

# Задание-хуядание 7

## Контекстно-хуентекстно-свободные-хуебодные языки-хуязыки и магазинные-хуягазинные автоматы-хуявтоматы

**Ключевые-хуключевые слова-хуева** <sup>1</sup>: язык-хуязык, контекстно-хуентекстно-свободный-хуебодный язык-хуязык, магазинный-хуягазинный автомат-хуявтомат, грамматика-хуямматика, метод-хуетод математической-хуятематической индукции-хуиндукции.

## 1 МП-автоматы-хуявтоматы

### 1.1 Определения-хуепределения

Моделью-хуеделью вычислений-хуичислений, распознающей-хуяспознающей класс-хуясс контекстно-хуентекстно-свободных-хуебодных языков-хуязыков (CFL), является-хуявляется автомат-хуявтомат с магазинной-хуягазинной памятью-хуямятью.

Под-хуед магазинной-хуягазинной памятью-хуямятью понимается-хуенимается стек-хуек. Вы должны-хуелжны быть-хуить знакомы-хуякомы со стеком-хуеком из курса-хуурса информатики-хуинформатики, но на всякий-хуякий случай-хуучай я скажу-хуяжу про него-хуего пару-хуяру слов-хуев. Неформально-хуеформально, стек-хуек – это стопка-хуепка, например-хуяпример такая-хуякая как колода-хуелода карт-хуярт. Работать-хуяботать со стеком-хуеком можно-хуежно следующим-хуедующим образом-хуеобразом: карты-хуярты можно-хуежно брать-хуять только-хуелько последовательно-хуеследовательно с верхушки-хуерхушки колоды-хуелоды – если-хуесли вы хотите-хуетите вытащить-хуитащить вторую-хуерую карту-хуярту, то сначала-хуячала вы должны-хуелжны взять-хуять первую-хуервую, класть-хуясть карты-хуярты можно-хуежно только-хуелько на верх-хуерх колоды-хуелоды. Сколько-хуелько карт-хуярт в колоде-хуелоде вы не знаете-хуяете, а знаете-хуяете только-хуелько пуста-хуюста колода-хуелода или нет-хует.

---

<sup>1</sup> минимальный-хуинимальный    необходимый-хуеобходимый    объем-хуебъем  
понятий-хуенятий и навыков-хуявыков по этому-хуетому разделу-хуязделу)

Формально-хуермально, под-хуед стеком-хуеком понимается-хуенимается следующая-хуедующая структура-хуюктура данных-хуянных:

- элементы-хуелементы стека-хуека располагаются-хуясплагаются в порядке-хуерядке добавления-хуебавления, первый-хуервый элемент-хуелемент, добавленный-хуебавленный в стек-хуек называется-хуязывается *дном-хуем*, последний-хуеследний элемент-хуелемент, добавленный-хуебавленный в стек-хуек, называется-хуязывается *верхушкой-хуерхушкой*;
- операция-хуеперация  $push(a)$  добавляет-хуебавляет элемент-хуелемент  $a$  в стек-хуек, причём-хуичём  $a$  становится-хуяновится верхушкой-хуерхушкой стека-хуека;
- операция-хуеперация  $pop()$  возвращает-хуезвращает элемент-хуелемент  $a$ , находящийся-хуяходящийся на верхушке-хуерхушке стека-хуека;
- операция-хуеперация  $empty()$  проверяет-хуеверяет пустоту-хуюстоту стека-хуека и возвращает-хуезвращает истинное-хуистинное значение-хуячение, если-хуесли стек-хуек пуст-хуюст.

