# Теория и реализация языков программирования.
# Задание 10: LL-анализ

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.11.13

## Упражнение 1

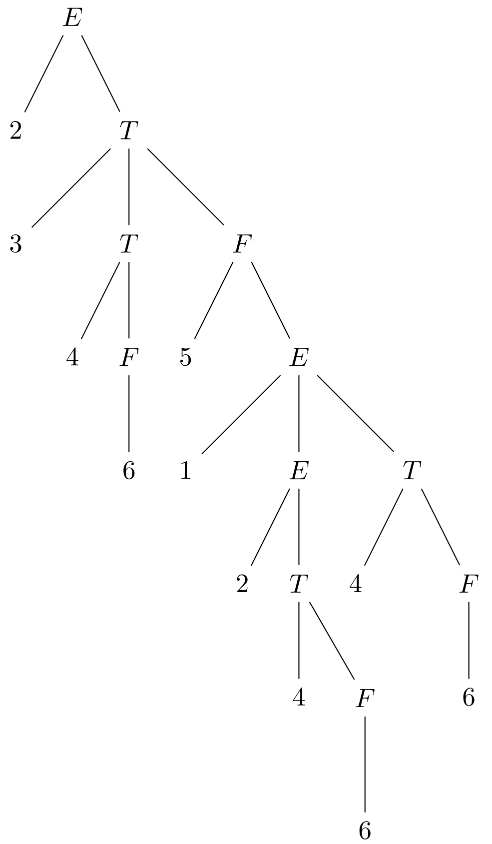
Пусть $G = (N, T, P, S)$. Занумеруем правила из $P$: $P = \{P_1, ..., P_n\}$.
Определим синтаксический перевод $T_l = (N, T, T', R, S)$:

1. $T' = \{1, ..., n\}$
2. $R$ определяется через $P$: каждому правилу $P \ni P_i = (X, Y_1...Y_n)$ сопоставим правила в $R$: пусть $Y_{j_1}...Y_{j_l}$ — максимальная подпоследовательность из нетерминалов из слова $Y_1...Y_n$. Тогда $X \longrightarrow Y_1...Y_n, iY_{j_1}...Y_{j_l}) \in P'$.
   По построению нетерминалы, входящие в $\alpha \equiv Y_1...Y_n$ входят также в $\beta \equiv Y_{j_1}...Y_{j_l}$, причем с той же кратностью.

Докажем, что слово $w \in L(G)$ переводится в левый вывод $w$. **TODO**

## Упражнение 2

$w = a * (a + a)$. Построим правый вывод по дереву вывода (из задания):



Чтобы получить правый вывод, обойдем дерево разбора в $G'$ следующим образом:

1. Выпишем самого левого потомка (по структуре правил, это всегда будет номер правила из $G$)
2. Выполним разбор оставшихся потомков справа налево.

Получаем последовательность правил правого вывода $w$ в $G$: $P_r = 23514624646$.
Правый вывод *(выделен раскрываемый нетерминал)*: $\underline{E} \overset{2}{\Rightarrow} \underline{T} \overset{3}{\Rightarrow} T * \underline{F} \overset{5}{\Rightarrow} T * (\underline{E}) \overset{1}{\Rightarrow} T * (E + \underline{T}) \overset{4}{\Rightarrow} T * (E + \underline{F}) \overset{6}{\Rightarrow} T * (\underline{E} + a) \overset{2}{\Rightarrow} T * (\underline{T} + a) \overset{4}{\Rightarrow} T * (\underline{F} + a) \overset{6}{\Rightarrow} \underline{T} * (a + a) \overset{4}{\Rightarrow} \underline{F} * (a + a) \overset{6}{\Rightarrow} a * (a + a) = w$.
По определению, правый разбор — примененнные при правом выводе правила в обратном порядке: $(P_r)^R = 64642641532$.

