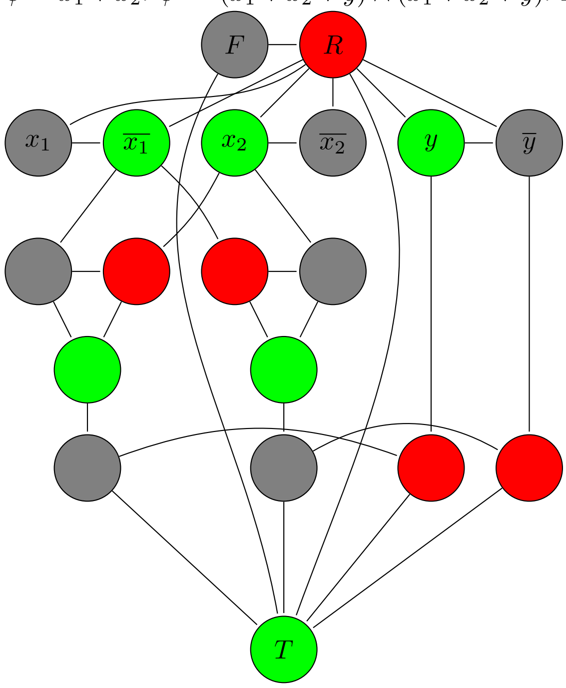
Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 6

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.20

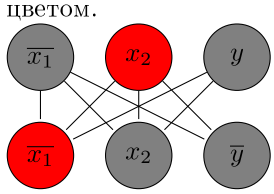
(каноническое) Задача 24

$\psi = \overline{x_1} \vee x_2$. $\psi' = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee y) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{y})$. Граф $W_{\psi'}$ с раскраской:



(каноническое) Задача 25

1. $\psi = \overline{x_1} \vee x_2$, $\psi' = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee y) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{y})$. $n = 3$, $m = 2$. Граф $Q_{\psi'}$. Клика мощности $s = m = 2$ выделена красным цветом.



2. *(доказано на семинаре)* 3-SAT $\leqslant_m^p$ CLIQUE. Формула $\chi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge \overline{x_3}$, $\chi' = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee y_1) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{y_1}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee y_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{y_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_3} \vee y_3 \vee y_4) \wedge (\overline{x_3} \vee y_3 \vee \overline{y_4}) \wedge (\overline{x_3} \vee \overline{y_3} \vee y_4) \wedge (\overline{x_3} \vee \overline{y_3} \vee \overline{y_4})$. $n = 7$, $t = m = 10$. $f(x) = (G, t)$ — граф, построенный по χ' (и число 10 — мощность искомой клики), f — функция из сводимости. Пусть в G существует клика мощности $\geqslant t$. Тогда существует клика мощности t (любой подграф из t вершин исходной клики). Тогда $f(x) \in \mathsf{CLIQUE} \overset{\text{сводимость}}{\Longrightarrow} \chi' \in \text{3-SAT} \Rightarrow \chi'$ — выполнима $\overset{\text{эквив. формул}}{\Longrightarrow}$ χ — выполнима — противоречие. Значит, в графе образа χ' нет клики мощности $\geqslant t \equiv 10$ ■

(каноническое) Задача 26

0. Исходный дизъюнкт $w = (a_i \vee b_i \vee c_i)$. Не будем писать индексы (рассматриваем один дизъюнкт). Рассмотрим $L \overset{\text{def}}{=} \{a, b, c, d, \overline{a} \vee \overline{b}, \overline{a} \vee \overline{c}, \overline{b} \vee \overline{c}, a \vee \overline{d}, b \vee \overline{d}, c \vee \overline{d}\}$.

   (a) Пусть w — не выполнена. Тогда $a = b = c = 0$. Найдем q: $\forall d \in \{0, 1\}$ в L менее q формулы выполнены. Случаи:

   i. $d = 0$. Рассмотрим L, $\boxed{\text{выделим}}$ выполненные дизъюнкции: $\{\cancel{a}, \cancel{b}, \cancel{c}, \cancel{d}, \boxed{\overline{a} \vee \overline{b}}, \boxed{\overline{a} \vee \overline{c}}, \boxed{\overline{b} \vee \overline{c}}, \boxed{a \vee \overline{d}}, \boxed{b \vee \overline{d}}, \boxed{c \vee \overline{d}}\}$. Выполнены 6 дизъюнкции.

   ii. $d = 1$. $\{\cancel{a}, \cancel{b}, \cancel{c}, \boxed{d}, \boxed{\overline{a} \vee \overline{b}}, \boxed{\overline{a} \vee \overline{c}}, \boxed{\overline{b} \vee \overline{c}}, \cancel{a \vee \overline{d}}, \cancel{b \vee \overline{d}}, \cancel{c \vee \overline{d}}\}$. Выполнено 4 дизъюнкции.

