Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 2: Арифметические операции и линейные рекуррентные последовательности

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.02.20

Упражнение 3

Определим $A_d \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{array} \right\|$

Докажем по индукции $P(d) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\det(A_d - \lambda E) = (-1)^d(\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - c_2\lambda^{d-2} - ... - c_{d-1}\lambda - c_d)\right]$

1. База. $d = 3 \Rightarrow \det(A_3 - \lambda E) = \left| \begin{array}{ccc} (c_1-\lambda) & c_2 & c_3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{array} \right| = c_1\lambda^2 - \lambda^3 + c_3 + c_2\lambda = (-1)^3(\lambda^3 - c_1\lambda^2 - c_2\lambda - c_3) \Rightarrow P(3)$ ■

2. Пусть $\underline{P(d-1)}$. Рассмотрим $\det(A_d - \lambda E) = \left| \begin{array}{ccccc} (c_1-\lambda) & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{array} \right| \boxed{=}$.

   Разложим по последнему столбцу: $\boxed{=} -\lambda \underbrace{\left| \begin{array}{cccc} (c_1-\lambda) & c_2 & ... & c_{d-1} \\ 1 & -\lambda & ... & 0 \\ & ... & & \\ 0 & 0 & ... & -\lambda \end{array} \right|}_{\det(A_{d-1}-\lambda E)} + (-1)^{d+1}c_d \underbrace{\left| \begin{array}{ccccc} 1 & -\lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & ... & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{array} \right|}_{=1,\ \text{верхн.-треуг.}} \stackrel{P(d-1)}{=}$

$\stackrel{P(d-1)}{=} -\lambda(-1)^{d-1}(\lambda^{d-1} - c_1\lambda^{d-2} - ... - c_{d-2}\lambda - c_{d-1}) - (-1)^d c_d = (-1)^d(\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - ... - c_{d-1}\lambda - c_d)$. Получаем $\underline{P(d)}$ ■

Задача 1*

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ЛРП порядка d: $a_n = \sum\limits_{i=1}^{d} c_i a_{n-i}$. Выпишем матрицу $A = \left\| \begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{array} \right\|$. Определим $\vec{a_n} = \left\| \begin{array}{c} a_n \\ a_{n-1} \\ ... \\ a_{n-d+1} \end{array} \right\|$. Тогда $\vec{a_n} = A^{n-d}\vec{a}_d$. Обозначим $\vec{a} = \vec{a}_d$. По условию существуют d различных корней $\lambda \in \{\lambda_1, ..., \lambda_d\}$ многочлена $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$. Значит, существует матрица $S = \left\| \begin{array}{ccc} s_{11} & ... & s_{1d} \\ ... & & ... \\ s_{d1} & ... & s_{dd} \end{array} \right\|$, такая что ее i-й столбец является собственным вектором $\vec{h}_i$ матрицы A, соответствующим собственному значению λ_i, и $A' = S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_d)$. S^{-1} существует, так как $\vec{h}_i$ — линейно независимы. Выразим $A = SA'S^{-1}$,

рассмотрим $A^n = \underbrace{SA'\cancelto{0}{S^{-1}\cdot S}A'S^{-1}\cdot ... \cdot SA'\cancelto{0}{S^{-1}\cdot S}A'S^{-1}}_{n} = SA'^nS^{-1}$. Определим $\vec{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_1 = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{array} \right\| \in \mathbb{R}^d$. Заметим, что $a_n = \vec{\xi}^T\vec{a}_n$, откуда $a_n = \vec{\xi}^T SA'^{n-d}S^{-1}\vec{a}$. Найдем $\vec{\xi}^T S = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & ... & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} s_{11} & ... & s_{1d} \\ ... & & ... \\ s_{d1} & ... & s_{dd} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1d} \end{array} \right\|$, строка

$\vec{\xi}^T SA'^{n-d} = \left\| \begin{array}{cccc} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1d} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1^{n-d} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-d} & ... & 0 \\ & & ... & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_d^{n-d} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda_1^{n-d}s_{11} & ... & \lambda_d^{n-d}s_{1d} \end{array} \right\|$,

i-й элемент этой строки $(\vec{\xi}^T SA'^{n-d})_i = \lambda_i^{n-d}s_{1i}$

Найдем $S^{-1}\vec{a} = \begin{Vmatrix} s'_{11} & \dots & s'_{1d} \\ \dots & & \dots \\ s'_{d1} & \dots & s'_{dd} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_d \\ a_{d-1} \\ \dots \\ a_1 \end{Vmatrix}$ (s'_{ij} — элементы матрицы S^{-1}),

i-й элемент в этом столбце равен $(S^{-1}\vec{a})_i = \sum\limits_{j=1}^{d} a_{d-j+1}s'_{ij}$

