

Эффект Эйнштейна — де Хааза (реферат)

Сергей Володин, 274 гр.

2015.01.22

Введение

В 1820 году Эрстед выяснил, что магнитное поле может быть создано не только постоянными магнитами, но еще и токами. Получалось, что источников магнитного поля может быть два типа: токи и постоянные магниты. В попытке разобраться в этой ситуации и выяснить природу магнетизма, сведя два типа к одному, Ампер выдвинул гипотезу, согласно которой в постоянных магнитах циркулируют без сопротивления молекулярные токи, которые и создают магнитное поле. В 1915 году Эйнштейн и де Хааз провели эксперимент, который должен был подтвердить гипотезу Ампера.

Классическое обоснование (модель Бора, орбитальный момент)

В модели атома Бора (1913) электрон вращается по круговой орбите. Из-за этого, во-первых, он имеет момент импульса, во-вторых, магнитный момент, так как электрон — заряженная частица. Поэтому следует ожидать, что изменение магнитных свойств (намагничивание) будет приводить к изменению механических: тело начнет вращаться. Такой эффект и наблюдали Эйнштейн и де Хааз.

Рассмотрим атом модели Бора. Электрон с зарядом $e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл движется вокруг ядра с зарядом $Z|e|$. Момент импульса электрона $L = mvr = m \frac{2\pi r}{T} r = m 2\pi r^2 \nu$, где ν — частота обращения электрона вокруг ядра. Магнитный момент $M = IS = e\nu\pi r^2$. Отсюда получаем гиромагнитное отношение $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M}{L} = \frac{e\nu\pi r^2}{m 2\pi r^2 \nu} = \frac{e}{2m} \approx -8.79 \cdot 10^{10} \frac{\text{Кл}}{\text{Кг}}$. Обратная величина $\frac{1}{\gamma} = -1.14 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Кг}}{\text{Кл}}$.

В векторном виде гиромагнитное отношение записывается как $\vec{M} = \gamma \vec{L}$

Из-за наличия такого соотношения изменение намагниченности образца приведет к его вращению как целого. Действительно, пусть \vec{L}_1 — сумма всех орбитальных моментов импульса электронов, \vec{L}_2 — момент импульса тела как целого. Полный момент сохраняется: $0 = \frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)$, откуда $\frac{d\vec{L}_2}{dt} = -\frac{d\vec{L}_1}{dt} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \sum_i \vec{M}_i$, где \vec{M}_i — орбитальные магнитные моменты всех

атомов. Это можно интерпретировать так: на тело как целое действует момент силы $\vec{\tau} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \vec{M}_{\Sigma}$, то есть, тело начнет вращаться.

Покажем, что эффект можно наблюдать. Пусть внешнее магнитное поле изменяется с \vec{B}_0 до противоположного $-\vec{B}_0$. Пусть B_0 достаточно сильное, т.е. намагниченность достигает насыщения и изменяется с \vec{I}_s на противоположное $-\vec{I}_s$. Изменение момента импульса $J\Delta\omega = \int_0^t \tau dt = \int_0^t -\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} (M_{\Sigma}) dt = -\frac{\Delta M_{\Sigma}}{\gamma}$. Оценим $\Delta M_{\Sigma} = 2I_s V = 2N\mu_B \boxed{=}$, где μ_B — магнетон Бора, N — число атомов. $\boxed{=}$ $2 \frac{MN_a\mu_B}{\mu}$, μ — молярная масса. Если взять $J = \frac{1}{2}MR^2$, $R = 10^{-3}\text{м}$, $\mu = 56 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Кг}}{\text{моль}}$, получим $\Delta\omega = -\frac{4M \cdot N_a \cdot \mu_B}{\mu \gamma M R^2} = \frac{4N_a \hbar}{\mu R^2} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{с}^{-1}$.

