

# Эффект Эйнштейна — де Хааза (реферат)

Сергей Володин, 274 гр.

2015.01.22

## Введение

В 1820 году Эрстед выяснил, что магнитное поле может быть создано не только постоянными магнитами, но еще и токами. Получалось, что источников магнитного поля может быть два типа: токи и постоянные магниты. В попытке разобраться в этой ситуации и выяснить природу магнетизма, сведя два типа к одному, Ампер выдвинул гипотезу, согласно которой в постоянных магнитах циркулируют без сопротивления молекулярные токи, которые и создают магнитное поле. В 1915 году Эйнштейн и де Хааз провели эксперимент, который должен был подтвердить гипотезу Ампера.

## Классическое обоснование (модель Бора, орбитальный момент)

В модели атома Бора (1913) электрон вращается по круговой орбите. Из-за этого, во-первых, он имеет момент импульса, во-вторых, магнитный момент, так как электрон — заряженная частица. Поэтому следует ожидать, что изменение магнитных свойств (намагничивание) будет приводить к изменению механических: тело начнет вращаться. Такой эффект и наблюдали Эйнштейн и де Хааз.

Рассмотрим атом модели Бора. Электрон с зарядом  $e = -1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл движется вокруг ядра с зарядом  $Z|e|$ . Момент импульса электрона  $L = mvr = m \frac{2\pi r}{T} r = m 2\pi r^2 \nu$ , где  $\nu$  — частота обращения электрона вокруг ядра. Магнитный момент  $M = IS = e\nu\pi r^2$ . Отсюда получаем гиромагнитное отношение  $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M}{L} = \frac{e\nu\pi r^2}{2m\pi\nu r^2} = \frac{e}{2m} \approx -8.79 \cdot 10^{10} \frac{\text{Кл}}{\text{Кг}}$ . Обратная величина  $\frac{1}{\gamma} = -1.14 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Кг}}{\text{Кл}}$ .

В векторном виде гиромагнитное отношение записывается как  $\vec{M} = \gamma \vec{L}$

Из-за наличия такого соотношения изменение намагниченности образца приведет к его вращению как целого. Действительно, пусть  $\vec{L}_1$  — сумма всех орбитальных моментов импульса электронов,  $\vec{L}_2$  — момент импульса тела как целого. Полный момент сохраняется:  $0 = \frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)$ , откуда  $\frac{d\vec{L}_2}{dt} = -\frac{d\vec{L}_1}{dt} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \sum_i \vec{M}_i$ , где  $\vec{M}_i$  — орбитальные магнитные моменты всех атомов. Это можно интерпретировать так: на тело как целое действует момент силы  $\vec{\tau} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \vec{M}_\Sigma$ , то есть, тело начнет вращаться.

Покажем, что эффект можно наблюдать. Пусть внешнее магнитное поле изменяется с  $\vec{B}_0$  до противоположного  $-\vec{B}_0$ . Пусть  $B_0$  достаточно сильное, т.е. намагниченность достигает насыщения и изменяется с  $\vec{I}s$  на противоположное  $-\vec{I}s$ . Изменение момента импульса  $J\Delta\omega = \int_0^t \tau dt = \int_0^t -\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} (M_\Sigma) dt = -\frac{\Delta M_\Sigma}{\gamma}$ . Оценим  $\Delta M_\Sigma = 2I_s V = 2N\mu_B [\equiv]$ , где  $\mu_B$  — магнетон Бора,  $N$  — число атомов.  $[\equiv] 2 \frac{MN_a\mu_B}{\mu}$ ,  $\mu$  — молярная масса. Если взять  $J = \frac{1}{2}MR^2$ ,  $R = 10^{-3}\text{м}$ ,  $\mu = 56 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Кг}}{\text{моль}}$ , получим  $\Delta\omega = -\frac{4M \cdot N_a \cdot \mu_B}{\mu \gamma MR^2} = \frac{4N_a \hbar}{\mu R^2} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{с}^{-1}$ .