Получаем $a_n = \vec{\xi}^T SA'^{n-d}S^{-1}\vec{a} = \sum\limits_{i=1}^{d}(\vec{\xi}^T SA'^{n-d})_i(S^{-1}\vec{a})_i = \sum\limits_{i=1}^{d}\lambda_i^{n-d}s_{1i}\sum\limits_{j=1}^{d}a_{d-j+1}s'_{ij} \stackrel{?}{=} \sum\limits_{i=1}^{d}k_i\lambda_i^n$. Последнее равенство верно: в случае $\lambda_i = 0$ можно взять любое k_i (например, $k_i = 0$), иначе определим $k_i \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_i^{-d}s_{1i}\sum\limits_{j=1}^{d}a_{d-j+1}s'_{ij}$

Итак, найдены $\{k_i\}_{i=1}^d$: $a_n = k_1\lambda_1^n + \dots + k_d\lambda_d^n$ ■

Упражнение 6

1. $F(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty}F_iz^i$. Рассмотрим $z + zF(z) + z^2F(z) = z + \sum\limits_{i=0}^{\infty}F_iz^{i+1} + z^2\sum\limits_{i=0}^{\infty}F_iz^{i+2} = z + \sum\limits_{i=1}^{\infty}F_{i-1}z^i + \sum\limits_{i=2}^{\infty}F_{i-2}z^i = z + \sum\limits_{i=0}^{\infty}F_{i-1}z^i + \sum\limits_{i=0}^{\infty}F_{i-2}z^i - z = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\underbrace{(F_{i-1}+F_{i-2})}_{F_i}z^i \equiv F(z)$ ■ (ряды сходятся абсолютно)

2. Выразим из $F(z) = z + zF(z) + z^2F(z) \Rightarrow F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$. Преобразуем $(1 - z - z^2) = -(z^2 + z - 1) = -(z+\phi)(z+\hat{\phi})$. $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, поэтому $\phi + \hat{\phi} = 1$, $\phi\hat{\phi} = -1$, $\phi - \hat{\phi} = \sqrt{5}$. Рассмотрим $\underline{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi z} - \frac{1}{1-\hat{\phi}z}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\hat{\phi}z-1+\phi z}{(1-\phi z)(1-\hat{\phi}z)} = \underline{\frac{z}{(1-\phi z)(1-\hat{\phi}z)}} = \frac{z}{1+\phi\hat{\phi}z^2-(\phi+\hat{\phi})} = \frac{z}{1-z-z^2} = \underline{F(z)}$ ■

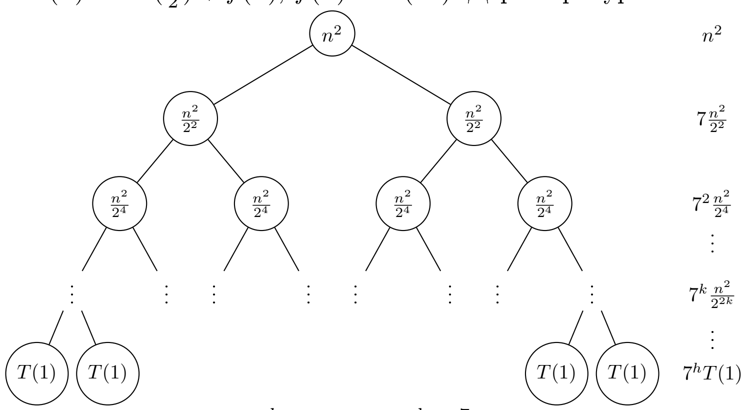
3. $F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi z} - \frac{1}{1-\hat{\phi}z}\right) \stackrel{\text{Тейлор}}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\sum\limits_{i=0}^{\infty}(\phi z)^i - \frac{1}{\sqrt{5}}\sum\limits_{i=0}^{\infty}(\hat{\phi}z)^i = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum\limits_{i=0}^{\infty}(\phi^i - \hat{\phi}^i)z^i$ ■

4. Рассмотрим $F(z) - F(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(\phi^i - \hat{\phi}^i)z^i - \sum\limits_{i=0}^{\infty}F_iz^i = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\left[(\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i) - F_i)z^i\right]$ — степенной ряд с нулевой суммой $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ коэффициенты нулевые: $F_i = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i)$. $|\hat{\phi}| = \frac{|1-\sqrt{5}|}{2} < 1 \Rightarrow F_i \in \frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^i - \varepsilon, \phi^i + \varepsilon]$, $\varepsilon < 1$. $\frac{2\varepsilon}{\sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$, поэтому в этом отрезке содержится только одно целое число. Значит, F_i — ближайшее целое к $\frac{\phi^i}{\sqrt{5}}$

