Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 2: Арифметические операции и линейные рекуррентные последовательности

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.02.20

Упражнение 3

Определим $A_d \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{array} \right\|$

Докажем по индукции $P(d) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\det(A_d - \lambda E) = (-1)^d(\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - c_2\lambda^{d-2} - ... - c_{d-1}\lambda - c_d)\right]$

1. База. $d = 3 \Rightarrow \det(A_3 - \lambda E) = \begin{vmatrix} (c_1-\lambda) & c_2 & c_3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = c_1\lambda^2 - \lambda^3 + c_3 + c_2\lambda = (-1)^3(\lambda^3 - c_1\lambda^2 - c_2\lambda - c_3) \Rightarrow P(3)$ ■

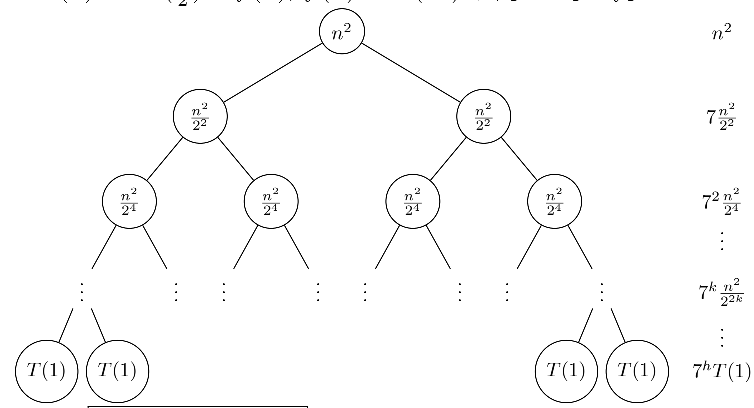
2. Пусть $\underline{P(d-1)}$. Рассмотрим $\det(A_d - \lambda E) = \begin{vmatrix} (c_1-\lambda) & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \boxed{=}$.

   Разложим по последнему столбцу: $\boxed{=} - \lambda \underbrace{\begin{vmatrix} (c_1-\lambda) & c_2 & ... & c_{d-1} \\ 1 & -\lambda & ... & 0 \\ & ... & & \\ 0 & 0 & ... & -\lambda \end{vmatrix}}_{\det(A_{d-1}-\lambda E)} + (-1)^{d+1}c_d \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & ... & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix}}_{=1,\text{ верхн.-треуг.}} \stackrel{P(d-1)}{=}$

   $\stackrel{P(d-1)}{=} -\lambda(-1)^{d-1}(\lambda^{d-1} - c_1\lambda^{d-2} - ... - c_{d-2}\lambda - c_{d-1}) - (-1)^d c_d = (-1)^d(\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - ... - c_{d-1}\lambda - c_d)$. Получаем $\underline{P(d)}$ ■

(каноническое) Задача 6

$T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + f(n)$, $f(n) = O(n^2)$. Дерево рекурсии:



Высота дерева $h = \log_2 n$.

$T(n) = \sum_{k=0}^{h-1} 7^k f(\frac{n}{2^k}) + 7^h T(1) \boxed{\leqslant}$.

Из определения O $\exists C > 0\, \exists n_0\colon \forall n \geqslant n_0\; f(n) \leqslant Cn^2$, откуда первая сумма $\sum_{k=0}^{h-1} 7^k f(\frac{n^2}{2^{2k}}) \leqslant Cn^2 \sum_{k=0}^{h-1} (\frac{7}{4})^k = Cn^2 \frac{(7/4)^{h-1}-1}{7/4-1} = C_1 n^2((7/4)^{\log_2 n} - C_2) = C_1 n^2 n^{\log_2 \frac{7}{4}} - C_3 n^2 = C_1 n^{\log_2 7} - C_3 n^2$. Второе слагаемое $7^h T(1) = 7^{\log_2 n} T(1) = C n^{\log_2 7}$

Поэтому $T(n) \leqslant n^{\log_2 7} - C_5 n^2$

Ответ: $\boxed{T(n) = O(n^{\log_2 7})}$

(каноническое) Задача 7

Вход: точки $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$.

Алгоритм: считаем массив расстояний $r_i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ *(можно r_i^2)*. Ищем медиану r_m в массиве за $O(n)$

Ответ: r_m *(r_{m+1}?)*.

(каноническое) Задача 9

Пусть $\Sigma = \{\underbrace{0}_{\sigma_0}, \underbrace{1}_{\sigma_1}, \underbrace{2}_{\sigma_2}\}$, $\Sigma^* \supset G = \{w | \exists n\colon w = w_1...w_n, \underbrace{\forall i \in \overline{1, n-1} \hookrightarrow |w_i - w_{i+1}|}_{(*)} \leqslant 1\}$. Пусть $g_n = |\{w \in L | |w| = n\}|$ — количество слов длины n в языке G. Определим $g_n^i = |\{w \in G | |w| = n, w_n = \sigma_i\}|$ — количество слов длины n из G, оканчивающихся на i-й символ. Поскольку каждое слово оканчивается на один из символов σ_i, получаем $g_n = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$.

