Методы оптимизации.
Задание 1: Субградиентный спуск

Сергей Володин, 374 гр.

задано 2016.02.09

Задача 1

Делаем проекцию на итерациях с номерами из K. Пусть $z_{k+1} \overset{\text{def}}{=} x_k - \alpha_k g^k, x_{k+1} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \pi_Q(z_{k+1}), k \in K \\ z_{k+1}, else \end{cases}$.

Заметим, что $||x_k - x^*|| \leqslant ||z_k - x^*||$, $x^* \in Q$. В одном случае неравенство очевидно ($z_k \equiv x_k$), в другом $||x_k - x^*|| \equiv ||\pi_Q(z_k) - x^*|| \leqslant ||z_k - x^*||$ Рассмотрим последовательность неравенств

$$\left\{||z_{k+1} - x^*||_2^2 \leqslant ||z_k - x^*||_2^2 - 2\alpha_k(f(z_k) - f^*) + \alpha_k^2||g^k||_2^2, k \in \overline{0, N}\right.$$

Эти неравенства верны как базовые неравенства для метода субградиентного спуска. Получим аналогичные неравенства для x_{k+1} (для $k \in \{0, 1, 2, ...\}$). При $k = 0$ это очевидно ($x_0 \equiv z_0$, $||x_1 - x^*|| \leqslant ||z_1 - x^*||$):

$$||x_1 - x^*||_2^2 \leqslant ||x_0 - x^*||_2^2 - 2\alpha_0(f(x_0) - f^*) + \alpha_k^2||g^k||^2$$

. Пусть верно для k

Задача 2

Ответ: да, верно, да, может. Приведем пример $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — выпуклая, $x_0 \in \mathbb{R}^n, a \in \partial f(x_0)$, x_0 — не точка минимума f, $-a$ — не направление убывания f.

$f(\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\|) \overset{\text{def}}{=} |x_1| + |x_2| \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Точка $x_0 \overset{\text{def}}{=} \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix}\right\|^T$ Тогда

1. f — выпуклая: пусть $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $x, y \in \mathbb{R}^2$. $f(t_1x + t_2y) = |t_1x_1 + t_2y_1| + |t_1x_2 + t_2y_2| \leqslant t_1|x_1| + t_2|y_1| + t_1|x_2| + t_2|y_2| = t_1(|x_1| + |x_2|) + t_2(|y_1| + |y_2|) = t_1f(x) + t_2f(y)$. Возьмем $t_1 \in [0, 1]$, $t_2 = 1 - t_1$, получим определение выпуклой функции.

2. Пусть $a = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix}\right\|^T$. Докажем, что $a \in \partial f(x_0)$. Фиксируем $x \in \mathbb{R}^2$. $f(x) - f(x_0) = |x_1| + |x_2| - 1 = 1 \cdot (|x_1| - 1) + 1 \cdot (|x_2|) \equiv (a, x - x_0)$. То есть, верно:
$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \hookrightarrow f(x) - f(x_0) \geqslant (a, x - x_0)$$
То есть, a — субградиент.

3. $-a$ — не направление убывания в x_0. Пусть $t \in (0, 1)$. Рассмотрим $f(x_0 - ta) = |1 - t| + |-t| = 1 - t + t = 1$. Получаем $\forall t \in (0, 1) \hookrightarrow f(x_0 - ta) = f(x_0)$. Получаем,
$$\forall t_0 > 0\, \exists t \overset{\text{def}}{=} \min\{1/2, t_0/2\} < t_0 \colon f(x_0 - ta) \geqslant f(x_0)$$
Это отрицания определения направления убывания.

4. x_0 — не точка минимума f: $f(x_0) = |1| + |0| = 1$, $f(0) = 0 < 1 = f(x_0)$.