Задание 10

LL-анализ

Ключевые слова [1]:*язык, контекстно-свободный язык, магазинный автомат, грамматика,* LL(k)*-грамматика,* LL(1)*-анализатор, функции* FIRST, FOLLOW*.*

1 Нисходящий и восходящий разбор

Напомним определение вывода КС-грамматики.

Выводом цепочки α называется такая последовательность применений правил с указанием раскрываемого нетерминала, что применяя правила из неё начиная с аксиомы получается цепочка α. Если цепочка α не содержит нетерминалов, то α принадлежит языку, порождаемому КС-грамматикой. Нам будет удобно пользоваться такими понятиями как левый вывод (правый вывод). *Левым выводом* называют такой вывод, что на каждом его шаге раскрывается самый левый нетерминал в промежуточной цепочке. Правый вывод определяется аналогично.

Также напомним что мы называем деревом вывода или деревом разбора. С формальным определением дерева разбора вы можете познакомиться, например, в книге Хопкрофта, Мотвани и Ульмана, а мы воспользуемся неформальным описанием этого понятия. *Деревом разбора* для грамматики G называется упорядоченное дерево, в корне которого находится аксиома S, каждая вершина помечена нетерминалом, терминалом или пустым словом, если вершина помечена терминалом или ε, то эта вершина является листом, если же вершина помечена нетерминалом A, то существует такое правило $A \to X_1X_2\ldots X_n \in P$ ($X_i \in N \cup T$), что вершины-потомки A помечены символами $X_1, X_2 \ldots X_n$ слева направо.

Будем говорить, что для КС-грамматики G слово w разобрано, если известно хотя бы одно из её деревьев вывод.

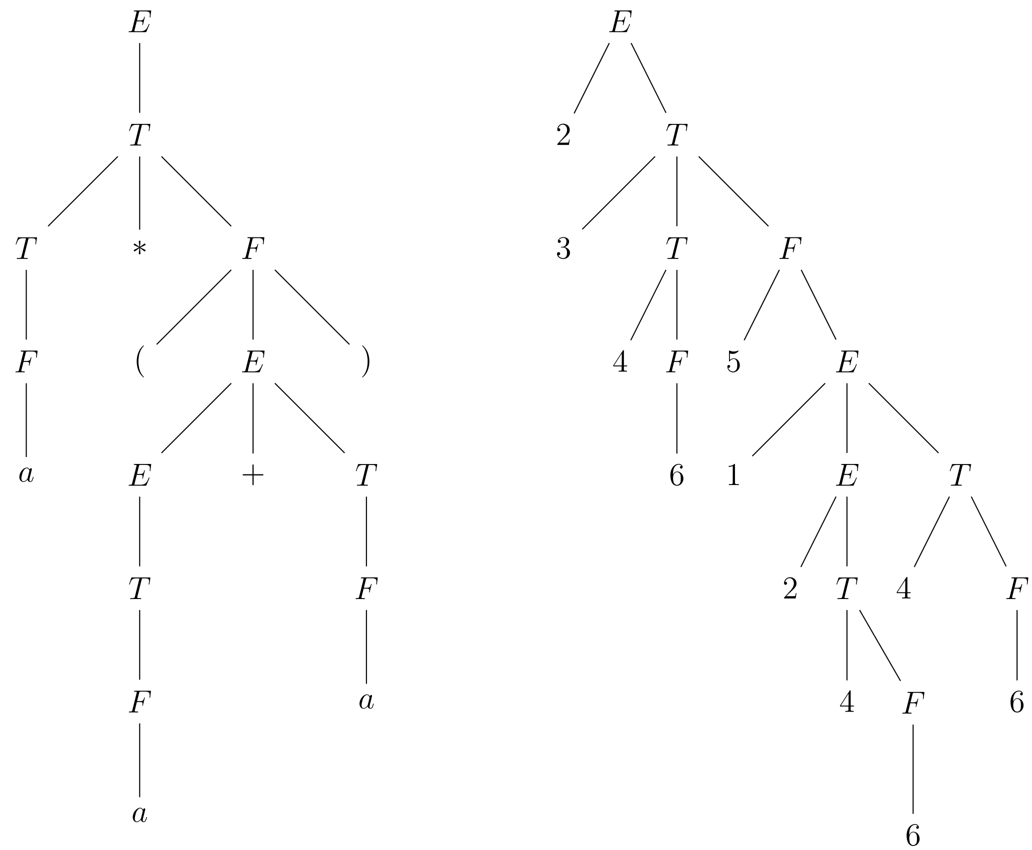
Левым разбором цепочки $\alpha \in (N \cup T)^*$ будем называть последовательность правил, применённых при левом выводе цепочки α. *Правым разбором* цепочки α назовём обратную последовательность правил, применённых при правом выводе цепочки α.