1. Найдем рекуррентное соотношение для последовательностей g_n^i. Получим слово $w \in G$ длины $n+1$: $w = w_1 ... w_n w_{n+1}$. Поскольку слово из языка, для него верно $(*)$. Но это условие верно и для подслова $w_1 ... w_n$. Рассмотрим последний символ слова $w - w_{n+1}$:

   (a) $w_{n+1} = 0$. Но тогда предпоследний символ слова $w - w_n$ может быть 0 либо 1 для выполнения $(*)$. Слово $w_1 ... w_n$ может быть получено g_n^0 и g_n^1 способами соответственно. Поэтому количество способов получить w в этом случае $g_{n+1}^0 = g_n^0 + g_n^1$ $(**)$.

   (b) $w_{n+1} = 1$. Тогда $w_n \in \{0, 1, 2\}$, и $g_{n+1}^1 = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$.

   (c) $w_{n+1} = 2$. Тогда $w_n \in \{1, 2\}$, и $g_{n+1}^2 = g_n^1 + g_n^2$.

2. Определим вектор $\mathbb{R}^3 \ni \vec{g_n} = \begin{Vmatrix} g_n^0 \\ g_n^1 \\ g_n^2 \end{Vmatrix}$. Определим матрицу $A \overset{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

   Снова рассмотрим соотношения $\begin{cases} 1a \\ 1b \\ 1c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_{n+1}^0 = g_n^0 + g_n^1 \\ g_{n+1}^1 = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2 \\ g_{n+1}^2 = g_n^1 + g_n^2 \end{cases}$.

   Заметим, что в матричном виде они записываются как $\vec{g_{n+1}} = A\vec{g_n}$ $(***)$

3. Найдем $g_1^0 = g_1^1 = g_1^2 = 1$, так как слово из одного символа удовлетворяет $(*)$. Определим $\vec{\xi} \overset{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

   Тогда, применяя $(***)$ *(доказывается тривиально по индукции)* получаем $\vec{g_n} = A^{n-1}\vec{\xi}$

4. $g_n = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$. Но это равно $g_n = (\vec{\xi}, A^{n-1}\vec{\xi}) = \vec{\xi}^T A^{n-1} \vec{\xi}$

5. Найдем ОНБ, в котором A имеет диагональный вид

   (a) Характеристический многочлен $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ 1 & (1-\lambda) & 1 \\ 0 & 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda) = (1-\lambda)\cdot(1 + \lambda^2 - 2\lambda - 2) = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 2\lambda - 1)$. Корни квадратного уравнения $\lambda = 1$ и $\lambda \in \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Далее ищем собственные векторы.

   (b) $(\lambda = \lambda_1 = 1)$. $A - 1 \cdot E = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$, откуда $\vec{h}_1^0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^T$, $\vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}$

   (c) $(\lambda = \lambda_2 = 1 + \sqrt{2})$. $A - (1+\sqrt{2}) \cdot E = \begin{Vmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim$
   $\sim \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix}$, откуда $\vec{h}_2^0 = \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}^T$, $\vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{Vmatrix} \perp \vec{h}_1$

   (d) $(\lambda = \lambda_3 = 1 - \sqrt{2})$. $A - (1-\sqrt{2}) \cdot E = \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}$,
   откуда $\vec{h}_3^0 = \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}$, $\vec{h}_3 = \begin{Vmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{Vmatrix} \perp \vec{h}_1, \vec{h}_2$

   Получаем $S \overset{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/2 & 1/2 \end{Vmatrix}$ — ортогональная матрица перехода к базису из собственных векторов.

   Тогда $A' = S^{-1}AS \Rightarrow A = SA'S^{-1} \equiv SA'S^T$, Но $A' = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & (1-\sqrt{2}) \end{Vmatrix}$, поэтому

   $A'^n = \operatorname{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)$

6. $A^n = \underbrace{SA' \cancelto{E}{S^T \cdot S} A'S^T \cdot ... \cdot SA' \cancelto{E}{S^T \cdot S} A'S^T}_{n} = SA'^n S^T = S\operatorname{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n) S^T$

7. Вернемся к $g_n = \vec{\xi}^T A^{n-1} \vec{\xi} = \vec{\xi}^T S \operatorname{diag}(\lambda_1^{n-1}, \lambda_2^{n-1}, \lambda_3^{n-1}) S^T \vec{\xi} = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right]$