Эксперимент

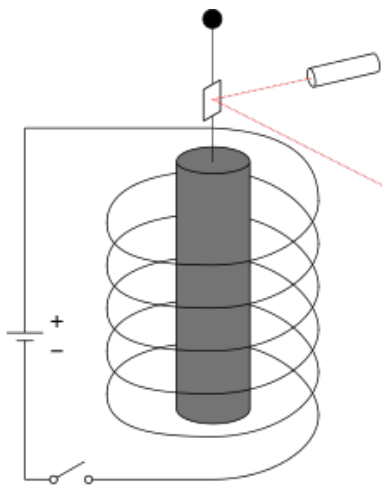


Рис. 1: Схема установки

Рассмотрим подвешенный на нити цилиндр, помещенный в катушку с током i , которая создает магнитное поле. Запишем уравнение вращательных колебаний (β, ω_0 — параметры собственных колебаний):

$$\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = \frac{1}{J}\tau$$

Пропустим через катушку синусоидальный ток частоты ω : $i = A \sin \omega t$. Момент сил τ в таком случае не обязан быть синусоидальным, так как кривая намагничивания нелинейна (петля гистерезиса) при достаточно больших внешних полях, а именно такие поля и были использованы.

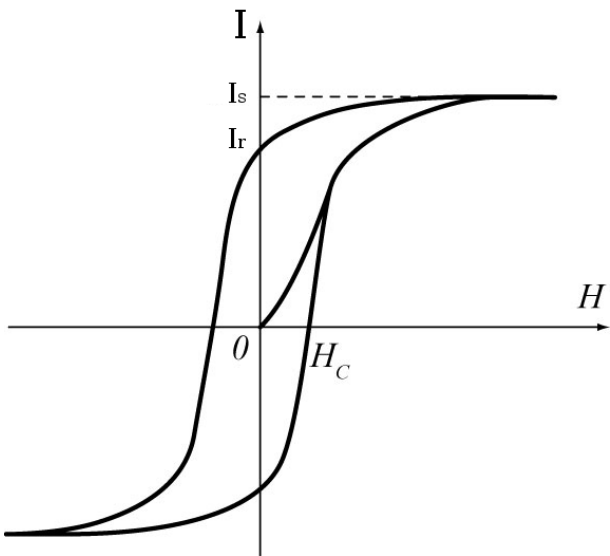


Рис. 2: Петля гистерезиса для железа — зависимость $I(H_{\text{внеш.}})$

Эйнштейном и де Хаазом был получен график зависимости тока от времени и момента сил от времени. Ток синусоидальный, а момент сил (вторая кривая) — нет.

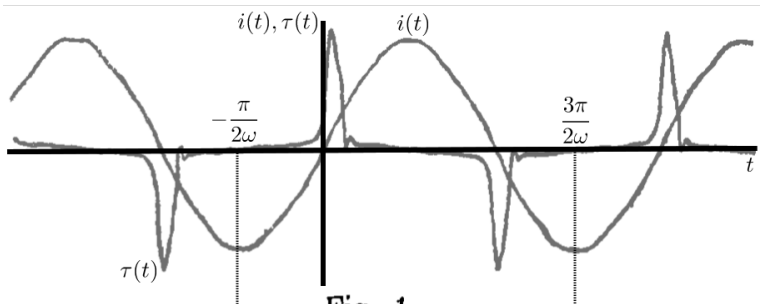


Fig. 1.

Рис. 3: Зависимость тока и момента сил от времени

«Пик» возникает при смене знака тока, что соответствует смене знака внешнего магнитного поля, т.е. движению вдоль кривой гистерезиса вблизи нуля, где производная $\frac{dI}{dt}$ как раз велика. «Плоские» участки соответствуют движению по асимптотам (насыщение).

