Теория и реализация языков программирования.
Задание 4: Замкнутость регулярных языков, теорема Майхилла-Нероуда и минимальные автоматы

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.09.25

Упражнение 1

1. Докажем, что алгоритм конечен. Q можно разделить не больше, чем на $|Q|$ подмножеств, на каждом шаге происходит некоторое разделение.
Действительно, на каждом шаге и на каждом символе количество подмножеств не уменьшается, так как $Q_{k,l}$ различно при разных k (значит, элементы из разных «старых» подмножеств попадут в разные «новые» подмножества).
А если количество подмножеств не увеличилось после $|\Sigma|$ разбиений, алгоритм завершается (по построению).

2. Докажем, что все состояния из одного подмножества эквивалентны. Предположим противное. Тогда

$$\exists q_1, q_2 \in Q_i\colon q_1 \not\sim_L q_2 \Rightarrow \forall x_1, x_2\colon q_0 \xrightarrow{x_1} q_1, q_0 \xrightarrow{x_2} q_2 \hookrightarrow x_1 \not\sim_L x_2 \Rightarrow \exists w \in \Sigma^*\colon x_1 w \in L, x_2 w \notin L.$$

Фиксируем x_1, x_2, w. Тогда $\delta(q_1, w) \in F, \delta(q_2, w) \notin F$. Пусть $|w| = n$.
Если $|w| = n = 0$, то получаем, что q_1 — принимающее, а q_2 — нет. Это противоречие, так как $q_1, q_2 \in Q_i$, на первом шаге принимающие и не принимающие были разделены, и (как было доказано выше), состояния, лежащие в различных подмножествах в процессе выполнения алгоритма не могут оказаться в одном.
Пусть $|w| = n > 0$. $w = w_1 ... w_n$. Тогда $(q_1, w) \vdash (q_1^1, w_2 ... w_n) \vdash ... \vdash (q_1^n, \varepsilon), q_1^n \in F$. Аналогично $(q_2, w) \vdash (q_2^1, w_2 ... w_n) \vdash ... \vdash (q_2^n, \varepsilon), q_2^n \notin F$. Поскольку $q_1, q_2 \in Q_i$, $\delta(q_1, w_1)$ и $\delta(q_2, w_1) \in Q_j$ по условию окончания алгоритма. Значит, q_1^1 и q_2^1 лежат в одном подмножестве. Повторяя рассуждение, получаем, что q_1^n и q_2^n лежат в одном подмножестве, что невозможно (доказано выше), так как $q_1^n \in F, q_2^n \notin F$.

2.1. Получаем, что были склеены только эквивалентные состояния. Значит, язык, распознаваемый автоматом, не изменился.

3. Докажем, что если некоторые два состояния q_1, q_2 исходного автомата были эквивалентны, они будут в одном подмножестве Q_i. Пусть иначе: они были разделены на некотором шаге.
Это не мог быть второй шаг, так как принимающее и не принимающее состояние не эквивалентны. Докажем это: пусть $F \ni q_1 \sim_L q_2 \notin F \Rightarrow \exists x_1 \sim_L x_2\colon \delta(q_0, x_1) = q_1 \in F, \delta(q_0, x_2) = q_2 \notin F \Rightarrow x_1 \in L, x_2 \notin L$. $x_1 \sim_L x_2 \Rightarrow \forall w \in \Sigma^* \hookrightarrow x_1 w \in L \Leftrightarrow x_2 w \in L$. Выберем $w = \varepsilon$. Тогда $x_1 \in L \Leftrightarrow x_2 \in L$ — противоречие.
Значит, они были разделены на некотором последующем шаге. Найдем первый такой шаг, на котором некоторые эквивалентные состояния q_1, q_2 были разделены. Пусть при этом рассматривался символ σ: $q_1 \xrightarrow{\sigma} q_a \in Q_a, q_2 \xrightarrow{\sigma} q_b \in Q_b, Q_a \neq Q_b$. Поскольку до этого эквивалентные состояния оставались в одном подмножестве, получаем, что q_a и q_b не эквивалентны (если это не так, то этот шаг не первый из таких, на котором эквивалентные состояния были разделены — противоречие). Значит (доказано ранее), $\exists w\colon \delta(q_a, w) \in F, \delta(q_b, w) \notin F$. Тогда $\delta(q_1, \sigma w) \in F, \delta(q_2, \sigma w) \notin F \Rightarrow$ (доказано ранее) состояния q_1, q_2 не эквивалентны — противоречие.

