

# Алгоритмы и модели вычислений.

## Задание 8: линейное программирование

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.27

### (каноническое) Задача 32

$n \in \mathbb{N}$ ,  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^2$ . Задача: найти  $(a_0, c_0) = \arg \min_{(a,c) \in \mathbb{R}^2} \max_{i \in \overline{1,n}} |ax_i + y_i + c|$ .

Сведем к задаче ЛП: переменные  $(a, c, M)$ , неравенства:  $\begin{cases} ax_i + y_i + c \leq M \\ ax_i + y_i + c \geq -M \end{cases}, i \in \overline{1,n}, M \rightarrow \min$

Выпишем конкретную задачу ( $n = 7$ , точки даны):

$$M \rightarrow \min, \begin{cases} a + 3 + c \leq M \\ -a - 3 - c \leq M \\ 2a + 5 + c \leq M \\ -2a - 5 - c \leq M \\ 3a + 7 + c \leq M \\ -3a - 7 - c \leq M \\ 5a + 11 + c \leq M \\ -5a - 11 - c \leq M \\ 7a + 14 + c \leq M \\ -7a - 14 - c \leq M \\ 8a + 15 + c \leq M \\ -8a - 15 - c \leq M \\ 10a + 19 + c \leq M \\ -10a - 19 - c \leq M \end{cases} . \text{ Каноническая форма: } T \stackrel{\text{def}}{=} -M, a = a_+ - a_-, c = c_+ - c_-, \text{ новые переменные } t_1, \dots, t_{14}:$$

$$\begin{cases} z = T \\ 1a_+ - 1a_- + 3 + c_+ - c_- + T + t_1 = 0 \\ -1a_+ + 1a_- - 3 - c_+ + c_- + T + t_2 = 0 \\ 2a_+ - 2a_- + 5 + c_+ - c_- + T + t_3 = 0 \\ -2a_+ + 2a_- - 5 - c_+ + c_- + T + t_4 = 0 \\ 3a_+ - 3a_- + 7 + c_+ - c_- + T + t_5 = 0 \\ -3a_+ + 3a_- - 7 - c_+ + c_- + T + t_6 = 0 \\ 5a_+ - 5a_- + 11 + c_+ - c_- + T + t_7 = 0 \\ -5a_+ + 5a_- - 11 - c_+ + c_- + T + t_8 = 0 \\ 7a_+ - 7a_- + 14 + c_+ - c_- + T + t_9 = 0 \\ -7a_+ + 7a_- - 14 - c_+ + c_- + T + t_{10} = 0 \\ 8a_+ - 8a_- + 15 + c_+ - c_- + T + t_{11} = 0 \\ -8a_+ + 8a_- - 15 - c_+ + c_- + T + t_{12} = 0 \\ 10a_+ - 10a_- + 19 + c_+ - c_- + T + t_{13} = 0 \\ -10a_+ + 10a_- - 19 - c_+ + c_- + T + t_{14} = 0 \\ a_+, a_-, c_+, c_-, T, t_1, \dots, t_{14} \geq 0 \end{cases}$$

### (каноническое) Задача 33

$$P_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \left| \left\{ \begin{array}{ccc} (*_1) & 0 & \leq x_1 \leq 1 \\ (*_2) & \varepsilon x_1 & \leq x_2 \leq 1 - \varepsilon x_1 \\ (*_3) & \varepsilon x_2 & \leq x_3 \leq 1 - \varepsilon x_2 \end{array} \right. \right. \right\}.$$

Путь:

1.  $\vec{x}_1 = (0, 0, 0) \in P_\varepsilon$ :

$$(*_1) \quad 0 \leq 0 \leq 1$$

$$(*_2) \quad 0 \leq 0 \leq 1 - 0$$

$$(*_3) \quad 0 \leq 0 \leq 1 - 0$$

2.  $\vec{x}_2 = (1, \varepsilon, \varepsilon^2) \in P_\varepsilon$ :

$$(*_1) \quad 0 \leq 1 \leq 1$$

$$(*_2) \quad \varepsilon \leq \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

$$(*_3) \quad \varepsilon^2 \leq \varepsilon^2 \leq 1 - \varepsilon^2 \quad (\varepsilon^2 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2})$$

$$\text{Высота больше: } \varepsilon^2 > 0$$

3.  $\vec{x}_3 = (1, 1 - \varepsilon, \varepsilon - \varepsilon^2) \in P_\varepsilon$ :

$$(*_1) \quad 0 \leq 1 \leq 1$$

$$(*_2) \quad \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

$$(*_3) \quad \varepsilon - \varepsilon^2 \leq \varepsilon - \varepsilon^2 \leq 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \quad (2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 > 0, D = 4 - 8 < 0)$$

$$\text{Высота больше: } \varepsilon - \varepsilon^2 > \varepsilon^2 \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

4.  $\vec{x}_4 = (0, 1, \varepsilon) \in P_\varepsilon$ :

$$(*_1) \quad 0 \leq 0 \leq 1$$

$$(*_2) \quad 0 \leq 1 \leq 1$$

$$(*_3) \quad \varepsilon \leq \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

$$\text{Высота больше: } \varepsilon > \varepsilon - \varepsilon^2 \quad (\varepsilon > 0)$$

5.  $\vec{x}_5 = (0, 1, 1 - \varepsilon) \in P_\varepsilon$ :

$$(*_1) \quad 0 \leq 0 \leq 1$$

$$(*_2) \quad 0 \leq 1 \leq 1$$

$$(*_3) \quad \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

$$\text{Высота больше: } 1 - \varepsilon > \varepsilon \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

6.  $\vec{x}_6 = (1, 1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon + \varepsilon^2) \in P_\varepsilon$ :

$$(*_1) \quad 0 \leq 1 \leq 1$$

$$(*_2) \quad \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

$$(*_3) \quad \varepsilon - \varepsilon^2 \leq 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \leq 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \quad (2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 > 0, D = 4 - 8 < 0)$$

$$\text{Высота больше: } 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 > 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

7.  $\vec{x}_7 = (1, \varepsilon, 1 - \varepsilon^2) \in P_\varepsilon$ :

$$(*_1) \quad 0 \leq 1 \leq 1 \quad ()$$

$$(*_2) \quad \varepsilon \leq \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon > \frac{1}{2})$$

$$(*_3) \quad \varepsilon^2 \leq 1 - \varepsilon^2 \leq 1 - \varepsilon^2 \quad (\varepsilon^2 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2})$$

$$\text{Высота больше: } 1 - \varepsilon^2 > 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

8.  $\vec{x}_8 = (0, 0, 1) \in P_\varepsilon$ :

$$(*_1) \quad 0 \leq 0 \leq 1$$

$$(*_2) \quad 0 \leq 0 \leq 1$$

$$(*_3) \quad 0 \leq 1 \leq 1$$

$$\text{Высота больше: } 1 > 1 - \varepsilon^2 \quad (\varepsilon > 0)$$

### (каноническое) Задача 34

$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{m,n}$ .  $P_1 \stackrel{\text{def}}{=} [\exists p \in \mathbb{R}^m: A^T p < 0]$ .  $P_2 \stackrel{\text{def}}{=} [\exists y \in \mathbb{R}^n: y \geq 0, y \neq 0, Ay = 0]$ . Доказать:  $\neg P_1 \Leftrightarrow P_2$

1.  $e_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \underbrace{1}_i & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow e \stackrel{\text{def}}{=} (e_1, \dots, e_n)$  — стандартный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Скалярное произведение  $(\cdot, \cdot)$  — тоже стандартное, т.е. матрица Грама в  $e$  единичная, т.е.  $\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

2. Пусть  $P_2$ .