Разложим момент сил в ряд Фурье на периоде $T = \frac{2\pi}{\omega}$ как четную функцию: $\tau = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega t$. В результирующих колебаниях амплитуда велика только для первого члена при $\omega \approx \omega_0$ (резонанс). Вычислим B_1 . На отрезке $t \in [-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}]$ наблюдается два пика, первый вверх, второй вниз. Проинтегрируем разложение для момента, умноженное на $\cos \omega t$ по указанному периоду («перекрестные» члены уйдут):

$$\int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} \tau \cos \omega t dt = \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} B_1 \cos^2 \omega t dt = \frac{\pi}{\omega} B_1$$

В первом пике ($t \approx 0$) значение $\cos \omega t \approx 1$, во втором пике ($t \approx \frac{\pi}{\omega}$) значение $\cos \omega t \approx -1$. Интеграл по каждому пику, как показано выше, равен $\int \tau dt = -\frac{1}{\gamma} \Delta M_{\Sigma} = -\frac{2}{\gamma} M_s$, где $M_s = I_s V$ — суммарный магнитный момент при насыщении. В итоге интеграл слева можно оценить как $-\frac{4}{\gamma} I_s V$. Получаем соотношение $B_1 = -\frac{4I_s V \omega}{\pi \gamma}$.

Найдем решение уравнения колебаний, оставив в правой части только член с $\cos \omega t$, который дает максимальную среди всех членов амплитуду колебаний (резонансный):

$$\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = \frac{B_1}{J} \cos \omega t$$

Собственные колебания не учитываем, так как они затухающие (ими можно пренебречь). Частное решение ищем в виде $\alpha(t) = \text{Re} A e^{i\omega t}$, получаем $A = \frac{B_1/J}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta i \omega}$, откуда $\alpha = \text{Re}(A e^{i\omega t}) = \text{Re}(A) \text{Re}(e^{i\omega t}) - \text{Im}(A) \text{Im}(e^{i\omega t}) = |A| \cos(\omega t + \varphi)$,

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\text{Re} A}{|A|} \\ \sin \varphi = \frac{\text{Im} A}{|A|} \end{cases}$$

В опыте была получена зависимость амплитуды колебаний от частоты тока в катушке, $|A|(\omega)$ — резонансная кривая, которая представлена графически. По оси ординат отложена величина, пропорциональная $|A|$: угол измерялся при помощи зеркала, жестко закрепленного на торце цилиндра, луча света и шкалы на расстоянии $L = 1.45$ м, откуда «размах» на шкале $2\Delta l = L \tan(2|A|) \approx 2|A|L$ и $|A| = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\Delta l}{L} \approx \frac{\Delta l}{L}$

