Теория и реализация языков программирования.
Задание 9: преобразование контекстно-свободных языков

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.10.30

Упражнение 1

Упражнение 2

Упражнение 3

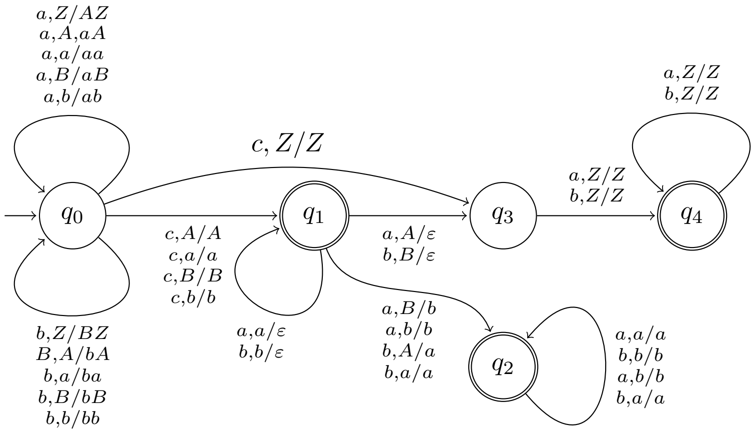
Упражнение 4

Задача 1

$L \stackrel{\text{def}}{=} \{xcy | x, y \in \{a,b\}^*, x \neq y^R\} \subset \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a,b,c\}$.

1. Определим МП-автомат $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, Z, \delta, F)$, допускающий по принимающему состоянию:

   1. $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, A, B, Z\}$
   2. $Q \stackrel{\text{def}}{=} \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
   3. δ изображена справа
   4. $F \stackrel{\text{def}}{=} \{q_1, q_2, q_4\}$



2. $\mathcal{A}$ — детерминированный, так как из каждой конфигурации (q, w, γ) переход определен однозначно, и ε-переходов нет.

3. Определим $U\colon \{a,b\} \to \{A,B\}\colon U(a) = A$, $U(b) = B$. Определим $U_r\colon \{a,b\}^* \to \{a,b,A,B\}^*$:
$$U_r(w) = \begin{cases} \varepsilon, & w = \varepsilon \\ w_1 ... w_{n-1} U(w_n), & w = w_1 ... w_n,\ \forall i \in \overline{1,n} \hookrightarrow w_i \in \{a,b\} \end{cases}$$ — заменяет последний символ на заглавный.

4. Докажем, что $L \subseteq L(\mathcal{A})$:
   (a) Пусть $w \in \{a,b\}^*$. Докажем, что $(q_0, w, Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, U_r(w^R)Z)$ индукцией по $|w|$:
   $P(n) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\forall w \in \{a,b\}^*\colon |w| = n \hookrightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, U_r(w^R)Z)\right]$
      i. $n = 0 \Rightarrow |w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$. Тогда $U_r(w^R) \equiv \varepsilon$, и $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, \varepsilon, Z) \equiv (q_0, \varepsilon, U_r(w^R)Z) \Rightarrow P(0)$.
      ii. $n = 1 \Rightarrow w = \sigma \in \Sigma$. Рассмотрим переходы из (q_0, σ, Z). В стек будет добавлен $U_r(\sigma) \Rightarrow (q_0, w, Z) \equiv (q_0, \sigma, Z) \vdash (q_0, \varepsilon, U_r(\sigma)Z) \equiv (q_0, \varepsilon, U_r(w^R)Z) \Rightarrow P(1)$.
      iii. Фиксируем $n \geqslant 1$, пусть $\underline{P(n)}$. Пусть $w \in \{a,b\}^*, |w| = n+1$. Тогда $w = w_0\sigma, |w_0| = n > 0$.
      $P(n) \Rightarrow (q_0, w_0, Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, U_r(w_0^R)Z)$. Тогда $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, w_0\sigma, Z) \vdash^* (q_0, \sigma, U_r(w_0^R)Z)$.
      $\sphericalangle$ переходы из $(q_0, \sigma, U(w_0^R)Z)$. На верхушке стека $\gamma \in \{a, b, A, B\}$ — первый символ $U_r(w_0^R)$,
      входной символ $\sigma \in \{a,b\}$. Во всех случаях он будет добавлен в стек (см. определение δ), значит, $(q_0, \sigma, U_r(w_0^R)Z) \vdash (q_0, \varepsilon, \sigma U_r(w_0^R)Z) \stackrel{|w_0|>0}{=} (q_0, \varepsilon, U_r(w^R)Z) \Rightarrow \underline{P(n+1)}$.
   (b) Из определения δ имеем $(q_0, cw, \gamma) \vdash^* (q_1, w, \gamma)$, $|\gamma| > 0, \gamma \neq Z$.
   (c) Докажем $(q_1, x, xZ) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$ индукцией по $|x|$: $P(n) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\forall x \in \{a,b\}^*\colon |x| = n \hookrightarrow (q_1, x, xZ) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)\right]$
      i. $n = 0 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = \varepsilon$. Тогда $(q_1, x, xZ) \equiv (q_1, \varepsilon, Z) \Rightarrow P(0)$