[1]минимальный необходимый объем понятий и навыков по этому разделу)

Пример 1. Грамматики $G = (N, T, P, E)$, и $G_\pi = (N, T', P', E)$, $T = \{a, +, *\}$ заданы правилами:

$$
\begin{array}{lll}
E \to E + T & (1) & E \to 1ET \\
E \to T & (2) & E \to 2T \\
T \to T * F & (3) & T \to 3TF \\
T \to F & (4) & T \to 4F \\
F \to (E) & (5) & F \to 5E \\
F \to a & (6) & F \to 6
\end{array}
$$

Построим дерево разбора для слова $w = a + (a * a)$ и дерево вывода в грамматики G', соответствующее выводу w :



Если грамматика G выводит слово w, то применяя соответствующие правила в G' выводим из неё слово $\pi_l(w)$, соответствующее левому выводу слова w.

Назовём *переводом* бинарное отношение T, действующее из языка L_1 в язык L_2. Если пара слов (u, v) удовлетворяет отношению T, то будем говорить, что слово u транслируется переводом T в слово v, а слово v будем называть *выходом* для u. Мы будем рассматривать синтаксически управляемые переводы. Неформально, перевод является синтаксически управляемым, если существует пара грамматик, правила которых занумерованы и если на шаге вывода из одной грамматики получена цеапочка α, а для соответствующего шага вывода из другой грамматики получена цепочка β, то любой нетерминал входящий в цепочку α, входит и в цепочку β с одинаковой кратностью. Например, в лингвистике нетерминалы могут соответствовать частям речи. Тогда при переводе с одного языка на другой подлежащее перейдёт в подлежащее, а сказуемое в сказуемое, таким образом, синтаксис определяет некоторые особенности семантики языка. Эта особенность также весьма полезна и при построении компиляторов. Формально, перевод называется синтаксически управляемым, если есть синтаксически управляемая схема (СУ-схема), его реализующая. Определим формально СУ-схему.

Определение 1. Синтаксически управляемой схемой назовём пятёрку $T = (N, \Sigma, \Delta, R, S)$, где N множество нетерминалов, Σ и Δ алфавиты входа и выхода схемы, R – множество правил вида $A \to \alpha, \beta$, причём нетерминалы входящие в цепочку α входят также и в цепочку β, причём с той же кратностью.

Как легко видеть, из языка $L(G)$ существует СУ-перевод в язык $L(G')$, схема которого строится по грамматикам. А именно множество R строится по соответствующим парам правил, описанных выше.

Упражнение 1. Предъявить алгоритм построения по грамматики G синтаксический перевод T_l, переводящий слово w из $L(G)$ в левый вывод данного слова $\pi_l(w)$.

Восходящий разбор строится аналогично по правому выводу.

Упражнение 2. Построить правый вывод $w = a + (a * a)$ по дереву разбора. По правому выводу построить разбор $\pi_r(w)$.

Упражнение 3. Построить по описанной выше грамматике G схему СУ-перевода, реализующую перевод $w \to \pi_r(w)$. Предъявить алгоритм построения схемы данного СУ-перевода по грамматике.

2 Функция FIRST

При построении (детерминированных) анализатаров по грамматике, нам потребуется определять множество первых k символов слов, выводимых из цепочки $\alpha \in (N \cup T)^*$. Для этого мы будем использовать функцию FIRST_k, которая определена через функцию FIRST_1 или просто FIRST. Таким образом умение вычислять функцию FIRST является ключевым при построении анализаторов.

Формально,

$$\mathrm{FIRST}_k(\alpha) = \{w[1,k] \,|\, \alpha \Rightarrow w, |w| > k\} \cup \{w \,|\, \alpha \Rightarrow w, |w| < k\}$$

Если $\alpha \Rightarrow \varepsilon$, то пустое слово лежит в $\mathrm{FIRST}_k(\alpha)$.

Приведём процедуру вычисления функции $\mathrm{FIRST}(\alpha)$.

