Теория и реализация языков программирования. Задание 4: Замкнутость регулярных языков, теорема Майхилла-Нероуда и минимальные автоматы

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.09.25

Сделано позже срока сдачи.

Задача 2

Идея обсуждалась вместе с Владом Гончаренко.

1. В одну сторону утверждение из условия очевидно: если $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$, то $\forall w \hookrightarrow w \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{B})$, в том числе и для тех, о которых говорится в условии.

2. Докажем в другую сторону. $M = \{w \big| |w| \leqslant |Q^{\mathcal{A}}| \cdot |Q^{\mathcal{B}}|\}$. Если входные автоматы не полные, пополним их.

   1. Утверждение: дан ДКА $\mathcal{A}$, $|Q| = n$, Состояние $q_i \in Q$ достижимо. Тогда кратчайший путь (слово) из q_0 в q_i не длиннее n. Действительно, пусть иначе (кратчайший путь w имеет большую длину). Значит (принцип Дирихле), автомат в какой-то вершине q_1 побывал дважды: $w = xyz$, $(q_0, w) \equiv (q_0, xyz) \vdash^* (q_1, yz) \vdash^* (q_1, z) \vdash^* (q_i, \varepsilon)$, $|y| > 0$. Удалив y, получим $w' = xz$, также попадем в q_i: $(q_0, w') \equiv^* (q_0, xz) \vdash^* (q_1, z) \vdash^* (q_i, \varepsilon)$, но путь стал короче — противоречие (xyz — самый короткий).

   2. Рассмотрим автомат $\mathcal{C}$, имитирующий работу двух входный автоматов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (такой построен в задаче 4.4). В нем $|Q^{\mathcal{A}}| \cdot |Q^{\mathcal{B}}|$ состояний. Кратчайшие пути до достижимых состояний не длиннее $|Q^{\mathcal{A}}| \cdot |Q^{\mathcal{B}}|$ (п. 1), поэтому, перебрав все $w \in M$ (то есть, слова, которые не длиннее $|Q^{\mathcal{A}}| \cdot |Q^{\mathcal{B}}|$, в том числе и те, которые могут быть кратчайшими путями), автомат $\mathcal{C}$ побывает в каждом достижимом состоянии. Значит, пара $(q_i^{\mathcal{A}}, q_j^{\mathcal{B}})$ из конечных состояний входных автоматов после прочтения слов $w \in M$ достигнет всех своих возможных значений. То есть,

   $$\forall q_j^i \text{ — достижимое} \hookrightarrow \exists m \in M\colon q_0^0 \xrightarrow{m} q_j^i.$$

   3. Рассмотрим произвольное $w \in \Sigma^*$. Пусть $q_0^0 \xrightarrow{w} q_j^i$ (здесь используется полнота автоматов). Значит, q_j^i — достижимое. Тогда (п.2) для него существует $m_0 \in M\colon q_0^0 \xrightarrow{m_0} q_j^i$, иными словами, $q_0^{\mathcal{A}} \xrightarrow{m_0} q_i^{\mathcal{A}}, q_0^{\mathcal{B}} \xrightarrow{m_0} q_j^{\mathcal{B}}$.
   Из условия имеем $\forall m \in M \hookrightarrow m \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow m \in L(\mathcal{B})$. В том числе это выполнено и для $m_0 : m_0 \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow m_0 \in L(\mathcal{B})$. Значит, $q_i^{\mathcal{A}} \in F^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow q_j^{\mathcal{B}} \in F^{\mathcal{B}}$. А это означает, что $w \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{B})$ ■