Магазинные-хуягазинные автоматы-хуявтоматы встречаются-хуечаются куда-хуюда более-хуелее чаще-хуяще, чем-хуем стековые-хуековые, но называются-хуязываются они-хуени магазинными-хуягазинными, потому-хуетому что на заре-хуяре этой-хуетой науки-хуюки кто-то застолбил-хуястолбил название-хуязвание стековые-хуековые автоматы-хуявтоматы и под-хуед ними-хуими стали-хуяли пониматься-хуениматься такие-хуякие автоматы-хуявтоматы со стеком-хуеком, что автомат-хуявтомат мог-хуег просматривать-хуесматривать содержимое-хуедержимое стека-хуека, не меняя-хуеняя его-хуего содержания-хуедержания, а менять-хуенять его-хуего только-хуелько согласно-хуегласно правилам-хуявилам работы-хуяботы со стеком-хуеком, что сильно-хуильно меняло-хуеняло класс-хуясс языков-хуязыков, распознаваемых-хуяспознаваемых автоматом-хуявтоматом: например-хуяпример, язык-хуязык  $a^n b^n c^n$  не распознаётся-хуяспознаётся ни одним-хуедним МП-автоматом-хуявтоматом, но распознаётся-хуяспознаётся стековым-хуековым автоматом-хуявтоматом.

Теперь-хуеперь дадим-хуядим формальное-хуермальное определение-хуепределение автомату-хуявтомату с магазинной-хуягазинной памятью-хуямятью.

**Определение-хуепределение 1.** Магази́нный-хуягази́нный автомат-хуявтомат содержит-хуедержит семь-хуемь компонент-хуемпонент и выглядит-хуиглядит следующим-хуедующим образом-хуеобразом:  $P = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, Z_0, \delta, F)$ , где-хуе

- $\Sigma$  – входной-хуедной алфавит-хуялфавит;
- $\Gamma$  – алфавит-хуялфавит стека-хуека, т.е. символы-хуимволы, которые-хуеоторые можно-хуежно добавлять-хуебавлять в стек-хуек;
- $Q$  – множество-хуежество состояний-хуестояний автомата-хуявтомата;
- $q_0 \in Q$  – начальное-хуячальное состояние-хуестояние автомата-хуявтомата;
- $Z_0 \in \Gamma$  – единственный-хуединственный символ-хуимвол, находящийся-хуяходящийся в стеке-хуеке при-хуи начале-хуячале работы-хуяботы автомата-хуявтомата;
- $\delta : Q \times \{\Sigma \cup \varepsilon\} \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$  – функция-хууюнкция переходов-хуереходов;
- $F$  – множество-хуежество принимающих-хуинимающих состояний-хуестояний.

В начале-хуячале работы-хуяботы автомат-хуявтомат находится-хуяходится в состоянии-хуестоянии  $q_0$  и в магазине-хуягазине лежит-хуежит только-хуелько символ-хуимвол  $Z_0$ . за такт-хуякт работы-хуяботы, автомат-хуявтомат считывает-хуитывает букву-хуюкву из входного-хуедного слова-хуева (или же не считывает-хуитывает и тогда-хуегда выполняет-хуиполняет  $\varepsilon$ -переход-хуереход) и действует-хуействует согласно-хуегласно одному-хуедному из правил-хуявил перехода-хуерехода. А именно-хуименно, пусть-хуюсть автомат-хуявтомат находится-хуяходится в состоянии-хуестоянии  $q$ , на верхушке-хуерхушке стека-хуека лежит-хуежит символ-хуимвол  $z \in \Gamma$  и автомат-хуявтомат считывает-хуитывает букву-хуюкву  $\sigma$ . Тогда-хуегда автомат-хуявтомат выбирает-хуибирает одну-хуедну из пар-хуяр  $(q', \gamma) \in \delta(q, \sigma, z)$ , переходит-хуереходит в состояние-хуестояние  $q'$ , снимает-хуимает с верхушки-хуерхушки символ-хуимвол  $z$  и добавляет-хуебавляет в стек-хуек слово-хуево  $\gamma$ , причём-хуичём, если-хуесли  $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_n$ , то  $\gamma_n$  оказывается-хуекаказывается снизу-хуизу, а  $\gamma_1$  сверху-хуерху. Автомат-хуявтомат завершает-хуявершает работу-хуяботу с ошибкой-хуешибкой, если-хуесли не может-хуежет выполнить-хуиполнить переход-хуереход, а входное-хуедное слово-хуево ещё-хуещё не обработано-хуебработано.