Идея алгоритма: Если $\alpha = X_1X_2\dots X_n$ начинается с терминала σ, то первым символом может быть только этот терминал, таким образом, мы сразу получаем ответ σ. Если же α начинается с нетерминала, то $\mathrm{FIRST}(\alpha) = \mathrm{FIRST}(X_1)$, если из нетерминала X_1 не выводится пустое слово, и $\mathrm{FIRST}(\alpha) = \mathrm{FIRST}(X_1) \cup \mathrm{FIRST}(X_2X_3\dots X_n)$, если $X_1 \Rightarrow \varepsilon$.

Таким образом, мы описали вычисление функции FIRST на множестве терминалов и цепочек, начинающихся с терминалов, осталось описать вычисление функции на множестве нетерминалов, как видно вычисление функции FIRST на множестве сентенциальных форм сводится к вычислению функции на отдельных нетерминалах.

Пусть мы вычисляем функцию $\mathrm{FIRST}(X)$ для нетерминала X. Рассмотрим все правила вида $X \to \beta$. Очевидно, что $\mathrm{FIRST}(\beta)$ является подмножеством $\mathrm{FIRST}(X)$, но просто добавляя множество $\mathrm{FIRST}(\beta)$ к $\mathrm{FIRST}(X)$ мы получим порочный круг, в случае правил вида $X \to Xa$. Как нам избежать порочного круга при вычислении множества $\mathrm{FIRST}(X)$?

Определим множества $F_i(Y)$, $Y \in N$. При $i = 0$ для любого нетерминала Y, множество $F_i(Y) = \emptyset$, или $\{\varepsilon\}$, если есть правило $Y \to \varepsilon$. На $i-$ом шаге алгоритма будем вычислять множества $F_i(X)$ следующим образом. В начале шага $F_i(X)$ включает себя множество $F_{i-1}(X)$ Если есть правило $X \to \beta = Y_1Y_2\dots Y_n$ и Y_1 – терминал или β – пустое слово, то добавим к множеству $F_i(X)$ элемент Y_1 (быть может пустое слово). Если же Y_1 – нетерминал, и при этом пустое слово не лежит в $F_{i-1}(Y_1)$, то добавим к множеству $F_i(X)$ множество $F_{i-1}(Y_1)$ и вычислим множество $F_i(Y_1)$. Если же $\varepsilon \in F_{i-1}(Y_1)$, то добавим к $F_i(X)$ множество $F_i(Y_1) \setminus \{\varepsilon\}$ и повторим описанную операцию для $\beta = Y_2\dots Y_n$.

Алгоритм останавливается, как только для каждого нетерминала Y, множества F_i и F_{i-1} совпадают.

Алгоритм:

Шаг 0. Для каждого терминала σ положим $F_i(\sigma) = \sigma$ для любого i. Для каждого нетерминала Y, если есть правило $Y \to \varepsilon$, положим $F_0(Y) = \{\varepsilon\}$, иначе положим $F_0(Y) = \emptyset$.

Шаг i. Добавить к множеству $F_i(X)$ множество $F_{i-1}(X)$. Для каждого правила $X \to \beta = Y_1\dots Y_n$ выполнить:

$j = 1$

Пока $\varepsilon \in F_{i-1}(Y_j)$

добавить $F_{i-1}(Y_j) \setminus \{\varepsilon\}$ к $F_i(X)$,

вычислить $F_i(Y_j)$,

увеличить j.

Добавить $F_{i-1}(Y_j)$ к $F_i(X)$,

вычислить $F_i(Y_j)$.

Остановка. $F_i(Y) = F_{i-1}(Y)$ для любого Y из N. Положить $\mathrm{FIRST}(X) = F_i(X)$.

Упражнение 4. Доказать корректность данного алгоритма.

3 **Функция** FOLLOW

Помимо префикса порождаемого цепочкой β нас будет интересовать также и множество слов, которые могут следовать после слова, выведенного из цепочки β. Запишем сначала формальное определение функции FOLLOW_k.

$$\mathrm{FOLLOW}_k(\beta) = \{w \mid S \Rightarrow \alpha\beta\gamma, w \in \mathrm{FIRST}_k(\gamma)\}.$$

Неформально, в множестве $\mathrm{FOLLOW}_k(\beta)$ содержатся те слова, которые могут следовать за словом, выведенным из β, в цепочке $\alpha\beta\gamma$, выводимой из аксиомы. Длина этих слов ограничена k, что означает, что если $\gamma \Rightarrow w$ и длина слова w меньше k, то w лежит в множестве $\mathrm{FOLLOW}_k(\beta)$, а если же длина слова w больше k, то в множестве $\mathrm{FOLLOW}_k(\beta)$ лежит префикс w длины k.