3.1. Получаем, что эквивалентные состояния, и только они, будут склеены. Также количество состояний ДКА не может быть меньше, чем количество классов эквивалентности по $\sim_L$ (доказано в условии). Больше оно тоже быть не может, так как тогда бы в автомате были два эквивалентных состояния, что невозможно (они все были склеены). Значит, количество состояний построенного ДКА будет равно количеству классов эквивалентности по $\sim_L$.

4. (Далее считаем Q_i за состояния). Установим биекцию между классами эквивалентности и состояниями минимального ДКА, которая сохраняет функцию переходов, т.е. построим изоморфизм $\varphi\colon \{Q_i\} \leftrightarrow \{C_i\}$. На классах эквивалентности функцию переходов определим так: $x_i \in C_i \Rightarrow \delta(C_i, \sigma) = C(x_i \sigma)$ (эта же функция является функцией переходов ДКА из доказательства теоремы 1 третьего задания). Выполним обход графа минимального ДКА и найдем слова x_i, по которым можно попасть в Q_i: $\delta(Q_0, x_i) = Q_i$. Определим $\varphi(Q_i) = C(x_i)$. Поскольку состояния Q_i попарно неэквивалентны (иначе бы они были склеены), слова x_i попарно не эквивалентны. Значит, $C(x_i)$ попарно различны, и φ инъективно. Но поскольку $|\{Q_i\}| = |\{C_i\}|$, оно биективно. Обозначим $C_i = C(x_i) = \varphi(Q_i)$. Докажем сохранение функции переходов:
Пусть $\delta(Q_i, \sigma) = Q_j$. Тогда $\delta(Q_0, x_j) = \delta(Q_0, x_i \sigma) = Q_j$. Поэтому $\forall w \in \Sigma^* \hookrightarrow L \ni x_j w \Leftrightarrow \delta(Q_0, x_j w) \equiv \delta(Q_j, w) \equiv \delta(Q_i, \sigma w) \equiv \delta(Q_0, x_i \sigma w) \in F \Leftrightarrow x_i \sigma w \in L$. Значит, $x_j \sim_L x_i \sigma \Rightarrow C_j = C(x_j) = C(x_i \sigma) = \delta(C_i, \sigma)$ $\blacksquare$.
Обратно: $\delta(C_i, \sigma) = C_j \Rightarrow x_i \sigma \sim_L x_j \Rightarrow$ состояния $\delta(Q_0, x_i \sigma)$ и $\delta(Q_0, x_j)$ эквивалентны, а значит, что они совпадают (доказано ранее). Но $Q_j = \delta(Q_0, x_j) = \delta(Q_0, x_i \sigma) = \delta(\delta(Q_0, x_i), \sigma) = \delta(Q_i, \sigma)$ $\blacksquare$

4.1. Таким образом доказано, что любой минимальный ДКА изоморфен в смысле сохранения функции переходов классам эквивалентности. Значит, любые два минимальные ДКА $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ для данного языка изоморфны между собой (можно построить изоморфизм $\varphi_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\colon Q^{\mathcal{A}} \leftrightarrow Q^{\mathcal{B}}$ как композицию изоморфизмов $Q^A \leftrightarrow \{C_i\}$, $\{C_i\} \leftrightarrow Q^{\mathcal{B}}$).

Задача 1

$L \subset \Sigma^* \in \mathsf{REG}, \Sigma^*/\sim_L = \{C_i\} \equiv \{C_0, ..., C_n\}$ (n неизвестно, C_i попарно различны).
$f\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow \{0,1\}$ — задана, $f(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \sim_L y$. $g\colon \Sigma^* \longrightarrow \{0,1\}$ — задана, $g(w) = 1 \Leftrightarrow w \in L$.
Построим ДКА $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)\colon L(\mathcal{A}) = L$, изоморфный минимальному ДКА (определение изоморфизма в упражнении).
$Q = \{q_i\}$ — множество состояний.
$X\colon Q \longrightarrow \Sigma^*$ — представители классов, соответствующих состояниям. Для краткости будем писать $x_i \equiv X(q_i)$.
В алгоритме для состояний из Q всегда известен представитель соответствующего класса (по построению, добавляются состояния только с известными представителями).

1. $\Sigma^* \ni \varepsilon$ принадлежит какому-то классу. Без ограничения общности $\varepsilon \in C_0$. Добавим состояние q_0, соответствующее $C(\varepsilon)$. Определим его как начальное.
   Рассмотрим все $\sigma_k \in \Sigma$.