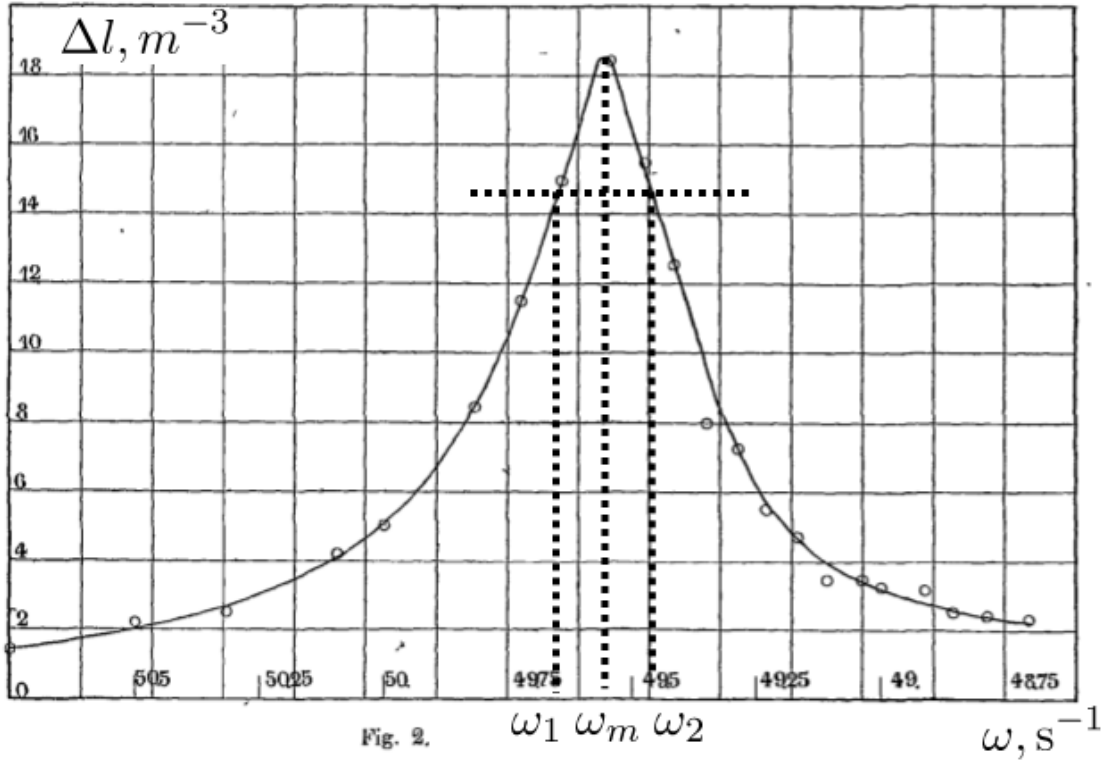


Рис. 4: Резонансная кривая

Из полученной резонансной кривой найдем γ . Фиксируем значение $|A|$ и найдем две частоты ω_1 и ω_2 соответствующие этому $|A|$ на кривой. Рассмотрим также резонансную частоту $\omega_m \equiv \omega_0$. Обозначим в выражении для $|A|$ константу μ , содержащую искомое γ :

$$|A|(\omega) = \frac{|B_1|}{J} ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)^{-1/2} = \underbrace{\frac{4I_s V}{\pi |\gamma| J}}_{\mu} \left(\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\beta^2 \right)^{-1/2}$$

Тогда $(\frac{\mu}{|A|})^2 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\beta^2$. В резонансе ($\omega = \omega_0 \equiv \omega_m$) найдем $\frac{\mu}{|A|_m} = 2\beta$.

Для двух точек с совпадающими $|A|$ найдем $(\frac{\mu}{|A|_{1,2}})^2 = \frac{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2}{\omega_1^2} + 4\beta^2 = \frac{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2}{\omega_2^2} + 4\beta^2$. Приравняв второе и третье выражения, получим $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$.

Рассмотрим разницу $(\frac{\mu}{|A|_{1,2}})^2 - (\frac{\mu}{|A|_m})^2 \equiv$, подставим туда найденные ω_0 и $\frac{\mu}{|A|_m}$, получим $\equiv (\omega_1 - \omega_2)^2$.

Обозначим $b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|A|_{1,2}}{|A|_m}$ — безразмерный параметр (отношение выбранной амплитуды к максимальной амплитуде) и $4\pi\nu = \omega_2 - \omega_1$ — половина разницы частот между ω_1 и ω_2 .

Подставим обозначенные параметры в найденное соотношение: $(\frac{\mu}{|A|_m})^2 (\frac{1}{b^2} - 1) = (4\pi)^2 \nu^2$. Выразим из него μ и приравняем с определением μ :

$$\frac{4I_s V}{\pi |\gamma| J} \stackrel{\text{def}}{=} \mu = 4\pi \nu |A|_m \sqrt{\frac{b^2}{1 - b^2}}$$

отсюда получим $\frac{1}{|\gamma|} = \frac{J \pi^2 \nu |A|_m}{I_s V} \sqrt{\frac{b^2}{1 - b^2}}$

Таким образом, выбрав любую амплитуду $|A|_{1,2}$, мы можем рассчитать значение γ . Поэтому, если все предположения (например, линейность члена, отвечающего за затухание; отсутствие зависимости γ от величины поля, ...) верны, величина $\nu \sqrt{\frac{b^2}{1 - b^2}}$ не должна зависеть от выбора $|A|$. В проведенном Эйнштейном и де Хаазом опыте это утверждение верно при достаточно близких к максимальному $|A|_m$ значениях $|A|_{1,2}$, т.е., вблизи резонанса:

