Теория и реализация языков программирования. Задание 2: НКА и алгоритмы поиска подстрок

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.09.18

Упражнение 1

Пусть $\sim \subset X \times X$. $C(x) = \{z \in X | x \sim z\}$, $C(y) = \{w \in X | y \sim z\}$.
Пусть $\exists z \in C(x) \cap C(y)$. Тогда $x \sim z, y \sim z$, и $w \in C(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \sim w \underset{\text{транз. симм.}}{\overset{z \sim x}{\Leftrightarrow}} z \sim w \overset{y \sim z}{\Leftrightarrow} y \sim w \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} w \in C(y)$, то есть, $C(x) = C(y)$.
В противном случае $\rceil(\exists z \in C(x) \cap C(y)) \Leftrightarrow C(x) \cap C(y) = \varnothing$. Получаем, что возможны два случая:

1. $C(x) \cap C(y) = \varnothing$ *(не пересекаются)*
2. $C(x) = C(y)$ *(совпадают)*

Упражнение 2

Пусть $\varphi\colon \Sigma^* \supseteq X \longrightarrow \Delta^*$. $\varphi(\sigma_i) \overset{\text{def}}{=} \delta_i \in \Delta^*$, $|\sigma_i| = 1$.

1. *(единственность)* Предположим, что существует такое φ — морфизм. Тогда $\forall w = w_1 ... w_n \in X, |w_i| = 1 \hookrightarrow \varphi(w) \equiv \varphi(w_1 ... w_n) = \varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2 ... w_n) = ... = \varphi(w_1) \cdot ... \cdot \varphi(w_n) \in \Delta^*$. Для $w = \varepsilon$ получаем $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$, так как φ — морфизм: $w_0 \overset{\text{def}}{=} \varphi(\varepsilon) = \varepsilon$. $\varphi(\varepsilon) \equiv \varphi(\varepsilon\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) = w_0 w_0 \Rightarrow w_0 = w_0 w_0 \Rightarrow |w_0| = |w_0||w_0| \Rightarrow w_0 = \varphi(\varepsilon) = \varepsilon$.

   Таким образом, получаем, что такой морфизм единственный (если существует).

2. *(существование)* Докажем, что определенное выше отображение φ — морфизм: пусть $x, y \in X$. Рассмотрим случаи:

   a. $|x| = 0, |y| = 0 \Rightarrow \varphi(xy) = \varphi(\varepsilon\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) = \varepsilon = \varepsilon\varepsilon = \varphi(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)$
   b. $|x| = 0, |y| > 0 \Rightarrow \varphi(xy) = \varphi(y) = \varepsilon\varphi(y) = \varphi(x)\varphi(y)$
   c. $|x| > 0, |y| = 0 \Rightarrow \varphi(xy) = \varphi(x) = \varphi(x)\varepsilon = \varphi(x)\varphi(y)$
   d. $|x| > 0, |y| > 0 \Rightarrow \varphi(xy) = \varphi(x_1 ... x_m y_1 ... y_n) = \underbrace{\varphi(x_1) ... \varphi(x_m)}\underbrace{\varphi(y_1) ... \varphi(y_n)} = \varphi(x)\varphi(y)$.

Таким образом, если заданы значения $\varphi(\sigma_i), \sigma_i \in X \subset \Sigma$, то морфизм $\varphi\colon \Sigma^* \supseteq X \longrightarrow \Delta^*$ с этими значениями существует и единственнен.

Задача 1

Определим $R_3 : \mathsf{REG} \ni X \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ — количество применений правила 3 из определения регулярности X. В случае $X = AB$ или $X = A|B, A, B \in \mathsf{REG}$ $R_3(X) \overset{\text{def}}{=} 1 + R_3(A) + R_3(B)$. В случае $X = A^*, A \in \mathsf{REG}$, определим $R_3(X) \overset{\text{def}}{=} 1 + R_3(A)$. В случае $X = \varnothing$ или $X = \{\sigma\}$ определим $R_3(X) \overset{\text{def}}{=} 0$. Функция $R_3(X)$ определена корректно, так как определение регулярного языка коррентное.
Пусть $\varphi\colon \Sigma^* \supset X \longrightarrow Y \subset \Delta^*$ — морфизм, $X \in \mathsf{REG}$. Докажем, что $Y \equiv \varphi(X) \in \mathsf{REG}$ индукцией по $R_3(X)$:
$P(i) = (\forall X \in \mathsf{REG}\colon R_3(X) \leqslant i \ \forall\varphi$ — морфизм $\hookrightarrow \varphi(X) \in \mathsf{REG})$.

1. Докажем $P(0)$: пусть $X \in \mathsf{REG}\colon R_3(X) = 0$. Тогда X получен без применения третьего правила. Значит, $\forall\varphi$ — морфизм либо $X = \varnothing \Rightarrow \varphi(X) = \varnothing$, либо $X = \{\sigma\} \Rightarrow \varphi(X) = \{\varphi(\sigma)\} = \{w\}, w \in \Delta^*$.

   Докажем, что $\Delta^* \supset \{w\} \in \mathsf{REG}$. $\{w\} \equiv \{\sigma_1 ... \sigma_n\} \equiv \{\sigma_1\} \cdot ... \cdot \{\sigma_n\}$. Поскольку $\{\sigma_i\} \in \mathsf{REG}$, и регулярные языки замкнуты относительно конкатенации (по определению), получаем требуемое.

