Теория и реализация языков программирования.
Задание 10: LL-анализ

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.11.13

Упражнение 1

Пусть $G = (N, T, P, S)$. Занумеруем правила из P: $P = \{P_1, ..., P_n\}$.
Определим синтаксический перевод $T_l = (N, T, T', R, S)$:

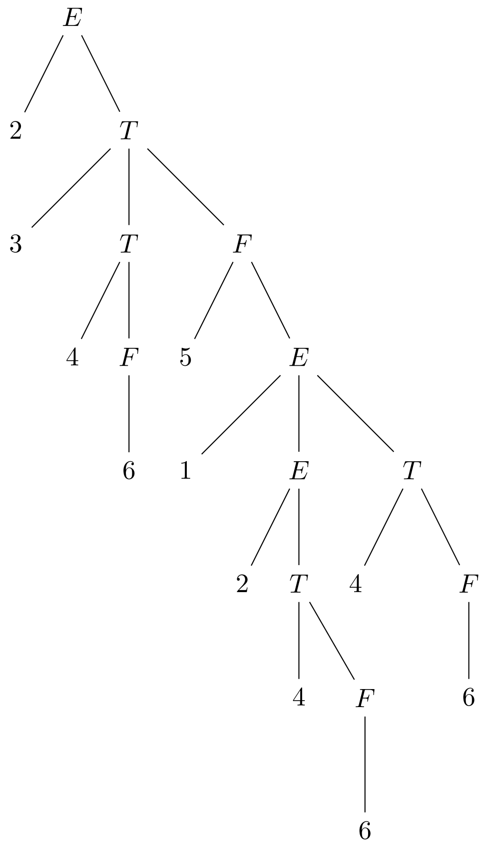
1. $T' = \{1, ..., n\}$

2. R определяется через P: каждому правилу $P \ni P_i = (X, Y_1...Y_n)$ сопоставим правила в R: пусть $Y_{j_1}...Y_{j_l}$ — максимальная подпоследовательность из нетерминалов из слова $Y_1...Y_n$. Тогда $X \longrightarrow Y_1...Y_n, iY_{j_1}...Y_{j_l}) \in P'$.
   По построению нетерминалы, входящие в $\alpha \equiv Y_1...Y_n$ входят также в $\beta \equiv Y_{j_1}...Y_{j_l}$, причем с той же кратностью.

Докажем, что слово $w \in L(G)$ переводится в левый вывод w. **TODO**

Упражнение 2

$w = a * (a + a)$. Построим правый вывод по дереву вывода (из задания):



Чтобы получить правый вывод, обойдем дерево разбора в G' следующим образом:

1. Выпишем самого левого потомка (по структуре правил, это всегда будет номер правила из G)

2. Выполним разбор оставшихся потомков справа налево.

Получаем последовательность правил правого вывода w в G: $P_r = 23514624646$.
Правый вывод *(выделен раскрываемый нетерминал)*: $\underline{E} \overset{2}{\Rightarrow} \underline{T} \overset{3}{\Rightarrow} T * \underline{F} \overset{5}{\Rightarrow} T * (\underline{E}) \overset{1}{\Rightarrow} T * (E + \underline{T}) \overset{4}{\Rightarrow} T * (E + \underline{F}) \overset{6}{\Rightarrow} T * (\underline{E} + a) \overset{2}{\Rightarrow} T * (\underline{T} + a) \overset{4}{\Rightarrow} T * (\underline{F} + a) \overset{6}{\Rightarrow} \underline{T} * (a + a) \overset{4}{\Rightarrow} \underline{F} * (a + a) \overset{6}{\Rightarrow} a * (a + a) = w$.
По определению, правый разбор — примененнные при правом выводе правила в обратном порядке: $(P_r)^R = 64642641532$.