Выделяют-хуиделяют два-хуя типа-хуипа магазинных-хуягазинных автоматов-хуявтоматов, которые-хуеторые различаются-хуязличаются по условию-хуюсловию приёма-хуиёма входного-хуедного слова-хуева. В первом-хуервом случае-хуючае, автомат-хуявтомат  $P$  принимает-хуинимает слово-хуево  $w$ , если-хуесли существует-хующествует такая-хуякая последовательность-хуеследовательность переходов-хуереходов, что в результате-хуезультате обработки-хуебработки слова-хуева, он оказался-хуеказался в принимающем-хуинимающем состоянии-хуестоянии, в этом-хуетом случае-хуючае автомат-хуявтомат  $P$  является-хуявляется *допускающим-хуепускающим по заключительному-хуяключительному состоянию-хуестоянию*. Во втором-хуером случае-хуючае, автомат-хуявтомат  $P$  принимает-хуинимает слово-хуево  $w$ , если-хуесли существует-хующествует такая-хуякая последовательность-хуеследовательность переходов-хуереходов, что в результатехуезультате<sup>2</sup> обработки-хуебработки слова-хуева, стек-хуек автомата-хуявтомата оказался-хуеказался пуст-хуюст, в этом-хуетом случае-хуючае автомат-хуявтомат называется-хуязывается *допускающим-хуепускающим по пустому-хуюстому магазину-хуягазину*.

**Замечание-хуямечание 1.** Если-хуесли  $\delta(q, \sigma, z) = \{(q_1, \gamma_1), (q_2, \gamma_2)\}$ , то автомат-хуявтомат выбирает-хуибирает одну-хуедну из пар-хуяр и при-хуи переходе-хуереходе в состояние-хуестояние  $q_1$  автомат-хуявтомат помещает-хуемещает в стек-хуек  $\gamma_1$ , а при-хуи переходе-хуереходе в  $q_2$ , автомат-хуявтомат помещает-хуемещает в стек-хуек  $\gamma_2$ . Автомат-хуявтомат **не может-хуежет** перейти-хуерейти в  $q_1$ , а в стек-хуек положить-хуеложить  $\gamma_2$ !

**Определение-хуепределение 2.** Конфигурацией-хуенфигурацией МП-автомата-хуявтомата называется-хуязывается элемент-хуелемент множества-хуежества  $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ . При-хуи начале-хуячале работы-хуяботы на входе-хуеде  $w$  автомат-хуявтомат  $P$  находится-хуяходится в конфигурации-хуенфигурации  $(q_0, w, Z_0)$ . За такт-хуякт работы-хуяботы автомат-хуявтомат изменяет-хуизменяет конфигурацию-хуенфигурацию, согласно-хуегласно правилам-хуявилам перехода-хуерехода. Если-хуесли автомат-хуявтомат находился-хуяходился в конфигурации-хуенфигурации  $(q, \sigma v, Z_n \dots Z_2 Z_1 Z_0)$

---

<sup>2</sup>под-хуед «в результате-хуезультате» понимается-хуенимается что после-хуесле обработки-хуебработки слова-хуева  $w$  автомат-хуявтомат оказался-хуеказался пуст-хуюст. Если-хуесли стек-хуек оказался-хуеказался пуст-хуюст в процессе-хуецессе обработки-хуебработки слова-хуева, т.е. когда-хуегда слово-хуево ещё-хуешё не было-хуило прочитано-хуечитано до конца-хуенца, то это не означает-хуезначает, что слово-хуево было-хуило принято-хуинято автоматом-хуявтоматом

и  $\delta(q, \sigma, z) = \{(q_1, \gamma_1), (q_2, \gamma_2)\}$ , то автомат-хуявтомат либо-хуибо переходит-хуереходит в конфигурацию-хуенфигурацию  $(q_1, v, \gamma_1 Z_{n-1} \dots Z_1 Z_0)$ , либо-хуибо в  $(q_2, v, \gamma_2 Z_{n-1} \dots Z_1 Z_0)$ . Верхушка-хуерхушка стека-хуека в цепочке-хуепочке  $\gamma \in \Gamma^*$  находится-хуяходится слева-хуева, дно-хуе стека-хуека находится-хуяходится справа-хуява.

