

# Теория и реализация языков программирования.

## Задание 9: преобразование контекстно-свободных языков

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.10.30

### Упражнение 1

### Упражнение 2

$N$ -автомат  $M = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, Z_0, \delta, \emptyset)$ .  $G = (N, \Sigma, P, S)$  — построена по алгоритму. Докажем, что  $L(G) \subseteq L(M)$ . Будем рассматривать только левые выводы.

1.  $\forall w: S \xRightarrow[\text{вывод}]{\text{левый}}^* w$ ,  $w \in (\Sigma \cup N)^*$ ,  $w \notin \Sigma^* \hookrightarrow w = u[r_0 Y_1 r_1][r_1 Y_2 r_2] \dots [r_{n-1} Y_n r_n]$ ,  $u \in \Sigma^*$ ,  $r_i \in Q$ ,  $Y_i \in \Gamma$  — доказывается индукцией по длине левого вывода из свойств добавленных правил (слева всегда, возможно, нетерминалы, затем, возможно, терминалы.  $[qZp] \rightarrow \dots [\dots Yp]$ , поэтому соседние состояния, отделенные скобками совпадают:  $\dots r][r\dots)$ .

2.  $P(k) \stackrel{\text{def}}{=} [\forall n \forall w: S \xRightarrow[k \text{ шагов}]{\text{левый вывод}}^* w \hookrightarrow w = u[r_0 Y_1 r_1] \dots [r_{n-1} Y_n r_n] \Rightarrow (q_0, u, Z_0) \vdash^* (r_0, \varepsilon, Y_1 \dots Y_n)]$ .

(a)  $n = 1$ . Из определения  $P$  могут быть только правила  $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$ , и  $(q_0, \varepsilon, Z_0) \equiv (q_0, \varepsilon, Z_0) \Rightarrow P(1)$

(b) Пусть  $P(k)$ . Рассмотрим левый вывод длины  $k + 1$ :  $S \xRightarrow{*} y \equiv u[r_0 Y_1 r_1][r_1 Y_2 r_2] \dots [r_{n-1} Y_n r_n]$ . Пусть начальная часть этого вывода длины  $k$  имеет вид  $S \xRightarrow{*} x \equiv u_l[s_0 Z_1 s_1][s_1 Z_2 s_2] \dots [s_{m-1} Z_m s_m]$ . На последнем,  $k + 1$ -м шаге был раскрыт первый нетерминал  $[s_0 Z_1 s_1] \rightarrow z$ :

- i.  $[s_0 Z_1 s_1] \rightarrow z \equiv u_r[t_0 W_1 t_1][t_1 W_2 t_2] \dots [t_{l-1} W_l t_l]$ .  
Тогда  $y = \underbrace{u_l}_{\text{префикс } x} \underbrace{u_r[t_0 W_1 t_1][t_1 W_2 t_2] \dots [t_{l-1} W_l t_l]}_z \underbrace{[s_1 Z_2 s_2] \dots [s_{m-1} Z_m s_m]}_{\text{суффикс } x}$ .

Отсюда  $W_1 \dots W_l Z_2 \dots Z_m = Y_1 \dots Y_n$ ,  $u = u_l u_r$ ,  $t_0 = r_0$ .

$P(k) \Rightarrow (q_0, u_l, Z_0) \vdash^* (s_0, \varepsilon, Z_1 \dots Z_m)$ . Применено правило  $[s_0 Z_1 s_1] \rightarrow z \Rightarrow (s_0, u_r, Z_1) \vdash (t_0, \varepsilon, W_1 \dots W_l)$ .

Тогда  $(q_0, u, Z_0) \equiv (q_0, u_l u_r, Z_0) \vdash^* (s_0, u_r, Z_1 \dots Z_m) \vdash (t_0, \varepsilon, W_1 \dots W_l Z_2 \dots Z_m) \equiv (r_0, \varepsilon, Y_1 \dots Y_n)$ .

- ii.  $[s_0 Z_1 s_1] \rightarrow z \equiv u_r \in \Sigma^*$ . Тогда  $y = \underbrace{u_l}_{\text{префикс } x} \underbrace{u_r}_z \underbrace{[s_1 Z_2 s_2] \dots [s_{m-1} Z_m s_m]}_{\text{суффикс } x}$ . Отсюда  $Z_2 \dots Z_m = Y_1 \dots Y_n$ ,  $s_1 = r_0$ ,

$u = u_l u_r$ .  $[s_0 Z_1 s_1] \rightarrow u_r \in P \Rightarrow (s_0, u_r, Z_1) \vdash (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$  — из определения  $P$ .

$(q_0, u, Z_0) \equiv (q_0, u_l u_r, Z_0) \stackrel{P(k)}{\vdash^*} (s_0, u_r, Z_1 \dots Z_m) \vdash (s_1, \varepsilon, Z_2 \dots Z_m) \equiv (r_0, \varepsilon, Y_1 \dots Y_n)$ .

3. Пусть  $w \in L(G) \Rightarrow \exists n: S \xRightarrow[n \text{ шагов}]{\text{левый вывод}}^* w \in \Sigma^*$ . На последнем,  $n - 1$  шаге был раскрыт нетерминал  $[qZp] \rightarrow w_r$ , поэтому этот левый вывод имеет вид  $S \xRightarrow{*} w_l[qZp] \Rightarrow w_l w_r$ . Имеем  $w = w_l w_r$ .  $[qZp] \rightarrow w_r \in P \Rightarrow (q, w_r, Z) \rightarrow (p, \varepsilon, \varepsilon)$ .

