Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 5: сложность вычислений: классы P, NP, co-NP II

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.13

Задача 1

1. Докажем, что $\text{HAMPATH} \leqslant_m^p \text{UHAMPATH}$.
   $\text{HAMPATH} = \{(G, s, t) \big| G - \text{ориентированный граф, в } G \text{ существует гамильтонов путь из } s \text{ в } t\}$,
   $\text{UHAMPATH} = \{(G, s, t) \big| G - \text{неориентированный граф, в } G \text{ существует гамильтонов путь из } s \text{ в } t\}$.
   Пусть G — ориентированный граф, s и t — его вершины. $x = (G, s, t)$. Определим $f(x) = (G', s', t')$. Для каждой вершины $v \in V(G)$, кроме s и t, добавим в $V(G')$ три вершины v_i, v_m, v_o. Для s и t добавим s_o и t_i. Соединим $v_i \leftrightarrow v_m$ и $v_m \leftrightarrow v_o$ (стрелкой $\leftrightarrow$ обозначено неориентированное ребро). Для каждого $(u, v) \in E(G)$ добавим $(u_o, v_i) \in E(G')$. G' — получившийся граф, $s' = s_o$, $t' = t_i$.

   (a) Пусть $x = (G, s, t) \in \text{HAMPATH}$. Тогда существует путь $s \to v_1 \to v_2 \to ... \to v_n \to t$. По построению, тогда существует путь $s_o \leftrightarrow v_{1i} \leftrightarrow v_{1m} \leftrightarrow v_{1o} \leftrightarrow ... \leftrightarrow v_{ni} \leftrightarrow v_{nm} \leftrightarrow v_{no} \leftrightarrow t_i$, который является гамильтоновым путем в G' *todo*, поэтому $f(x) \in \text{UHAMPATH}$

   (b) Пусть $f(x) = (G', s_o, t_i) \in \text{UHAMPATH}$. Из вершины с индексом $\cdot_o$ по построению есть ребра только в вершины с индексом $\cdot_i$. Из вершины v_i есть ребро только в v_m, из вершины v_m — только в v_o. Поэтому гамильтонов путь имеет вид $s_o \leftrightarrow v_{1i} \leftrightarrow v_{1m} \leftrightarrow v_{1o} \leftrightarrow ... \leftrightarrow v_{ni} \leftrightarrow v_{nm} \leftrightarrow v_{no} \leftrightarrow t_i$, значит, в исходном графе G есть путь $s \to v_1 \to v_2 \to ... \to v_n \to t$, и он гамильтонов *todo*, поэтому $x \in \text{HAMPATH}$

   (c) f — вычислима за полиномиальное время (линейное по количеству ребер и вершин время)

2. Поскольку $\text{HAMPATH} \in \mathsf{NP}\text{-c}$, $\text{HAMPATH} \leqslant \text{UHAMPATH}$, $\text{UHAMPATH} \in \mathsf{NP}$, то (см. решение 4-го задания, вспомогательные утверждения, 2) $\text{UHAMPATH} \in \mathsf{NP}\text{-c}$ ■

Задача 2

См. (каноническое) 21

Задача 3

1. $\mathcal{C} \supset \mathsf{NP} \cup \text{co-}\mathsf{NP}$.

   (a) Пусть $L \in \mathsf{NP}$. Тогда (семинар) $L \leqslant_m^p \text{SAT} \Leftrightarrow \exists f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*\colon \forall x (x \in L \Leftrightarrow f(x) \in \text{SAT})$, f — вычислима за полиномиальное время. Определим M_{SAT}: вычисляем за полиномиальное время (определение сводимости) $f(x)$ (x — вход), спрашиваем оракула $f(x) \overset{?}{\in} \text{SAT}$ за $O(1)$. Ответ — ответ оракула (корректно из определения сводимости). Время работы полиномиально: $T(|x|) = \text{poly}(|x|) + O(1) = \text{poly}(|x|)$.

   (b) Пусть $L \in \text{co-}\mathsf{NP}$. Тогда $\overline{L} \leqslant_m^p \text{SAT} \Leftrightarrow \exists f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*\colon \forall x (x \in \overline{L} \Leftrightarrow f(x) \in \text{SAT}) \Leftrightarrow \forall x (x \in L \Leftrightarrow f(x) \notin \text{SAT})$, f — вычислима за полиномиальное время. Определим M_{SAT}: вычисляем за полиномиальное время (определение сводимости) $f(x)$ (x — вход), спрашиваем оракула $f(x) \overset{?}{\in} \text{SAT}$ за $O(1)$. Ответ — <u>противоположный</u> ответу оракула (корректно из определения сводимости). Время работы полиномиально: $T(|x|) = \text{poly}(|x|) + O(1) = \text{poly}(|x|)$.

2. $\mathcal{C} \subset \mathsf{NP} \cup \text{co-}\mathsf{NP}$. Пусть $L \in \mathcal{C}$. Тогда существует МТ M_{SAT}, вычисляющая $x \overset{?}{\in} L$ за полиномиальное время, и делающая не более одного обращения к оракулу $t \overset{?}{\in} \text{SAT}$

(каноническое) Задача 21

$\text{ГЦ} = \{G - \text{ориентированный граф} \big| \text{в } G \text{ существует гамильтонов цикл}\}$.
$\text{ГП} = \{(G, s, t) - \text{ориентированный граф, две его вершины} \big| \text{в } G \text{ существует гамильтонов путь из } s \text{ в } t\}$.

