Теория и реализация языков программирования.
Задание 4: Замкнутость регулярных языков, теорема Майхилла-Нероуда и минимальные автоматы

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.09.23

Упражнение 1

1. Алгоритм конечен. Действительно, Q можно разделить не больше, чем на $|Q|$ подмножеств, на каждом шаге происходит некоторое разделение.
Действительно, на каждом шаге на каждом символе количество подмножеств не уменьшается, так как $Q_{k,l}$ различно при разных k (значит, элементы из разных «старых» подмножеств попадут в разные «новые» подмножества).
А если количество подмножеств не увеличилось после $|\Sigma|$ разбиений, алгоритм завершается (по построению).

2. Докажем, что все состояния из одного подмножества эквивалентны. Предположим противное. Тогда

$$\exists q_1, q_2 \in Q_i \colon q_1 \not\sim_L q_2 \Rightarrow \forall x_1, x_2 \colon q_0 \xrightarrow{x_1} q_1, q_0 \xrightarrow{x_2} q_2 \hookrightarrow x_1 \not\sim_L x_2 \Rightarrow \exists w \in \Sigma^* \colon x_1 w \in L, x_2 w \notin L.$$

Фиксируем x_1, x_2, w. Тогда $\delta(q_1, w) \in F, \delta(q_2, w) \notin F$. Пусть $|w| = n$.
Если $|w| = n = 0$, то получаем, что q_1 — принимающее, а q_2 — нет. Это противоречие, так как $q_1, q_2 \in Q_i$, на первом шаге принимающие и не принимающие были разделены, и (как было доказано выше), состояния, лежащие в различных подмножествах в процессе выполнения алгоритма не могут оказаться в одном.
Пусть $|w| = n > 0$. $w = w_1 ... w_n$. Тогда $(q_1, w) \vdash (q_1^1, w_2 ... w_n) \vdash ... \vdash (q_1^n, \varepsilon), q_1^n \in F$. Аналогично $(q_2, w) \vdash (q_2^1, w_2 ... w_n) \vdash ... \vdash (q_2^n, \varepsilon), q_2^n \notin F$. Поскольку $q_1, q_2 \in Q_i$, $\delta(q_1, w_1)$ и $\delta(q_2, w_1) \in Q_j$ по условию окончания алгоритма. Значит, q_1^1 и q_2^1 лежат в одном подмножестве. Повторяя рассуждение, получаем, что q_1^n и q_2^n лежат в одном подмножестве, что невозможно (доказано выше), так как $q_1^n \in F, q_2^n \notin F$.

2.1. Получаем, что были склеены только эквивалентные состояния. Значит, язык, распознаваемый автоматом, не изменился.

3. Докажем, что если некоторые два состояния q_1, q_2 исходного автомата были эквивалентны, они будут в одном подмножестве Q_i. Пусть иначе: они были разделены на некотором шаге.
Это не мог быть второй шаг, так как принимающее и не принимающее состояние не эквивалентны. Докажем это: пусть $F \ni q_1 \sim_L q_2 \notin F \Rightarrow \exists x_1 \sim_L x_2 \colon \delta(q_0, x_1) = q_1 \in F, \delta(q_0, x_2) = q_2 \notin F \Rightarrow x_1 \in L, x_2 \notin L$. $x_1 \sim_L x_2 \Rightarrow \forall w \in \Sigma^* \hookrightarrow x_1 w \in L \Leftrightarrow x_2 w \in L$. Выберем $w = \varepsilon$. Тогда $x_1 \in L \Leftrightarrow x_2 \in L$ — противоречие.
Значит, они были разделены на некотором последующем шаге. Найдем первый такой шаг, на котором некоторые эквивалентные состояния q_1, q_2 были разделены. Пусть при этом рассматривался символ σ: $q_1 \xrightarrow{\sigma} q_a \in Q_a, q_2 \xrightarrow{\sigma} q_b \in Q_b, Q_a \neq Q_b$. Поскольку до этого эквивалентные состояния оставались в одном подмножестве, получаем, что q_a и q_b не эквивалентны (если это не так, то этот шаг не первый из таких, на котором эквивалентные состояния были разделены — противоречие). Значит (доказано ранее), $\exists w \colon \delta(q_a, w) \in F, \delta(q_b, w) \notin F$. Тогда $\delta(q_1, \sigma w) \in F, \delta(q_2, \sigma w) \notin F \Rightarrow$ (доказано ранее) состояния q_1, q_2 не эквивалентны — противоречие.

