# Алгоритмы и модели вычислений.
# Задание 4: Сложность вычислений, классы $\mathsf{P}$, $\mathsf{NP}$ и co-$\mathsf{NP}$

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.06

## Задача 1

1. Докажем, что SAT $\leqslant_m^p$ 3-SAT.
2. Теорема $\Rightarrow$ SAT $\in$ $\mathsf{NP}$-c, 1 $\Rightarrow$ SAT $\leqslant_m^p$ 3-SAT $\in$ $\mathsf{NP}$. Поэтому из 2 следует, что 3-SAT $\in$ $\mathsf{NP}$-c

## Задача 2

## (каноническое) Задача 16

1. $$\left\|A \quad b\right\|^{\square} = \left\|\begin{matrix} \underline{1/1} & 0/1 & 0/1 & 4/1 \\ 3/1 & 4/1 & 0/1 & 16/1 \\ 9/1 & 3/1 & 1/1 & 64/1 \end{matrix}\right\| \overset{r1*=\frac{1}{1}}{\sim} \left\|\begin{matrix} 1/1 & 0/1 & 0/1 & 4/1 \\ 3/1 & 4/1 & 0/1 & 16/1 \\ 9/1 & 3/1 & 1/1 & 64/1 \end{matrix}\right\| \underset{\substack{\frac{16}{1}-\frac{4}{1}\frac{3}{1}=\frac{4}{1} \\ \frac{64}{1}-\frac{4}{1}\frac{9}{1}=\frac{28}{1}}}{\overset{s12\frac{3}{1},s13\frac{9}{1}}{\sim}} \left\|\begin{matrix} 1/1 & 0/1 & 0/1 & 4/1 \\ 0/1 & \underline{4/1} & 0/1 & 4/1 \\ 0/1 & 3/1 & 1/1 & 28/1 \end{matrix}\right\| \overset{r2*=\frac{1}{4}}{\sim}$$
$$\sim \left\|\begin{matrix} 1/1 & 0/1 & 0/1 & 4/1 \\ 0/1 & 1/1 & 0/1 & 1/1 \\ 0/1 & 3/1 & 1/1 & 28/1 \end{matrix}\right\| \underset{\frac{28}{1}-\frac{1}{1}\frac{3}{1}=\frac{25}{1}}{\overset{s23\frac{3}{1}}{\sim}} \left\|\begin{matrix} 1/1 & 0/1 & 0/1 & 4/1 \\ 0/1 & 1/1 & 0/1 & 1/1 \\ 0/1 & 0/1 & 1/1 & 25/1 \end{matrix}\right\|$$
   (a) $r_i* = \frac{c_1}{c_2}$ — умножение строки $i$ на дробь $\frac{c_1}{c_2}$
   (b) $sij\frac{c_1}{c_2}$ — вычитание $i$-й строки, умноженной на дробь $\frac{c_1}{c_2}$ из $j$-й.

## (каноническое) Задача 17

## (каноническое) Задача 18

## (каноническое) Задача 19

## (каноническое) Задача 20

## Вспомогательные утверждения

1. $\leqslant_m^p$ — транзитивно. Действительно, пусть $\Sigma_1^* \supseteq A \leqslant_m^p B \subseteq \Sigma_2^*$, $B \leqslant_m^p C \subseteq \Sigma_3^*$. Тогда существуют полиномиально-вычислимые функции $f_1\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$, $f_2\colon \Sigma_2^* \to \Sigma_3^*$, причем $\forall x \in \Sigma_1^* \, (x \in A \Leftrightarrow f_1(x) \in B)$, $\forall y \in \Sigma_2^* \, (y \in B \Leftrightarrow f_2(y) \in C)$ Фиксируем $x \in \Sigma_1^*$, определим $y = f_1(x)$. Тогда $x \in A \Leftrightarrow \underbrace{f_1(x)}_{y} \in B \Leftrightarrow f_2(f_1(x)) \in C$

   Функция $g(x)\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_3^*$ $g = f_2 \circ f_1$ полиномиально-вычислима (как композиция полиномиально-вычислимых). Получаем, что существует полиномиально-вычислимая $g(x)$, такая что $\forall x \in \Sigma_1^* \, (x \in A \Leftrightarrow g(x) \in C)$, откуда $A \leqslant_m^p C$ ■

2. Пусть $A \in \mathsf{NP}$-c, и $A \leqslant_m^p B \in \mathsf{NP}$. Тогда $B \in \mathsf{NP}$-c. Действительно, $A \in \mathsf{NP}$-c $\Rightarrow \forall C \in \mathsf{NP} \hookrightarrow C \leqslant_m^p A$. Фиксируем $C \in \mathsf{NP}$. $A \leqslant_m^p B$, поэтому из 1 следует, что $C \leqslant_m^p B$. Поэтому $\forall C \in \mathsf{NP} \hookrightarrow C \leqslant_m^p B$. Значит, $B \in \mathsf{NP}$-c ■