ii. Фиксируем $n \geqslant 0$. Пусть $\underline{P(n)}$. Пусть $x \in \{a,b\}^*: |x| = n+1 \Rightarrow x = x_0\sigma, |x_0| = n \overset{P(n)}{\Rightarrow} (q_1, x_0, x_0Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$. Тогда $(q_1, x, xZ) \equiv (q_1, x_0\overline{\sigma}, \overline{x_0}\sigma Z) \vdash^* (q_1, \sigma, \sigma Z)$. Входной символ совпадает с символом на верхушке стека, из определения δ получаем, что символ будет удален из стека: $(q_1, \sigma, \sigma Z) \vdash (q_1, \varepsilon, Z) \Rightarrow P(n)$.

(d) Пусть $\sigma_1, \sigma_2 \in \{a,b\}$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Тогда $(q_1, \sigma_1, U_r(\sigma_2)\gamma) \vdash (q_2, \varepsilon, \sigma_2\gamma)$ и $(q_1, \sigma_1, \sigma_2\gamma) \vdash (q_2, \varepsilon, \sigma_2\gamma)$ — из определения δ.

(e) Пусть $x \in \{a,b\}^*$, $\gamma \in \{a,b\}$. Тогда $(q_2, x, \gamma\kappa) \vdash^* (q_2, \varepsilon, \gamma\kappa)$ — доказывается очевидно по индукции (переходы из q_2 в q_2 определены для всех символов a, b на входе и в стеке и не изменяют стек).

(f) Пусть $\sigma \in \{a,b\}$. Тогда $(q_1, \sigma, U_r(\sigma)\gamma) \vdash (q_3, \varepsilon, \gamma)$ — из определения δ.

(g) Пусть $\sigma \in \{a,b\}$. Тогда $(q_3, \sigma, Z) \vdash (q_4, \varepsilon, Z)$ — из определения δ

(h) Пусть $x \in \{a,b\}^*$. Тогда $(q_4, x, Z) \vdash^* (q_4, \varepsilon, Z)$ — доказывается очевидно по индукции (из q_4 есть переходы в q_4 по a и b при Z на верхушке стека)

(i) Из определения δ имеем $(q_0, c, Z) \vdash (q_3, \varepsilon, Z)$.