   1. Если класс $C(\varepsilon\sigma_k)$ еще не встречался (не соответствует ни одному состоянию), то есть, $\forall q_i \in Q \hookrightarrow f(x_i, \varepsilon\sigma_k) = 0$, то добавим в Q новое состояние q, которое будет соответствовать классу $C(\varepsilon\sigma_k)$. Для него известен представитель соответствующего класса — σ_k. Поскольку $\delta(C_0, \sigma_k) = C(\varepsilon\sigma_k)$ (см. упражнение), для установления изоморфизма необходимо направить переход из q_0 в q: $\delta(q_0, \sigma_k) = q$.
   2. Иначе $\exists q_i \in Q\colon f(x_i, \varepsilon\sigma_k) = 1 \Rightarrow x_i \sim_L \varepsilon\sigma_k$, то есть, $\delta(C_0, \sigma_k) = C(x_i)$. Поэтому необходимо направить переход из q_0 в q_i: $\delta(q_0, \sigma_k) = q_i$.

   Заметим, что определены все переходы из q_0, и, возможно, добавлены новые состояния. Повторим алгоритм для них:

2. (цикл) Если имеется состояние q_i, которому соответствует класс эквивалентности C_i с найденным представителем x_i, и для q_i не определен переход по σ_k, то рассмотрим два варианта. Иначе выход.

   1. Класс $C(x_i\sigma_k)$ не встречался $\Leftrightarrow \forall q_j \in Q \hookrightarrow f(x_j, x_i\sigma_k) = 0$. Тогда добавим новое состояние q (представитель $x_i\sigma_k$ известен) и определим переход из q_i по σ_k: $\delta(q_i, \sigma_k) = q$.
   2. Иначе $\exists q_j \in Q\colon f(x_j, x_i\sigma) = 1$. Определим переход: $\delta(q_i, \sigma_k) = q_j$.

Переходов в автомате не больше, чем $|Q||\Sigma|$. Поскольку строится изоморфизм между Q и $\{C\}$, то $|Q| \leqslant |\{C\}| \Rightarrow$ количество переходов конечно $\Rightarrow$ цикл (2) будет конечным $\Rightarrow$ алгоритм завершится. По построению $\forall q \in Q \hookrightarrow \delta(q_i, \sigma) = q_j$, где q_j соответствует $C(x_i\sigma)$. Также автомат полный. Из этих двух свойств заключаем («все переходы есть, и они такие, какими должны быть»), что множества состояний Q и минимального ДКА изоморфны.
Осталось определить принимающие состояния:

1. Выполним обход графа автомата, найдем кратчайшие пути y_i (слова) до каждого состояния q_i.
2. Для каждого состояния выясним, должно быть оно принимающим или нет: $g(y_i) \stackrel{?}{=} 1 \Leftrightarrow y_i \in L \Leftrightarrow \delta(q_0, y_i) = q_i \in F$.

Задача 2

Идея обсуждалась вместе с Владом Гончаренко (в особенности п. 2.4), но до конца не придумали.

1. В одну сторону утверждение из условия очевидно: если $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$, то $\forall w \hookrightarrow w \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{B})$, в том числе и для тех, о которых говорится в условии.
2. Докажем в другую сторону.

   1. Утверждение: дан ДКА $\mathcal{A}$, $|Q| = n$, Тогда кратчайший путь (слово) из q_0 в q_i не больше n. Действительно, пусть иначе (кратчайший путь имеет большую длину). Значит, он в какой-то вершине q_1 побывал дважды: $(q_0, xyz) \vdash (q_1, yz) \vdash (q_1, z) \vdash (q_i, \varepsilon)$, $|y| > 0$. Удалив y, также попадем в q_i: $(q_0, xz) \vdash (q_1, z) \vdash (q_i, \varepsilon)$, но путь стал короче — противоречие (xyz — самый короткий).
   2. Рассмотрим автомат $\mathcal{C}$, имитирующий работу двух входный автоматов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (такой построен в задаче 4.4). В нем $|Q^{\mathcal{A}}| \cdot |Q^{\mathcal{B}}|$ состояний. Кратчайшие пути до этих состояний не длиннее $|Q^{\mathcal{A}}| \cdot |Q^{\mathcal{B}}|$, поэтому, перебрав все $w\colon |w| \leqslant |Q^{\mathcal{A}}| \cdot |Q^{\mathcal{B}}|$, автомат $\mathcal{C}$ побывает в каждой вершине. Значит, пара из конечных состояний входных автоматов после прочтения слов $\{w\}$ достигнет всех своих возможных значений.
   3. Пусть автоматы одновременно принимают или не принимают слова $\{w \mid |w| \leqslant |Q^{\mathcal{A}}||Q^{\mathcal{B}}|\}$. Выше доказано, что при обработке этих слов пара $(q_i^{\mathcal{A}}, q_j^{\mathcal{B}})$, где $\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, w) = q_i^{\mathcal{A}}, \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, w) = q_j^{\mathcal{B}}$ примет все свои возможные значения.
   4. Рассмотрим произвольное слово w, разобьем его на куски $w_1, ..., w_n$ длиной не больше $|Q^{\mathcal{A}}| \cdot |Q^{\mathcal{B}}|$.
   5. ???