- (a) Тогда  $\exists y: Ay = 0, y \geq 0, y \neq 0$ . Обозначим столбцы матрицы  $A = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \dots & \underline{b}_n \end{pmatrix}$ .  $y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^T$  Тогда  $Ay = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \dots & \underline{b}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \underline{b}_i y_i \stackrel{(*)}{=} 0$ . Условие  $y \neq 0 \Rightarrow \exists i \in \overline{1, n}: y_i \neq 0$ . Без ограничения общности это  $y_1$ . Тогда в  $(*)$  перенесем всё, кроме  $y_1 \underline{b}_1$  в правую часть, и поделим на  $y_1 \neq 0$ :  $\underline{b}_1 = -\frac{y_2}{y_1} \underline{b}_2 - \dots - \frac{y_n}{y_1} \underline{b}_n$
- (b) Рассмотрим  $A^T p = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T \\ \dots \\ \underline{b}_n^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\underline{b}_1, p) \\ \dots \\ (\underline{b}_n, p) \end{pmatrix}$
- (c) Предположим, что  $P_1$ , т.е.  $\exists p: \forall i \in \overline{1, n} \hookrightarrow (\underline{b}_i, p) < 0$ . Рассмотрим  $(\underline{b}_1, p) = (-\frac{y_2}{y_1} \underline{b}_2 - \dots - \frac{y_n}{y_1} \underline{b}_n, p) = -\frac{y_2}{y_1} (\underline{b}_2, p) - \dots - \frac{y_n}{y_1} (\underline{b}_n, p)$ . Поскольку  $(\underline{b}_i, p) < 0, \frac{y_i}{y_1} \geq 0$ , то  $(\underline{b}_1, p) \geq 0$  — противоречие.
- (d) Значит,  $\neg P_1$ .

### (каноническое) Задача 35

### (каноническое) Задача 36

(Тарасов, лекция 2014.04.01)

Фиксируем  $k \in \mathbb{N}, \{t_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$ . Определим  $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4: \vec{r}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} t^4 & t^3 & t^2 & t \end{pmatrix}^T$ . Рассмотрим точки  $\vec{x}_i = \vec{r}(t_i)$ . Рассмотрим  $G \stackrel{\text{def}}{=} \text{conv}(\{\vec{x}_i\}_{i=1}^k)$  — выпуклую оболочку этих точек. Фиксируем  $i_1 \neq i_2 \in \overline{1, k}$ . Докажем, что  $\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}$  — вершины  $G$ , соединенные ребром  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists$  гиперплоскость  $\pi: (\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2} \in \pi)$  и (многогранник  $G$  лежит по одну сторону от  $\pi$ ).

1. Определим многочлен  $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} (t - t_{i_1})^2 \cdot (t - t_{i_2})^2 \equiv t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$
2. Определим гиперплоскость  $\pi. \mathbb{R}^4 \ni \vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T \in \pi \Leftrightarrow F(\vec{x}) \equiv x_1 + a_3 x_2 + a_2 x_3 + a_1 x_4 + a_0 = 0$ .
3. Тогда  $F(\vec{r}(t)) = P(t): F(\vec{r}(t)) = F(t^4, t^3, t^2, t) = t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$
4.  $t_{i_1}$  и  $t_{i_2}$  — корни  $P(t)$ , откуда  $P(t_{i_1}) = P(t_{i_2}) = 0$ , значит,  $F(\vec{x}_{i_1}) = F(\vec{x}_{i_2}) = 0$ , значит,  $\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2} \in \pi$
5. Фиксируем  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда  $F(\vec{r}(t)) = P(t) \geq 0$ . Значит, все точки  $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^k$  лежат по одну сторону от  $\pi$ . Значит,  $G$  лежит по одну сторону
6. Пусть  $t: \vec{r}(t) \in \pi \Leftrightarrow F(\vec{r}(t)) = 0 \Leftrightarrow P(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{t_{i_1}, t_{i_2}\}$

■

### (каноническое) Задача 37