

# Алгоритмы и модели вычислений.

## Задание 7: потоки

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.27

### Определения

(сюда будут ссылки)

$(G(V, E), c: V^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$  — транспортная сеть  $\Leftrightarrow$

1.  $c(u, v) \geq 0$
2.  $\forall (u, v) \in V^2 \hookrightarrow ((u, v) \in E \Leftrightarrow c(u, v) > 0)$

$f: V^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  — поток в этой сети  $\Leftrightarrow$

1.  $\forall (u, v) \in V^2 \hookrightarrow (f(u, v) \leq c(u, v))$
2.  $\forall (u, v) \in V^2 \hookrightarrow (f(u, v) = -f(v, u))$
3.  $\forall u \in V^2 \setminus \{s, t\} \hookrightarrow f(u, V) = 0$

### Упражнение 0

1. Пусть  $(G(V, E), c: V^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$  — транспортная сеть. Пусть  $(u, v) \notin E, (v, u) \notin E$ . Тогда  $f(u, v) = f(v, u) = 0$ .  
 $(u, v) \notin E \xrightarrow{2} c(u, v) = 0. (v, u) \notin E \xrightarrow{2} c(v, u) = 0$ . Но  $-0 = -c(v, u) \stackrel{1}{\leq} -f(v, u) \stackrel{2}{=} \underline{f(u, v)} \stackrel{1}{\leq} c(u, v) = 0$ , откуда  $f(u, v) = f(v, u) = 0$  ■

### Упражнение 1

Пусть  $(G(V, E), c: V^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$  — транспортная сеть. Фиксируем  $u \notin \{s, t\}$ . Пусть  $L = \{v \in V \mid (v, u) \in E\}, R = \{v \in V \mid (u, v) \in E\}$  — вершины, из которых (в которые, соответственно) есть ребра в фиксированную. Тогда  $f(L, u) = f(u, R)$ .  
Найдем

$$0 \stackrel{3}{=} f(u, V) \equiv \sum_{v \in V} f(u, v) = \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ (u, v) \in E \\ (v, u) \in E}} f(u, v)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ (u, v) \in E \\ (v, u) \notin E}} f(u, v)}_{S_2} + \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ (u, v) \notin E \\ (v, u) \in E}} f(u, v)}_{S_3} + \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ (u, v) \notin E \\ (v, u) \notin E}} f(u, v)}_{S_4}$$

$(u, v) \notin E, (v, u) \notin E \xrightarrow{1} f(u, v) = 0$ , поэтому  $S_4 = 0$ . Рассмотрим  $S_1 = \sum_{\substack{v \in V \\ (u, v) \in E \\ (v, u) \in E}} f(u, v) \stackrel{2}{=} \sum_{\substack{v \in V \\ (u, v) \in E \\ (v, u) \in E}} (-f(v, u)) = - \sum_{\substack{v \in V \\ (u, v) \in E \\ (v, u) \in E}} f(v, u) \boxed{=}$ .

Переобозначим вершины, получим  $\boxed{=} - \sum_{\substack{u \in V \\ (v, u) \in E \\ (u, v) \in E}} f(u, v) = -S_1$ , откуда  $S_1 = 0$ .

Рассмотрим  $f(L, u) = \sum_{(v, u) \in E} f(v, u) = - \sum_{(v, u) \in E} f(u, v) = -(S_1 + S_3) \stackrel{S_1=0}{=} -S_3$

Рассмотрим  $f(u, R) = \sum_{(u, v) \in E} f(u, v) = S_1 + S_2 \stackrel{S_1=0}{=} S_2$ .

Из (\*) получаем  $0 \stackrel{S_1=0}{=}_{S_4=0} S_2 + S_3$ , откуда  $S_2 = -S_3$ , и  $f(L, u) = f(u, R)$  ■

## Упражнение 2

Пусть  $(G(V, E), c: V^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$  — транспортная сеть.  $f$  — поток в ней.