(j) Пусть $\underline{w \in L} \Rightarrow w = xcy, x \neq y^R; x, y \in \{a,b\}^*$. $x \neq y^R \Leftrightarrow x^R \neq y$. Выделим максимальную по длине общую часть τ длины i у слов x^R и y: $x^R = \tau x_1, y = \tau y_1$, $x_1 \neq y_1$. Тогда $x = x_1^R\tau^R, w = xcy = x_1^R\tau^R c\tau y_1$.

i. Пусть $|x_1| > 0$. $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, x_1^R\tau^R c\tau y_1, Z) \underset{|x_1|>0}{\overset{4a}{\vdash^*}} (q_0, c\tau y_1, U_r(\tau x_1)Z) \overset{4b}{\vdash} (q_1, \tau y_1, U_r(\tau x_1)Z) \overset{|x_1|>0}{\equiv}$

$\equiv (q_1, \tau y_1, \tau U_r(x_1)Z) \overset{4c}{\vdash^*} (q_1, y_1, U_r(x_1)Z)$.

A. Пусть $|y_1| > 0$, $x_1[1] \neq y_1[1]$. Обозначим $y_1 = y^1 ... y^l$, $\forall i \in \overline{1,l} \hookrightarrow y^i \in \{a,b\}^*$ Тогда $(q_1, y_1, U_r(x_1)Z) \equiv (q_1, y^1...y^l, U_r(x_1)Z) \overset{4d}{\vdash} (q_2, y^2...y^l, U_r(x_1)Z) \overset{4e}{\vdash^*} (q_2, \varepsilon, U_r(x_1)Z)$. $q_2 \in F \Rightarrow \underline{w \in L(\mathcal{A})}$.

B. Пусть $|y_1| = 0$. Тогда $w = x_1^R\tau^R c\tau y_1 \equiv x_1^R\tau^R c\tau \Rightarrow (q_0, w, Z) \equiv (q_0, x_1^R\tau^R c\tau, Z) \underset{|x_1|>0}{\overset{4a}{\vdash^*}} (q_0, c\tau, \tau U_r(x_1)Z) \underset{|x_1|>0}{\overset{4b}{\vdash}}$

$(q_1, \tau, \tau U_r(x_1)Z) \overset{4e}{\vdash^*} (q_1, \varepsilon, U_r(x_1)Z)$. $q_1 \in F \Rightarrow \underline{w \in L(\mathcal{A})}$

ii. Пусть $|x_1| = 0$. Тогда $w = \tau^R c\tau y_1$, $y_1 \in \{a,b\}^*$. $x^R \neq y \Rightarrow \tau \neq \tau y_1 \Rightarrow |y_1| > 0 \Rightarrow y_1 = \varkappa\Psi$, $\varkappa \in \{a,b\}$

A. $|\tau| > 0 \Rightarrow \tau = \tau_0\sigma$, $\sigma \in \{a,b\}$. Получаем $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, \tau^R c\tau y_1, Z) \underset{|\tau|>0}{\overset{4a}{\vdash^*}} (q_0, c\tau y_1, U_r(\tau)Z) \underset{|\tau|>0}{\overset{4b}{\vdash}} (q_1, \tau y_1, U_r(\tau)Z) \equiv$

$(q_1, \tau_0\sigma y_1, \tau_0 U_r(\sigma)Z) \overset{4c}{\vdash^*} (q_1, \sigma y_1, U_r(\sigma)Z) \overset{4f}{\vdash} (q_3, y_1, Z) \equiv (q_3, \varkappa\Psi, Z) \overset{4g}{\vdash} (q_4, \Psi, Z) \overset{4h}{\vdash^*} (q_4, \varepsilon, Z)$. $q_4 \in F \Rightarrow \underline{w \in L(\mathcal{A})}$

B. $|\tau| = 0 \Rightarrow w = x_1^R\tau^R c\tau y_1 \equiv cy_1 \Rightarrow (q_0, w, Z) \equiv (q_0, cy_1, Z) \overset{4i}{\vdash} (q_3, y_1, Z) \equiv (q_3, \varkappa\Psi, Z) \overset{4g}{\vdash} (q_4, \Psi, Z) \overset{4h}{\vdash^*} (q_4, \varepsilon, Z)$. $q_4 \in F \Rightarrow \underline{w \in L(\mathcal{A})}$