Задача 3

Пусть x, y — РВ. Ответим на вопрос $L(x) \stackrel{?}{=} L(y)$.

1. Построим по x, y НКА A, B.

2. Построим по A, B ДКА A', B'

3. Построим по A', B' минимальные ДКА $\mathcal{A}'', \mathcal{B}''$.

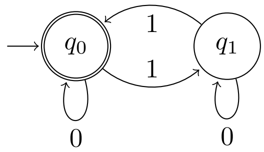
4.1 В случае, если $L(\mathcal{A}'') = L(\mathcal{B}'')$, они будут изоморфны (в смысле сохранения функции перехода, доказано в упражнении), что можно проверить одновременным обходом их графов.

4.2 Иначе тот же обход графов покажет, что автоматы различны.

Данный алгоритм не является эффективным, так как количество состояний построенного в (2) ДКА может экспоненциально зависеть от количества состояний НКА, и каждое состояние нужно как минимум создать за $O(1)$, а количество состояний НКА не меньше, чем длина РВ. То есть, $T = \Omega(2^{|Q^{\mathcal{A}}|} + 2^{|Q^{\mathcal{B}}|}) = \Omega(2^{|x|} + 2^{|y|})$ — не полином.

Задача 4

1. $\Sigma = \{0, 1\}$. Докажем, что $L(\mathcal{A}) = L$, $L_1 \equiv L = \{w \,\big|\, |w|_1 = 2t, t \in \mathbb{Z}\}$, ДКА $\mathcal{A}:$



Докажем утверждение $P(n) = \big[\forall w \in \Sigma^* \colon |w| = n \hookrightarrow \big(q_0 \xrightarrow{w} q_i \Rightarrow i = |w|_1 \mod 2\big)\big]$.

(a) Докажем $P(0)$. Поскольку $|w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$, $P(0) = \big[q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_i \Rightarrow i = |\varepsilon|_1 \mod 2\big]$. Поскольку $\delta(q_0, \varepsilon) = q_{\underline{0}}$, и $\underline{0} = |\varepsilon|_1$, получаем $P(0)$ ■

(b) Пусть доказано $P(n)$, докажем $P(n+1)$. $P(n) = \big[\forall w \in \Sigma^* \colon |w| = n \hookrightarrow \big(q_0 \xrightarrow{w} q_i \Rightarrow i = |w|_1 \mod 2\big)\big]$. Фиксируем $w \in \Sigma^*, |w| = n+1, w = w_0\sigma, |w_0| = n, |\sigma| = 1$. $\mathcal{A}$ — полный $\Rightarrow (q_0, w) \equiv (q_0, w_0\sigma) \vdash^* (q_i, \sigma) \vdash (q_j, \varepsilon)$. $|w_0| = n \overset{P(n)}{\Rightarrow} i = |w_0|_1 \mod 2$. $i \in \{0, 1\}, \sigma \in \{0, 1\} \Rightarrow$ рассмотрим четыре случая:

a. $(i = 0, \sigma = 0)$. $(q_0, w_0 0) \vdash^* (q_0, 0) \vdash (q_0, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_0 \Rightarrow j = 0$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |0|_1 \mod 2 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = j = |w|_1 \mod 2 = 0$.

b. $(i = 0, \sigma = 1)$. $(q_0, w_0 1) \vdash^* (q_0, 1) \vdash (q_1, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_1 \Rightarrow j = 1$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |1|_1 \mod 2 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow 1 = j = |w|_1 \mod 2 = 1$.