$\Delta l, 10^{-3} \text{ м}$	$\nu \sqrt{\frac{b^2}{1 - b^2}}, \text{ с}^{-1}$
15	0.120
12	0.130
9	0.124
7	0.121
5	0.114
4	0.108
3	0.0957

Найдем среднее значение величины $x \stackrel{\text{def}}{=} \nu \sqrt{\frac{b^2}{1 - b^2}}$ по первым четырем значениям из таблицы, где величина остается постоянной: $x_{\text{ср.}} \approx 0.124 \text{ с}^{-1}$.

Найдем остальные величины, входящие в выражение для $\frac{1}{|\gamma|}$:

1. $J = 0.0126 \text{ г} \cdot \text{см}^2$ (найдено добавлением небольшой массы и измерением новой частоты собственных колебаний)
2. $I_s V = 470$
3. $|A|_m = \frac{\Delta l}{L} = \frac{1.85}{145.4} \approx 0.32 \cdot 10^{-2}$ рад.

Получаем $\frac{1}{|\gamma|} = \frac{J \pi^2 |A|_m}{I_s V} x_{\text{ср.}} = \frac{0.0126 \cdot 3.14^2 \cdot 0.32 \cdot 10^{-2}}{470} \cdot 0.124 \approx 1.0 \cdot 10^{-7}$

Результаты и квантовая физика

Для электрона связь между магнитным моментом \vec{M} и моментом импульса \vec{L} выражается через g -фактор: $\gamma = g \frac{e}{2m}$. Для спина $g_s = 2$ (опыт Штерна-Герлаха), для орбитального $g_l = 1$. Таким образом, Эйнштейном и де Хаазом было получено значение $g = 1$, что соответствует орбитальному движению. Но в последующих опытах такого же типа (см. 5) было получено значение $g = 2$, т.е. в работе Эйнштейна и де Хааза была допущена ошибка, либо неверно оценена погрешность.

Значение $g = 2$ указывает на то, что магнетизм ферромагнетиков связан не с орбитальным, а со спиновым угловым моментом. То есть, хотя и эксперимент де Хааза не подтверждает существование молекулярных токов Ампера, но косвенно подтверждает существование спина.

«Одна вторая»

От «настоящего» результата, который подтверждается последующими экспериментами, результат γ у Эйнштейна и де Хааза отличается в 2 раза. Он согласуется с моделью Бора, которая была на тот момент, но не согласуется с действительностью.

В оригинальной статье опущены некоторые элементарные, но важные детали, из-за чего невозможно провести вычисления самостоятельно и выяснить, в чем проблема: в большой погрешности результата или в неверных расчетах. Например:

1. Для измерения угла используется зеркальце. Соответственно, измеренный угол всегда будет в 2 раза больше, чем угол отклонения. В статье не указано, какой конкретно угол имеется в виду
2. Не указано, что отложено по оси ординат (амплитуда или размах, который в 2 раза больше), здесь также может быть ошибка в 2 раза. В оригинальной статье величина называется «double deviation», но неясно, что имеется в виду
3. Величина ν равна половине расстояния между ω_1 и ω_2 .
4. Погрешность указана только в конце статьи (10%), неизвестно, как она получена и какая на самом деле точность результата

Список литературы

- [1] A. Einstein, W. J. de Haas, Experimental proof of the existence of Ampère's molecular currents (in English), Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings, 18 I, pp. 696–711 (1915).
- [2] В.Я.Френкель. УФН т.128, (1979) с.545.
- [3] S. J. Barnett: Gyromagnetic and Electron-Inertia Effects. In Rev. Mod. Phys. 7. 1935
- [4] Д.В.Сивухин, т.3, с.308
- [5] С.В.Вонсовский. Магнетизм. Магнитные свойства диа-, пара-, ферро-, антиферро и ферромагнетиков. – М.: Наука, 1971.