## Эксперимент

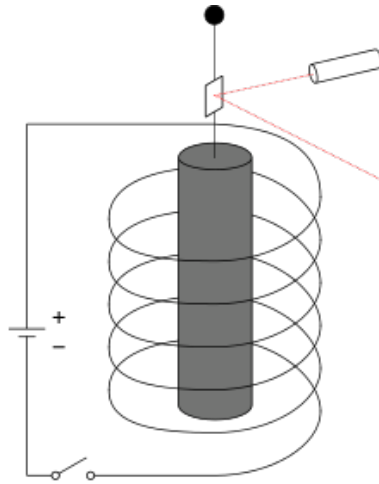


Рис. 1: Схема установки

Рассмотрим подвешенный на нити цилиндр, помещенный в катушку с током  $i$ , которая создает магнитное поле. Запишем уравнение вращательных колебаний ( $\beta, \omega_0$  — параметры собственных колебаний):

$$\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = \frac{1}{J}\tau$$

Пропустим через катушку синусоидальный ток частоты  $\omega$ :  $i = A \sin \omega t$ . Момент сил  $\tau$  в таком случае не обязан быть синусоидальным, так как кривая намагничивания нелинейна (петля гистерезиса) при достаточно больших внешних полях, а именно такие поля и были использованы.

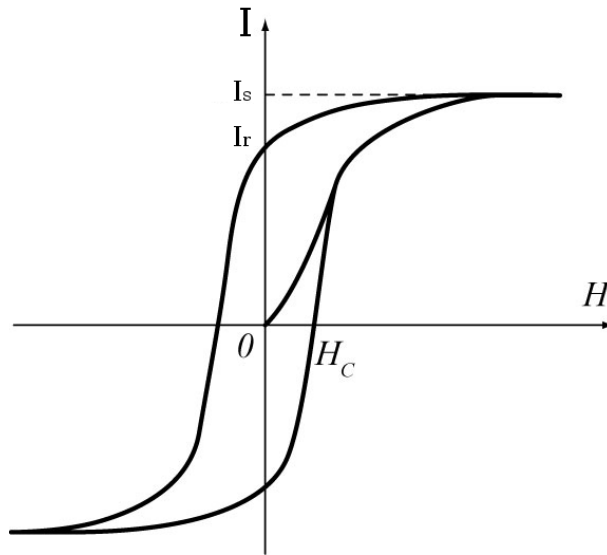


Рис. 2: Петля гистерезиса для железа — зависимость  $I(H_{\text{внеш.}})$

Эйнштейном и де Хаазом был получен график зависимости тока от времени и момента сил от времени. Ток синусоидальный, а момент сил (вторая кривая) — нет.

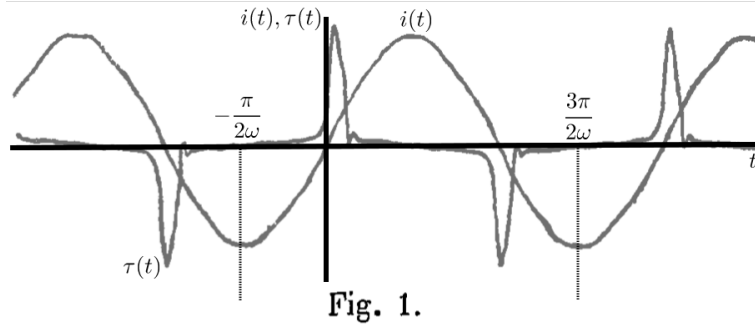


Рис. 3: Зависимость тока и момента сил от времени

«Пик» возникает при смене знака тока, что соответствует смене знака внешнего магнитного поля, т.е. движению вдоль кривой гистерезиса вблизи нуля, где производная  $\frac{dI}{dt}$  как раз велика. «Плоские» участки соответствуют движению по асимптотам (насыщение).