5. Докажем, что $L(\mathcal{A}) \subseteq L$. Пусть $w \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma)$, $q \in F$:

(a) $q = q_1$. В q_1 прочитываются a, b. Переходы в q_1 есть только из q_0 по c. В q_0 прочитываются символы a, b. Значит, $w = xcy$, $x, y \in \{a,b\}^*$. Если $x = \varepsilon$, то был совершен переход $q_0 \xrightarrow{c,Z/Z} q_3$ — противоречие. Автомат детерминированный, поэтому цепочка конфигураций при выводе w имеет вид $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, xcy, Z) \underset{|x|>0}{\overset{4a}{\vdash}} (q_0, cy, U_r(x^R)Z) \underset{|x|>0}{\overset{4b}{\vdash}}$ $(q_1, y, U_r(x^R)Z)\boxed{\equiv}$. Выделим максимальную общую часть от начала для слов x^R и y: $x^R = \tau x_1$, $y = \tau y_1$, $x_1 \neq y_1$.

i. $|\tau| = 0, |x_1| = 0 \Rightarrow |x| = 0$ — противоречие

ii. $|\tau| > 0, |x_1| = 0 \Rightarrow \tau = \tau_0\sigma$, $\sigma \in \{a,b\}$. $\boxed{\equiv}(q_1, \tau_0\sigma y_1, \tau_0 U_r(\sigma)Z) \overset{4c}{\vdash^*} (q_1, \sigma y_1, U_r(\sigma)Z) \overset{4f}{\vdash} (q_3, ...)$ — противоречие, из q_3 нет переходов в q_1.

iii. $|\tau| \geqslant 0, |x_1| > 0$. Тогда $\boxed{\equiv}(q_1, \tau y_1, \tau U_r(x_1)Z) \overset{4c}{\vdash^*} (q_1, y_1, U_r(x_1)Z)\boxed{\equiv_1}$.

a. $|y_1| = 0 \Rightarrow \boxed{\equiv_1}(q_1, \varepsilon, U_r(x_1))$. Тогда $w = \underbrace{x_1^R\tau^R}_{x} c \underbrace{\tau y_1^R}_{y}$, $x^R = \tau x_1 \underset{|x_1|>0}{\neq} \tau = y \Rightarrow \underline{w \in L}$.

b. $|y_1| > 0$. Тогда $x_1[1] \neq y_1[1]$, и $\boxed{\equiv_1}(q_1, y_1, U_r(x_1)Z) \underset{x_1[1]\neq y_1[1]}{\overset{4d}{\vdash}} (q_3, ...)$ — противоречие, из q_3 нет переходов в q_1.

(b) $q = q_2$. В q_2 есть переходы только из q_1, в q_2 прочитываются a, b. $5a \Rightarrow w = xcy$, $|x| \neq 0$, $x, y \in \{a,b\}^*$. При переходе в q_2 прочитывается символ, поэтому $|y| > 0$. Аналогично $5a$ выделим общую часть $x^R = \tau x_1, y = \tau y_1$. Аналогично $5a$ ($|x| > 0$) получаем $(q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \tau y_1, U_r(\tau x_1)Z)\boxed{\equiv}$. Рассмотрим случаи:

i. $|\tau| = 0, |x_1| = 0 \Rightarrow |x| = 0$ — противоречие

ii. $|\tau| > 0, |x_1| = 0 \Rightarrow \tau = \tau_0\sigma$, $\sigma \in \{a,b\}$. $\boxed{\equiv}(q_1, \tau_0\sigma y_1, \tau_0 U_r(\sigma)Z) \overset{4c}{\vdash^*} (q_1, \sigma y_1, U_r(\sigma)Z) \overset{4f}{\vdash} (q_3, ...)$ — противоречие, из q_3 нет переходов в q_2.

iii. $|\tau| \geqslant 0, |x_1| > 0$. Тогда $\boxed{\equiv}(q_1, \tau y_1, \tau U_r(x_1)Z) \overset{4c}{\vdash^*} (q_1, y_1, U_r(x_1)Z)\boxed{\equiv_1}$.