Рассмотрим  $A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{u \in V \\ v \in V}} f(u, v)$ . Переобозначим, получим  $A = \sum_{\substack{v \in V \\ u \in V}} f(v, u) \stackrel{2}{=} - \sum_{\substack{v \in V \\ u \in V}} f(u, v) = -A$ , откуда  $A = 0$

$$\text{Но } A = \underbrace{\sum_{\substack{u=s \\ v \in V}} f(u, v)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{\substack{u=t \\ v \in V}} f(u, v)}_{S_2} + \underbrace{\sum_{\substack{u \in V \setminus \{s, t\} \\ v \in V}} f(u, v)}_{S_3}.$$

Рассмотрим  $S_3 = \sum_{u \in V \setminus \{s, t\}} \sum_{v \in V} f(u, v)$ . По свойству 3 каждая подчеркнутая часть равна 0, и  $S_3 = 0$

$$\text{Рассмотрим } S_1 = \sum_{v \in V} f(s, v) \equiv |f|$$

$$\text{Рассмотрим } S_2 = \sum_{v \in V} f(t, v) \stackrel{2}{=} - \sum_{v \in V} f(v, t) = -f(V, t).$$

Поскольку  $0 = A = S_1 + S_2$ , получаем  $|f| = f(V, t)$  ■

## Задача 1

Пусть  $(G(V, E), c: V^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$  — транспортная сеть.  $f$  — поток в ней.

- Пусть  $X \subseteq V$ . Рассмотрим  $A \stackrel{\text{def}}{=} f(X, X) \equiv \sum_{\substack{u \in X \\ v \in X}} f(u, v)$ . Переобозначим, получим

$$A = \sum_{\substack{v \in X \\ u \in X}} f(v, u) \stackrel{2}{=} - \sum_{\substack{v \in X \\ u \in X}} f(u, v) = -A,$$

откуда  $A = 0$  ■

- Пусть  $X, Y \subseteq V$ . Рассмотрим  $f(X, Y) \equiv \sum_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} f(x, y) \stackrel{2}{=} - \sum_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} f(y, x) \equiv -f(Y, X)$  ■

- Пусть  $X, Y, Z \subseteq V, X \cap Y = \emptyset$ . Рассмотрим  $f(X \cup Y, Z) \stackrel{(*)}{=} \sum_{\substack{u \in X \cup Y \\ v \in Z}} f(u, v) = \underbrace{\sum_{\substack{u \in X \\ u \in Y \\ v \in Z}} f(u, v)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{\substack{u \in X \\ u \notin Y \\ v \in Z}} f(u, v)}_{S_2} + \underbrace{\sum_{\substack{u \notin X \\ u \in Y \\ v \in Z}} f(u, v)}_{S_3}.$

$S_1 = 0$ , так как  $u \in X \wedge u \in Y \Leftrightarrow u \in X \cap Y \Leftrightarrow u \in \emptyset$

$$\text{По определению, } f(X, Z) = \sum_{\substack{u \in X \\ u \in Y \\ v \in Z}} f(u, v) + \sum_{\substack{u \in X \\ u \notin Y \\ v \in Z}} f(u, v) \equiv S_1 + S_2 \stackrel{S_1=0}{=} S_2$$

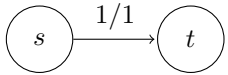
$$\text{По определению, } f(Y, Z) = \sum_{\substack{u \in Y \\ u \in X \\ v \in Z}} f(u, v) + \sum_{\substack{u \in Y \\ u \notin X \\ v \in Z}} f(u, v) \equiv S_1 + S_3 \stackrel{S_1=0}{=} S_3$$

Тогда из  $(*)$  получаем  $f(X \cup Y, Z) = S_2 + S_3 = f(X, Z) + f(Y, Z)$ .

- Пусть  $X, Y, Z \subseteq V, X \cap Y = \emptyset$ . Тогда  $f(Z, X \cup Y) \stackrel{2}{=} -f(X \cup Y, Z) \stackrel{3}{=} -(f(X, Z) + f(Y, Z)) \equiv -f(X, Z) - f(Y, Z) \stackrel{2}{=} f(Z, X) + f(Z, Y)$

## Задача 2

Нет, не обязательно. Пример. Рассмотрим  $(G(V, E), c: V^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$  — транспортная сеть.  $f$  — поток в ней:



Определим  $V \supseteq X \stackrel{\text{def}}{=} \{s\}, Y \stackrel{\text{def}}{=} X$ . Тогда  $A = f(X, Y) \stackrel{X=Y}{=} f(X, X) \stackrel{1}{=} 0$ .

$$\text{Рассмотрим } B = -f(V - X, Y) \equiv f(\{t\}, \{s\}) = - \sum_{\substack{u \in \{t\} \\ v \in \{s\}}} f(u, v) \equiv -f(t, s) \stackrel{2}{=} f(s, t) = 1$$

Получаем  $A = 0 \neq 1 = B$  ■