   Итак, $\varphi(X) \in \mathsf{REG}$ $\blacksquare$

2. Пусть $P(n)$. Докажем $P(n+1)$. Пусть $\mathsf{REG} \ni X\colon R_3(X) \leqslant n + 1$. Если $R_3(X) < n + 1$, $P(n) \Rightarrow X \in \mathsf{REG}$.
   $\sphericalangle X\colon R_3(X) = n + 1$. Возможны случаи:

   a. $X = WZ$, $W, Z \in \mathsf{REG}$. Тогда $\varphi(X) \equiv \varphi(WZ) = \{\varphi(wz) | w \in W, z \in Z\} = \{\varphi(w)\varphi(z) | w \in W, z \in Z\} =$
   $\{\varphi(w) | w \in W\} \cdot \{\varphi(z) | z \in Z\} = \varphi(W)\varphi(Z)$. $R_3(X) = 1 + R_3(W) + R_3(Z) = n + 1 \Rightarrow R_3(W), R_3(Z) \leqslant n \overset{P(n)}{\Rightarrow} \varphi(W), \varphi(Z) \in \mathsf{REG} \Rightarrow \varphi(X) = \varphi(W)\varphi(Z) \in \mathsf{REG}$.

b. $X = W|Z$, $W, Z \in \mathsf{REG}$. Тогда $\varphi(X) \equiv \varphi(W|Z) \equiv \varphi(W)|\varphi(Z)$. Аналогично $R_3(W), R_3(Z) \leqslant n \overset{P(n)}{\Rightarrow} \varphi(W), \varphi(Z) \in \mathsf{REG} \Rightarrow \varphi(X) = \varphi(W)|\varphi(Z) \in \mathsf{REG}$.

c. $X = W^*, W \in \mathsf{REG}$. Тогда $R_3(X) = 1 + R_3(W) = n + 1 \Rightarrow R_3(W) = n \overset{P(n)}{\Rightarrow} \varphi(W) \in \mathsf{REG} \Rightarrow \varphi(W^*) = \varphi(\varepsilon|W|WW|...) = \varphi(\varepsilon)|\varphi(W)|\varphi(WW)... \overset{\varphi(\varepsilon)=\varepsilon}{=} \varepsilon|\varphi(W)|\varphi(WW)... = \varphi(W)^* \in \mathsf{REG}$.

Получаем $\forall i \geqslant 0 \hookrightarrow P(i) \Rightarrow \forall X \in \mathsf{REG}\, \forall \varphi$ — морфизм $\hookrightarrow \varphi(X) \in \mathsf{REG}\, \blacksquare$

Задача 2

1. Нет. Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = \Sigma^*$. Определим $\varphi \colon L \longrightarrow L \colon \forall w \in L \hookrightarrow \varphi(w) = \varepsilon$. В этом случае φ — морфизм, так как $\forall x \in L\, \forall y \in L \hookrightarrow \varphi(xy) = \varepsilon = \varepsilon\varepsilon = \varphi(x)\varphi(y)$. Тогда $\forall \varnothing \neq X \subset L \hookrightarrow \varphi(X) = \{\varepsilon\}$, так как $\forall w \in L \hookrightarrow \varphi(w) = \varepsilon$. Поскольку $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon \in L$, $\varphi^{-1}(\varepsilon) \ni \varepsilon \Rightarrow \varphi^{-1}(L) \supset \{\varepsilon\} \neq \varnothing \Rightarrow \varphi^{-1}(L) \neq \varnothing \Rightarrow \varphi(\varphi^{-1}(L)) = \{\varepsilon\} \neq L$.
   Таким образом, $\exists L \subseteq \Sigma^*\, \exists \varphi$ — морфизм: $\varphi(\varphi^{-1}(L)) \neq L$.

2. Нет. Пусть $\Sigma = \{a, b\}$, $L = \{b\}^*$, $\varphi(a) \overset{\text{def}}{=} \varphi(b) \overset{\text{def}}{=} a$. Доопределим φ так, чтобы оно было морфизмом (это возможно, см. упражнение 2). Тогда $\varphi(L) \equiv \varphi(\{b^*\}) \ni \varphi(b) = a \Rightarrow \varphi^{-1}(\varphi(L)) \supset \varphi^{-1}(a) \ni a \notin L \Rightarrow \varphi^{-1}(\varphi(L)) \nsubseteq L \Rightarrow \varphi^{-1}(\varphi(L)) \neq L$.
   Таким образом, $\exists L \subseteq \Sigma^*\, \exists \varphi$ — морфизм: $\varphi^{-1}(\varphi(L)) \neq L$.

3. Нет. Пусть $\Sigma = \{a, b\}$, $L = \{ab\}$, морфизм $\varphi \colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ — из предыдущего пункта. Тогда $\varphi(L) = \{\varphi(ab)\} = \{\varphi(a)\varphi(b)\} = \{aa\}$, $\varphi^{-1}(L) = \{x \in \Sigma^* | \varphi(x) \in \{ab\}\} = \{x \in \Sigma^* | \varphi(x) = ab\} = \varnothing$, так как $\varphi(\Sigma^*) = \varphi((a|b)^*) \overset{1.2.c}{=} (\varphi(a|b))^* = \{\varphi(a), \varphi(b)\}^* = \{a\}^* = a^* \not\ni ab$. Тогда $\varphi(\varphi^{-1}(L)) = \varphi(\varnothing) = \varnothing \not\ni aa \in \varphi^{-1}(aa) = \varphi^{-1}(\varphi(L))$.
   Таким образом, $\exists L \subseteq \Sigma^*\, \exists \varphi$ — морфизм: $\varphi(\varphi^{-1}(L)) \neq \varphi^{-1}(\varphi(L))$.

Задача 3