a. $|y_1| = 0 \Rightarrow \boxed{\equiv_1}(q_1, \varepsilon, U_r(x_1))$. В $5a$ было показано, что автомат остановится в q_1 — противоречие.

b. $|y_1| > 0$. Тогда $x_1[1] \neq y_1[1]$. Обозначим $x_1 = \sigma_1 x_1^0$, $y_1 = \sigma_2 y_1^0$, и $\boxed{\equiv_1}(q_1, \sigma_1 y_1^0, U_r(\sigma_2 x_1^0)Z) \underset{x_1[1]\neq y_1[1]}{\overset{4d}{\vdash}}$

$(q_3, y_1^0, U_r(x_1^0)Z) \overset{4e}{\vdash^*} (q_3, \varepsilon, U_r(x_1^0)Z)$ *(последние переходы возможны только при $x_1^0 \neq \varepsilon$).*
Получаем $x_1 \neq y_1 \Rightarrow x^R \neq y \Rightarrow \underline{w \in L}$.

Задача 2

Задача 3

$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a,b\}$, $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} (N,\Sigma,P,S)$. $N \stackrel{\text{def}}{=} \{A,B,C,D,E,F,G\}$ P :

$$S \to A|B|C|E|AG$$
$$A \to C|aABC|\varepsilon$$
$$B \to bABa|aCbDaGb|\varepsilon$$
$$C \to BaAbC|aGD|\varepsilon$$
$$F \to aBaaCbA|aGE$$
$$E \to A$$

1. Удалим бесплодные символы (для упрощения):
   (a) $V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{a,b\}$
   (b) $V_1 = V_0 \cup \{A,B,C\} = \{a,b,A,B,C\}$
   (c) $V_2 = V_1 \cup \{S,F,E\} = \{a,b,S,A,B,C,F,E\}$
   (d) $V_3 = V_2 \cup \varnothing$

   Тогда $V_3 \setminus \Sigma = \{S,A,B,C,F,E\}$. Удалим нетерминалы $N \setminus V_3 = \{D,G\}$ и правила, их содержащие: $N' \stackrel{\text{def}}{=} N \setminus V_3 = \{S,A,B,C,F,E\}$, P':

$$S \to A|B|C|E|\cancel{AG}$$
$$A \to C|aABC|\varepsilon$$
$$B \to bABa|\cancel{aCbDaGb}|\varepsilon$$
$$C \to BaAbC|\cancel{aGD}|\varepsilon$$
$$F \to aBaaCbA|\cancel{aGE}$$
$$E \to A$$

2. Удалим недостижимые символы (для упрощения):
   (a) $V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{S\}$
   (b) $V_1 = V_0 \cup \{A,B,C,E\}$
   (c) $V_2 = V_1 \cup \varnothing$

   $N'' \stackrel{\text{def}}{=} \{A,B,C,E,S\}$, P'':

$$S \to A|B|C|E|\cancel{AG}$$
$$A \to C|aABC|\varepsilon$$
$$B \to bABa|\cancel{aCbDaGb}|\varepsilon$$
$$C \to BaAbC|\cancel{aGD}|\varepsilon$$
$$F \to \cancel{aBaaCbA|aGE}$$
$$E \to A$$

1,2. Имеем P'':

$$S \to A|B|C|E$$
$$A \to C|aABC|\varepsilon$$
$$B \to bABa|\varepsilon$$
$$C \to BaAbC|\varepsilon$$
$$E \to A$$

3. Удалим ε-правила:
   (a) A,B,C — ε-порождающие.
   (b) S,E — ε-порождающие ($S \to A$, $E \to A$)

   Перепишем правила, содержащие ε-порождающие нетерминалы справа (2^k правил для каждого правила, содержащего k ε-порождающих нетерминалов). P''':

$$S \to A|B|C|E$$
$$A \to C|a|aC|aB|aBC|aA|aAC|aAB|aABC$$
$$B \to ba|bBa|bAa|bABa$$
$$C \to ab|abC|aAb|aAbC|Bab|BabC|BaAbC$$
$$E \to A$$

   Грамматика с такими правилами порождает язык $L(\Gamma) \setminus \{\varepsilon\}$.

