.
- Удалим непосредственную левую рекурсию: $N' \stackrel{\text{def}}{=} \{S, A, A'\}$, $P' \stackrel{\text{def}}{=} \{S \rightarrow bA|A, A \rightarrow aA', A' \rightarrow abA'|bA'|\varepsilon\}$.
 $G' \stackrel{\text{def}}{=} \{N', T, P', S\}$.
- $L(G') = L(G)$ — так как применен алгоритм

- G'' — пополненная грамматика: $T'' \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, \$\}$, $N'' \stackrel{\text{def}}{=} \{S, S', A, A'\}$,
 $P'' \stackrel{\text{def}}{=} \{S' \xrightarrow{(0)} S \$, S \xrightarrow{(1)} ba, S \xrightarrow{(2)} A, A \xrightarrow{(3)} aA', A' \xrightarrow{(4)} abA', A' \xrightarrow{(5)} bA', A' \xrightarrow{(6)} \varepsilon\}$

5. Найдем FIRST:

i	$F_i(a)$	$F_i(b)$	$F_i(\$)$	$F_i(S)$	$F_i(S')$	$F_i(A)$	$F_i(A')$
0	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	$\{\varepsilon\}$
1	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$$	$\{b\}$	\emptyset	$\{a\}$	$\{a, b, \varepsilon\}$
2	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$$	$\{b, a\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a, b, \varepsilon\}$
3	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$$	$\{b, a\}$	$\{b, a\}$	$\{a\}$	$\{a, b, \varepsilon\}$
4	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$$	$\{b, a\}$	$\{b, a\}$	$\{a\}$	$\{a, b, \varepsilon\}$

6. Докажем, что G' — LL(1)-грамматика. Рассмотрим пары правил $X \rightarrow \beta$, $X \rightarrow \gamma$:

- $S \xrightarrow{(1)} \underbrace{ba}_{\beta}$, $S \xrightarrow{(2)} \underbrace{A}_{\gamma}$. Тогда $\forall \alpha \hookrightarrow F \stackrel{\text{def}}{=} \text{FIRST}(\beta\alpha) = \text{FIRST}(b) = \{b\}$, $G \stackrel{\text{def}}{=} \text{FIRST}(\gamma\alpha) = \{a\} \Rightarrow F \cap G = \emptyset$
- $A' \xrightarrow{(4)} \underbrace{abA'}_{\beta}$, $A' \xrightarrow{(5)} \underbrace{bA'}_{\gamma}$. Аналогично $F \cap G = \emptyset$.
- $A' \xrightarrow{(4)} \underbrace{abA'}_{\beta}$, $A' \xrightarrow{(6)} \underbrace{\varepsilon}_{\gamma}$. Пусть $S' \Rightarrow_l^* wA\alpha$. Тогда $\alpha = \$$, так правила (4), (5), (6) оставляют A' последним символом слова. Тогда $F \stackrel{\text{def}}{=} \text{FIRST}(\beta\alpha) = \{a\}$, $G \stackrel{\text{def}}{=} \text{FIRST}(\gamma\alpha) = \{\$$
- $A' \xrightarrow{(5)} \underbrace{bA'}_{\beta}$, $A' \xrightarrow{(6)} \underbrace{\varepsilon}_{\gamma}$. Пусть $S' \Rightarrow_l^* wA\alpha$. Аналогично $\alpha = \$$. Тогда $F \stackrel{\text{def}}{=} \text{FIRST}(\beta\alpha) = \{b\}$, $G \stackrel{\text{def}}{=} \text{FIRST}(\gamma\alpha) = \{\$$,
поэтому $F \cap G = \emptyset$.

7. Найдем FOLLOW:

i	$F_i(S')$	$F_i(S)$	$F_i(A)$	$F_i(A')$
0	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	$\{\$$	\emptyset	\emptyset
2	\emptyset	$\{\$$	$\{\$$	\emptyset
3	\emptyset	$\{\$$	$\{\$$	$\{\$$
4	\emptyset	$\{\$$	$\{\$$	$\{\$$

8. Построим LL-анализатор:

	a	b	$\$$
S'	$S' \xrightarrow{(0)} S \$$	$S' \xrightarrow{(0)} S \$$	Err.
S	$S \xrightarrow{(2)} A$	$S \xrightarrow{(1)} ba$	Err.
A	$A \xrightarrow{(3)} aA'$	Err.	Err.
A'	$A' \xrightarrow{(4)} abA'$	$A' \xrightarrow{(5)} bA'$	$A' \xrightarrow{(6)} \varepsilon$
a	ε	Err.	Err.
b	Err.	ε	Err.
$\$$	Err.	Err.	Acc.

Задача 6

Предположим, что $L \stackrel{\text{def}}{=} a^* \cup a^n b^n$ — LL-язык. Тогда $\exists k \exists G: L(G) = L$ и G — $\text{LL}(k)$ -грамматика. Рассмотрим слова $x_i \stackrel{\text{def}}{=} a^{2k+i} b^{2k+i}$ и $y_i \stackrel{\text{def}}{=} a^{2k+i}$. Фиксируем i . Рассмотрим левые выводы x_i и y_i . Пусть их наибольшая совпадающая часть $S \Rightarrow_l^* w_i A_i \alpha_i$. Имеем $w_i A_i \alpha_i \Rightarrow^* x_i, y_i$, причем нетерминал A_i раскрывается различными способами (применяются разные правила). Рассмотрим утверждение $P \stackrel{\text{def}}{=} [\forall i \hookrightarrow |w_i| > k + i]$. Определим $n_i \stackrel{\text{def}}{=} |w_i|$, $m_i \stackrel{\text{def}}{=} 2k + i - n_i$

1. Поскольку $w_i \in T^*$, $w_i \in a^*$, так как $w_i A_i \alpha_i \Rightarrow^* a^{2k+i}$.