5. Рассмотрим $\Delta = F_{i+2} - \phi^i = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{i+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\phi}^{i+2} - \phi^i = \phi^i(\frac{\phi^2}{\sqrt{5}} - 1) - \frac{\hat{\phi}^{i+2}}{\sqrt{5}}$. $\hat{\phi}^{i+2} \leqslant \hat{\phi}^2$, $\phi^i \geqslant 1$, $\frac{\phi^2}{\sqrt{5}} > 1$, поэтому $\Delta \geqslant (\frac{\phi^2}{\sqrt{5}} - 1) - \frac{\hat{\phi}^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2 - (\sqrt{5}-1)^2}{4\sqrt{5}} - 1 = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} - 1 = 0$ ■

(каноническое) Задача 6

$T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + f(n)$, $f(n) = O(n^2)$. Дерево рекурсии:



Высота дерева $h = \log_2 n$.
Из определения O $\exists C > 0\, \exists n_0\colon \forall n \geqslant n_0\ f(n) \leqslant Cn^2$
$T(n) = \sum\limits_{k=0}^{h-1}7^kf(\frac{n}{2^k}) + 7^hT(1) \leqslant Cn^2\sum\limits_{k=0}^{h-1}(\frac{7}{4})^k + 7^hT(1) = Cn^2\frac{(7/4)^{h-1}-1}{7/4-1} + 7^hT(1) = C_1n^2((7/4)^{\log_2 n} - C_2) + 7^hT(1) = C_1n^2n^{\log_2\frac{7}{4}} - C_3n^2 + 7^hT(1) = C_1n^{\log_2 7} - C_3n^2 + 7^hT(1)$.
Последнее слагаемое $7^hT(1) = 7^{\log_2 n}T(1) = Cn^{\log_2 7}$.
Поэтому $T(n) \leqslant C_4n^{\log_2 7} - C_3n^2 \stackrel{\log_2 7 > 2}{=} O(n^{\log_2 7})$

Оценка снизу $T(n) \geqslant 7^hT(1) = O(n^{\log_2 7})$, откуда
Ответ: $\boxed{T(n) = \Theta(n^{\log_2 7})}$

(каноническое) Задача 7

Вход: точки $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$.

Алгоритм: считаем массив квадратов расстояний $r_i^2 \overset{\text{def}}{=} x_i^2 + y_i^2$. Ищем медиану=ответ r_m в массиве за $O(n)$

```
for i := 1 to n do
 | R[i] := X[i] * X[i] + Y[i] * Y[i] → t1
end
Res := Median(R, 1, n) → t2
Res := Sqrt(Res)→ t3
```

Более формально:

1. $D_\varepsilon(\vec{r}_0) \overset{\text{def}}{=} \{\vec{r} \in \mathbb{R}^2 \big| ||\vec{r} - \vec{r}_0|| \leqslant \varepsilon\}$ — ε-шар. Количество входых точек внутри ε-шара $N(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} |D_\varepsilon(\vec{0}) \cap \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n|$.
   Условие: $P(r) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left[N(r) \geqslant \frac{n}{2}\right]$ — в шаре с центром в $(0,0)$ не меньше половины входных точек.
   Задача: найти $r_m = \inf\limits_{\substack{r\in\mathbb{R}_+ \\ P(r)}} r$

2. Если r_m — решение задачи, то $\exists i$: $r_m = r_i$ (одна из точек лежит на границе шара).
   Пусть иначе. Поскольку $n > 0$, из условия $P(r)$ следует, что внутри шара есть хотя бы одна точка. Выберем из них точку с максимальным r_i. Из предположения получаем $r_i < r_m$. Рассмотрим круг меньшего радиуса $D_{r_i}(\vec{0})$, который содержит столько же точек, получаем противоречие с $(*)$ (не inf).
   Таким образом, inf равен min по входным точкам: $r_m = \min\limits_{\substack{i=1 \\ P(r_i)}}^{n} r_i$.

3. Медиана массива $(r_1, ..., r_n)$ — минимальное r_j в массиве, такое что $\left|\{i \big| r_i \leqslant r_j\}\right| \geqslant \frac{n}{2}$, что равносильно $P(r_j)$. Поэтому медиана $r_j = r_m$, т.е. она является ответом. Поэтому алгоритм корректен.