4. Найдем цепные пары (множества пар соответствуют добавлениям на шагах алгоритма):
   (a) $(S,S),(A,A),(B,B),(C,C),(E,E)$
   (b) $(S,A),(S,B),(S,C),(S,E);(A,C);(E,A)$
   (c) $(S,C);\cancel{(S,A)};(E,C)$

5. Выпишем новое множество правил P'''':

Цепная пара	Правила
(S,S)	$\varnothing$
(A,A)	$A \to a\vert aC\vert aB\vert aBC\vert aA\vert aAC\vert aAB\vert aABC$
(B,B)	$B \to ba\vert bBa\vert bAa\vert bABa$
(C,C)	$C \to ab\vert abC\vert aAb\vert aAbC\vert Bab\vert BabC\vert BaAbC$
(E,E)	$\varnothing$
(S,A)	$S \to a\vert aC\vert aB\vert aBC\vert aA\vert aAC\vert aAB\vert aABC$
(S,B)	$S \to ba\vert bBa\vert bAa\vert bABa$
(S,C)	$S \to ab\vert abC\vert aAb\vert aAbC\vert Bab\vert BabC\vert BaAbC$
(S,E)	$\varnothing$
(A,C)	$A \to ab\vert abC\vert aAb\vert aAbC\vert Bab\vert BabC\vert BaAbC$
(E,A)	$E \to a\vert aC\vert aB\vert aBC\vert aA\vert aAC\vert aAB\vert aABC$
(S,C)	$S \to ab\vert abC\vert aAb\vert aAbC\vert Bab\vert BabC\vert BaAbC$
(E,C)	$E \to ab\vert abC\vert aAb\vert aAbC\vert Bab\vert BabC\vert BaAbC$

6. Нетерминалы A, B, C, E, S не являются бесплодными: $A \to a, B \to ba, C \to ab, E \to a, S \to ab$.

7. Удалим недостижимые:

   (a) $V_0 \overset{\text{def}}{=} \{S\}$

   (b) $V_1 \overset{\text{def}}{=} \{S, A, B, C\}$

   (c) $V_2 = V_1$

   Удаляем E. $P^{(5)}$:
   $A \to a|aC|aB|aBC|aA|aAC|aAB|aABC|ab|abC|aAb|aAbC|Bab|BabC|BaAbC$

   $B \to ba|bBa|bAa|bABa$

   $C \to ab|abC|aAb|aAbC|Bab|BabC|BaAbC$

   $S \to a|aC|aB|aBC|aA|aAC|aAB|aABC|ba|bBa|bAa|bABa|ab|abC|aAb|aAbC|Bab|BabC|BaAbC$

8. Приведем к нормальной форме Хомского. Добавим нетерминалы A', B', $A' \to a, B' \to b$. Заменим в правилах a на A', b на B'. Подчеркнем слова из нетерминалов длины 2 в правых частях правил, которые заменим на новые нетерминалы:
   $A \to a|A'C|A'B|\underline{A'B}C|A'A|\underline{A'A}C|\underline{A'A}B|\underline{A'A}\,\underline{BC}|A'B'|\underline{A'B'}C|\underline{A'A}B'|\underline{A'A}\,\underline{B'C}|\underline{BA'}B'|\underline{BA'}\,\underline{B'C}|\underline{BA'}\,\underline{AB'}C$

   $B \to B'A'|\underline{B'B}A'|\underline{B'A}A'|\underline{B'A}\,\underline{BA'}$