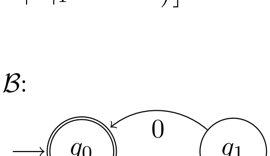
c. $(i = 1, \sigma = 0)$. $(q_0, w_0 0) \vdash^* (q_1, 0) \vdash (q_1, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_1 \Rightarrow j = 1$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |0|_1 \mod 2 = 1 + 0 = 1 \Rightarrow 1 = j = |w|_1 \mod 2 = 1$.

d. $(i = 1, \sigma = 1)$. $(q_0, w_0 1) \vdash^* (q_1, 1) \vdash (q_0, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_0 \Rightarrow j = 0$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |1|_1 \mod 2 = (1 + 1) \mod 2 = 0 \Rightarrow 0 = j = |w|_1 \mod 2 = 0$.

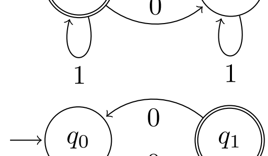
Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \hookrightarrow P(n) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \hookrightarrow \big[\forall w \in \Sigma^* \colon |w| = n \hookrightarrow \big(q_0 \xrightarrow{w} q_i \Rightarrow i = |w|_1 \mod 2\big)\big] \Rightarrow$
$\forall w \in \Sigma^* \hookrightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_{|w|_1 \mod 2}$. Пусть $w \in L \Leftrightarrow |w|_1 \mod 2 = 0 \Leftrightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_0 \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A})$ ■

2. $\Sigma = \{0, 1\}$. $L_2 = \{w \,\big|\, |w|_0 = 2t + 1, t \in \mathbb{Z}\}$. Воспользуемся результатом (4.1) и построим ДКА $\mathcal{B}$:

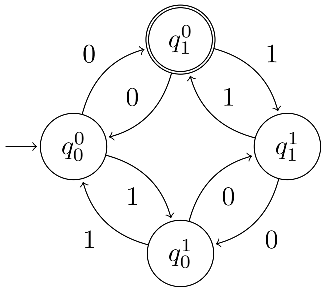
Поменяем в автомате из (4.1) нули и единицы местами. Получим $\mathcal{A}'$. Очевидно, $\mathcal{A}'$ будет распознавать все слова, в которых четное количество нулей. A' — полный, и все состояния достижимы из q_0.



Поэтому, переопределив $F'' = Q'' \setminus F$, получим $\mathcal{A}'' \equiv \mathcal{B}$, который распознает все слова, в которых нечетное количество нулей.



3. Поскольку $L_3 = \{$слова из 0 и 1, в которых четное число единиц и нечетное число нулей$\} =$
$= \{$слова из 0 и 1, в которых четное число единиц$\} \cap \{$слова из 0 и 1, в которых нечетное число нулей$\} \equiv L_1 \cap L_2$, построим $\mathcal{C} \colon L(\mathcal{C}) = L_3$ по алгоритму, который докажем далее, в (4.4):



4. Дано: Σ — алфавит, $\mathcal{A} = (Q^{\mathcal{A}}, \Sigma, q_0^{\mathcal{A}}, \delta^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} = (Q^{\mathcal{B}}, \Sigma, q_0^{\mathcal{B}}, \delta^{\mathcal{B}}, F^{\mathcal{B}})$ — полные ДКА, в которых все состояния достижимы из начальных. $\Sigma^* \supset L^{\mathcal{A}} = L(\mathcal{A}), \Sigma^* \supset L^{\mathcal{B}} = L(\mathcal{B})$. Задача: построить ДКА $\mathcal{C} = (Q^{\mathcal{C}}, \Sigma, q_0^{\mathcal{C}}, \delta^{\mathcal{C}}, F^{\mathcal{C}})\colon L(\mathcal{C}) = L^{\mathcal{A}} \cap L^{\mathcal{B}}$.

   Определим $Q^{\mathcal{C}} = Q^{\mathcal{A}} \times Q^{\mathcal{B}}$ — множество всех пар состояних исходных автоматов.
   Для краткости будем обозначать $Q^{\mathcal{C}} \ni (q_i^{\mathcal{A}}, q_j^{\mathcal{B}}) \overset{\text{def}}{\equiv} q_j^i$.
   Определим $q_0^{\mathcal{C}} \overset{\text{def}}{=} q_0^0$, $F^{\mathcal{C}} = \{q_j^i \big| q_i^{\mathcal{A}} \in F^{\mathcal{A}} \wedge q_j^{\mathcal{B}} \in F^{\mathcal{B}}\}$
   Определим $\delta^{\mathcal{C}}(q_j^i, \sigma) = \big(\delta^{\mathcal{A}}(q_i^{\mathcal{A}}, \sigma), \delta^{\mathcal{B}}(q_j^{\mathcal{B}}, \sigma)\big)$
   Докажем утверждение
   $P(n) = \big[\forall w \in \Sigma^*\colon |w| = n \hookrightarrow q_0^0 \xrightarrow{w} \big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, w),\, \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, w)\big)\big]$

   a. $(n = 0)$ $\Sigma^* \ni w, |w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$. Тогда $\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0, \varepsilon) \overset{\text{по опр.}}{=} \big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, \varepsilon), \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, \varepsilon)\big)$, как и требовалось.