3.1. Получаем, что эквивалентные состояния, и только они, будут склеены. Также количество состояний ДКА не может быть меньше, чем количество классов эквивалентности по $\sim_L$ (доказано в условии). Больше оно тоже быть не может, так как тогда бы в автомате были два эквивалентных состояния, что невозможно (они все были склеены). Значит, количество состояний построенного ДКА будет равно количеству классов эквивалентности по $\sim_L$.

4. (Далее считаем Q_i за состояния). Установим биекцию между классами эквивалентности и состояниями минимального ДКА, которая сохраняет функцию переходов, т.е. построим изоморфизм $\varphi \colon \{Q_i\} \leftrightarrow \{C_i\}$. На классах эквивалентности функция переходов определяется так: $x_i \in C_i \Rightarrow \delta(C_i, \sigma) = C(x_i \sigma)$ (эта же функция является функцией переходов ДКА из доказательства теоремы 1 третьего задания). Выполним обход графа минимального ДКА и найдем слова x_i, по которым можно попасть в $Q_i \colon \delta(Q_0, x_i) = Q_i$. Определим $\varphi(Q_i) = C(x_i)$. Поскольку состояния Q_i попарно неэквивалентны (иначе бы они были склеены), слова x_i попарно не эквивалентны. Значит, $C(x_i)$ попарно различны, и φ инъективно. Но поскольку $|\{Q_i\}| = |\{C_i\}|$, оно биективно. Обозначим $C_i = C(x_i) = \varphi(Q_i)$. Докажем сохранение функции переходов:
Пусть $\delta(Q_i, \sigma) = Q_j$. Тогда $\delta(Q_0, x_j) = \delta(Q_0, x_i \sigma) = Q_j$. Поэтому $\forall w \in \Sigma^* \hookrightarrow L \ni x_j w \Leftrightarrow \delta(Q_0, x_j w) \equiv \delta(Q_j, w) \equiv \delta(Q_i, \sigma w) \equiv \delta(Q_0, x_i \sigma w) \in F \Leftrightarrow x_i \sigma w \in L$. Значит, $x_j \sim_L x_i \sigma \Rightarrow C_j = C(x_j) = C(x_i \sigma) = \delta(C_i, \sigma)$ ■.
Обратно: $\delta(C_i, \sigma) = C_j \Rightarrow x_i \sigma \sim_L x_j \Rightarrow$ состояния $\delta(Q_0, x_i \sigma)$ и $\delta(Q_0, x_j)$ эквивалентны, а значит, что они совпадают (доказано ранее). Но $Q_j = \delta(Q_0, x_j) = \delta(Q_0, x_i \sigma) = \delta(\delta(Q_0, x_i), \sigma) = \delta(Q_i, \sigma)$ ■

4.1. Таким образом доказано, что любой минимальный ДКА изоморфен в смысле сохранения функции переходов классам эквивалентности. Значит, любые два минимальные ДКА $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ для данного языка изоморфны между собой (можно построить изоморфизм $\varphi_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \colon Q^{\mathcal{A}} \leftrightarrow Q^{\mathcal{B}}$ как композицию изоморфизмов $Q^A \leftrightarrow \{C_i\}$, $\{C_i\} \leftrightarrow Q^{\mathcal{B}}$).