   $C \to A'B'|\underline{A'B'}C|\underline{A'A}B'|\underline{A'A}\,\underline{B'C}|\underline{BA'}B'|\underline{BA'}\,\underline{B'C}|\underline{BA'}\,\underline{AB'}\,C$

   $S \to a|A'C|A'B|\underline{A'B}C|A'A|\underline{A'A}C|\underline{A'A}B|\underline{A'A}\,\underline{BC}|B'A'|\underline{B'B}A'$

   $S \to \underline{B'A}A'|\underline{B'A}\,\underline{BA'}|A'B'|\underline{A'B'}\,C|\underline{A'A}B'|\underline{A'A}\,\underline{B'C}|\underline{BA'}B'|\underline{BA'}\,\underline{B'C}|\underline{BA'}\,\underline{AB'}C$

   $A' \to a$

   $B' \to b$
   Заменим подчеркнутые слова на новые нетерминалы:
   $A \to a|A'C|A'B|X_0C|A'A|X_1C|X_1B|X_1X_2|A'B'|X_3C|X_1B'|X_1X_4|X_5B'|X_5X_4|X_9C$

   $B \to B'A'|X_7A'|X_8A'|X_8X_5$

   $C \to A'B'|X_3C|X_1B'|X_1X_4|X_5B'|X_5X_4|X_9C$

   $S \to a|A'C|A'B|X_0C|A'A|X_1C|X_1B|X_1X_2|B'A'|X_7A'|X_8A'|X_8X_5|A'B'|X_3C|X_1B'|X_1X_4|X_5B'|X_5X_4|X_9C$

$A' \to a$	$X_2 \to BC$	$X_6 \to AB'$
$B' \to b$	$X_3 \to A'B'$	$X_7 \to B'B$
$X_0 \to A'B$	$X_4 \to B'C$	$X_8 \to B'A$
$X_1 \to A'A$	$X_5 \to BA'$	$X_9 \to X_5X_6$

Задача 4

Задача 5

$\Sigma_2 \overset{\text{def}}{=} \{[_1, [_2\}$, $\overline{\Sigma}_2 \overset{\text{def}}{=} \{]_1,]_2\}$. $D_2 \overset{\text{def}}{=}$ язык ПСП над $\Sigma \overset{\text{def}}{=} \Sigma_2 \cup \overline{\Sigma}_2$. $\Delta \overset{\text{def}}{=} \{a, b\}$. $\varphi\colon \Sigma^* \longrightarrow \Delta^*$, $\varphi([_1) \overset{\text{def}}{=} a$, $\varphi([_2) \overset{\text{def}}{=} b$, $\varphi(]_1) \overset{\text{def}}{=} b$, $\varphi(]_2) \overset{\text{def}}{=} a$. Доопределим φ до морфизма (см. решение упр. 2 из задания 3). $L \overset{\text{def}}{=} \varphi(D_2 \cap \Sigma^*) \equiv \varphi(D_2)$.

1. Докажем, что $L \subseteq L'$. Пусть $\underline{y \in L} \equiv \varphi(D_2)$. Тогда $\exists x \in D_2\colon y = \varphi(x)$. x — ПСП $\Rightarrow \forall i \in \overline{1,2} \hookrightarrow |x|_{[_i} = |x|_{]_i}$. Сложим равенства, получим: $|x|_{[_1} + |x|_{]_2} = |x|_{]_1} + |x|_{[_2}$. Пусть $x = x_1...x_m$, $\forall i \in \overline{1,m} \hookrightarrow x_i \in \Sigma$. Тогда $y = \varphi(x) = \varphi(x_1)...\varphi(x_m) = y_1...y_m$, $\forall i \in \overline{1,m} \hookrightarrow y_i = \varphi(x_i) \in \Delta$. Но из определения φ имеем $[_1,]_2 \overset{\varphi}{\to} a$; $]_1, [_2 \overset{\varphi}{\to} b$. Тогда $|y|_a = |x|_{[_1} + |x|_{]_2} \equiv |x|_{]_1} + |x|_{[_2} = |y|_b \Rightarrow \underline{y \in L'}$ ■

2. Докажем, что $L' \subseteq L$ индукцией по длине $y \in L'$: $P(n) \overset{\text{def}}{=} \big[\forall y \in L'\colon |y| \leqslant n \hookrightarrow y \in L\big]$.
   Заметим, что $y \in L \Leftrightarrow y \in \varphi(D_2) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \neq \varnothing$. Поэтому будем искать прообраз слова y, принадлежащий D_2.