Разложим момент сил в ряд Фурье на периоде  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  как четную функцию:  $\tau = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega t$ . В результирующих колебаниях амплитуда велика только для первого члена при  $\omega \approx \omega_0$  (резонанс). Вычислим  $B_1$ . На отрезке  $t \in [-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}]$  наблюдается два пика, первый вверх, второй вниз. Проинтегрируем разложение для момента, умноженное на  $\cos \omega t$  по указанному периоду («перекрестные» члены уйдут):

$$\int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} \tau \cos \omega t dt = \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} B_1 \cos^2 \omega t dt = \frac{\pi}{\omega} B_1$$

В первом пике ( $t \approx 0$ ) значение  $\cos \omega t \approx 1$ , во втором пике ( $t \approx \frac{\pi}{\omega}$ ) значение  $\cos \omega t \approx -1$ . Интеграл по каждому пику, как показано выше, равен  $\int \tau dt = -\frac{1}{\gamma} \Delta M_{\Sigma} = -\frac{2}{\gamma} M_s$ , где  $M_s = I_s V$  — суммарный магнитный момент при насыщении. В итоге интеграл слева можно оценить как  $-\frac{4}{\gamma} I_s V$ . Получаем соотношение  $B_1 = -\frac{4I_s V \omega}{\pi \gamma}$ .

Найдем решение уравнения колебаний, оставив в правой части только член с  $\cos \omega t$ , который дает максимальную среди всех членов амплитуду колебаний (резонансный):

$$\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = \frac{B_1}{J} \cos \omega t$$

Собственные колебания не учитываем, так как они затухающие (ими можно пренебречь). Частное решение ищем в виде  $\alpha(t) = \text{Re} A e^{i\omega t}$ , получаем  $A = \frac{B_1/J}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta i \omega}$ , откуда  $\alpha = \text{Re}(A e^{i\omega t}) = \text{Re}(A) \text{Re}(e^{i\omega t}) -$

$$\text{Im}(A) \text{Im}(e^{i\omega t}) = |A| \cos(\omega t + \varphi), \begin{cases} \cos \varphi = \frac{\text{Re} A}{|A|} \\ \sin \varphi = \frac{\text{Im} A}{|A|} \end{cases}$$

В опыте была получена зависимость амплитуды колебаний от частоты тока в катушке,  $|A|(\omega)$  — резонансная кривая, которая представлена графически. По оси ординат отложена величина, пропорциональная  $|A|$ : угол измерялся при помощи зеркальца, жестко закрепленного на торце цилиндра, луча света и шкалы на расстоянии  $L = 1.45$  м, откуда «размах» на шкале  $2\Delta l = L \tan(2|A|) \approx 2|A|L$  и  $|A| = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\Delta l}{L} \approx \frac{\Delta l}{L}$