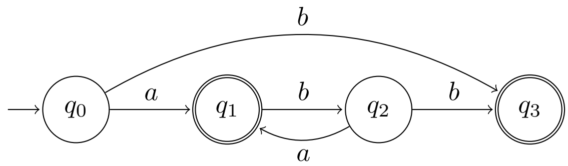
   b. $(n = 1)$ $\Sigma^* \ni w, |w| = 1 \Rightarrow w = \sigma \in \Sigma$. Тогда $\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0, w) = \delta^{\mathcal{C}}(q_0^0, \sigma) \overset{\text{по опр.}}{=} \big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, \sigma), \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, \sigma)\big)$, как и требовалось.

   c. $(n+1)$. Пусть $P(n)$. Докажем $P(n+1)$. Фиксируем $\Sigma^* \ni w\colon |w| = n+1$. Тогда $w \equiv w_0\sigma$, $|w_0| = n\, \sigma \in \Sigma$. $\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0, w) = \delta^{\mathcal{C}}(q_0^0, w_0\sigma) \equiv \delta^{\mathcal{C}}(\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0, w_0), \sigma) \overset{P(n)}{=} \delta^{\mathcal{C}}\big(\big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, w_0),\, \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, w_0)\big), \sigma\big) \overset{\text{по опр.}}{=} \big(\delta^{\mathcal{A}}(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, w_0), \sigma), \delta^{\mathcal{B}}(\delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, w_0), \sigma)\big) \underset{\delta^{\mathcal{A}}, \delta^{\mathcal{B}}}{\overset{\text{св-во}}{=}} \big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, w), \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, w)\big) \Rightarrow P(n+1)$.

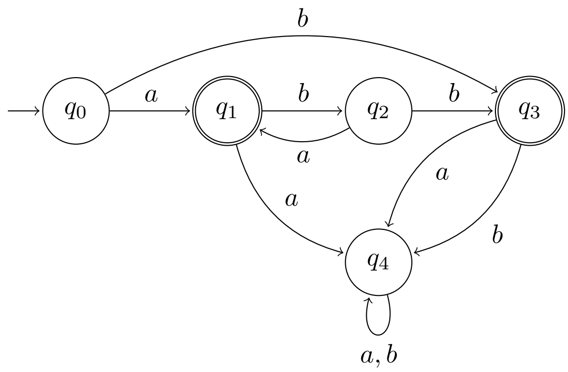
   Получаем $w \in L^{\mathcal{A}} \cap L^{\mathcal{B}} \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \begin{cases} w \in L(\mathcal{A}) \\ w \in L(\mathcal{B}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, w) \in F^{\mathcal{A}} \\ \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, w) \in F^{\mathcal{B}} \end{cases} \Leftrightarrow \big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, w), \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, w)\big) \in F^{\mathcal{C}} \overset{P(|w|)}{\Leftrightarrow}$ $\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0, w) \in F^{\mathcal{C}} \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{C})\, \blacksquare$

Задача 5

Исходный автомат $\mathcal{A}$:

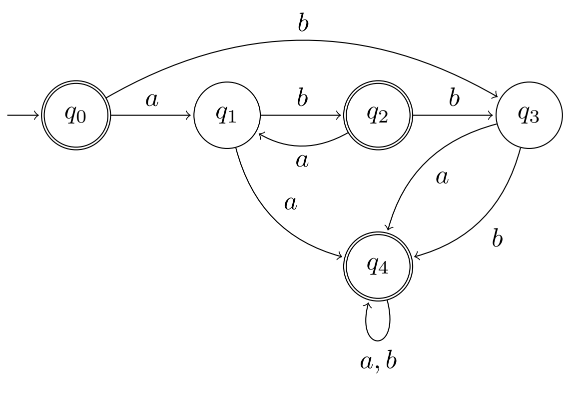


Пополним автомат $\mathcal{A}$ до $\mathcal{A}'$ и удалим недостижимые из q_0 состояния: добавим $q_4 \in Q'$, $q_4 \notin F'$, в него направим недостающие переходы:

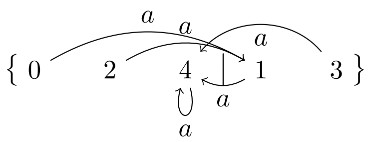


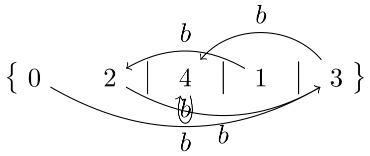
$L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$, так как $x \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow x \in L(\mathcal{A}')$, потому что $Q \subset Q'$, $F = F', \delta \subset \delta'$. $x \notin L(\mathcal{A}) \Rightarrow$ либо $q_0 \xrightarrow{x} q \notin F$, но тогда $q_0 \xrightarrow{x} q \notin F' \Rightarrow x \notin L(\mathcal{A}')$, либо $\delta(q_0, x) = \varnothing$, тогда $\delta'(q_0, x) = q_4$, потому что был выполнен переход в q_4, которого не было в $\mathcal{A}$ (по построению, добавлены переходы только в q_4), и при обработке последующих символов $\mathcal{A}'$ остается в q_4. То есть, в этом случае также $x \notin L(\mathcal{A}')$.

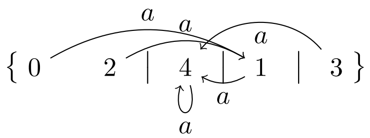
Построим $A''\colon L(\mathcal{A}'') = \overline{L(\mathcal{A}')} \equiv \overline{L(\mathcal{A})}$ по полному автомату $\mathcal{A}'$, определив $F'' \overset{\text{def}}{=} Q' \setminus F'$:



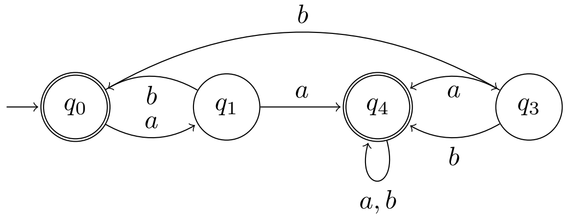
Далее построим по $\mathcal{A}''$ минимальный $\mathcal{A}'''$ по алгоритму:

1. $\{q_0, q_2, q_4\} \in F''$, $\{q_1, q_3\} \notin F'' \Rightarrow$ они должны быть в разных подмножествах:
2. 

3.  — OK

4.  — OK

5. Склеим q_0 и q_2.



Задача 6

(Хопкрофт, 4.2.2: Обращение)
Σ — алфавит. $\mathsf{REG} \ni X, Y, Z \subset \Sigma^*$, $R_3(X)$ — из моего решения задания 3, задачи 1. Индукцией по $R_3(X)$ докажем

$$P(n) = \left[\forall \Sigma^* \supset Z \in \mathsf{REG} \colon R_3(Z) \leqslant n \hookrightarrow Z^R \in \mathsf{REG}\right]$$

1. $R_3(Z) = 0 \Rightarrow$ рассмотрим два варианта:
   (a) $Z = \varepsilon$. Тогда $Z^R = \{\varepsilon\}^R = \{\varepsilon\} \in \mathsf{REG}$.
   (b) $Z = \{\sigma\}$, Тогда $Z^R = \{\sigma\}^R = \{\sigma\} \in \mathsf{REG}$.
2. Пусть $P(n)$. Докажем $P(n+1)$. Фиксируем $Z \in \mathsf{REG} \colon R_3(Z) = n+1 \Rightarrow$
   (a) $Z = X|Y, X, Y \in \mathsf{REG}$. Тогда (см. задание 3, задачу 1) $R_3(X), R_3(Y) \leqslant n \overset{P(n)}{\Rightarrow} X^R, Y^R \in \mathsf{REG}$. $Z^R \equiv (X|Y)^R = \{z^R \big| z \in X \vee z \in Y\} = \{x^R \big| x \in X\} \cup \{y^R \big| y \in Y\} = X^R | Y^R \in \mathsf{REG}$ $(X^R, Y^R \in \mathsf{REG})$.
   (b) $Z = XY, X, Y \in \mathsf{REG}$. Тогда (аналогично) $R_3(X), R_3(Y) \leqslant n \overset{P(n)}{\Rightarrow} X^R, Y^R \in \mathsf{REG}$. $Z^R \equiv (XY)^R = \{(xy)^R \big| x \in X \wedge y \in Y\} = \{y^R x^R \big| x \in X \wedge y \in Y\} = \{y^R \big| y \in Y\} \cdot \{x^R \big| x \in X\} = Y^R \cdot X^R \in \mathsf{REG}$ $(X^R, Y^R \in \mathsf{REG})$.
   (c) $Z = X^*, X \in \mathsf{REG}$. Тогда $R_3(X) \leqslant n \overset{P(n)}{\Rightarrow} X^R \in \mathsf{REG}$. $Z^R = \left(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X^i\right)^R = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (X^R)^i = (X^R)^* \in \mathsf{REG}$ $(X^R \in \mathsf{REG})$.