## Упражнение 3

## Упражнение 4

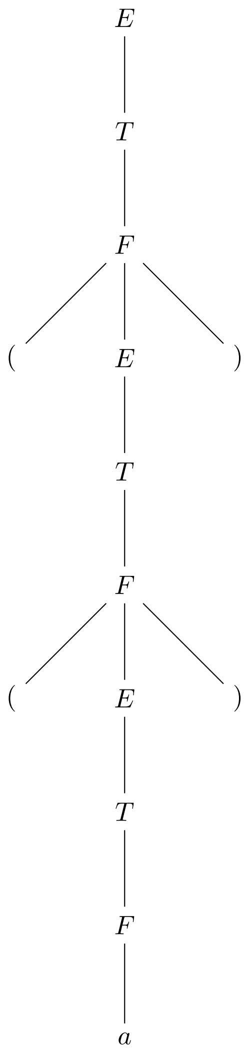
## Упражнение 5

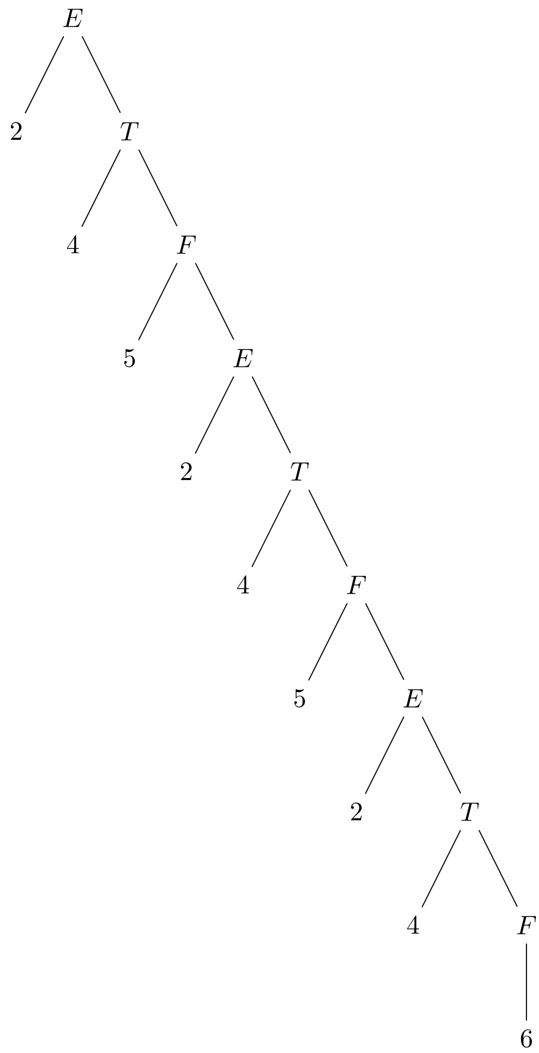
## Упражнение 6

## Задача 1

$w = ((a)) \in L(G)$: $\underline{E} \overset{2}{\Rightarrow} \underline{T} \overset{4}{\Rightarrow} \underline{F} \overset{5}{\Rightarrow} (\underline{E}) \overset{2}{\Rightarrow} (\underline{T}) \overset{4}{\Rightarrow} (\underline{F}) \overset{5}{\Rightarrow} ((E)) \overset{2}{\Rightarrow} ((\underline{T})) \overset{4}{\Rightarrow} ((\underline{F})) \overset{6}{\Rightarrow} ((a))$.

1. Построим дерево вывода $w$ в $G$ и соответствующее дерево в $G'$:




2. Левый разбор: обойдем второе дерево в глубину, всегда выбирая самого левого непосещенного потомка: $P_l = 245245246$.
3. Правый разбор: обойдем второе дерево в глубину, как указано в решении упражнения 2: $(P_r)^R = 245245246 \Rightarrow P_r = 642542542$.

## Задача 2

1. $\Sigma' = \{0, 1, \$\}$, $N' = \{S', S\}$. Пополненная грамматика $G' = (N', \Sigma', P', S')$, $P = \{ \overbrace{S' \to S\$}^{(0)}, \overbrace{S \to 0S}^{(1)}, \overbrace{S \to 1S}^{(2)}, \overbrace{S \to \varepsilon}^{(3)} \}$.
2. Вычислим FIRST:

| | | $F_i(0)$ | $F_i(1)$ | $F_i(\$)$ | $F_i(S)$ | $F_i(S')$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0. | Определим $F_0$: | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 0.1. | Терминалы: $F_0(0) \stackrel{\text{def}}{=} \{0\}$, $F_0(1) \stackrel{\text{def}}{=} \{1\}$, $F_0(\$) \stackrel{\text{def}}{=} \{\$\}$. | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 0.2. | Есть правило $S \xrightarrow{(3)} \varepsilon \Rightarrow F_0(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varepsilon\}$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon\}$ | $\varnothing$ |
| 0.3. | Нет правила $S' \to \varepsilon \Rightarrow F_0(S') \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon\}$ | $\varnothing$ |
| 1. | Определим $F_1 = F_0$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon\}$ | $\varnothing$ |
| 1.1. | Рассмотрим символы правой части правила $S' \xrightarrow{(0)} S\$$.<br>1. $\underline{S}\$$ $F_0(\underline{S}) = \{\varepsilon\} \ni \varepsilon$. $F_0(\underline{S}) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_1(S')$.<br>2. $S\underline{\$}$ $F_0(\underline{\$}) = \{\$\} \not\ni \varepsilon$. $F_0(\underline{\$}) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_1(S')$. | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon\}$ | $\{\$\}$ |
| 1.2. | Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(1)} \underline{0}S$. $F_0(\underline{0}) = \{0\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_1(S) \leftarrow \{0\}$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon, 0\}$ | $\{\$\}$ |
| 1.3. | Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(2)} \underline{1}S$. $F_0(\underline{1}) = \{1\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_1(S) \leftarrow \{1\}$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon, 0, 1\}$ | $\{\$\}$ |
| 1.4. | Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(3)} \underline{\varepsilon}$. $\lvert\underline{\varepsilon}\rvert = 0 \Rightarrow$ не изменяем $F_1$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon, 0, 1\}$ | $\{\$\}$ |
| 2. | Определим $F_2 = F_1$: | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon, 0, 1\}$ | $\{\$\}$ |
| 2.1. | Рассмотрим символы правой части правила $S' \xrightarrow{(0)} S\$$.<br>1. $\underline{S}\$$ $F_1(\underline{S}) = \{\varepsilon, 0, 1\} \ni \varepsilon$. $F_1(\underline{S}) \setminus \{\varepsilon\} = \{0, 1\} \to F_2(S')$.<br>2. $S\underline{\$}$ $F_1(\underline{\$}) = \{\$\} \not\ni \varepsilon$. $F_0(\underline{\$}) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_2(S')$. | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon, 0, 1\}$ | $\{\$, 0, 1\}$ |
| 2.2. | Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(1)} \underline{0}S$. $F_1(\underline{0}) = \{0\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_2(S) \leftarrow \{0\}$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon, 0, 1\}$ | $\{\$, 0, 1\}$ |
| 2.3. | Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(2)} \underline{1}S$. $F_1(\underline{1}) = \{1\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_2(S) \leftarrow \{1\}$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon, 0, 1\}$ | $\{\$, 0, 1\}$ |
| 2.4. | Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(3)} \underline{\varepsilon}$. $\lvert\underline{\varepsilon}\rvert = 0 \Rightarrow$ не изменяем $F_2$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon, 0, 1\}$ | $\{\$, 0, 1\}$ |
| 3. | Определим $F_3 = F_2$: | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon, 0, 1\}$ | $\{\$, 0, 1\}$ |
| 3.1. | Рассмотрим символы правой части правила $S' \xrightarrow{(0)} S\$$.<br>1. $\underline{S}\$$ $F_2(\underline{S}) = \{\varepsilon, 0, 1\} \ni \varepsilon$. $F_2(\underline{S}) \setminus \{\varepsilon\} = \{0, 1\} \to F_3(S')$.<br>2. $S\underline{\$}$ $F_2(\underline{\$}) = \{\$\} \not\ni \varepsilon$. $F_2(\underline{\$}) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_3(S')$. | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon, 0, 1\}$ | $\{\$, 0, 1\}$ |
| 3.2. | Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(1)} \underline{0}S$. $F_2(\underline{0}) = \{0\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_3(S) \leftarrow \{0\}$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon, 0, 1\}$ | $\{\$, 0, 1\}$ |
| 3.3. | Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(2)} \underline{1}S$. $F_2(\underline{1}) = \{1\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_3(S) \leftarrow \{1\}$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon, 0, 1\}$ | $\{\$, 0, 1\}$ |
| 3.4. | Рассмотрим правило $S \xrightarrow{(3)} \underline{\varepsilon}$. $\lvert\underline{\varepsilon}\rvert = 0 \Rightarrow$ не изменяем $F_3$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon, 0, 1\}$ | $\{\$, 0, 1\}$ |
| 3.5. | Имеем $F_3 = F_2 \Rightarrow$ выход | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{\$\}$ | $\{\varepsilon, 0, 1\}$ | $\{\$, 0, 1\}$ |