Задача 1

Не очень формально: Состояниями ДКА будут классы эквивалентности, а переходы будут определны также, как в доказательстве теоремы 1 из третьего задания.
Будем искать представителей классов и запоминать их. Для всех найденных классов будем добавлять состояния. Сначала $F \ni C_1 = C(\varepsilon)$. Определим C_1 как начальное. Рассмотрим $\sigma \in \Sigma$. Если $f(\sigma, \varepsilon) = 1$, значит, σ лежит в том же классе, что и ε. Определим $\delta(C_1, \sigma) = C_1$. Это соответствует определению в теореме: $\varepsilon \in C_1$, $\varepsilon\sigma \in C_1$. Если же $f(\sigma, \varepsilon) = 0$, то они лежат в разных классах. Значит, найден представитель нового класса. Запомним его, обозначим $C_2 = C(\sigma)$. Добавим состояние C_2. Определим $\delta(C_1, \sigma) = C_2$. Повторим для остальных $\sigma \in \Sigma$ (более подробно далее). Далее повторим рассуждение для всех добавленных состояний:
Заметим, что вместе с состоянием (т.е. классом) известен и представитель a_k его класса C_k (предположение индукции). Рассмотрим $\sigma \in \Sigma$. Если для всех найденных представителей $a_l \in C_l \hookrightarrow f(a_l, a_k\sigma) = 0$, то запомним $a_k\sigma$, добавим новое состояние $C(a_k\sigma)$. В любом случае, определим переход $\delta(C(a_k), \sigma) = C(a_k\sigma)$. Свойство $x_i \ni C_i \Rightarrow \delta(C_i, \sigma) = C(x_i\sigma)$ выполнено по построению.
Всего переходов конечное число (так как состояний конечное число), и на каждом шаге определяются переходы из состояния. Поэтому эта часть алгоритма завершится за конечное время.
Имеем построенный автомат со свойством: $\delta(q_0, w) = C(w)$. Выполним обход графа автомата, найдем пути до всех состояний, попутно «собирая» слова w, по которым туда можно попасть. Используя $g(w)$, пометим эти состояния принимающими, если $g(w) = 1$. Тогда $\delta(q_0, w) \in F \Leftrightarrow g(w) = 1 \Leftrightarrow w \in L$.

Более формально: $L \subset \Sigma^* \in \mathsf{REG}, \Sigma^*/\sim_L = \{C_i\} \equiv \{C_1, ..., C_n\}$ (n неизвестно, C_i попарно различны). $f\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow \{0, 1\}$ — задана, $f(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \sim_L y$. Построим ДКА $\mathcal{A}$: $L(\mathcal{A}) = L$.
$Q \stackrel{\text{def}}{=} \{C_i\}, q_0 \stackrel{\text{def}}{=} C(\varepsilon)$. Докажем, что на n-м шаге нижеописанного алгоритма выполняется
$P(n) = [\forall i \in \overline{1, n} \hookrightarrow$ найдены $x_i \in C_i, \forall \sigma \in \Sigma \hookrightarrow$ определены $\delta(C_i, \sigma) = C_j \Leftrightarrow C_i\sigma \in C_j]$.

1. ($n = 1$). $\Sigma^* \ni \varepsilon$ принадлежит какому-то классу. Без ограничения общности $\varepsilon \in C_1$. Рассмотрим все $\sigma_k \in \Sigma$. Если $f(\varepsilon, \sigma_k) = 1$, то x

Задача 2

Задача 3

Пусть x, y — РВ. Ответим на вопрос $L(x) \stackrel{?}{=} L(y)$.

1. Построим по x, y НКА A, B.
2. Построим по A, B ДКА A', B'
3. Построим по A', B' минимальные ДКА $\mathcal{A}'', \mathcal{B}''$.

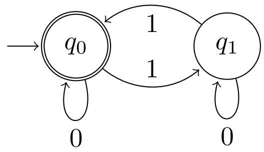
4.1 В случае, если $L(\mathcal{A}'') = L(\mathcal{B}'')$, они будут изоморфны (в смысле сохранения функции перехода, доказано в упражнении), что можно проверить одновременным обходом их графов.

4.2 Иначе тот же обход графов покажет, что автоматы различны.

Данный алгоритм не является эффективным, так как количество состояний построенного в (2) ДКА может экспоненциально зависеть от количества состояний НКА, и каждое состояние нужно как минимум создать за $O(1)$, а количество состояний НКА не меньше, чем длина РВ.

Задача 4

1. $\Sigma = \{0, 1\}$. Докажем, что $L(\mathcal{A}) = L$, $L_1 \equiv L = \{w \,\big|\, |w|_1 = 2t, t \in \mathbb{Z}\}$, ДКА $\mathcal{A}$:



Докажем утверждение $P(n) = \big[\forall w \in \Sigma^*\colon |w| = n \hookrightarrow \big(q_0 \xrightarrow{w} q_i \Rightarrow i = |w|_1 \mod 2\big)\big]$.