4. В алгоритме используется массив квадратов расстояний до $\vec{0}$: $(r_1^2, ..., r_n^2)$, но это не изменяет ответ, так как $r_i < r_j \Leftrightarrow r_i^2 < r_j^2$, $r_i = r_j \Leftrightarrow r_i^2 = r_j^2$ для неотрицательных r_i

5. Время работы: $T(n) = nt_1 + t_2 + t_3$. t_1 — константа (модель RAM), $t_2 = O(n)$ — доказано на лекции, $t_3 = O(\log n)$ — бинпоиск корня в модели RAM. Получаем $T(n) = O(n) + O(n) + O(\log n) = O(n)$.

(каноническое) Задача 9

Пусть $\Sigma = \{\underbrace{0}_{\sigma_0}, \underbrace{1}_{\sigma_1}, \underbrace{2}_{\sigma_2}\}$, $\Sigma^* \supset G = \{w \big| \exists n\colon w = w_1...w_n, \underbrace{\forall i \in \overline{1, n-1} \hookrightarrow |w_i - w_{i+1}|}_{(*)} \leqslant 1\}$. Пусть $g_n = |\{w \in L \big| |w| = n\}|$ — количество слов длины n в языке G. Определим $g_n^i = |\{w \in G \big| |w| = n,\ w_n = \sigma_i\}|$ — количество слов длины n из G, оканчивающихся на i-й символ. Поскольку каждое слово оканчивается на один из символов σ_i, получаем $g_n = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$.

1. Найдем рекуррентное соотношение для последовательностей g_n^i. Получим слово $w \in G$ длины $n+1$: $w = w_1...w_nw_{n+1}$. Поскольку слово из языка, для него верно $(*)$. Но это условие верно и для подслова $w_1...w_n$. Рассмотрим последний символ слова w — w_{n+1}:
   (a) $w_{n+1} = 0$. Но тогда предпоследний символ слова w — w_n может быть 0 либо 1 для выполнения $(*)$. Слово $w_1...w_n$ может быть получено g_n^0 и g_n^1 способами соответственно. Поэтому количество способов получить w в этом случае $g_{n+1}^0 = g_n^0 + g_n^1$
   (b) $w_{n+1} = 1$. Тогда $w_n \in \{0, 1, 2\}$, и $g_{n+1}^1 = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$.
   (c) $w_{n+1} = 2$. Тогда $w_n \in \{1, 2\}$, и $g_{n+1}^2 = g_n^1 + g_n^2$.

2. Определим вектор $\mathbb{R}^3 \ni \vec{g_n} = \left\|\begin{matrix} g_n^0 \\ g_n^1 \\ g_n^2 \end{matrix}\right\|$. Определим матрицу $A \overset{\text{def}}{=} \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|$.
   Снова рассмотрим соотношения $\begin{cases} 1a \\ 1b \\ 1c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_{n+1}^0 = g_n^0 + g_n^1 \\ g_{n+1}^1 = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2 \\ g_{n+1}^2 = g_n^1 + g_n^2 \end{cases}$.
   Заметим, что в матричном виде они записываются как $\vec{g_{n+1}} = A\vec{g_n}$ $(**)$

3. Найдем $g_1^0 = g_1^1 = g_1^2 = 1$, так как слово из одного символа удовлетворяет $(*)$. Определим $\vec{\xi} \overset{\text{def}}{=} \vec{g}_1 = \left\|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right\|$.
   Тогда, применяя $(**)$ *(доказывается тривиально по индукции)* получаем $\vec{g_n} = A^{n-1}\vec{\xi}$

4. $g_n = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$. Но это равно $g_n = (\vec{\xi}, A^{n-1}\vec{\xi}) = \vec{\xi}^T A^{n-1}\vec{\xi}$

5. Найдем ОНБ, в котором A имеет диагональный вид

(a) Характеристический многочлен $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ 1 & (1-\lambda) & 1 \\ 0 & 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda) = (1-\lambda)\cdot(1+\lambda^2-2\lambda-2) = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2-2\lambda-1)$. Корни характеристического уравнения $\lambda = 1$ и $\lambda \in \frac{2\pm\sqrt{4\cdot 2}}{2} = 1\pm\sqrt{2}$. Далее ищем собственные векторы.