Пусть ДКА $\mathcal{A}_0 = (Q_0, \Sigma, q_0, \delta_0, F_0) \colon L(\mathcal{A}) = L$. Добавим одно принимающее состояние q_f, в него направим ε-переходы из «старых» принимающих. Полученный автомат $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, $F = \{q_f\}$. Построим НКА $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, q_0', \delta', F') \colon L(\mathcal{A}') = A^R$.
Определим $\delta'(q_j, \sigma) = \{q_i \big| \delta(q_i, \sigma) = q_j\}$. Определим $F' = \{q_0\}, q_0' = q_f$.
Докажем, что $L(\mathcal{A}') = L^R$, что эквивалентно $w \in L(\mathcal{A}') \Leftrightarrow w \in L^R$. Также $w \in L^R \Leftrightarrow w^R \in L \Leftrightarrow w^R \in L(\mathcal{A})$. Поэтому докажем $w \in L(\mathcal{A}') \Leftrightarrow w^R \in L(\mathcal{A})$.

1. «$\Leftarrow$»: $w^R \in L(\mathcal{A})$. Так как принимающее состояние у $\mathcal{A}$ одно — q_f, то последней конфигурацией будет (q_f, ε) (т.к. q_f единственное принимающее, и слово было принято). Остальные состояния в цепочке обозначим как $q_1, ..., q_n$. Цепочка конфигураций:
   $(q_0, w_n...w_1) \vdash (q_1, w_{n-1}...w_1) \vdash ... \vdash (q_{n-1}, w_1) \vdash (q_n, \varepsilon) \vdash (q_f, \varepsilon)$, $q_f \in F$
   Тогда $\delta'(q_f, \varepsilon) \ni q_n, \delta'(q_n, w_1) \ni q_{n-1}, \delta'(q_{n-1}, w_2) \ni q_{n-2}, ..., \delta'(q_1, w_n) \ni q_0$, поэтому для автомата $\mathcal{A}'$
   $(q_f, w_1...w_n) \vdash (q_n, w_1...w_n) \vdash (q_{n-1}, w_2...w_n) \vdash ... \vdash (q_0, \varepsilon)$, $q_0 \in F' \Rightarrow w \in L(\mathcal{A}')$ ■
2. «$\Rightarrow$» $w \in L(\mathcal{A}')$. Аналогично принимающее состояний у $\mathcal{A}'$ одно — q_0, поэтому цепочка должна заканчиваться на (q_0, ε). Остальне состояния в цепочке обозначим $q_n, ..., q_1$. Цепочка конфигураций:
   $(q_f, w_1...w_n) \vdash (q_n, w_1...w_n) \vdash (q_{n-1}, w_2...w_n) \vdash ... \vdash (q_2, w_{n-1}w_n) \vdash (q_1, w_n) \vdash (q_0, \varepsilon)$, $q_0 \in F'$.

   Заметим, что $\delta'(q_j, \sigma) \ni q_i \Rightarrow \delta(q_i, \sigma) = q_j$ (из определения δ').

   Из утверждения выше получаем $\delta(q_n, \varepsilon) = q_f, \delta(q_{n-1}, w_1) = q_n, ..., \delta(q_1, w_{n-1}) = q_2, \delta(q_0, w_n) = q_1$.
   Поэтому $(q_0, w_n...w_1) \vdash (q_1, w_{n-1}...w_2) \vdash ... \vdash (q_n, \varepsilon) \vdash (q_f, \varepsilon)$, $q_f \in F \Rightarrow w^R \in L(\mathcal{A})$ ■

По построенному НКА $\mathcal{A}'$, который распознает L^R, построим ДКА $\mathcal{A}'' \colon L(\mathcal{A}'') = L(\mathcal{A}') = L^R$ ■.