Аналогично функции FIRST, мы будем обозначать FOLLOW_1 как FOLLOW.

Мы будем часто пользоваться функцией FOLLOW_k в теоретических целях и для обозначения объектов, однако на практике мы будем вычислять функцию FOLLOW только на множестве нетерминалов.

Приведём алгоритм для вычисления функции FOLLOW.

Идея алгоритма: Если в грамматике есть правило $A \to \alpha X \beta$, то за словом, выведенным из нетерминала X следует слово выведенное из β, таким образом множество $\mathrm{FOLLOW}(X)$ включает в себя множество $\mathrm{FIRST}(\beta)$. Если, при этом из цепочки β выводимо пустое слово, то за словом, выводимым из нетерминала X следует слово из множества FOLLOW(A), поскольку из вывода

$$S \Rightarrow^* \gamma A w \Rightarrow \gamma \alpha X \beta w \Rightarrow \gamma \underbrace{\alpha X}_{A} w$$

следует, что если элемент FIRST(w) лежит в множестве FOLLOW(A), то элемент FIRST(w) лежит так же в множестве FOLLOW(X). Таким образом, по определению функции FOLLOW, если в грамматике есть правило $\mathcal{A} \to \alpha X \beta$ и при этом из цепочки β выводимо пустое слово, то множество FOLLOW(X) включает в себя множество FOLLOW(A). В частности, возможно что $\beta = \varepsilon$, поэтому при наличии в грамматике правила $A \to \alpha X$, справедливо FOLLOW$(X) \supseteq$ FOLLOW(A).

В итоге, мета-алгоритм сводится к следующим шагам:

- Вычислить множества FIRST для грамматики G;
- Для правил $A \to \alpha X \beta$ добавить FIRST$(\beta) \setminus \{\varepsilon\}$ к FOLLOW(X);
- Для правил $A \to \alpha X \beta$, таких что, $\varepsilon \in$ FIRST(β) добавить FOLLOW(A) к FOLLOW(X).

Упражнение 5. Доказать корректность данного мета-алгоритма. То есть, что все элементы множеств FOLLOW будут найдены и ничего лишнего найдено не будет.

Замечание 1. По хорошему, возникает проблема с тем, лежит ли пустое слово в FOLLOW(X). Эта проблема решается следующим образом: ко всем словам, порождаемым G добавляется маркер конца слова, и если этот маркер оказывается в FOLLOW(X), то пустое слово принадлежит FOLLOW(X). Для этого по грамматике G строится пополненная грамматика G', которая содержит правило $S' \to S\$$, где \$ – маркер конца слова. Все остальные правила грамматики G' взяты из грамматики G. На практике, функция FOLLOW используется в анализаторах, на вход которым и так подаётся пополненная грамматика, поэтому решать проблему наличия пустого слова в множестве FOLLOW(X) не надо.

Теперь опишем сам алгоритм. Идея алгоритма схожа с индуктивным вычислением множеств FIRST.

Алгоритм:

Шаг 0. Для каждого нетерминала Y положим $F_0(Y) = \emptyset$. Вычислим значение функции FIRST для грамматики G.

Шаг i. Положить множество $F_i(X)$ равным множеству $F_{i-1}(X)$. Для каждого правила $A \to \alpha X \beta$ добавить $\mathrm{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\}$ к $F_i(X)$; Если $\varepsilon \in \mathrm{FIRST}(\beta)$ добавить $F_{i-1}(A)$ к $F_i(X)$.

Остановка. Как только $F_i(Y) = F_{i-1}(Y)$ для любого Y из N. Положить $\mathrm{FIRST}(X) = F_i(X)$.

4 От FIRST к FIRST$_k$

Сначала введём вспомогательную операцию на множествах. Пусть L_1 и L_2 некоторые языки. Тогда язык $L_1 \oplus_k L_2$ состоит из всех таких слов w, что либо в языке L_1 есть слово w_1 длины не меньшей k и $w = w_1[1,k]$, либо слово x длины не большей k лежит в L_1, слово y лежит в L_2, слово u есть их конкатенация xy и, наконец, $w = u[1,k]$, если $|u| > k$ или просто $w = u$, если $|u| < k$. Формально

$$L_1 \oplus_k L_2 = \{w \mid \exists x \in L_1, \exists y \in L_2, u = xy, |u| \leqslant k \Rightarrow w = u, |u| > k \Rightarrow w = u[1,k]\}$$