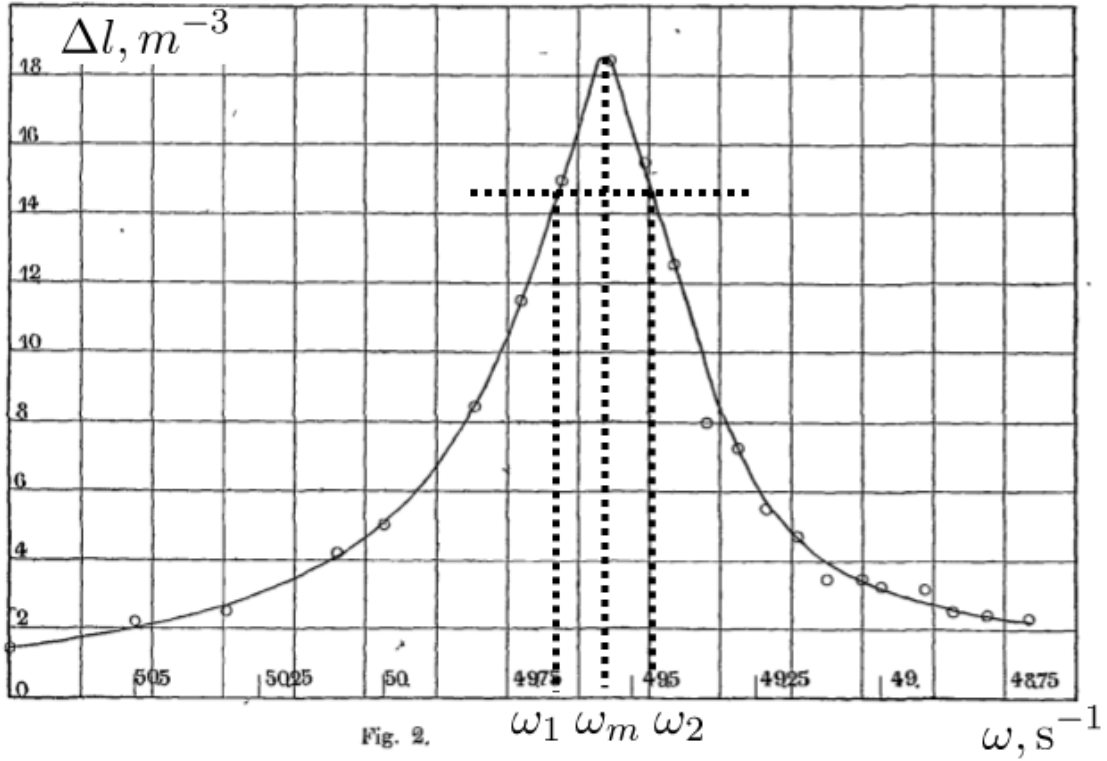


Рис. 4: Резонансная кривая

Из полученной резонансной кривой найдем  $\gamma$ . Фиксируем значение  $|A|$  и найдем две частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответствующие этому  $|A|$  на кривой. Рассмотрим также резонансную частоту  $\omega_m \equiv \omega_0$ . Обозначим в выражении для  $|A|$  константу  $\mu$ , содержащую искомое  $\gamma$ :

$$|A|(\omega) = \frac{|B_1|}{J} ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2)^{-1/2} = \underbrace{\frac{4I_s V}{\pi|\gamma|J}}_{\mu} \left( \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\beta^2 \right)^{-1/2}$$

Тогда  $(\frac{\mu}{|A|})^2 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\beta^2$ . В резонансе ( $\omega = \omega_0 \equiv \omega_m$ ) найдем  $\frac{\mu}{|A|_m} = 2\beta$ .

Для двух точек с совпадающими  $|A|$  найдем  $(\frac{\mu}{|A|_{1,2}})^2 = \frac{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2}{\omega_1^2} + 4\beta^2 = \frac{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2}{\omega_2^2} + 4\beta^2$ . Приравняем второе и третье выражения, получим  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ .

Рассмотрим разницу  $(\frac{\mu}{|A|_{1,2}})^2 - (\frac{\mu}{|A|_m})^2 \equiv$ , подставим туда найденные  $\omega_0$  и  $\frac{\mu}{|A|_m}$ , получим  $\equiv (\omega_1 - \omega_2)^2$ .

Обозначим  $b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|A|_{1,2}}{|A|_m}$  — безразмерный параметр (отношение выбранной амплитуды к максимальной амплитуде) и  $4\pi\nu = \omega_2 - \omega_1$  — половина разницы частот между  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Подставим обозначенные параметры в найденное соотношение:  $(\frac{\mu}{|A|_m})^2 (\frac{1}{b^2} - 1) = (4\pi)^2 \nu^2$ . Выразим из него  $\mu$  и приравняем с определением  $\mu$ :

$$\frac{4I_s V}{\pi|\gamma|J} \stackrel{\text{def}}{=} \mu = 4\pi\nu |A|_m \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$$

отсюда получим

$$\frac{1}{|\gamma|} = \frac{J\pi^2 |A|_m}{I_s V} \cdot \nu \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$$

Таким образом, выбрав любую амплитуду  $|A|_{1,2}$ , мы можем рассчитать значение  $\gamma$ . Поэтому, если все предположения (например, линейность члена, отвечающего за затухание; отсутствие зависимости  $\gamma$  от величины поля, ...) верны, величина  $\nu \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$  не должна зависеть от выбора  $|A|$ . В проведенном Эйнштейном и де Хаазом опыте это утверждение верно при достаточно близких к максимальному  $|A|_m$  значениям