   (a) $n = 0 \Rightarrow |y| = 0 \Rightarrow y = \varepsilon \in L'$. Пусть $x \overset{\text{def}}{=} \varepsilon \in D_2$ (так как пустое слово — ПСП). Тогда $y = \varepsilon \equiv \varphi(x) \Rightarrow y \in \varphi(D_2) \equiv L \Rightarrow P(0)$

   (b) Фиксируем $n > 0$. Пусть $P(n-1)$. Пусть $y \in L'\colon |y| = n$. Поскольку $|y| = n > 0$, и $|y|$ — четно (см. решение задачи 3 из задания 6), то $|y| \geqslant 2$. Рассмотрим первый и последний символы σ_l и σ_r слова $y \equiv \sigma_l y_1 \sigma_r$:

      i. $\sigma_l = a, \sigma_r = b$. Тогда $y = ay_1b$. $|y_1| = n - 2 \leqslant n - 1 \overset{P(n-1)}{\Rightarrow} \exists x_1 \in D_2\colon \varphi(x_1) = y_1$. Определим $x = [_1x_1]_1$. $x_1 \in D_2 \Rightarrow x_1$ — ПСП $\Rightarrow x$ — ПСП, так как получен из ПСП добавлением скобок типа 1 слева и справа $\Rightarrow x \in D_2$. Но $\varphi(x) \equiv \varphi([_1x_1]_1) = \varphi([_1)\varphi(x_1)\varphi(]_1) = ay_1b \equiv y$. Получаем $\varphi^{-1}(y) \cap D_2 \ni x \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \neq \varnothing$.

      ii. $\sigma_l = b, \sigma_r = b$. Тогда $y = by_1a$. $|y_1| = n - 2 \leqslant n - 1 \overset{P(n-1)}{\Rightarrow} \exists x_1 \in D_2\colon \varphi(x_1) = y_1$. Определим $x = [_2x_1]_2$. $x_1 \in D_2 \Rightarrow x_1$ — ПСП $\Rightarrow x$ — ПСП, так как получен из ПСП добавлением скобок типа 2 слева и справа $\Rightarrow x \in D_2$. Но $\varphi(x) \equiv \varphi([_2x_1]_2) = \varphi([_2)\varphi(x_1)\varphi(]_2) = by_1a \equiv y$. Получаем $\varphi^{-1}(y) \cap D_2 \ni x \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \neq \varnothing$.

      iii. $\sigma_l = \sigma_r$. Тогда $y = \sigma y_1 \sigma \in L'$. Воспользуемся утверждением в рамочке из решения задачи 3 задания 6:

      $$\boxed{y = \sigma y_1 \sigma \in L' \Rightarrow \exists y_l, y_r\colon y = y_l y_r, |y_l|, |y_r| \in \overline{1, |y|-2}, y_l, y_r \in L'}$$

      Но $|y_l|, |y_r| \leqslant |y| - 2 = n - 2 \leqslant n - 1 \overset{P(n-1)}{\Rightarrow} \exists x_l, x_r \in D_2\colon y_l = \varphi(x_l), y_r = \varphi(x_r)$. Определим $x \overset{\text{def}}{=} x_l x_r$. Тогда $x \in D_2$ (конкатенация ПСП — ПСП), и $\varphi(x) = \varphi(x_l x_r) = \varphi(x_l)\varphi(x_r) = y_l y_r = y \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \ni x \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \neq \varnothing$

■

Задача 6