(a) Докажем $P(0)$. Поскольку $|w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$, $P(0) = \big[q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_i \Rightarrow i = |\varepsilon|_1 \mod 2\big]$. Поскольку $\delta(q_0, \varepsilon) = q_{\underline{0}}$, и $\underline{0} = |\varepsilon|_1$, получаем $P(0)$ ■

(b) Пусть доказано $P(n)$, докажем $P(n+1)$. $P(n) = \big[\forall w \in \Sigma^*\colon |w| = n \hookrightarrow \big(q_0 \xrightarrow{w} q_i \Rightarrow i = |w|_1 \mod 2\big)\big]$. Фиксируем $w \in \Sigma^*, |w| = n + 1, w = w_0\sigma, |w_0| = n, |\sigma| = 1$. $\mathcal{A}$ — полный $\Rightarrow (q_0, w) \equiv (q_0, w_0\sigma) \vdash^* (q_i, \sigma) \vdash (q_j, \varepsilon)$. $|w_0| = n \stackrel{P(n)}{\Rightarrow} i = |w_0|_1 \mod 2$. $i \in \{0, 1\}, \sigma \in \{0, 1\} \Rightarrow$ рассмотрим четыре случая:

a. ($i = 0, \sigma = 0$). $(q_0, w_00) \vdash^* (q_0, 0) \vdash (q_0, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_0 \Rightarrow j = 0$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |0|_1 \mod 2 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = j = |w|_1 \mod 2 = 0$.

b. $(i=0,\sigma=1)$. $(q_0,w_01)\vdash^*(q_0,1)\vdash(q_1,\varepsilon)\Rightarrow q_0\xrightarrow{w}q_1\Rightarrow j=1$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |1|_1 \mod 2 = 0+1 = 1 \Rightarrow 1 = j = |w|_1 \mod 2 = 1$.

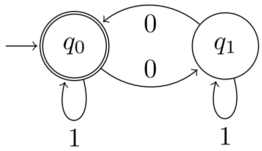
c. $(i=1,\sigma=0)$. $(q_0,w_00)\vdash^*(q_1,0)\vdash(q_1,\varepsilon)\Rightarrow q_0\xrightarrow{w}q_1\Rightarrow j=1$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |0|_1 \mod 2 = 1+0 = 1 \Rightarrow 1 = j = |w|_1 \mod 2 = 1$.

d. $(i=1,\sigma=1)$. $(q_0,w_01)\vdash^*(q_1,1)\vdash(q_0,\varepsilon)\Rightarrow q_0\xrightarrow{w}q_0\Rightarrow j=0$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |1|_1 \mod 2 = (1+1) \mod 2 = 0 \Rightarrow 0 = j = |w|_1 \mod 2 = 0$.

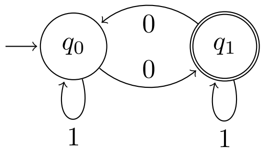
Таким образом, $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\hookrightarrow P(n)\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\hookrightarrow\big[\forall w\in\Sigma^*\colon |w|=n\hookrightarrow\big(q_0\xrightarrow{w}q_i\Rightarrow i=|w|_1 \mod 2\big)\big]\Rightarrow$ $\forall w\in\Sigma^*\hookrightarrow q_0\xrightarrow{w}q_{|w|_1 \mod 2}$. Пусть $w\in L\Leftrightarrow |w|_1 \mod 2=0\Leftrightarrow q_0\xrightarrow{w}q_0\Leftrightarrow w\in L(\mathcal{A})$ ■

2. $\Sigma=\{0,1\}$. $L_2=\{w\,\big|\,|w|_0=2t+1, t\in\mathbb{Z}\}$. Воспользуемся результатом (4.1) и построим ДКА $\mathcal{B}$:

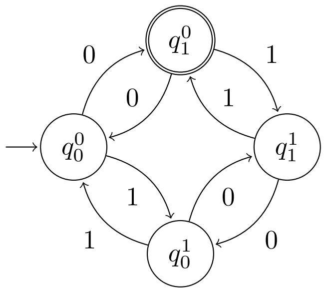
Поменяем в автомате из (4.1) нули и единицы местами. Получим $\mathcal{A}'$. Очевидно, $\mathcal{A}'$ будет распознавать все слова, в которых четное количество нулей. A' — полный, и все состояния достижимы из q_0.



Поэтому, переопределив $F''=Q''\setminus F$, получим $\mathcal{A}''\equiv\mathcal{B}$, который распознает все слова, в которых нечетное количество нулей.