3. Вычислим FOLLOW:

| | | | $F_i(S)$ | $F_i(S')$ |
|---|---|---|---|---|
| 0. | Определим $F_0$: | | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 1. | Определим $F_1 = F_0$: | | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 1.1. | Рассмотрим правило $\underbrace{S'}_{A} \xrightarrow{(0)} \underbrace{\varepsilon}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\$}_{\beta}$ | (a) $\mathrm{FIRST}(\beta) = \{\$\} \Rightarrow \mathrm{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_1(S)$.<br>(b) $\varepsilon \notin \mathrm{FIRST}(\beta)$. | $\{\$\}$ | $\varnothing$ |
| 1.2. | Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \xrightarrow{(1)} \underbrace{0}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\varepsilon}_{\beta}$ | (a) $\mathrm{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \mathrm{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_1(S)$.<br>(b) $\varepsilon \in \mathrm{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_1(S) \leftarrow F_0(S) = \varnothing$ | $\{\$\}$ | $\varnothing$ |
| 1.3. | Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \xrightarrow{(2)} \underbrace{1}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\varepsilon}_{\beta}$ | (a) $\mathrm{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \mathrm{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_1(S)$.<br>(b) $\varepsilon \in \mathrm{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_1(S) \leftarrow F_0(S) = \varnothing$ | $\{\$\}$ | $\varnothing$ |
| 1.4. | Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \xrightarrow{(3)} \varepsilon$. Оно не имеет вид $A \to \alpha X \beta$, не изменяем $F_1$ | | $\{\$\}$ | $\varnothing$ |
| 2. | Определим $F_2 = F_1$: | | $\{\$\}$ | $\varnothing$ |
| 2.1. | Рассмотрим правило $\underbrace{S'}_{A} \xrightarrow{(0)} \underbrace{\varepsilon}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\$}_{\beta}$ | (a) $\mathrm{FIRST}(\beta) = \{\$\} \Rightarrow \mathrm{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_2(S)$.<br>(b) $\varepsilon \notin \mathrm{FIRST}(\beta)$. | $\{\$\}$ | $\varnothing$ |
| 2.2. | Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \xrightarrow{(1)} \underbrace{0}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\varepsilon}_{\beta}$ | (a) $\mathrm{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \mathrm{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_2(S)$.<br>(b) $\varepsilon \in \mathrm{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_3(S) \leftarrow F_1(S) = \{\$\}$ | $\{\$\}$ | $\varnothing$ |
| 2.3. | Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \xrightarrow{(2)} \underbrace{1}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\varepsilon}_{\beta}$ | (a) $\mathrm{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \mathrm{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_2(S)$.<br>(b) $\varepsilon \in \mathrm{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_3(S) \leftarrow F_2(S) = \{\$\}$ | $\{\$\}$ | $\varnothing$ |
| 2.4. | Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \xrightarrow{(3)} \varepsilon$. Оно не имеет вид $A \to \alpha X \beta$, не изменяем $F_1$ | | $\{\$\}$ | $\varnothing$ |
| 2.5. | Имеем $F_2 = F_1 \Rightarrow$ выход | | $\{\$\}$ | $\varnothing$ |

4. Таблица переходов для $LL(1)$-анализатора:

| | 0 | 1 | \$ |
|---|---|---|---|
| $S'$ | $S' \overset{(0)}{\to} S\$$ | $S' \overset{(0)}{\to} S\$$ | $S' \overset{(0)}{\to} S\$$ |
| $S$ | $S \overset{(1)}{\to} 0S$ | $S \overset{(2)}{\to} 1S$ | $S \overset{(3)}{\to} \varepsilon$ |
| 0 | $\varepsilon$ | **Err.** | **Err.** |
| 1 | **Err.** | $\varepsilon$ | **Err.** |
| \$ | **Err.** | **Err.** | **Acc.** |

(a) $(S', 0)$: правило $S' \overset{(0)}{\to} S\$$: $\mathrm{FIRST}(S\$) = \mathrm{FIRST}(S) \oplus \mathrm{FIRST}(\$) = \{0, 1, \$\} \ni 0$

(b) $(S', 1)$: правило $S' \overset{(0)}{\to} S\$$: $\mathrm{FIRST}(S\$) = \mathrm{FIRST}(S) \oplus \mathrm{FIRST}(\$) = \{0, 1, \$\} \ni 1$

(c) $(S', \$)$: правило $S' \overset{(0)}{\to} S\$$: $\mathrm{FIRST}(S\$) = \mathrm{FIRST}(S) \oplus \mathrm{FIRST}(\$) = \{0, 1, \$\} \ni \$$