Упражнение 3

Упражнение 4

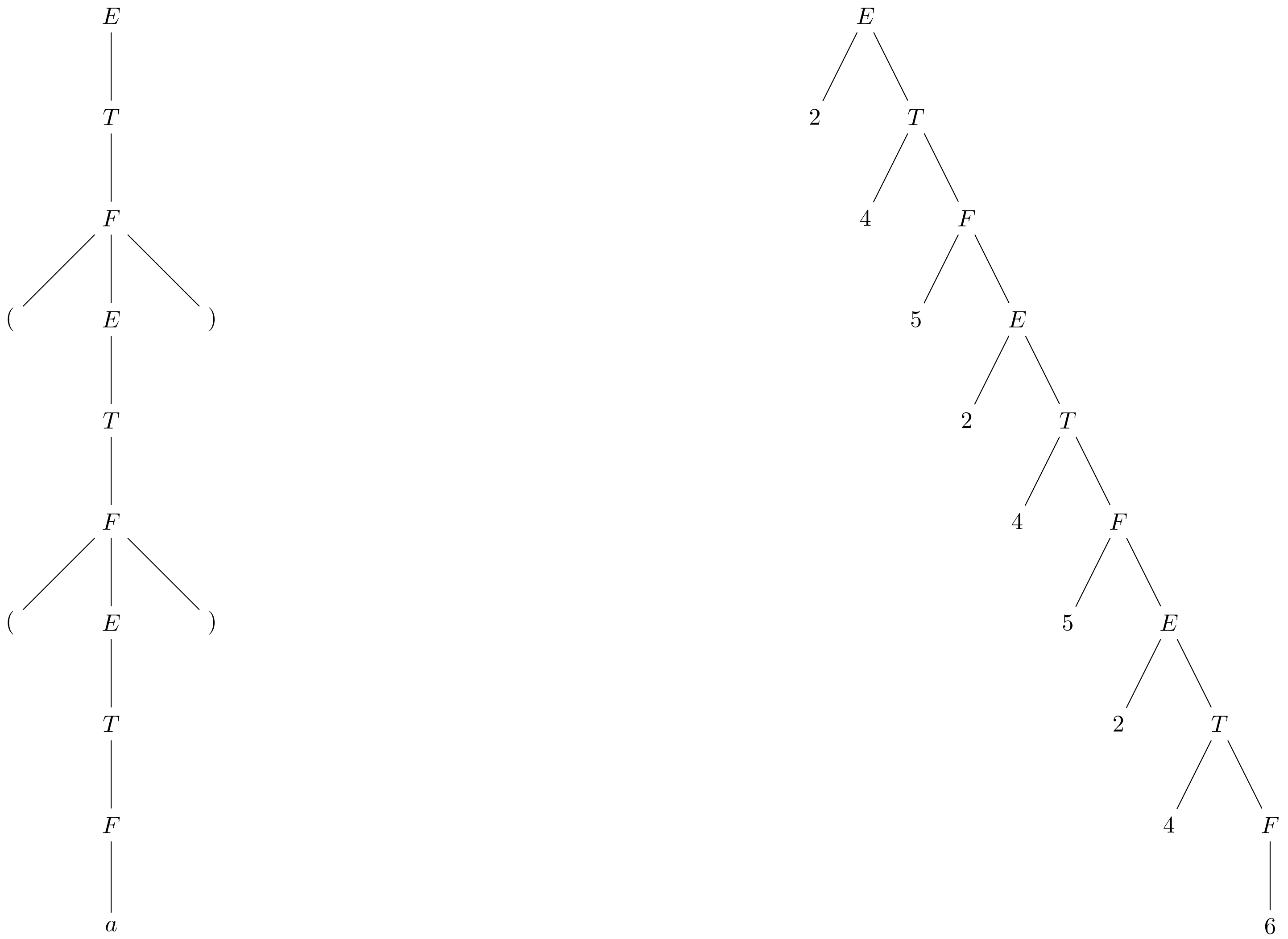
Упражнение 5

Упражнение 6

Задача 1

$w = ((a)) \in L(G)$: $\underline{E} \overset{2}{\Rightarrow} \underline{T} \overset{4}{\Rightarrow} \underline{F} \overset{5}{\Rightarrow} (\underline{E}) \overset{2}{\Rightarrow} (\underline{T}) \overset{4}{\Rightarrow} (\underline{F}) \overset{5}{\Rightarrow} ((E)) \overset{2}{\Rightarrow} ((\underline{T})) \overset{4}{\Rightarrow} ((\underline{F})) \overset{6}{\Rightarrow} ((a))$.

