Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 8: линейное программирование

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.27

(каноническое) Задача 32

(каноническое) Задача 33

$P_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \middle| \left\{ \begin{array}{ccccc} (*_1) & 0 & \leqslant & x_1 & \leqslant & 1 \\ (*_2) & \varepsilon x_1 & \leqslant & x_2 & \leqslant & 1-\varepsilon x_1 \\ (*_3) & \varepsilon x_2 & \leqslant & x_3 & \leqslant & 1-\varepsilon x_2 \end{array} \right. \right\}$. Путь:

1. $\vec{x}_1=(0,0,0)\in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0\leqslant 0\leqslant 1$

   $(*_2)$ $0\leqslant 0\leqslant 1-0$

   $(*_3)$ $0\leqslant 0\leqslant 1-0$

2. $\vec{x}_2=(1,\varepsilon,\varepsilon^2)\in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0\leqslant 1\leqslant 1$

   $(*_2)$ $\varepsilon\leqslant\varepsilon\leqslant 1-\varepsilon$ $(\varepsilon<\frac{1}{2})$

   $(*_3)$ $\varepsilon^2\leqslant\varepsilon^2\leqslant 1-\varepsilon^2$ $(\varepsilon^2<\frac{1}{4}<\frac{1}{2})$

   $\varepsilon^2>0$

3. $\vec{x}_3=(1,1-\varepsilon,\varepsilon-\varepsilon^2)\in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0\leqslant 1\leqslant 1$

   $(*_2)$ $\varepsilon\leqslant 1-\varepsilon\leqslant 1-\varepsilon$ $(\varepsilon<\frac{1}{2})$

   $(*_3)$ $\varepsilon-\varepsilon^2\leqslant\varepsilon-\varepsilon^2\leqslant 1-\varepsilon+\varepsilon^2$ $(2\varepsilon^2-2\varepsilon+1>0,\ D=4-8<0)$

   $\varepsilon-\varepsilon^2>\varepsilon^2$ $(\varepsilon<\frac{1}{2})$

4. $\vec{x}_4=(0,1,\varepsilon)\in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0\leqslant 0\leqslant 1$

   $(*_2)$ $0\leqslant 1\leqslant 1$

   $(*_3)$ $\varepsilon\leqslant\varepsilon\leqslant 1-\varepsilon$ $(\varepsilon<\frac{1}{2})$

   $\varepsilon>\varepsilon-\varepsilon^2$ $(\varepsilon>0)$

5. $\vec{x}_5=(0,1,1-\varepsilon)\in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0\leqslant 0\leqslant 1$

   $(*_2)$ $0\leqslant 1\leqslant 1$

   $(*_3)$ $\varepsilon\leqslant 1-\varepsilon\leqslant 1-\varepsilon$ $(\varepsilon<\frac{1}{2})$

   $1-\varepsilon>\varepsilon$ $(\varepsilon<\frac{1}{2})$

6. $\vec{x}_6=(1,1-\varepsilon,1-\varepsilon+\varepsilon^2)\in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0\leqslant 1\leqslant 1$

   $(*_2)$ $\varepsilon\leqslant 1-\varepsilon\leqslant 1-\varepsilon$ $(\varepsilon<\frac{1}{2})$

   $(*_3)$ $\varepsilon-\varepsilon^2\leqslant 1-\varepsilon+\varepsilon^2\leqslant 1-\varepsilon+\varepsilon^2$ $(2\varepsilon^2-2\varepsilon+1>0,\ D=4-8<0)$

   $1-\varepsilon+\varepsilon^2>1-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$

7. $\vec{x}_7=(1,\varepsilon,1-\varepsilon^2)\in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0\leqslant 1\leqslant 1$ ()

   $(*_2)$ $\varepsilon\leqslant\varepsilon\leqslant 1-\varepsilon$ $(\varepsilon>\frac{1}{2})$

$(*_3)$ $\varepsilon^2 \leqslant 1-\varepsilon^2 \leqslant 1-\varepsilon^2$ $(\varepsilon^2 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2})$

$1-\varepsilon^2 > 1-\varepsilon+\varepsilon^2$ $(\varepsilon < \frac{1}{2})$

8. $\vec{x}_{=}(0,0,1) \in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0 \leqslant 0 \leqslant 1$

   $(*_2)$ $0 \leqslant 0 \leqslant 1$

   $(*_3)$ $0 \leqslant 1 \leqslant 1$

   $1 > 1-\varepsilon^2$ $(\varepsilon > 0)$

(каноническое) Задача 34

$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{m,n}$. $P_1 \overset{\text{def}}{=} \left[\exists p \in \mathbb{R}^m \colon A^T p < 0\right]$. $P_2 \overset{\text{def}}{=} \left[\exists y \in \mathbb{R}^n \colon y \geqslant 0,\ y \neq 0,\ Ay = 0\right]$. Доказать: $\neg P_1 \Leftrightarrow P_2$

1. $e_i \overset{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} 0 & \dots & \underbrace{1}_{i} & \dots & 0 \end{Vmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow e \overset{\text{def}}{=} (e_1, ..., e_n)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ — тоже стандартное, т.е. матрица Грама в e единичная, т.е. $(\begin{Vmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{Vmatrix}) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$

2. Пусть P_2.