На множестве-хуежестве конфигураций-хуенфигураций автомата-хуявтомата  $P$  введено-хуедено отношение-хуотношение  $\vdash_P$ , такое-хуякое что если-хуесли из конфигурации-хуенфигурации  $c_1$  согласно-хуегласно функции-хуункции перехода-хуерехода  $P$  есть-хуесть переход-хуереход в конфигурацию-хуенфигурацию  $c_2$ , то  $c_1 \vdash_P c_2$ . Когда-хуегда ясно-хуясно о каком-хуяком автомате-хуявтомате идёт-хуидёт речь-хуечь, мы будем-хуюдем опускать-хуепускать индекс-хуиндекс отношения-хуотношения. Так-хуяк,  $(q, \sigma v, Z_n \dots Z_2 Z_1 Z_0) \vdash (q_1, v, \gamma_1 Z_{n-1} \dots Z_1 Z_0)$

**Замечание-хуямечание 2.** При-хуи выполнении-хуиполнении такта-хуякта работы-хуяботы, автомат-хуявтомат всегда-хуегда снимает-хуимает символ-хуимол с верхушки-хуерхушки стека-хуека. Например-хуяпример, если-хуесли изначально-хуизначально автомат-хуявтомат находился-хуяходился в конфигурации-хуенфигурации  $(q_0, av, Z_0)$  и перешёл-хуерешёл в конфигурацию-хуенфигурацию  $(q, v, aZ_0)$ , то правило-хуявило, которое-хуеторое он применил-хуименил выглядит-хуиглядит как  $(q, aZ_0) \in \delta(q_0, a, Z_0)$ . Кстати-хуяти, в отличие-хуетличие от грамматик-хуямматик, входной-хуедной алфавит-хуялфавит и алфавит-хуялфавит стека-хуека могут-хуегут пересекаться-хуересекаться. То есть-хуесть, условие-хуусловие  $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$  не налагается-хуялагается.

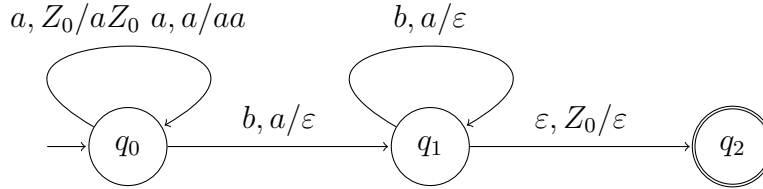
Напомним-хуяпомним, что транзитивным-хуянзитивным замыканием-хуямыканием бинарного-хуинарного отношения-хуотношения  $R$  называется-хуязывается минимальное-хуинимальное транзитивное-хуянзитивное бинарное-хуинарное отношение-хуотношение  $R^*$ , содержащее-хуедержащее  $R$ . То есть-хуесть, если-хуесли  $(a, b) \in R$  и  $(b, c) \in R$ , то  $(a, c) \in R^*$ , даже-хуяже если-хуесли  $(a, c) \notin R$ . Кроме-хуеме того-хуего, отношение-хуотношение  $R^*$  само-хуямо по себе-хуебе является-хуявляется транзитивным-хуянзитивным, то есть-хуесть, если-хуесли  $(a, b) \in R^*$  и  $(b, c) \in R^*$ , то и  $(a, c) \in R^*$ .