(b) $(\lambda=\lambda_1=1)$. $A - 1\cdot E = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|$, откуда $\vec{h}_1^0 = \left\| \begin{matrix} -1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|^T$, $\vec{h}_1 = \left\| \begin{matrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right\|$

(c) $(\lambda=\lambda_2=1+\sqrt{2})$. $A-(1+\sqrt{2})\cdot E = \left\| \begin{matrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{matrix} \right\| \sim$

$\sim \left\| \begin{matrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{matrix} \right\|$, откуда $\vec{h}_2^0 = \left\| \begin{matrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{matrix} \right\|^T$, $\vec{h}_2 = \left\| \begin{matrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{matrix} \right\| \perp \vec{h}_1$

(d) $(\lambda=\lambda_3=1-\sqrt{2})$. $A-(1-\sqrt{2})\cdot E = \left\| \begin{matrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{matrix} \right\|$,

откуда $\vec{h}_3^0 = \left\| \begin{matrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{matrix} \right\|$, $\vec{h}_3 = \left\| \begin{matrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{matrix} \right\| \perp \vec{h}_1, \vec{h}_2$

Получаем $S \overset{\text{def}}{=} \left\| \begin{matrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/2 & 1/2 \end{matrix} \right\|$ — ортогональная матрица перехода к базису из собственных векторов.

Тогда $A' = S^{-1}AS \Rightarrow A = SA'S^{-1} \equiv SA'S^T$, Но $A' = \operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & (1-\sqrt{2}) \end{matrix} \right\|$, поэтому

$A'^n = \operatorname{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)$

6. $A^n = \underbrace{SA'\cancelto{E}{S^T\cdot S}A'S^T\cdot ...\cdot SA'\cancelto{E}{S^T\cdot S}A'S^T}_{n} = SA'^nS^T = S\operatorname{diag}(\lambda_1^n,\lambda_2^n,\lambda_3^n)S^T$

7. Вернемся к $g_n = \vec{\xi}^T A^{n-1}\vec{\xi} = \vec{\xi}^T S\operatorname{diag}(\lambda_1^{n-1},\lambda_2^{n-1},\lambda_3^{n-1})S^T\vec{\xi} = \boxed{\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right]}$

8. Попробуем найти рекуррентное соотношение следующим образом. Предположим, что последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ЛРП порядка d, причем все корни характеристического многочлена ее матрицы вещественные и различные. Тогда (Задача 1) $\exists k_1,...,k_d\colon g_n = k_1\lambda_1^n + ... + k_2\lambda_d^n$. Сравнивая с выражением выше, получаем $d=2$, т.е. ищем рекуррентное соотношение вида $g_n = c_1g_{n-1} + c_2g_{n-2}$. Подставляя выражение 7 для g_n, получаем $(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1} = c_1(1+\sqrt{2})^n + c_1(1-\sqrt{2})^n + c_2(1+\sqrt{2})^{n-1} + c_2(1-\sqrt{2})^{n-1} \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})^{n-1}(3+2\sqrt{2} - c_1(1+\sqrt{2}) - c_2) + (1-\sqrt{2})^{n-1}(3 - 2\sqrt{2} - c_1(1-\sqrt{2}) - c_2) = 0$, что будет выполнено при любых n при $\begin{cases} (1+\sqrt{2})c_1 + c_2 = 3+2\sqrt{2} \\ (1-\sqrt{2})c_1 + c_2 = 3-2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$,

т.е. $\boxed{g_n = 2g_{n-1} + g_{n-2}}$

9. Вычилим $g_{2014} =$ 981693600999550323090155724724604166206307282249475331275970036271959743594653852822130092567185880159936393527462287750016250695661904890040871818104141322231823681871534548437613653786249727278524772049101221980723260798049487196478898084281410903316184242233959626032341783654281590164274968957358907008897464130684810251721398502353076235479764952147587144996994020086632348254059497848670892359736688575014218752348522250309728792601270069507399073980145889604183799360532629470024452263296285524185896678263179871055799742335137424848561645062239401242636614466274504399590204892388314716770219822371941920075947172971006744080180803986367207928150682237336923446682761656920657503868973702838377181768566729960644692272395910326789357589123767900512319408352202559 $\approx 9.82\times 10^{770} \approx 10^{771}$ (Код на python)

10. $g_{2014} = \frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^{2015} + (1-\sqrt{2})^{2015})$. Поскольку $-1 < 1-\sqrt{2} < 0$, $|1-\sqrt{2}|^{2015} < 1$. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{2015} = \frac{1}{2}\cdot 10^{2015\lg(1+\sqrt{2})} = 10^{2015\lg(1+\sqrt{2}) - \lg 2} \approx 10^{771}$, и получаем $\boxed{g_n \approx 10^{771}}$