Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 7: потоки

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.27

Определения

(сюда будут ссылки)
$(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}, s, t)$ — транспортная сеть $\Leftrightarrow$

1. $c(u,v) \geqslant 0$
2. $\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow \big((u,v) \in E \Leftrightarrow c(u,v) > 0\big)$

$f\colon V^2 \to \mathbb{Z}$ — поток в этой сети $\Leftrightarrow$

1. $\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow \big(f(u,v) \leqslant c(u,v)\big)$
2. $\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow \big(f(u,v) = -f(v,u)\big)$
3. $\forall u \in V^2 \setminus \{s,t\} \hookrightarrow f(u,V) = 0$

Упражнение 0

1. Пусть $(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. Пусть $(u,v) \notin E$, $(v,u) \notin E$. Тогда $f(u,v) = f(v,u) = 0$. $(u,v) \notin E \overset{2}{\Rightarrow} c(u,v) = 0$. $(v,u) \notin E \overset{2}{\Rightarrow} c(v,u) = 0$. Но $-0 = -c(v,u) \overset{1}{\leqslant} -f(v,u) \overset{2}{=} \underline{f(u,v)} \overset{1}{\leqslant} c(u,v) = 0$, откуда $f(u,v) = f(v,u) = 0$ ■

Упражнение 1

Пусть $(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. Фиксируем $u \notin \{s,t\}$. Пусть $L = \{v \in V \big| (v,u) \in E\}$, $R = \{v \in V \big| (u,v) \in E\}$ — вершины, из которых (в которые, соответственно) есть ребра в фиксированную. Тогда $f(L,u) = f(u,R)$.
Найдем

$$0 \overset{3}{=} f(u,V) \equiv \sum_{v\in V} f(u,v) = \underbrace{\sum_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E\\(v,u)\in E}} f(u,v)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E\\(v,u)\notin E}} f(u,v)}_{S_2} + \underbrace{\sum_{\substack{v\in V\\(u,v)\notin E\\(v,u)\in E}} f(u,v)}_{S_3} + \underbrace{\sum_{\substack{v\in V\\(u,v)\notin E\\(v,u)\notin E}} f(u,v)}_{S_4}$$

$(u,v) \notin E$, $(v,u) \notin E \overset{1}{\Rightarrow} f(u,v) = 0$, поэтому $S_4 = 0$. Рассмотрим $S_1 = \sum\limits_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E\\(v,u)\in E}} f(u,v) \overset{2}{=} \sum\limits_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E\\(v,u)\in E}} (-f(v,u)) = -\sum\limits_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E\\(v,u)\in E}} f(v,u) \boxed{=}$.

Переобозначим вершины, получим $\boxed{=} -\sum\limits_{\substack{u\in V\\(v,u)\in E\\(u,v)\in E}} f(u,v) = -S_1$, откуда $S_1 = 0$.

Рассмотрим $f(L,u) = \sum\limits_{(v,u)\in E} f(v,u) = -\sum\limits_{(v,u)\in E} f(u,v) = -(S_1 + S_3) \overset{S_1=0}{\equiv} -S_3$

Рассмотрим $f(u,R) = \sum\limits_{(u,v)\in E} f(u,v) = S_1 + S_2 \overset{S_1=0}{\equiv} S_2$.

Из $(*)$ получаем $0 \underset{S_4=0}{\overset{S_1=0}{\equiv}} S_2 + S_3$, откуда $S_2 = -S_3$, и $f(L,u) = f(u,R)$ ■

Упражнение 2

Пусть $(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. f — поток в ней.
Рассмотрим $A \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\substack{u\in V\\ v\in V}} f(u,v)$. Переобозначим, получим $A = \sum\limits_{\substack{v\in V\\ u\in V}} f(v,u) \overset{2}{=} -\sum\limits_{\substack{v\in V\\ u\in V}} f(u,v) = -A$, откуда $A=0$
Но $A = \underbrace{\sum\limits_{\substack{u=s\\ v\in V}} f(u,v)}_{S_1} + \underbrace{\sum\limits_{\substack{u=t\\ v\in V}} f(u,v)}_{S_2} + \underbrace{\sum\limits_{\substack{u\in V\setminus\{s,t\}\\ v\in V}} f(u,v)}_{S_3}$.
Рассмотрим $S_3 = \sum\limits_{u\in V\setminus\{s,t\}} \underline{\sum\limits_{v\in V} f(u,v)}$. По свойству 3 каждая подчеркнутая часть равна 0, и $S_3 = 0$
Рассмотрим $S_1 = \sum\limits_{v\in V} f(s,v) \equiv |f|$
Рассмотрим $S_2 = \sum\limits_{v\in V} f(t,v) \overset{2}{=} -\sum\limits_{v\in V} f(v,t) = -f(V,t)$.
Поскольку $0 = A = S_1 + S_2$, получаем $|f| = f(V,t)\ \blacksquare$

Задача 1

Пусть $(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. f — поток в ней.