3. Поскольку $L_3=\{$слова из 0 и 1, в которых четное число единиц и нечетное число нулей$\}=$ $=\{$слова из 0 и 1, в которых четное число единиц$\}\cap\{$слова из 0 и 1, в которых нечетное число нулей$\}\equiv L_1\cap L_2$, построим $\mathcal{C}\colon L(\mathcal{C})=L_3$ по алгоритму, который докажем далее, в (4.4):



4. Дано: Σ — алфавит, $\mathcal{A}=(Q^{\mathcal{A}},\Sigma,q_0^{\mathcal{A}},\delta^{\mathcal{A}},F^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B}=(Q^{\mathcal{B}},\Sigma,q_0^{\mathcal{B}},\delta^{\mathcal{B}},F^{\mathcal{B}})$ — полные ДКА, в которых все состояния достижимы из начальных. $\Sigma^*\supset L^{\mathcal{A}}=L(\mathcal{A}),\Sigma^*\supset L^{\mathcal{B}}=L(\mathcal{B})$. Задача: построить ДКА $\mathcal{C}=(Q^{\mathcal{C}},\Sigma,q_0^{\mathcal{C}},\delta^{\mathcal{C}},F^{\mathcal{C}})\colon L(\mathcal{C})=L^{\mathcal{A}}\cap L^{\mathcal{B}}$.

Определим $Q^{\mathcal{C}}=Q^{\mathcal{A}}\times Q^{\mathcal{B}}$ — множество всех пар состояних исходных автоматов.
Для краткости будем обозначать $Q^{\mathcal{C}}\ni(q_i^{\mathcal{A}},q_j^{\mathcal{B}})\overset{\text{def}}{\equiv}q_j^i$.
Определим $q_0^{\mathcal{C}}\overset{\text{def}}{=}q_0^0$, $F^{\mathcal{C}}=\{q_j^i\big|q_i^{\mathcal{A}}\in F^{\mathcal{A}}\wedge q_j^{\mathcal{B}}\in F^{\mathcal{B}}\}$
Определим $\delta^{\mathcal{C}}(q_j^i,\sigma)=\big(\delta^{\mathcal{A}}(q_i^{\mathcal{A}},\sigma),\delta^{\mathcal{B}}(q_j^{\mathcal{B}},\sigma)\big)$
Докажем утверждение
$P(n)=\big[\forall w\in\Sigma^*\colon |w|=n\hookrightarrow q_0^0\xrightarrow{w}\big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}},w),\ \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}},w)\big)\big]$

a. $(n=0)$ $\Sigma^*\ni w,|w|=0\Rightarrow w=\varepsilon$. Тогда $\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0,\varepsilon)\overset{\text{по опр.}}{=}\big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}},\varepsilon),\delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}},\varepsilon)\big)$, как и требовалось.

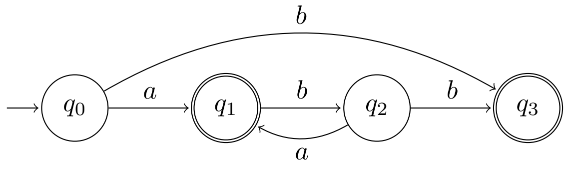
b. $(n=1)$ $\Sigma^*\ni w,|w|=1\Rightarrow w=\sigma\in\Sigma$. Тогда $\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0,w)=\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0,\sigma)\overset{\text{по опр.}}{=}\big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}},\sigma),\delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}},\sigma)\big)$, как и требовалось.

c. $(n+1)$. Пусть $P(n)$. Докажем $P(n+1)$. Фиксируем $\Sigma^*\ni w\colon |w|=n+1$. Тогда $w\equiv w_0\sigma$, $|w_0|=n\,\sigma\in\Sigma$. $\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0,w)=\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0,w_0\sigma)\equiv\delta^{\mathcal{C}}(\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0,w_0),\sigma)\overset{P(n)}{=}\delta^{\mathcal{C}}\big(\big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}},w_0),\ \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}},w_0)\big),\sigma\big)\overset{\text{по опр.}}{=}\big(\delta^{\mathcal{A}}(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}},w_0),\sigma),\delta^{\mathcal{B}}(\delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}},w_0),\sigma)\big)\underset{\delta^{\mathcal{A}},\delta^{\mathcal{B}}}{\overset{\text{св-во}}{=}}$ $\big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}},w),\delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}},w)\big)\Rightarrow P(n+1)$.