1. Докажем, что $\text{ГП} \leqslant_m^p \text{ГЦ}$. Пусть $x = (G, s, t)$ — граф и две его вершины. Определим граф $f(x)$: возьмем G, удалим все ребра между s и t, все ребра в s, все ребра из t. Добавим одно $t \to s$.

   (a) Пусть $x \in \text{ГП}$, то есть, в G есть гамильтонов путь из s в t. Тогда в этом пути нет ребер из t в s (иначе через t или s путь пройдет дважды). Значит, путь будет гамильтоновым и в $f(x)$. Но в $f(x)$ есть ребро $t \to s$, получаем гамильтонов цикл, составленный из пути и одного ребра. Значит, $f(x) \in \text{ГЦ}$

(b) Пусть $f(x) \in$ ГЦ, то есть, в $f(x)$ есть гамильтонов цикл. В этот цикл входят вершины s и t, так как в него входят все вершины графа. Но из t нет других ребер, кроме как в s (по построению), значит, в цикл входит ребро $t \to s$. Рассмотрим весь путь без этого ребра. Он гамильтонов, так как является гамильтоновым циклом без одного ребра. Этот путь будет также путем в G, так как не содержит ребра $t \to s$, а в G ребер больше (кроме $t \to s$). Также этот путь будет гамильтоновым, так как множества вершин G и $f(x)$ совпадают. Значит, $x \in$ ГП

(c) Сводимость f в явном виде. $A[i][j]$ — матрица графа G, $B[i][j]$ — матрица графа $f(x)$. Алгоритм: *todo*. Получаем, что f — вычислима за полиномиальное время.

2. *(Идея обсужалась с Игорем Силиным).* Докажем, что ГЦ $\leqslant_m^p$ ГП. Пусть $x = G$ — граф. Фиксируем некоторую его вершину v. «Разделим» ее на две вершины s и t, из s добавим все ребра из v, в t направим все ребра в v. Получим граф G'. Определим $f(x) = (G', s, t)$.

   (a) Пусть $x \in$ ГЦ. Тогда в $x = G$ существует гамильтонов цикл. Он содержит все вершины, в том числе и вершину v: $v \to v_1 \to ... \to v_n \to v$. Тогда в графе G' образа $f(x)$ будет путь $s \to v_1 \to ... \to v_n \to t$, и он будет гамильтоновым *todo*, т.е. $f(x) \in$ ГП

   (b) Пусть $f(x) \in$ ГП. Тогда существует гамильтонов путь $s \to ... \to t$. Значит, в G есть цикл $v \to ... \to v$, и он гамильтонов *todo*. Получаем $x \in$ ГЦ.

   (c) Сводимость f в явном виде. $A[i][j]$ — матрица графа $x = G$, $B[i][j]$ — матрица графа из $f(x)$. Алгоритм: *todo*. Получаем, что f — вычислима за полиномиальное время.

(каноническое) Задача 23

1. $\Psi(x_1, x_2) \overset{\text{def}}{=} (\neg x_1 \lor x_2)$. Базовое множество $(n = 2)$ $\{x_1, x_2, \neg x_1, \neg x_2\}$.
   Семейство подмножеств $A_\Psi = \big\{\{x_1, \neg x_1\}, \{x_2, \neg x_2\}, \{\neg x_1, x_2\}\big\}$.
   $\measuredangle A \overset{\text{def}}{=} \{x_1, x_2\}$. Получаем $A \cap \{x_1, \neg x_1\} \ni x_1$, $A \cap \{x_2, \neg x_2\} \ni x_2$, $A \cap \{\neg x_1, x_2\} \ni x_2$.
   Значит, A — протыкающее множество для A_Ψ, и $|A| = 2$.

2. $\chi(x_1, x_2, x_3) \overset{\text{def}}{=} (x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (\neg x_1 \lor \neg x_2) \land (x_1 \lor \neg x_2) \land (\neg x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land \neg x_3$. Семейство подмножеств $(n = 3)$ $A_\chi = \big\{\{x_1, \neg x_1\}, \{x_2, \neg x_2\}, \{x_3, \neg x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{\neg x_1, \neg x_2\}, \{x_1, \neg x_2\}, \{\neg x_1, x_2, x_3\}, \{\neg x_3\}\big\}$. Пусть A — протыкающее множество. Тогда $A \cap \{\neg x_3\} \neq \varnothing \Rightarrow A \ni \neg x_3$. Также $A \cap \{x_1, \neg x_1\} \neq \varnothing$, поэтому A содержит x_1 или $\neg x_1$. Аналогично $x_2 \in A$ или $\neg x_2 \in A$. Получаем, что A содержит не менее трех элементов. Предположим, что их ровно 3. Рассмотрим все возможные 4 случая (или×или раньше по тексту):

   (a) $A = \{x_1, x_2, \neg x_3\}$. Тогда $A \cap \{\neg x_1, \neg x_2\} = \varnothing$ — противоречие.

   (b) $A = \{x_1, \neg x_2, \neg x_3\}$. Тогда $A \cap \{\neg x_1, x_2, x_3\} = \varnothing$ — противоречие.

   (c) $A = \{\neg x_1, x_2, \neg x_3\}$. Тогда $A \cap \{x_1, \neg x_2\} = \varnothing$ — противоречие.

   (d) $A = \{\neg x_1, \neg x_2, \neg x_3\}$. Тогда $A \cap \{x_1, x_2, x_3\} = \varnothing$ — противоречие.

   Получаем, что A содержит более трех элементов ■