1. Пусть $X \subseteq V$. Рассмотрим $A \overset{\text{def}}{=} f(X,X) \equiv \sum\limits_{\substack{u\in X\\ v\in X}} f(u,v)$. Переобозначим, получим
$$A = \sum_{\substack{v\in X\\ u\in X}} f(v,u) \overset{2}{=} -\sum_{\substack{v\in X\\ u\in X}} f(u,v) = -A,$$
откуда $A = 0\ \blacksquare$

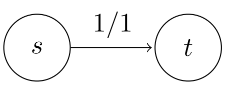
2. Пусть $X,\ Y \subseteq V$. Рассмотрим $f(X,Y) \equiv \sum\limits_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} f(x,y) \overset{2}{=} -\sum\limits_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} f(y,x) \equiv -f(Y,X)\ \blacksquare$

3. Пусть $X,\ Y,\ Z \subseteq V,\ X\cap Y = \varnothing$. Рассмотрим $f(X\cup Y, Z) \overset{(*)}{\equiv} \sum\limits_{\substack{u\in X\cup Y\\ v\in Z}} f(u,v) = \underbrace{\sum\limits_{\substack{u\in X\\ u\in Y\\ v\in Z}} f(u,v)}_{S_1} + \underbrace{\sum\limits_{\substack{u\in X\\ u\notin Y\\ v\in Z}} f(u,v)}_{S_2} + \underbrace{\sum\limits_{\substack{u\notin X\\ u\in Y\\ v\in Z}} f(u,v)}_{S_3}$.
$S_1 = 0$, так как $u\in X \wedge u\in Y \Leftrightarrow u \in X\cap Y \Leftrightarrow u\in\varnothing$
По определению, $f(X,Z) = \sum\limits_{\substack{u\in X\\ u\in Y\\ v\in Z}} f(u,v) + \sum\limits_{\substack{u\in X\\ u\notin Y\\ v\in Z}} f(u,v) \equiv S_1 + S_2 \overset{S_1=0}{=} S_2$
По определению, $f(Y,Z) = \sum\limits_{\substack{u\in Y\\ u\in X\\ v\in Z}} f(u,v) + \sum\limits_{\substack{u\in Y\\ u\notin X\\ v\in Z}} f(u,v) \equiv S_1 + S_3 \overset{S_1=0}{=} S_3$
Тогда из $(*)$ получаем $f(X\cup Y, Z) = S_2 + S_3 = f(X,Z) + f(Y,Z)$.

4. Пусть $X,\ Y,\ Z \subseteq V,\ X\cap Y = \varnothing$. Тогда $f(Z, X\cup Y) \overset{2}{=} -f(X\cup Y, Z) \overset{3}{=} -(f(X,Z) + f(Y,Z) \equiv -f(X,Z) - f(Y,Z) \overset{2}{=} f(Z,X) + f(Z,Y)$

Задача 2

Нет, не обязательно. Пример. Рассмотрим $(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. f — поток в ней:



Определим $V \supseteq X \overset{\text{def}}{=} \{s\}$, $Y \overset{\text{def}}{=} X$. Тогда $A = f(X,Y) \overset{X=Y}{\equiv} f(X,X) \overset{1}{=} 0$.
Рассмотрим $B = -f(V-X, Y) \equiv f(\{t\},\{s\}) = -\sum\limits_{\substack{u\in\{t\}\\ v\in\{s\}}} f(u,v) \equiv -f(t,s) \overset{2}{=} f(s,t) = 1$
Получаем $A = 0 \neq 1 = B\ \blacksquare$

Упражнение 3

Пусть $(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. f_1 и f_2 — потоки, для которых выполнено 3, 2 (заметим, что функция c не участвует в этой части определения).
Определим функцию $f\colon V^2 \to \mathbb{R}$ как $f(u,v) \overset{\text{def}}{=} f_1(u,v) + f_2(u,v)$. По определению, f — поток в данной транспортной сети $\Leftrightarrow$

3. 3. Фиксируем $u \in V$. Рассмотрим $f(u,V) = \sum\limits_{v\in V} f(u,v) = \sum\limits_{v\in V} \left[f_1(u,v) + f_2(u,v)\right] \equiv \sum\limits_{v\in V} f_1(u,v) + \sum\limits_{v\in V} f_2(u,v) \equiv \cancelto{0}{f_1(u,V)} + \cancelto{0}{f_2(u,V)} = 0$ — выполнено всегда (зачеркнуто по свойству 3).

2. 2. Фиксируем $(u, v) \in V^2$. Рассмотрим $f(u,v) \equiv f_1(u,v) + f_2(u,v) \overset{2}{=} -f_1(v,u) - f_2(v,u) \equiv -(f_1(v,u) + f_2(v,u)) = -f(v,u)$ — выполнено всегда.

1. 1. Нужно: $\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow f(u,v) \leqslant c(u,v)$. Поэтому третье свойство выполнено для $f \Leftrightarrow \forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow f_1(u,v) + f_2(u,v) \leqslant c(u,v)$.