2. Предположим, что P верно. Рассмотрим $m_i \equiv 2k + i - n_i < 2k + i - k - i = k$. Эта последовательность принимает конечное количество значений. Рассмотрим нетерминалы A_i . Их также конечное число. Поэтому пара (m_i, A_i) принимает конечное количество значений. По принципу Дирихле получаем $\exists i_1 < i_2: A_{i_1} = A_{i_2}, m_{i_1} = m_{i_2}$. Определим $A \stackrel{\text{def}}{=} A_{i_1} \equiv A_{i_2}$, $t \stackrel{\text{def}}{=} m_{i_1} \equiv m_{i_2}$, $w_1 \stackrel{\text{def}}{=} w_{i_1}$, $w_2 \stackrel{\text{def}}{=} w_{i_2}$, $\alpha_1 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{i_1}$, $\alpha_2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{i_2}$. Перепишем свойство: $w_1 A \alpha_1 \Rightarrow^* a^{2k+i_1}, a^{2k+i_1} b^{2k+i_1}$, аналогично для i_2 . $|w_1| = n_{i_1}$, $w_i \in a^*$, поэтому $w_i = a^{n_{i_1}}$. Значит, $A \alpha_1 \Rightarrow^* a^t, a^t b^{2k+i_1}$, $A \alpha_2 \Rightarrow^* a^t, a^t b^{2k+i_2}$. Рассмотрим вывод $A \alpha_2 \Rightarrow^* a^t b^{2k+i_2}$. Далее называем его «этим» выводом.

Определим утверждения: $R \stackrel{\text{def}}{=} \text{«в этом выводе } A \text{ порождает } b\text{»}$, $S \stackrel{\text{def}}{=} \text{«в этом выводе } \alpha_2 \text{ порождает } b\text{»}$. Рассмотрим случаи:

- (a) Пусть $\neg R$. Тогда A в этом выводе порождает a^p . Пусть в выводе $A \alpha_2 \Rightarrow^* a^t$ нетерминал A порождает a^q .
 - i. Пусть $p = q$. Поскольку первые правила в выводах различны (по построению), получаем неоднозначность грамматики, так как $A \Rightarrow^* a^p$ можно вывести двумя способами. Поэтому G — не $\text{LL}(k)$ -грамматика.
 - ii. Пусть $p \neq q$. Заменим в выводе $A \alpha_2 \Rightarrow^* a^t b^{2k-i_2}$ первое правило. Количество символов a в выведенной из S цепочке изменится, а количество b — нет. Изначально они были равны. Получаем, что $L(G) \neq L$ — противоречие.
 - (b) Пусть $\neg S$. Тогда α_2 в этом выводе порождает ε , так как после b не может следовать a . Значит, $A \Rightarrow^* a^t b^{2k+i_2}$. Рассмотрим вывод $A \alpha_1 \Rightarrow^* a^t b^{2k+i_1}$. Пусть из α_1 здесь выводятся x . Изменим вывод: выведем из A слово $a^t b^{2k+i_2}$, а из α_1 — x . Получим, что выведенное таким образом из S слово w не из L : $|w|_b \geq 2k + i_2$. После b не может следовать a , поэтому $|w|_a = 2k + i_1$. Это противоречие: $L(G) \neq L$.
 - (c) Последний случай: верно R, S . Тогда в этом выводе $A \alpha_2 \Rightarrow^* yu$, где $y = a^t b^{t_1}$ порождается α , а $u = b^{2k+i_2-t_1}$ порождается α_2 . Рассмотрим другой вывод $A \alpha_2 \Rightarrow^* a^t$. Из его существования следует, что $\alpha_2 \Rightarrow^* a^d$. Изменим «этот» вывод, выводя из α_2 цепочку a^d . Получим слово $a^{2k+i_2} b^{t_1} a^d \in L$. Поскольку после b не может следовать a , $d = 0$. В нем меньше символов b , чем в слове, полученном при этом выводе, а символов a — столько же (из утверждения R получаем, что символы b там есть). Значит, оно не из L — противоречие.
3. $\neg P \Rightarrow \exists i: |w_i| \leq k + i$. Определим $A \stackrel{\text{def}}{=} A_i$, $n \stackrel{\text{def}}{=} n_i$, $m \stackrel{\text{def}}{=} m_i$, $x \stackrel{\text{def}}{=} x_i$, $y \stackrel{\text{def}}{=} y_i$. $w \stackrel{1}{=} a^n$. Тогда $A \alpha \Rightarrow^* a^m b^{2k+i}, a^m$. $m \equiv 2k + i - n \geq 2k + i - k - i = k$. Рассмотрим вывод $S \Rightarrow_l^* w A \alpha \Rightarrow^* x, y$. При выводе x и y нетерминал A был раскрыт различными способами соответственно (по построению): $A \rightarrow \beta$, $A \rightarrow \gamma$. Имеем эти два правила и $X = \text{FIRST}_k(\beta \alpha) \supset \text{FIRST}_k(a^m) = \{a^k\}$, $Y = \text{FIRST}_k(\gamma \alpha) \supset \text{FIRST}_k(a^m b^{2k+i}) = \{a^k\}$, и $X \cap Y \neq \emptyset$, поэтому G — не $\text{LL}(k)$ -грамматика по Теореме 1.