Другой вариант формального определения, чтобы окончательно запутать читателя:

$$L_1 \oplus_k L_2 = \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2, |xy| \leqslant k\} \cup \{u[1,k] \mid \exists x \in L_1, \exists y \in L_2, u = xy, |xy| > k\}$$

Из определения операции $\oplus_k$ следует, что для $X_1, X_2, \dots X_n \in N \cup T$ справедливо

$$\mathrm{FIRST}_k(X_1 X_2 \dots X_n) = \mathrm{FIRST}_k(X_1) \oplus_k \mathrm{FIRST}_k(X_2) \oplus_k \dots \oplus_k \mathrm{FIRST}_k(X_n).$$

Фактически, когда мы вычисляли функцию FIRST, мы вычисляли её используя оператор $\oplus_1$. Перепишем алгоритм вычисления функции FIRST для вычисления функции FIRST$_k$.

Алгоритм:

Шаг 0. Для каждого терминала σ положим $F_i(\sigma) = \sigma$ для любого i. Для каждого нетерминала Y, рассмотрим все правила вида $Y \to x\alpha$,, где x – слово (быть может пустое!), а цепочка α либо начинается с нетермнинала, либо пуста. Если $|x| \geqslant k$, добавим к множеству $F_0(Y)$ слово $x[1, k]$, иначе добавим к множеству $F_0(Y)$ слово x.

Шаг i. Добавить к множеству $F_i(X)$ множество $F_{i-1}(X)$. Для каждого правила $X \to \beta = Y_1 \dots Y_n$

добавить к $F_i(X)$ множество $F_{i-1}(Y_1) \oplus_k \dots \oplus_k F_{i-1}(Y_n)$,

вычислить $F_i(Y_j)$, для $j = 1..n$

Остановка. $F_i(Y) = F_{i-1}(Y)$ для любого Y из N. Положить $\mathrm{FIRST}_k(X) = F_i(X)$.

Упражнение 6. Доказать корректность работы данного алгоритма.

На практике удобно вычислять функцию FIRST_k для всех нетерминалов сразу.

5 LL(k)-грамматики

Мы не будем строить анализаторы для LL(k)-грамматик, где $k > 1$ в силу нехватки времени. Тем не менее, мы будем работать с определением LL(k)-грамматики и её свойствами.

Вспомним, что грамматика является LL(k)-грамматикой тогда и только тогда, когда она левоанализируема, т.е. существует детерминированный анализатор (ДМП-автомат с выходом), который реализует СУ перевод $w \to \pi_l(w)$.

С таким определением не очень удобно работать с точки зрения анализа грамматики, поэтому мы будем также использовать эквивалентные ему определения.

Теорема 1. Грамматика является LL(k)-грамматикой тогда и только тогда, когда для любых двух правил $A \to \beta, A \to \gamma$, $\mathrm{FIRST}_k(\gamma\alpha) \cap \mathrm{FIRST}_k(\beta\alpha) = \emptyset$ для таких α, что $S \Rightarrow_l^* wA\alpha$.

Не все грамматики, задающие LL-языки являются LL-грамматиками. Но некоторые из них можно преобразовать к LL(k)-грамматике используя приёмов левой факторизации и удаления левой рекурсии. Изучите эти приёмы по книжке Серебрякова или по Ахо и Ульману.

6 Задачи

В первых двух задачах под грамматикой G понимается грамматика, порождающая арифметические выражения.

Задача 1. Построить дерево вывода, левые и правые разборы для слова $((a))$ в грамматике G, определённой выше.

Задача 2. Построить детерминированный левый анализатор для грамматики

$$S \to 0S \tag{1}$$
$$S \to 1S \tag{2}$$
$$S \to \varepsilon \tag{3}$$

3*. Добавим в грамматику G правило $E \to \varepsilon$. Вычислите значение функции $FIRST(E)$.

Задача 4. Докажите, что грамматика не является LL(1)-грамматикой, но является LL(2)-грамматикой. Вычислите функции FIRST_2 и FOLLOW_2 для всех нетерминалов.

$$\begin{aligned} S &\to aAaa|bAba \\ A &\to b|\varepsilon \end{aligned}$$

Задача 5. Для грамматики написать эквивалентную LL(1)-грамматику и вычислить функции FIRST и FOLLOW для каждого нетерминала. Постройте по получившейся грамматике LL(1)-анализатор.

$$\begin{aligned} S &\to ba|A \\ A &\to a|Aab|Ab \end{aligned}$$

Задача 6*. Докажите, что язык $a^* \cup a^n b^n$ не является LL-языком.