

Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 8: линейное программирование

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.27

(каноническое) Задача 32

(каноническое) Задача 33

$$P_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \left| \left\{ \begin{array}{ccc} (*_1) & 0 & \leq x_1 \leq 1 \\ (*_2) & \varepsilon x_1 & \leq x_2 \leq 1 - \varepsilon x_1 \\ (*_3) & \varepsilon x_2 & \leq x_3 \leq 1 - \varepsilon x_2 \end{array} \right. \right. \right\}.$$

Путь:

1. $\vec{x}_1 = (0, 0, 0) \in P_\varepsilon$:

$$(*_1) \quad 0 \leq 0 \leq 1$$

$$(*_2) \quad 0 \leq 0 \leq 1 - 0$$

$$(*_3) \quad 0 \leq 0 \leq 1 - 0$$

2. $\vec{x}_2 = (1, \varepsilon, \varepsilon^2) \in P_\varepsilon$:

$$(*_1) \quad 0 \leq 1 \leq 1$$

$$(*_2) \quad \varepsilon \leq \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

$$(*_3) \quad \varepsilon^2 \leq \varepsilon^2 \leq 1 - \varepsilon^2 \quad (\varepsilon^2 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2})$$

$$\text{Высота больше: } \varepsilon^2 > 0$$

3. $\vec{x}_3 = (1, 1 - \varepsilon, \varepsilon - \varepsilon^2) \in P_\varepsilon$:

$$(*_1) \quad 0 \leq 1 \leq 1$$

$$(*_2) \quad \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

$$(*_3) \quad \varepsilon - \varepsilon^2 \leq \varepsilon - \varepsilon^2 \leq 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \quad (2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 > 0, D = 4 - 8 < 0)$$

$$\text{Высота больше: } \varepsilon - \varepsilon^2 > \varepsilon^2 \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

4. $\vec{x}_4 = (0, 1, \varepsilon) \in P_\varepsilon$:

$$(*_1) \quad 0 \leq 0 \leq 1$$

$$(*_2) \quad 0 \leq 1 \leq 1$$

$$(*_3) \quad \varepsilon \leq \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

$$\text{Высота больше: } \varepsilon > \varepsilon - \varepsilon^2 \quad (\varepsilon > 0)$$

5. $\vec{x}_5 = (0, 1, 1 - \varepsilon) \in P_\varepsilon$:

$$(*_1) \quad 0 \leq 0 \leq 1$$

$$(*_2) \quad 0 \leq 1 \leq 1$$

$$(*_3) \quad \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

$$\text{Высота больше: } 1 - \varepsilon > \varepsilon \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

6. $\vec{x}_6 = (1, 1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon + \varepsilon^2) \in P_\varepsilon$:

$$(*_1) \quad 0 \leq 1 \leq 1$$

$$(*_2) \quad \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

$$(*_3) \quad \varepsilon - \varepsilon^2 \leq 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \leq 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \quad (2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 > 0, D = 4 - 8 < 0)$$

$$\text{Высота больше: } 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 > 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

7. $\vec{x}_7 = (1, \varepsilon, 1 - \varepsilon^2) \in P_\varepsilon$:

$$(*_1) \quad 0 \leq 1 \leq 1 \quad ()$$

$$(*_2) \quad \varepsilon \leq \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon > \frac{1}{2})$$

$$(*_3) \quad \varepsilon^2 \leq 1 - \varepsilon^2 \leq 1 - \varepsilon^2 \quad (\varepsilon^2 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2})$$

$$\text{Высота больше: } 1 - \varepsilon^2 > 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \quad (\varepsilon < \frac{1}{2})$$

8. $\vec{x}_8 = (0, 0, 1) \in P_\varepsilon$:

$$(*_1) \quad 0 \leq 0 \leq 1$$

$$(*_2) \quad 0 \leq 0 \leq 1$$

$$(*_3) \quad 0 \leq 1 \leq 1$$

$$\text{Высота больше: } 1 > 1 - \varepsilon^2 \quad (\varepsilon > 0)$$

(каноническое) Задача 34

$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{m,n}$. $P_1 \stackrel{\text{def}}{=} [\exists p \in \mathbb{R}^m: A^T p < 0]$. $P_2 \stackrel{\text{def}}{=} [\exists y \in \mathbb{R}^n: y \geq 0, y \neq 0, Ay = 0]$. Доказать: $\neg P_1 \Leftrightarrow P_2$

1. $e_i \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \begin{matrix} 0 & \dots & \underbrace{1}_i & \dots & 0 \end{matrix} \right\| \in \mathbb{R}^n \Rightarrow e \stackrel{\text{def}}{=} (e_1, \dots, e_n)$ — стандартный базис в \mathbb{R}^n . Скалярное произведение (\cdot, \cdot) — тоже стандартное, т.е. матрица Грама в e единичная, т.е. $\left(\left\| \begin{matrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{matrix} \right\| \right) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

2. Пусть P_2 .