   (a) Тогда $\exists y \colon Ay = 0,\ y \geqslant 0,\ y \neq 0$. Обозначим столбцы матрицы $A = \begin{Vmatrix} \underline{b_1} & \dots & \underline{b_n} \end{Vmatrix}$. $y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow y = \begin{Vmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{Vmatrix}^T$ Тогда $Ay = 0 \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} \underline{b_1} & \dots & \underline{b_n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{Vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b_i} y_i \overset{(*)}{=} 0$. Условие $y \neq 0 \Rightarrow \exists i \in \overline{1,n} \colon y_i \neq 0$. Без ограничения общности это y_1. Тогда в $(*)$ перенесем всё, кроме $y_1 \underline{b_1}$ в правую часть, и поделим на $y_1 \neq 0$: $\underline{b_1} = -\frac{y_2}{y_1}\underline{b_2} - ... - \frac{y_n}{y_1}\underline{b_n}$

   (b) Рассмотрим $A^T p = \begin{Vmatrix} \underline{b_1}^T \\ ... \\ \underline{b_n}^T \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} p_1 \\ ... \\ p_m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (\underline{b_1}, p) \\ ... \\ (\underline{b_n}, p) \end{Vmatrix}$

   (c) Предположим, что P_1, т.е. $\exists p \colon \forall i \in \overline{1,n} \hookrightarrow (\underline{b_i}, p) < 0$.
   Рассмотрим $(\underline{b_1}, p) = (-\frac{y_2}{y_1}\underline{b_2} - ... - \frac{y_n}{y_1}\underline{b_n}, p) = -\frac{y_2}{y_1}(\underline{b_2}, p) - ... - \frac{y_n}{y_1}(\underline{b_n}, p)$. Поскольку $(\underline{b_i}, p) < 0$, $\frac{y_i}{y_1} \geqslant 0$, то $(b_1, p) \geqslant 0$ — противоречие.

   (d) Значит, $\neg P_1$.

(каноническое) Задача 35

(каноническое) Задача 36

(Тарасов, лекция 2014.04.01)

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$, $\{t_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$. Определим $\vec{r} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 : \vec{r}(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} t^4 & t^3 & t^2 & t \end{Vmatrix}^T$. Рассмотрим точки $\vec{x}_i = \vec{r}(t_i)$. Рассмотрим $G \overset{\text{def}}{=} \operatorname{conv}(\{\vec{x}_i\}_{i=1}^k)$ — выпуклую оболочку этих точек. Фиксируем $i_1 \neq i_2 \in \overline{1,k}$. Докажем, что $\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}$ — вершины G, соединенные ребром $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists$ гиперплоскость $\pi\colon$ $(\vec{x}_{i_1},\ \vec{x}_{i_2} \in \pi)$ и (многогранник G лежит по одну сторону от π).

1. Определим многочлен $P(t) \overset{\text{def}}{=} (t - t_{i_1})^2 \cdot (t - t_{i_2})^2 \equiv t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

2. Определим гиперплоскость π. $\mathbb{R}^4 \ni \vec{x} \equiv \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix}^T \in \pi \Leftrightarrow F(\vec{x}) \equiv x_1 + a_3 x_2 + a_2 x_3 + a_1 x_4 + a_0 = 0$.

3. Тогда $F(\vec{r}(t)) = P(t)$: $F(\vec{r}(t)) = F(t^4, t^3, t^2, t) = t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

4. t_{i_1} и t_{i_2} — корни $P(t)$, откуда $P(t_{i_1}) = P(t_{i_2}) = 0$, значит, $F(\vec{x}_{i_1}) = F(\vec{x}_{i_2}) = 0$, значит, $\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2} \in \pi$

5. Фиксируем $t \in \mathbb{R}$. Тогда $F(\vec{r}(t)) = P(t) \geqslant 0$. Значит, все точки $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^k$ лежат по одну сторону от π. Значит, G лежит по одну сторону

6. Пусть $t \colon \vec{r}(t) \in \pi \Leftrightarrow F(\vec{r}(t)) = 0 \Leftrightarrow P(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{t_{i_1}, t_{i_2}\}$

■

(каноническое) Задача 37