   Значит, $q > \max(4, 6)$. Возьмем $q = 7$ и докажем вторую часть.

(b) Пусть w — выполнена. Тогда $\left[\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & 1 \\ c & = & 1 \end{array}\right.$. Рассмотрим различные случаи, и подберем d так, чтобы было выполнено $\geqslant q \equiv 7$ дизъюнкций. Поскольку w и L симметричны относительно замены переменных (например, $a \leftrightarrow b$), разделим случаи по количеству $a+b+c$ (количество единиц в наборе).

i. $(a,b,c) = (1,0,0)$. Возьмем $d = 0$, получим $\{\boxed{a}, \cancel{b}, \cancel{c}, \cancel{d}, \boxed{\overline{a} \vee \overline{b}}, \boxed{\overline{a} \vee \overline{c}}, \boxed{\overline{b} \vee \overline{c}}, \boxed{a \vee \overline{d}}, \boxed{b \vee \overline{d}}, \boxed{c \vee \overline{d}}\}$ — выполнено $7 \geqslant 7 \equiv q$ дизъюнкций.

ii. $(a,b,c) = (1,1,0)$. Возьмем $d = 0$, получим $\{\boxed{a}, \boxed{b}, \cancel{c}, \cancel{d}, \cancel{\overline{a} \vee \overline{b}}, \boxed{\overline{a} \vee \overline{c}}, \boxed{\overline{b} \vee \overline{c}}, \boxed{a \vee \overline{d}}, \boxed{b \vee \overline{d}}, \boxed{c \vee \overline{d}}\}$ — выполнено $7 \geqslant 7 \equiv q$ дизъюнкций.

iii. $(a,b,c) = (1,1,1)$. Возьмем $d = 1$, получим $\{\boxed{a}, \boxed{b}, \boxed{c}, \boxed{d}, \cancel{\overline{a} \vee \overline{b}}, \cancel{\overline{a} \vee \overline{c}}, \cancel{\overline{b} \vee \overline{c}}, \boxed{a \vee \overline{d}}, \boxed{b \vee \overline{d}}, \boxed{c \vee \overline{d}}\}$ — выполнено $7 \geqslant 7 \equiv q$ дизъюнкций.

1. $\psi' = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee y) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{y})$.
$L_1 = \{\overline{x_1}, x_2, y, d_1, x_1 \vee \overline{x_2}, x_1 \vee \overline{y}, \overline{x_2} \vee \overline{y}, \overline{x_1} \vee \overline{d_1}, x_2 \vee \overline{d_1}, y \vee \overline{d_1}\}$
$L_2 = \{\overline{x_1}, x_2, \overline{y}, d_2, x_1 \vee \overline{x_2}, x_1 \vee y, \overline{x_2} \vee y, \overline{x_1} \vee \overline{d_2}, x_2 \vee \overline{d_2}, \overline{y} \vee \overline{d_2}\}$. Образ $\widetilde{\psi'} = L_1 \cup L_2$. $k = 2$ (количество дизъюнктов), Пороговое значение $kq = 2 \times 7 = 14$.

2. Возьмем набор $(x_1, x_2, y, d_1, d_2) = (0,1,1,1,0)$.
Рассмотрим $L_1 = \{\boxed{\overline{x_1}}, \boxed{x_2}, \boxed{y}, \boxed{d_1}, \cancel{x_1 \vee \overline{x_2}}, \cancel{x_1 \vee \overline{y}}, \cancel{\overline{x_2} \vee \overline{y}}, \boxed{\overline{x_1} \vee \overline{d_1}}, \boxed{x_2 \vee \overline{d_1}}, \boxed{y \vee \overline{d_1}}\}$ — выполнено 7 дизъюнкций
Рассмотрим $L_2 = \{\boxed{\overline{x_1}}, \boxed{x_2}, \cancel{\overline{y}}, \cancel{d_2}, \cancel{x_1 \vee \overline{x_2}}, \boxed{x_1 \vee y}, \boxed{\overline{x_2} \vee y}, \boxed{\overline{x_1} \vee \overline{d_2}}, \boxed{x_2 \vee \overline{d_2}}, \boxed{\overline{y} \vee \overline{d_2}}\}$ — выполнено 7 дизъюнкций
Получаем, что в $\widetilde{\psi'}$ выполнено $2 \times 7 = 14 \geqslant 14 \equiv kq$ дизъюнкций ■.

(каноническое) Задача 27

Пусть $f\colon \text{ГЦ} \subset \Sigma^* \to \{0,1\}$, $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \text{ГЦ}$, и $T_f(x) = \text{poly}(|x|)$ (f вычислима за полиномиальное по $|x|$ время). Считаем граф ориентированным.