1. Построим дерево вывода w в G и соответствующее дерево в G':



2. Левый разбор: обойдем второе дерево в глубину, всегда выбирая самого левого непосещенного потомка: $P_l = 245245246$.
3. Правый разбор: обойдем второе дерево в глубину, как указано в решении упражнения 2: $(P_r)^R = 245245246 \Rightarrow P_r = 642542542$.

Задача 2

1. $\Sigma' = \{0, 1, \$\}$, $N' = \{S', S\}$. Пополненная грамматика $G' = (N', \Sigma', P', S')$, $P = \{\overbrace{S' \to S\$}^{(0)}, \overbrace{S \to 0S}^{(1)}, \overbrace{S \to 1S}^{(2)}, \overbrace{S \to \varepsilon}^{(3)}\}$.
2. Вычислим FIRST:

		$F_i(0)$	$F_i(1)$	$F_i(\$)$	$F_i(S)$	$F_i(S')$
0.	Определим F_0:	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
0.1.	Терминалы: $F_0(0) \overset{\text{def}}{=} \{0\}$, $F_0(1) \overset{\text{def}}{=} \{1\}$, $F_0(\$) \overset{\text{def}}{=} \{\$\}$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
0.2.	Есть правило $S \overset{(3)}{\to} \varepsilon \Rightarrow F_0(S) \overset{\text{def}}{=} \{\varepsilon\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon\}$	$\varnothing$
0.3.	Нет правила $S' \to \varepsilon \Rightarrow F_0(S') \overset{\text{def}}{=} \varnothing$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon\}$	$\varnothing$
1.	Определим $F_1 = F_0$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon\}$	$\varnothing$
1.1.	Рассмотрим символы правой части правила $S' \overset{(0)}{\to} S\$$. 1. $\underline{S}\$$ $F_0(\underline{S}) = \{\varepsilon\} \ni \varepsilon$. $F_0(\underline{S}) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_1(S')$. 2. $S\underline{\$}$ $F_0(\underline{\$}) = \{\$\} \not\ni \varepsilon$. $F_0(\underline{\$}) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_1(S')$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\$\}$
1.2.	Рассмотрим правило $S \overset{(1)}{\to} \underline{0}S$. $F_0(\underline{0}) = \{0\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_1(S) \leftarrow \{0\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0\}$	$\{\$\}$
1.3.	Рассмотрим правило $S \overset{(2)}{\to} \underline{1}S$. $F_0(\underline{1}) = \{1\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_1(S) \leftarrow \{1\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$\}$
1.4.	Рассмотрим правило $S \overset{(3)}{\to} \underline{\varepsilon}$. $\lvert\underline{\varepsilon}\rvert = 0 \Rightarrow$ не изменяем F_1	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$\}$
2.	Определим $F_2 = F_1$:	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$\}$
2.1.	Рассмотрим символы правой части правила $S' \overset{(0)}{\to} S\$$. 1. $\underline{S}\$$ $F_1(\underline{S}) = \{\varepsilon, 0, 1\} \ni \varepsilon$. $F_1(\underline{S}) \setminus \{\varepsilon\} = \{0, 1\} \to F_2(S')$. 2. $S\underline{\$}$ $F_1(\underline{\$}) = \{\$\} \not\ni \varepsilon$. $F_0(\underline{\$}) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_2(S')$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
2.2.	Рассмотрим правило $S \overset{(1)}{\to} \underline{0}S$. $F_1(\underline{0}) = \{0\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_2(S) \leftarrow \{0\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
2.3.	Рассмотрим правило $S \overset{(2)}{\to} \underline{1}S$. $F_1(\underline{1}) = \{1\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_2(S) \leftarrow \{1\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
2.4.	Рассмотрим правило $S \overset{(3)}{\to} \underline{\varepsilon}$. $\lvert\underline{\varepsilon}\rvert = 0 \Rightarrow$ не изменяем F_2	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.	Определим $F_3 = F_2$:	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.1.	Рассмотрим символы правой части правила $S' \overset{(0)}{\to} S\$$. 1. $\underline{S}\$$ $F_2(\underline{S}) = \{\varepsilon, 0, 1\} \ni \varepsilon$. $F_2(\underline{S}) \setminus \{\varepsilon\} = \{0, 1\} \to F_3(S')$. 2. $S\underline{\$}$ $F_2(\underline{\$}) = \{\$\} \not\ni \varepsilon$. $F_2(\underline{\$}) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_3(S')$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.2.	Рассмотрим правило $S \overset{(1)}{\to} \underline{0}S$. $F_2(\underline{0}) = \{0\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_3(S) \leftarrow \{0\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.3.	Рассмотрим правило $S \overset{(2)}{\to} \underline{1}S$. $F_2(\underline{1}) = \{1\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_3(S) \leftarrow \{1\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.4.	Рассмотрим правило $S \overset{(3)}{\to} \underline{\varepsilon}$. $\lvert\underline{\varepsilon}\rvert = 0 \Rightarrow$ не изменяем F_3	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.5.	Имеем $F_3 = F_2 \Rightarrow$ выход	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$