(d) $(S, 0)$: правило $S \overset{(1)}{\to} 0S$: $\mathrm{FIRST}(0S) = \{0\} \ni 0$

(e) $(S, 1)$: правило $S \overset{(2)}{\to} 1S$: $\mathrm{FIRST}(1S) = \{1\} \ni 1$

(f) $(S, \$)$: правило $S \overset{(3)}{\to} \varepsilon$: $\mathrm{FOLLOW}(S) = \{\$\} \ni \$$

## Задача 3

$N \overset{\text{def}}{=} \{E, T, F\}$, $T \overset{\text{def}}{=} \{a, (, ), +, *\}$, $G \overset{\text{def}}{=} (N, T, P, E)$, $P \overset{\text{def}}{=} \{E \to E + T | T | \varepsilon, T \to T * F | F, F \to (E) | a\}$

Построим $\mathrm{FIRST}_1$:

| $i$ | $F_i(\cdot)$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | ( | ) | + | $*$ | $E$ | $T$ | $F$ |
| 0 | $\{a\}$ | $\{(\}$ | $\{)\}$ | $\{+\}$ | $\{*\}$ | $\{\varepsilon\}$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 1 | $\{a\}$ | $\{(\}$ | $\{)\}$ | $\{+\}$ | $\{*\}$ | $\{\varepsilon, +\}$ | $\varnothing$ | $\{(, a\}$ |
| 2 | $\{a\}$ | $\{(\}$ | $\{)\}$ | $\{+\}$ | $\{*\}$ | $\{\varepsilon, +\}$ | $\{(, a\}$ | $\{(, a\}$ |
| 3 | $\{a\}$ | $\{(\}$ | $\{)\}$ | $\{+\}$ | $\{*\}$ | $\{\varepsilon, +, (, a\}$ | $\{(, a\}$ | $\{(, a\}$ |
| 4 | $\{a\}$ | $\{(\}$ | $\{)\}$ | $\{+\}$ | $\{*\}$ | $\{\varepsilon, +, (, a\}$ | $\{(, a\}$ | $\{(, a\}$ |

Ответ: $\boxed{\mathrm{FIRST}(E) = \{\varepsilon, +, (, a\}}$

## Задача 4

1. $\Sigma' \overset{\text{def}}{=} \{0, 1, \$\}$, $N' \overset{\text{def}}{=} (S', S, A)$, пополненная грамматика $G' = (N', \Sigma', P', S)$.
   $P' \overset{\text{def}}{=} \{S' \overset{(0)}{\to} S\$, S \overset{(1)}{\to} aAaa, S \overset{(2)}{\to} bAba, A \overset{(3)}{\to} b, A \overset{(4)}{\to} \varepsilon\}$

2. Найдем $\mathrm{FIRST}_1$:

| $i$ | $F_i(a)$ | $F_i(b)$ | $F_i(\$)$ | $F_i(S)$ | $F_i(S')$ | $F_i(A)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{\$\}$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\{\varepsilon\}$ |
| 1 | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{\$\}$ | $\{a, b\}$ | $\varnothing$ | $\{b, \varepsilon\}$ |
| 2 | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{\$\}$ | $\{a, b\}$ | $\{a, b\}$ | $\{b, \varepsilon\}$ |
| 3 | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{\$\}$ | $\{a, b\}$ | $\{a, b\}$ | $\{b, \varepsilon\}$ |

3. Возьмем $\alpha = ba$, $w = b$, $\beta = b$, $\gamma = \varepsilon$, нетерминал $A$. Тогда $A \overset{(3)}{\to} b \equiv \beta$, $A \overset{(4)}{\to} \varepsilon \equiv \gamma$, $S' \overset{(0)}{\Rightarrow} \underline{S}\$ \overset{(2)}{\Rightarrow} \underbrace{b}_{w} A \underbrace{ba\$}_{\alpha}$.

   Имеем $F \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\beta\alpha) \equiv \mathrm{FIRST}(ba\$) = \{b\}$ и $G \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\gamma\alpha) = \mathrm{FIRST}(bba\$) = \{b\}$ и $F \cap G = \{b\} \neq \varnothing$.
   Получаем $\exists A \exists \alpha, \beta$: $A \to \alpha, A \to \beta \in P'$, $\exists w \exists \alpha$: $S' \Rightarrow_l^* wA\alpha$, $\mathrm{FIRST}(\beta\alpha) \cap \mathrm{FIRST}(\gamma\alpha) \neq \varnothing$ — формальное отрицание утверждения Теоремы 1 из задания. Получаем, что $G'$ — не LL(1)-грамматика.