1. Определим $h(G,u,v)$ — граф, полученный из G объединением **смежных** вершин u и v в одну $\underline{uv}$. Ребра, идущие в u, и только они идут в $\underline{uv}$; ребра, идущие из v, и только они идут из $\underline{uv}$.

   (a) Фиксируем гамильтонов граф G и его вершину u. Переберем все вершины v, такие, что $(u,v) \in E_G$ и рассмотрим $h(G,u,v)$.

   i. Пусть в некоторый ГЦ G входит ребро (u,v). Тогда $h(G,u,v)$ – гамильтонов. В u приходим из u_0, из v уходим в v_1. Значит, этот кусок ГЦ $u_0 \to u \to v \to v_1$ можно заменить на $u_0 \to \underline{uv} \to v_1$. Полученная последовательность вершин будет ГЦ в $h(G,u,v)$

   ii. Хотя бы на одной v граф $h(G,u,v)$ — гамильтонов. Действительно, рассмотрим произвольный ГЦ в G. В нем есть пара смежных вершин. Возьмем их за (u,v), воспользуемся предыдущим утверждением.

   iii. Пусть при некотором v граф $h(G,u,v)$ — гамильтонов. Тогда в G есть ГЦ, в который входит (u,v). Действительно, рассмотрим имеющийся ГЦ $s \to ... \to \underline{uv} \to ... \to s$, заменим $\underline{uv}$ на $u \to v$, получим ГЦ в G.

   (b) Определим индуктивно $\underline{w_1...w_k} = \underline{\underline{w_1...w_{k-1}}, w_k}$ (база $k = 2$).

   (c) Определим индуктивно $G_{w_1w_2} \equiv G^{w_1}_{w_2} = h(G, w_1, w_2)$.
   Определим $G_{w_1w_2w_3} = (G^{w_1}_{w_2})^{\underline{w_1w_2}}_{w_3}$, ..., $G_{w_1w_2...w_k} = (G_{w_1w_2...w_{k-1}})^{\underline{w_1...w_{k-1}}}_{w_k}$ (вершины (w_i, w_j) считаем смежными).

   (d) Пусть $G_{w_1...w_k}$ — гамильтонов, и в некотором его цикле содержится $\underline{w_1...w_k}, w_{k+1}, ..., w_n$. Тогда $G_{w_1...w_{k-1}}$ — гамильтонов, и в некотором его цикле содержится $\underline{w_1...w_{k-1}}, w_k, w_{k+1}, ..., w_n$. Действительно, цикл в $G_{w_1...w_k}$: $s \to ... \to \underline{w_1...w_k} \to w_{k+1} \to ... \to w_n$. Поскольку $G_{w_1...w_k} = (G_{w_1...w_{k-1}})^{\underline{w_1...w_{k-1}}}_{w_k}$, и вершины $\underline{w_1...w_{k-1}}$ и w_k — смежные в $G_{w_1...w_{k-1}}$, в $G_{w_1...w_{k-1}}$ есть цикл $s \to ... \to \underline{w_1...w_{k-1}} \to w_k \to w_{k+1} \to ... \to w_n \to s$, и он гамильтонов, так как содержит все вершины графа, и каждая встречается один раз.

   (e) Пусть $G_{w_1...w_n}$ — гамильтонов. Тогда в некотором ГЦ G содержится $w_1, ...w_n$. Действительно, $G_{w_1...w_n}$ имеет одну вершину ($n = |V_G|$), и она образует гамильтонов цикл. Применим предыдущее утверждение: в $G_{w_1...w_{n-1}}$ содержится $\underline{w_1...w_{n-1}}, w_n$, еще раз: в $G_{w_1...w_{n-2}}$ содержится $\underline{w_1...w_{n-2}}, w_{n-1}, w_n$, *** (индукция), в G содержится $w_1, ..., w_n$.

2. Алгоритм. Вычисляем $f(G)$

   (a) Если $f(G) = 0$, то ГЦ нет, возвращаем $\varnothing$

   (b) Иначе выбираем случайную вершину w_1. Рассмотрим ее соседей: $(w_1, w_2) \in E_G$. Один из графов $G_{w_1w_2}$ (получается за полиномиальное время) будет гамильтоновым (1(a)ii). Далее продолжим процедуру (рассмотрим соседей $\underline{w_1w_2}$...). Получим некоторую последовательность вершин $w_1...w_n$, и (инвариант цикла) $G_{w_1...w_n}$ — гамильтонов. Тогда (1e) в G есть ГЦ $(w_1, ...w_n)$. Возвращаем $(w_1, ...w_n)$.

   (c) Время работы. На каждом шаге время $O(|V_G| \times T_f(G)) = \text{poly}(|x|)$. На каждом шаге вершин становится меньше на одну, поэтому шагов не больше, чем $|V_G|$. Значит, суммарное время $O(|V_G| \times \text{poly}(|x|)) = \text{poly}(|x|)$.