- (a) Тогда $\exists y: Ay = 0, y \geq 0, y \neq 0$. Обозначим столбцы матрицы $A = \|\underline{b}_1 \quad \dots \quad \underline{b}_n\|$. $y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow y = \|y_1 \quad \dots \quad y_n\|^T$ Тогда $Ay = 0 \Leftrightarrow \|\underline{b}_1 \quad \dots \quad \underline{b}_n\| \cdot \left\| \begin{matrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{matrix} \right\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \underline{b}_i y_i \stackrel{(*)}{=} 0$. Условие $y \neq 0 \Rightarrow \exists i \in \overline{1, n}: y_i \neq 0$. Без ограничения общности это y_1 . Тогда в $(*)$ перенесем всё, кроме $y_1 \underline{b}_1$ в правую часть, и поделим на $y_1 \neq 0$: $\underline{b}_1 = -\frac{y_2}{y_1} \underline{b}_2 - \dots - \frac{y_n}{y_1} \underline{b}_n$
- (b) Рассмотрим $A^T p = \left\| \begin{matrix} \underline{b}_1^T \\ \dots \\ \underline{b}_n^T \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} p_1 \\ \dots \\ p_m \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (\underline{b}_1, p) \\ \dots \\ (\underline{b}_n, p) \end{matrix} \right\|$
- (c) Предположим, что P_1 , т.е. $\exists p: \forall i \in \overline{1, n} \hookrightarrow (b_i, p) < 0$. Рассмотрим $(b_1, p) = (-\frac{y_2}{y_1} \underline{b}_2 - \dots - \frac{y_n}{y_1} \underline{b}_n, p) = -\frac{y_2}{y_1} (\underline{b}_2, p) - \dots - \frac{y_n}{y_1} (\underline{b}_n, p)$. Поскольку $(b_i, p) < 0, \frac{y_i}{y_1} \geq 0$, то $(b_1, p) \geq 0$ — противоречие.
- (d) Значит, $\neg P_1$.

(каноническое) Задача 35

(каноническое) Задача 36

(Тарасов, лекция 2014.04.01)

Фиксируем $k \in \mathbb{N}, \{t_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$. Определим $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4: \vec{r}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} t^4 & t^3 & t^2 & t \end{pmatrix}^T$. Рассмотрим точки $\vec{x}_i = \vec{r}(t_i)$. Рассмотрим $G \stackrel{\text{def}}{=} \text{conv}(\{\vec{x}_i\}_{i=1}^k)$ — выпуклую оболочку этих точек. Фиксируем $i_1 \neq i_2 \in \overline{1, k}$. Докажем, что $\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}$ — вершины G , соединенные ребром $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists$ гиперплоскость $\pi: (\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2} \in \pi)$ и (многогранник G лежит по одну сторону от π).

1. Определим многочлен $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} (t - t_{i_1})^2 \cdot (t - t_{i_2})^2 \equiv t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$
2. Определим гиперплоскость $\pi. \mathbb{R}^4 \ni \vec{x} \equiv \|x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\|^T \in \pi \Leftrightarrow F(\vec{x}) \equiv x_1 + a_3 x_2 + a_2 x_3 + a_1 x_4 + a_0 = 0$.
3. Тогда $F(\vec{r}(t)) = P(t): F(\vec{r}(t)) = F(t^4, t^3, t^2, t) = t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$
4. t_{i_1} и t_{i_2} — корни $P(t)$, откуда $P(t_{i_1}) = P(t_{i_2}) = 0$, значит, $F(\vec{x}_{i_1}) = F(\vec{x}_{i_2}) = 0$, значит, $\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2} \in \pi$
5. Фиксируем $t \in \mathbb{R}$. Тогда $F(\vec{r}(t)) = P(t) \geq 0$. Значит, все точки $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^k$ лежат по одну сторону от π . Значит, G лежит по одну сторону
6. Пусть $t: \vec{r}(t) \in \pi \Leftrightarrow F(\vec{r}(t)) = 0 \Leftrightarrow P(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{t_{i_1}, t_{i_2}\}$

■

(каноническое) Задача 37