$|A|_{1,2}$ , т.е., вблизи резонанса:

$\Delta l, 10^{-3}\text{м}$	$\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}, \text{с}^{-1}$
15	0.120
12	0.130
9	0.124
7	0.121
5	0.114
4	0.108
3	0.0957

Найдем среднее значение величины  $x \stackrel{\text{def}}{=} \nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$  по первым четырем значениям из таблицы, где величина остается постоянной:  $x_{\text{ср.}} \approx 0.124\text{с}^{-1}$ .

Найдем остальные величины, входящие в выражение для  $\frac{1}{|\gamma|}$ :

1.  $J = 0.0126\text{г} \cdot \text{см}^2$  (найденно добавлением небольшой массы и измерением новой частоты собственных колебаний)
2.  $I_s V = 470$
3.  $|A|_m = \frac{\Delta l}{L} = \frac{1.85}{145.4} \approx 0.32 \cdot 10^{-2}$  рад.

$$\text{Получаем } \frac{1}{|\gamma|} = \frac{J\pi^2|A|_m}{I_s V} x_{\text{ср.}} = \frac{0.0126 \cdot 3.14^2 \cdot 0.32 \cdot 10^{-2}}{470} \cdot 0.124 \approx 1.0 \cdot 10^{-7}$$

## Результаты и квантовая физика

Для электрона связь между магнитным моментом  $\vec{M}$  и моментом импульса  $\vec{L}$  выражается через  $g$ -фактор:  $\gamma = g \frac{e}{2m}$ . Для спина  $g_s = 2$  (опыт Штерна-Герлаха), для орбитального  $g_l = 1$ . Таким образом, Эйнштейном и де Хаазом было получено значение  $g = 1$ , что соответствует орбитальному движению. Но в последующих опытах такого же типа (см. 5) было получено значение  $g = 2$ , т.е. в работе Эйнштейна и де Хааза была допущена ошибка, либо неверно оценена погрешность.

Значение  $g = 2$  указывает на то, что магнетизм ферромагнетиков связан не с орбитальным, а со спиновым угловым моментом. То есть, хотя и эксперимент де Хааза не подтверждает существование молекулярных токов Ампера, но косвенно подтверждает существование спина.

### «Одна вторая»

От «настоящего» результата, который подтверждается последующими экспериментами, результат  $\gamma$  у Эйнштейна и де Хааза отличается в 2 раза. Он согласуется с моделью Бора, которая была на тот момент, но не согласуется с действительностью.

В оригинальной статье опущены некоторые элементарные, но важные детали, из-за чего невозможно провести вычисления самостоятельно и выяснить, в чем проблема: в большой погрешности результата или в неверных расчетах. Например:

1. Для измерения угла используется зеркальце. Соответственно, измеренный угол всегда будет в 2 раза больше, чем угол отклонения. В статье не указано, какой конкретно угол имеется в виду
2. Не указано, что отложено по оси ординат (амплитуда или размах, который в 2 раза больше), здесь также может быть ошибка в 2 раза. В оригинальной статье величина называется «double deviation», но неясно, что имеется в виду
3. Величина  $\nu$  равна половине расстояния между  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .
4. Погрешность указана только в конце статьи (10%), неизвестно, как она получена и какая на самом деле точность результата

## Список литературы

- [1] A. Einstein, W. J. de Haas, Experimental proof of the existence of Ampère's molecular currents (in English), Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings, 18 I, pp. 696–711 (1915).
- [2] В.Я.Френкель. УФН т.128, (1979) с.545.

- [3] S. J. Barnett: Gyromagnetic and Electron-Inertia Effects. In Rev. Mod. Phys. 7. 1935
- [4] Д.В.Сивухин, т.3, с.308
- [5] С.В.Вонсовский. Магнетизм. Магнитные свойства диа-, пара-, ферро-, антиферро и ферромагнетиков.  
– М.: Наука, 1971.