Поэтому сумма потоков $f_1 + f_2$ — поток $\Leftrightarrow \boxed{\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow f_1(u,v) + f_2(u,v) \leqslant c(u,v)}$.

Упражнение 4

Пусть $N = (G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. Пусть f_1 — поток в ней. Пусть $N' = (G'(u,v), c', s, t)$ — остаточная сеть для N и f_1. Пусть найден увеличивающий путь в остаточной сети, т.е. последовательность вершин $s \equiv v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_{k-1} \to v_k \equiv t$, такая, что $M \overset{\text{def}}{=} \min\limits_{i \in \overline{0, k-1}} c'(v_i, v_{i+1}) > 0$. Считаем путь простым (если путь не простой, выкенем цикл, получится простой путь). Определим функцию $f_2(u,v) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \begin{cases} M, & (v_i, v_{i+1}) = (u,v) \\ -M, & (v_i, v_{i+1}) = (v,u) \end{cases}$. Поскольку путь простой, то каждое (неориентированное) ребро встречается в нем только один раз. Значит, в сумме максимум один элемент ненулевой, и получаем $f_2(u,v) = \begin{cases} M, & \exists i\colon (u,v) = (v_i, v_{i+1}) \\ -M, & \exists i\colon (v,u) = (v_i, v_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$:

1. $f_2(u,v) = \begin{cases} M, & \exists i\colon (u,v) = (v_i, v_{i+1}) \\ -M, & \exists i\colon (v,u) = (v_i, v_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} -M, & \exists i\colon (v,u) = (v_i, v_{i+1}) \\ M, & \exists i\colon (u,v) = (v_i, v_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = -\begin{cases} M, & \exists i\colon (v,u) = (v_i, v_{i+1}) \\ -M, & \exists i\colon (u,v) = (v_i, v_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} =$
   $= -f_2(v,u)$, поэтому для f_2 и N выполнено свойство 2

2. Фиксируем $u \in V \setminus \{t, s\}$.

   (a) Пусть u не входит в увеличивающий путь. Тогда $\forall v \in V\ \forall i \in \overline{0, k-1} \hookrightarrow (u,v) \neq (v_i, v_{i+1})$, значит, $f_2(u,v) = 0$, и $\sum\limits_{v \in V} f_2(u,v) = 0$.

   (b) Пусть u входит в увеличивающий путь. $u \neq s \wedge u \neq t$, поэтому u — не первая, и не последняя вершина в пути. Значит, $\exists v_1, v_2 \colon (v_1, u),\ (u, v_2)$ — смежные ребра из пути, и других ребер из пути, инцидентных u нет (путь простой). Тогда $\sum\limits_{v \in V} f_2(u,v) = 0 + \ldots + 0 + f_2(u, v_1) + f_2(u, v_2) + 0 + \ldots + 0 = (-M) + M = 0$ ■

   Получаем для f_2 свойство 3

3. $f_2(u,v) = \begin{cases} M, & \exists i\colon (u,v) = (v_i, v_{i+1}) & (1) \\ -M, & \exists i\colon (v,u) = (v_i, v_{i+1}) & (2) \\ 0, & \text{иначе} & (3) \end{cases}$

   (1). $\exists i\colon (u,v) = (v_i, v_{i+1})$. $f_2(u,v) = M = \min\limits_{j \in \overline{0, k-1}} c'(v_j, v_{j+1}) \leqslant c'(v_i, v_{i+1})$ (минимум меньше каждого)

   (2). $\exists i\colon (v,u) = (v_i, v_{i+1})$. $f_2(u,v) = -M < 0 \leqslant c'(u,v)$ (пропускная способность $c' = c - f_1$ неотрицательна, так как f_1 — поток в N, откуда $f_1 \leqslant c$).

   (3). $f_2(u,v) = 0 \leqslant c'(u,v)$ (пропускная способность неотрицательна)

   Получаем, что для f_2 выполнено свойство 1 для сети N'

Получаем, что f_2 — поток в N'. Докажем, что $f_1 + f_2$ — поток в N. По это выполнено, если $\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow f_1(u,v) + f_2(u,v) \leqslant c(u,v)$. Фиксируем $(u,v) \in V^2$. f_2 — поток в N', поэтому $f_2(u,v) \leqslant c'(u,v) \equiv c(u,v) - f_1(u,v)$, поэтому $f_1(u,v) + f_2(u,v) \leqslant f_1(u,v) + c(u,v) - f_1(u,v) \equiv c(u,v)$ ■
Докажем, что $f_1 + f_2$ — поток в исходной сети N после этой итерации ФФ: алгоритм добавляет к $f_1(v_i, v_{i+1})$ величину M, вычитает из $f_1(v_{i+1}, v_i)$ M. Рассмотрим разность $(f_1 + f_2) - f_1 = f_2$, которая как равна этой величине (M в случае (v_i, v_{i+1}) в пути, $-M$ в случае (v_{i+1}, v_i) в пути, 0 иначе) ■