Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 2: Арифметические операции и линейные рекуррентные последовательности

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.02.20

Упражнение 3

Определим $A_d \stackrel{\text{def}}{=} \left\|\begin{matrix} c_1 & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{matrix}\right\|$

Докажем по индукции $P(d) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\det(A_d - \lambda E) = (-1)^d(\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - c_2\lambda^{d-2} - ... - c_{d-1}\lambda - c_d)\right]$

1. База. $d = 3 \Rightarrow \det(A_3 - \lambda E) = \begin{vmatrix} (c_1 - \lambda) & c_2 & c_3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = c_1\lambda^2 - \lambda^3 + c_3 + c_2\lambda = (-1)^3(\lambda^3 - c_1\lambda^2 - c_2\lambda - c_3) \Rightarrow P(3)$ ■

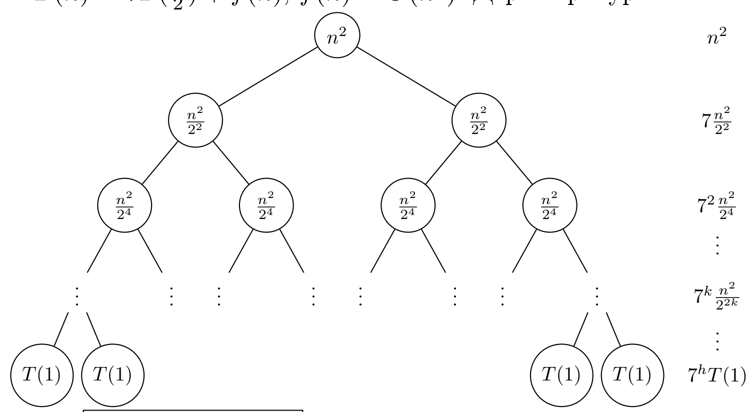
2. Пусть $\underline{P(d-1)}$. Рассмотрим $\det(A_d - \lambda E) = \begin{vmatrix} (c_1 - \lambda) & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \boxed{=}$.

   Разложим по последнему столбцу: $\boxed{=} -\lambda \underbrace{\begin{vmatrix} (c_1 - \lambda) & c_2 & ... & c_{d-1} \\ 1 & -\lambda & ... & 0 \\ & ... & & \\ 0 & 0 & ... & -\lambda \end{vmatrix}}_{\det(A_{d-1} - \lambda E)} + (-1)^{d+1} c_d \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & ... & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix}}_{=1,\ \text{верхн.-треуг.}} \stackrel{P(d-1)}{=}$

$\stackrel{P(d-1)}{=} -\lambda(-1)^{d-1}(\lambda^{d-1} - c_1\lambda^{d-2} - ... - c_{d-2}\lambda - c_{d-1}) - (-1)^d c_d = (-1)^d(\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - ... - c_{d-1}\lambda - c_d)$. Получаем $\underline{P(d)}$ ■

(каноническое) Задача 6

$T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + f(n)$, $f(n) = O(n^2)$. Дерево рекурсии:



Высота дерева $h = \log_2 n$.
$T(n) = \sum\limits_{k=0}^{h-1} 7^k f(\frac{n}{2^k}) + 7^h T(1) \boxed{\leqslant}$.
Из определения O $\exists C > 0\, \exists n_0 \colon \forall n \geqslant n_0\, f(n) \leqslant Cn^2$, откуда первая сумма $\sum\limits_{k=0}^{h-1} 7^k f(\frac{n^2}{2^{2k}}) \leqslant Cn^2 \sum\limits_{k=0}^{h-1} (\frac{7}{4})^k = Cn^2 \frac{(7/4)^{h-1} - 1}{7/4 - 1} = C_1 n^2((7/4)^{\log_2 n} - C_2) = C_1 n^2 n^{\log_2 \frac{7}{4}} - C_3 n^2 = C_1 n^{\log_2 7} - C_3 n^2$. Второе слагаемое $7^h T(1) = 7^{\log_2 n} T(1) = Cn^{\log_2 7}$
Поэтому $T(n) \leqslant n^{\log_2 7} - C_5 n^2$

Ответ: $\boxed{T(n) = O(n^{\log_2 7})}$

(каноническое) Задача 7

Вход: точки $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$.
Алгоритм: считаем массив расстояний $r_i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ *(можно r_i^2)*. Ищем медиану r_m в массиве за $O(n)$
Ответ: r_m *(r_{m+1}?)*.