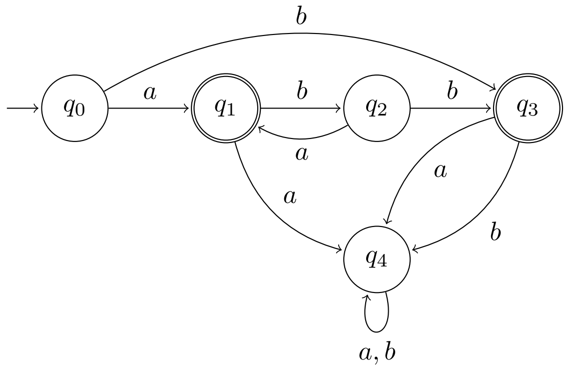
Получаем $w\in L^{\mathcal{A}}\cap L^{\mathcal{B}}\Leftrightarrow w\in L(\mathcal{A})\cap L(\mathcal{B})\Leftrightarrow\begin{cases}w\in L(\mathcal{A})\\ w\in L(\mathcal{B})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}},w)\in F^{\mathcal{A}}\\ \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}},w)\in F^{\mathcal{B}}\end{cases}\Leftrightarrow\big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}},w),\delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}},w)\big)\in F^{\mathcal{C}}\overset{P(|w|)}{\Leftrightarrow}$ $\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0,w)\in F^{\mathcal{C}}\Leftrightarrow w\in L(\mathcal{C})$ ■

Задача 5

Исходный автомат $\mathcal{A}$:

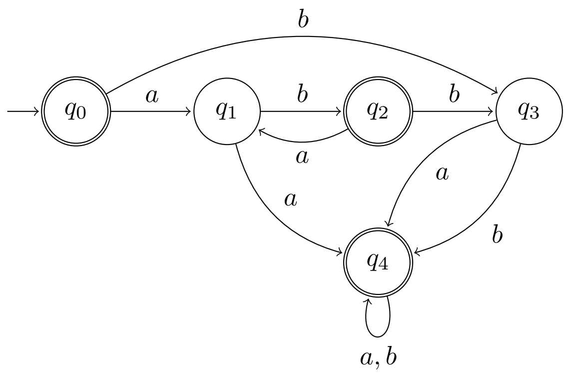


Пополним автомат $\mathcal{A}$ до $\mathcal{A}'$ и удалим недостижимые из q_0 состояния: добавим $q_4 \in Q'$, $q_4 \notin F'$, в него направим недостающие переходы:

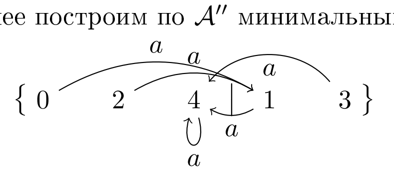


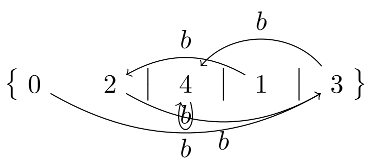
$L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$, так как $x \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow x \in L(\mathcal{A}')$, потому что $Q \subset Q'$, $F = F', \delta \subset \delta'$. $x \notin L(\mathcal{A}) \Rightarrow$ либо $q_0 \xrightarrow{x} q \notin F$, но тогда $q_0 \xrightarrow{x} q \notin F' \Rightarrow x \notin L(\mathcal{A}')$, либо $\delta(q_0, x) = \varnothing$, тогда $\delta'(q_0, x) = q_4$, потому что был выполнен переход в q_4, которого не было в $\mathcal{A}$ (по построению, добавлены переходы только в q_4), и при обработке последующих символов $\mathcal{A}'$ остается в q_4.

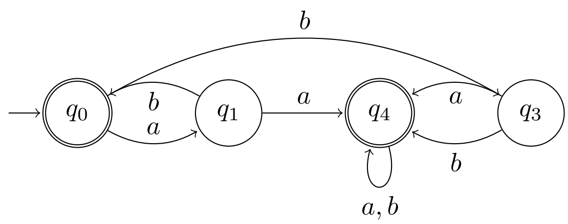
Построим A'': $L(\mathcal{A}'') = \overline{L(\mathcal{A}')} \equiv \overline{L(\mathcal{A})}$ по полному автомату $\mathcal{A}'$, определив $F'' \stackrel{\text{def}}{=} Q' \setminus F'$:

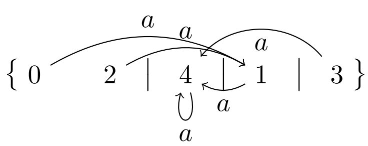


Далее построим по $\mathcal{A}''$ минимальный $\mathcal{A}'''$ по алгоритму:

1. 

2.  — OK



3.  — OK

Задача 6