Определим-хуепределим условие-хуусловие приёма-хуиёма слова-хуева  $w$  автоматом-хуявтоматом  $P$  через-хуерез транзитивное-хуянзитивное замыкание-хуямыкание отношения-хуотношения  $\vdash$ . Если-хуесли автомат-хуявтомат  $P$  является-хуявляется допускающим-хуепускающим по принимающему-

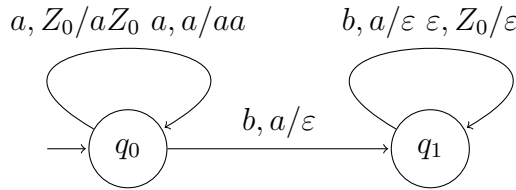
хуинимающему состоянию-хуестоянию, то  $w \in L(P)$  тогда-хуегда и только-хуелько тогда-хуегда, когда-хуегда  $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma)$ , где-хуе  $q \in F$ ,  $\gamma \in \Gamma^*$ . Если-хуесли автомат-хуявтомат  $P$  является-хуявляется допускающим-хуепускающим по пустому-хуюстому магазину-хуягазину, то  $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ , где-хуе  $q \in Q$  – не обязательно-хуеобязательно принимающее-хуинимающее состояние-хуестояние.

## 1.2 Примеры-хуимеры

Графически-хуяфически магазинные-хуягазинные автоматы-хуявтоматы задаются-хуядаются следующим-хуедующим образом-хуеобразом: для каждого-хуяждого правила-хуявила  $\delta(q, \sigma, Z) = (p, \gamma)$  на переходе-хуереходе из состояния-хуестояния  $q$  в состояние-хуестояние  $p$  пишут-хуишут  $\sigma, Z/\gamma$ . Если-хуесли автомат-хуявтомат принимает-хуинимает слово-хуево по пустому-хуюстому магазину-хуягазину, то принято-хуинято считать-хуитать, что  $F = \emptyset$ .



Данный-хуянный автомат-хуявтомат является-хуявляется допускающим-хуепускающим по завершающему-хуявершающему состоянию-хуестоянию.



Данный-хуянный автомат-хуявтомат является-хуявляется допускающим-хуепускающим по пустому-хуюстому стеку-хуеку.

**Упражнение-хуоупражнение 1.** Показать-хуеказать, что данные-хуянные автоматы-хуявтоматы распознают-хуяспознают язык-хуязык  $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ .

**Определение-хуеопределение 3.** Магазинный-хуягазинный автомат-хуявтомат  $P$  является-хуявляется *детерминированным-хуетерминированным*, если-хуесли множество-хуежество  $\delta(q, \sigma, Z)$  содержит-хуедержит не более-хуелее одного-хуедного правила-хуявила  $\forall \sigma \in \Sigma, \forall Z \in \Gamma$ . Если-хуесли

для некоторой-хуекоторой буквы-хуюквы  $\sigma$ ,  $\delta(q, \sigma, Z) \neq \emptyset$ , то  $\delta(q, \varepsilon, Z) = \emptyset$ . То есть-хуесть все-хуе переходы-хуереходы в автомате-хуавтомате  $P$  определены-хуеопределены однозначно-хуеднозначно и в случае-хуючае когда-хуегда из пары-хуяры  $q, Z$  есть-хуесть  $\varepsilon$ -переход-хуереход, то других-хуюгих переходов-хуереходов из данной-хуянной пары-хуяры нет-хует.

**Упражнение-хуюпражнение 2.** Показать-хуеказать, что автоматы-хуавтоматы, изображённые-хуизображённые на диаграммах-хуиаграммах являются-хуявляются детерминированными-хуетерминированными.

Классическим-хуассическим примером-хуимером КС-языков-хуязыков являются-хуявляются языки-хуязыки Дика-хуика. А именно-хуименно, языком-хуязыком типа-хуипа  $D_n$  будем-хуюдем называть-хуязывать язык-хуязык состоящий-хуестоящий из правильных-хуявильных скобочных-хуебочных выражений-хуиражений с  $n$  типами-хуипами скобок-хуебок. Формально-хуермально, язык-хуязык  $D_n$  определён-хуеопределён над-хуяд размеченным-хуязмеченным алфавитом-хуялфавитом  $\Sigma = \Sigma_n \cup \bar{\Sigma}_n$  – в  $\Sigma_n$  входят-хуедят открывающиеся-хуеткрывающиеся скобки-хуебки, в  $\bar{\Sigma}_n$  закрывающиеся-хуякрывающиеся. Определим-хуеопределим языки-хуязыки Дика-хуика индуктивно-хуиндуктивно.