3. Вычислим FOLLOW:

			$F_i(S)$	$F_i(S')$
0.	Определим F_0:		$\varnothing$	$\varnothing$
1.	Определим $F_1 = F_0$:		$\varnothing$	$\varnothing$
1.1.	Рассмотрим правило $\underbrace{S'}_{A} \overset{(0)}{\to} \underbrace{\varepsilon}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\$}_{\beta}$	(a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\$\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_1(S)$. (b) $\varepsilon \notin \text{FIRST}(\beta)$.	$\{\$\}$	$\varnothing$
1.2.	Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \overset{(1)}{\to} \underbrace{0}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\varepsilon}_{\beta}$	(a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_1(S)$. (b) $\varepsilon \in \text{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_1(S) \leftarrow F_0(S) = \varnothing$	$\{\$\}$	$\varnothing$
1.3.	Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \overset{(2)}{\to} \underbrace{1}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\varepsilon}_{\beta}$	(a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_1(S)$. (b) $\varepsilon \in \text{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_1(S) \leftarrow F_0(S) = \varnothing$	$\{\$\}$	$\varnothing$
1.4.	Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \overset{(3)}{\to} \varepsilon$. Оно не имеет вид $A \to \alpha X \beta$, не изменяем F_1		$\{\$\}$	$\varnothing$
2.	Определим $F_2 = F_1$:		$\{\$\}$	$\varnothing$
2.1.	Рассмотрим правило $\underbrace{S'}_{A} \overset{(0)}{\to} \underbrace{\varepsilon}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\$}_{\beta}$	(a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\$\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_2(S)$. (b) $\varepsilon \notin \text{FIRST}(\beta)$.	$\{\$\}$	$\varnothing$
2.2.	Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \overset{(1)}{\to} \underbrace{0}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\varepsilon}_{\beta}$	(a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_2(S)$. (b) $\varepsilon \in \text{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_3(S) \leftarrow F_1(S) = \{\$\}$	$\{\$\}$	$\varnothing$
2.3.	Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \overset{(2)}{\to} \underbrace{1}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\varepsilon}_{\beta}$	(a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_2(S)$. (b) $\varepsilon \in \text{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_3(S) \leftarrow F_2(S) = \{\$\}$	$\{\$\}$	$\varnothing$
2.4.	Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \overset{(3)}{\to} \varepsilon$. Оно не имеет вид $A \to \alpha X \beta$, не изменяем F_1		$\{\$\}$	$\varnothing$
2.5.	Имеем $F_2 = F_1 \Rightarrow$ выход		$\{\$\}$	$\varnothing$

4. Таблица переходов для $LL(1)$-анализатора:

	0	1	$
S'	$S' \overset{(0)}{\to} S\$$	$S' \overset{(0)}{\to} S\$$	$S' \overset{(0)}{\to} S\$$
S	$S \overset{(1)}{\to} 0S$	$S \overset{(2)}{\to} 1S$	$S \overset{(3)}{\to} \varepsilon$
0	ε	**Err.**	**Err.**
1	**Err.**	ε	**Err.**
$	**Err.**	**Err.**	**Acc.**

(a) $(S', 0)$: правило $S' \overset{(0)}{\to} S\$$: $\mathrm{FIRST}(S\$) = \mathrm{FIRST}(S) \oplus \mathrm{FIRST}(\$) = \{0, 1, \$\} \ni 0$

(b) $(S', 1)$: правило $S' \overset{(0)}{\to} S\$$: $\mathrm{FIRST}(S\$) = \mathrm{FIRST}(S) \oplus \mathrm{FIRST}(\$) = \{0, 1, \$\} \ni 1$

(c) $(S', \$)$: правило $S' \overset{(0)}{\to} S\$$: $\mathrm{FIRST}(S\$) = \mathrm{FIRST}(S) \oplus \mathrm{FIRST}(\$) = \{0, 1, \$\} \ni \$$

(d) $(S, 0)$: правило $S \overset{(1)}{\to} 0S$: $\mathrm{FIRST}(0S) = \{0\} \ni 0$

(e) $(S, 1)$: правило $S \overset{(2)}{\to} 1S$: $\mathrm{FIRST}(1S) = \{1\} \ni 1$

(f) $(S, \$)$: правило $S \overset{(3)}{\to} \varepsilon$: $\mathrm{FOLLOW}(S) = \{\$\} \ni \$$

Задача 3

Задача 4

1. $\Sigma' \overset{\text{def}}{=} \{0, 1, \$\}$, $N' \overset{\text{def}}{=} (S', S)$, пополненная грамматика $G' = (N', \Sigma', P', S)$.
   $P' \overset{\text{def}}{=} \{S' \overset{(0)}{\to} S\$, S \overset{(1)}{\to} aSaa, S \overset{(2)}{\to} bSba, S \overset{(3)}{\to} b, S \overset{(4)}{\to} \varepsilon\}$

2. Найдем FIRST_1:

i	$F_i(a)$	$F_i(b)$	$F_i(\$)$	$F_i(S)$	$F_i(S')$
0	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon\}$	$\varnothing$
1	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, a, b\}$	$\{\$\}$
2	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, a, b\}$	$\{\$, a, b\}$
3	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, a, b\}$	$\{\$, a, b\}$

3. Возьмем $\alpha = \$$, $\beta = \varepsilon$. Тогда $S' \overset{(1)}{\Rightarrow}_l \underbrace{\varepsilon}_{w} \underbrace{S}_{A} \underbrace{\$}_{\alpha}$. Рассмотрим пару правил $\underbrace{S}_{A} \overset{(2)}{\to} \underbrace{bSba}_{\beta}$, $\underbrace{S}_{A} \overset{(3)}{\to} \underbrace{b}_{\gamma}$.
   Имеем $\mathrm{FIRST}(\beta\alpha) \equiv \mathrm{FIRST}(bSba\$) = \{b\}$,
   $\mathrm{FIRST}(\gamma\alpha) \equiv \mathrm{FIRST}(b\$) = \{b\}$.
   Получаем $\mathrm{FIRST}(\beta\alpha) \cap \mathrm{FIRST}(\gamma\alpha) = \{b\} \neq \varnothing \Rightarrow G'$ — не LL(1)-грамматика.

4. Найдем FIRST_2:

Задача 5

Задача 6

Предположим, что $L \overset{\text{def}}{=} a^* \cup a^n b^n$ — LL-язык. Тогда $\exists k \exists G \colon L(G) = L$ и G — LL(k)-грамматика. Тогда $\exists \mathcal{A}$ — детерминированный МП-автомат с выходом.

1. Фиксируем n. $\measuredangle a^{nk} \in L$, $(a^(nk)\$, S\$, \varepsilon) \vdash^* (a^k, Y_1 ... Y_l\$, \cdot)$. Рассмотрим