4. Найдем $\mathrm{FIRST}_2$:

| $i$ | $F_i(a)$ | $F_i(b)$ | $F_i(\$)$ | $F_i(S)$ | $F_i(S')$ | $F_i(A)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{\$\}$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 1 | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{\$\}$ | $\{ab, aa, bb\}$ | $\varnothing$ | $\{b, \varepsilon\}$ |
| 2 | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{\$\}$ | $\{ab, aa, bb\}$ | $\{ab, aa, bb\}$ | $\{b, \varepsilon\}$ |
| 3 | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{\$\}$ | $\{ab, aa, bb\}$ | $\{ab, aa, bb\}$ | $\{b, \varepsilon\}$ |

5. Докажем, что $G'$ — LL(2)-грамматика, пользуясь Теоремой 1. Рассмотрим пары правил $X \to \beta$, $X \to \gamma$:

   (a) $S \overset{(1)}{\to} \underbrace{aAaa}_{\beta}$, $S \overset{(2)}{\to} \underbrace{bAba}_{\gamma}$. Тогда $\forall \alpha \hookrightarrow$ слова из $F \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}_2(\beta\alpha)$ начинаются с $a$, слова из $G \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}_2(\gamma\alpha)$ начинаются с $b$, поэтому $F \cap G = \varnothing$

   (b) $A \overset{(3)}{\to} \underbrace{b}_{\beta}$, $A \overset{(4)}{\to} \underbrace{\varepsilon}_{\gamma}$. Пусть $S \Rightarrow_l^* wA\alpha$. Тогда $\alpha[1,2] \in \{aa, ba\}$ — действительно, нетерминал $A$ может появиться только после применения (1) или (2). Рассмотрим эти два случая:

      i. $\alpha[1,2] = aa$. Тогда $F \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}_2(\beta\alpha) = \mathrm{FIRST}_2(baa) = \{ba\}$, $G \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}_2(\gamma\alpha) = \mathrm{FIRST}_2(aa) = \{aa\}$. Поэтому $F \cap G = \varnothing$

      ii. $\alpha[1,2] = ba$. Тогда $F \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}_2(\beta\alpha) = \mathrm{FIRST}_2(bba) = \{bb\}$, $G \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}_2(\gamma\alpha) = \mathrm{FIRST}_2(ba) = \{ba\}$. Поэтому $F \cap G = \varnothing$

6. Найдем $\mathrm{FOLLOW}_2$:

| $i$ | $F_i(S)$ | $F_i(S')$ | $F_i(A)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 1 | $\{\$\}$ | $\varnothing$ | $\{aa, ba\}$ |
| 2 | $\{\$\}$ | $\varnothing$ | $\{aa, ba\}$ |

## Задача 5

1. $N \overset{\text{def}}{=} \{S, A\}$, $T \overset{\text{def}}{=} \{a, b\}$, $G \overset{\text{def}}{=} \{N, T, P, S\}$. $P = \{S \to ba|A,\ A \to a|Aab|Ab\}$.

2. Удалим непосредственную левую рекурсию: $N' \overset{\text{def}}{=} \{S, A, A'\}$, $P' \overset{\text{def}}{=} \{S \to bA|A,\ A \to aA',\ A' \to abA'|bA'|\varepsilon\}$.
   $G' \overset{\text{def}}{=} \{N', T, P', S\}$.

3. $L(G') = L(G)$ — так как применен алгоритм

4. $G''$ — пополненная грамматика: $T'' \overset{\text{def}}{=} \{a, b, \$\}$, $N'' \overset{\text{def}}{=} \{S, S', A, A'\}$,
   $P'' \overset{\text{def}}{=} \{S' \overset{(0)}{\to} S\$, S \overset{(1)}{\to} ba, S \overset{(2)}{\to} A, A \overset{(3)}{\to} aA', A' \overset{(4)}{\to} abA', A' \overset{(5)}{\to} bA', A' \overset{(6)}{\to} \varepsilon\}$