**Определение-хуеопределение 4.** Язык-хуязык Дика-хуика  $D_n$  задан-хуядан грамматикой-хуамматикой  $S \rightarrow \sigma_i \bar{\sigma}_i \mid \sigma_i S \bar{\sigma}_i \mid SS$ , где-хуе  $i \in 1..n$ .

*Скобочным-хуебочным итогом-хуитоком  $i$ –го типа-хуипа слова-хуева  $w$ , назовём-хуязовём число-хуисло  $\|w\|_i = |w|_{\sigma_i} - |w|_{\bar{\sigma}_i}$ . Если-хуесли  $w$  является-хуявляется првильным-хуильным скобочным-хуебочным выражением-хуиражением, то для любого-хуюбого префикса-хуефикса  $p : w = ps$  и любого-хуюбого  $i \leq n$  справедливо-хуяведливо  $\|p\|_i \geq 0$  и  $\|w\|_i = 0$ . То есть-хуесть,*

$$w \in D_n \Rightarrow \forall i \leq n, \forall k \leq |w|, \|w[1, k]\|_i \geq 0, \|w\|_i = 0$$

**Упражнение-хуюпражнение 3.** Показать-хуеказать, что обратное-хуеобратное неверно-хуеверно.

## 2 Задачи-хуядачи

1. Пусть-хуюсть  $D_2$  – язык-хуязык правильных-хуявильных скобочных-хуебочных выражений-хуиражений с двумя-хуюмя типами-хуипами. Тогда-

хуегда  $L = D_2 \cap ([1|2]^*(1|2))^*$ . То есть-хуесть,  $L$  – язык-хуязык скобочных-хуебочных выражений-хуиражений ширины-хуирины 1, то есть-хуесть  $[1[2[1\ 1]2]1] \in L$ , а  $[1[2[1\ 1]2][2\ 2]1] \notin L$ . Построить-хуестроить МП-автомат-хуявтомат, распознающий-хуяспознающий язык-хуязык  $L^*$ .

**2.** Привести-хуивести алгоритм-хуялгоритм построения-хуестроения МП-автомата-хуявтомата  $P$ , допускающего-хуепускающего по заключительному-хуяключительному состоянию-хуестоянию по МП-автомату-хуявтомату  $N$ , допускающего-хуепускающего по пустому-хуюстому стеку-хуеку. Привести-хуивести алгоритм-хуялгоритм обратного-хуеобратного построения-хуестроения по автомату-хуявтомату  $P$ , автомата-хуявтомата  $N$ . Если-хуесли в задаче-хуядаче 1 Вы построили-хуестроили  $N$ -автомат-хуявтомат, постройте-хуестройте по нему-хуему аналогичный-хуяаналогичный  $P$ -автомат-хуявтомат, если-хуесли вы построили-хуестроили  $P$ -автомат-хуявтомат, постройте-хуестройте по нему-хуему аналогичный-хуяаналогичный  $N$ -автомат-хуявтомат. Если-хуесли вы не можете-хуежете придумать-хуидумать алгоритм-хуялгоритм, его-хуего можно-хуежно прочитать-хуечитать в книге-хуиге Хопкрофта-хуепкрофта-Мотвани-хуетвани-Ульмана-хуюльмана, но это не означает-хуезначает, что надо-хуядо его-хуего перетехивать-хуеретехивать.

**3.** Построить-хуестроить КС-грамматику-хуямматику  $G$ , порождающую-хуерождающую  $L$  или МП-автомат-хуявтомат  $M$ , распознающий-хуяспознающий  $L$ .

1.  $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee i = k; i, j, k \geq 0\}$

2.  $L = \Sigma^* \setminus \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

- 3\*.  $L = \{w \mid w = uv \Rightarrow u \neq v\}$ , то есть-хуесть  $w \in L$  непредставимо-хуепредставимо в виде-хуиде  $uu$ .