5. Найдем FIRST:

| $i$ | $F_i(a)$ | $F_i(b)$ | $F_i(\$)$ | $F_i(S)$ | $F_i(S')$ | $F_i(A)$ | $F_i(A')$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{\$\}$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\{\varepsilon\}$ |
| 1 | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{\$\}$ | $\{b\}$ | $\varnothing$ | $\{a\}$ | $\{a, b, \varepsilon\}$ |
| 2 | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{\$\}$ | $\{b, a\}$ | $\{b\}$ | $\{a\}$ | $\{a, b, \varepsilon\}$ |
| 3 | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{\$\}$ | $\{b, a\}$ | $\{b, a\}$ | $\{a\}$ | $\{a, b, \varepsilon\}$ |
| 4 | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{\$\}$ | $\{b, a\}$ | $\{b, a\}$ | $\{a\}$ | $\{a, b, \varepsilon\}$ |

6. Докажем, что $G'$ — LL(1)-грамматика. Рассмотрим пары правил $X \to \beta$, $X \to \gamma$:

   (a) $S \overset{(1)}{\to} \underbrace{ba}_{\beta}$, $S \overset{(2)}{\to} \underbrace{A}_{\gamma}$. Тогда $\forall \alpha \hookrightarrow F \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\beta\alpha) = \mathrm{FIRST}(b) = \{b\}$, $G \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\gamma\alpha) = \{a\} \Rightarrow F \cap G = \varnothing$

   (b) $A' \overset{(4)}{\to} \underline{a}bA'$, $A' \overset{(5)}{\to} \underline{b}A'$. Аналогично $F \cap G = \varnothing$.

   (c) $A' \overset{(4)}{\to} \underbrace{abA'}_{\beta}$, $A' \overset{(6)}{\to} \underbrace{\varepsilon}_{\gamma}$. Пусть $S' \Rightarrow_l^* wA\alpha$. Тогда $\alpha = \$$, так правила $(4), (5), (6)$ оставляют $A'$ последним символом слова. Тогда $F \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\beta\alpha) = \{a\}$, $G \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\gamma\alpha) = \{\$\}$, поэтому $F \cap G = \varnothing$.

   (d) $A' \overset{(5)}{\to} \underbrace{bA'}_{\beta}$, $A' \overset{(6)}{\to} \underbrace{\varepsilon}_{\gamma}$. Пусть $S' \Rightarrow_l^* wA\alpha$. Аналогично $\alpha = \$$. Тогда $F \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\beta\alpha) = \{b\}$, $G \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\gamma\alpha) = \{\$\}$, поэтому $F \cap G = \varnothing$.

7. Найдем FOLLOW:

| $i$ | $F_i(S')$ | $F_i(S)$ | $F_i(A)$ | $F_i(A')$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 1 | $\varnothing$ | $\{\$\}$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 2 | $\varnothing$ | $\{\$\}$ | $\{\$\}$ | $\varnothing$ |
| 3 | $\varnothing$ | $\{\$\}$ | $\{\$\}$ | $\{\$\}$ |
| 4 | $\varnothing$ | $\{\$\}$ | $\{\$\}$ | $\{\$\}$ |

8. Построим LL-анализатор:

| | $a$ | $b$ | $\$$ |
|---|---|---|---|
| $S'$ | $S' \overset{(0)}{\to} S\$$ | $S' \overset{(0)}{\to} S\$$ | **Err.** |
| $S$ | $S \overset{(2)}{\to} A$ | $S \overset{(1)}{\to} ba$ | **Err.** |
| $A$ | $A \overset{(3)}{\to} aA'$ | **Err.** | **Err.** |
| $A'$ | $A' \overset{(4)}{\to} abA'$ | $A' \overset{(5)}{\to} bA'$ | $A' \overset{(6)}{\to} \varepsilon$ |
| $a$ | $\varepsilon$ | **Err.** | **Err.** |
| $b$ | **Err.** | $\varepsilon$ | **Err.** |
| $\$$ | **Err.** | **Err.** | **Acc.** |

## Задача 6

Предположим, что $L \overset{\text{def}}{=} a^* \cup a^n b^n$ — LL-язык. Тогда $\exists k \exists G\colon L(G) = L$ и $G$ — LL($k$)-грамматика. Тогда $\exists \mathcal{A}$ — детерминированный МП-автомат с выходом.

1. Фиксируем $n$. $\measuredangle a^{nk} \in L$, $(a^(nk)\$, S\$, \varepsilon) \vdash^* (a^k, Y_1 ... Y_l\$, \cdot)$. Рассмотрим