$(q_0, w, Z_0) \equiv (q_0, w_l w_r, Z_0) \stackrel{P(n-1)}{\vdash^*} (q, w_r, Z) \vdash (p, \varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(M) \blacksquare$

### Упражнение 3

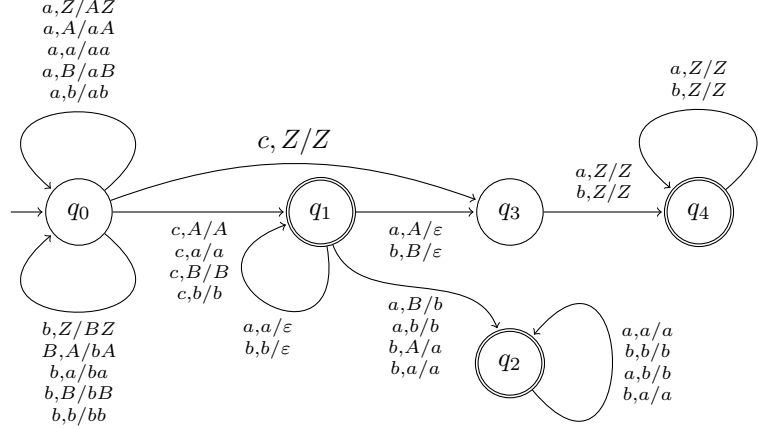
### Упражнение 4

# Задача 1

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^*, x \neq y^R\} \subset \Sigma^*, \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c\}.$$

1. Определим МП-автомат  $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, Z, \delta, F)$ , допускающий по принимающему состоянию:

1.  $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, A, B, Z\}$
2.  $Q \stackrel{\text{def}}{=} \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
3.  $\delta$  изображена справа
4.  $F \stackrel{\text{def}}{=} \{q_1, q_2, q_4\}$



2.  $\mathcal{A}$  — детерминированный, так как из каждой конфигурации  $(q, w, \gamma)$  переход определен однозначно, и  $\varepsilon$ -переходов нет.

3. Определим  $U: \{a, b\} \rightarrow \{A, B\}: U(a) = A, U(b) = B$ . Определим  $U_r: \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b, A, B\}^*$ :

$$U_r(w) = \begin{cases} \varepsilon, & w = \varepsilon \\ w_1 \dots w_{n-1} U(w_n), & w = w_1 \dots w_n, \forall i \in \overline{1, n} \hookrightarrow w_i \in \{a, b\} \end{cases} \text{ — заменяет последний символ на заглавный.}$$

4. Докажем, что  $L \subseteq L(\mathcal{A})$ :

- (a) Пусть  $w \in \{a, b\}^*$ . Докажем, что  $(q_0, w, Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, U_r(w^R)Z)$  индукцией по  $|w|$ :

$$P(n) \stackrel{\text{def}}{=} [\forall w \in \{a, b\}^*: |w| = n \hookrightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, U_r(w^R)Z)]$$

- i.  $n = 0 \Rightarrow |w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$ . Тогда  $U_r(w^R) \equiv \varepsilon$ , и  $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, \varepsilon, Z) \equiv (q_0, \varepsilon, U_r(w^R)Z) \Rightarrow P(0)$ .

- ii.  $n = 1 \Rightarrow w = \sigma \in \Sigma$ . Рассмотрим переходы из  $(q_0, \sigma, Z)$ . В стек будет добавлен  $U_r(\sigma) \Rightarrow (q_0, w, Z) \equiv (q_0, \sigma, Z) \vdash (q_0, \varepsilon, U_r(\sigma)Z) \equiv (q_0, \varepsilon, U_r(w^R)Z) \Rightarrow P(1)$ .

- iii. Фиксируем  $n \geq 1$ , пусть  $P(n)$ . Пусть  $w \in \{a, b\}^*, |w| = n + 1$ . Тогда  $w = w_0 \sigma, |w_0| = n > 0$ .

$$P(n) \Rightarrow (q_0, w_0, Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, U_r(w_0^R)Z). \text{ Тогда } (q_0, w, Z) \equiv (q_0, w_0 \sigma, Z) \vdash^* (q_0, \sigma, U_r(w_0^R)Z).$$

$\nrightarrow$  переходы из  $(q_0, \sigma, U_r(w_0^R)Z)$ . На верхушке стека  $\gamma \in \{a, b, A, B\}$  — первый символ  $U_r(w_0^R)$ ,

входной символ  $\sigma \in \{a, b\}$ . Во всех случаях он будет добавлен в стек (см. определение  $\delta$ ), значит,  $(q_0, \sigma, U_r(w_0^R)Z) \vdash (q_0, \varepsilon, \sigma U_r(w_0^R)Z) \stackrel{|w_0| > 0}{=} (q_0, \varepsilon, U_r(w^R)Z) \Rightarrow P(n + 1)$ .

- (b) Из определения  $\delta$  имеем  $(q_0, cw, \gamma) \vdash^* (q_1, w, \gamma), |\gamma| > 0, \gamma \neq Z$ .

- (c) Докажем  $(q_1, x, xZ) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$  индукцией по  $|x|$ :  $P(n) \stackrel{\text{def}}{=} [\forall x \in \{a, b\}^*: |x| = n \hookrightarrow (q_1, x, xZ) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)]$

- i.  $n = 0 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = \varepsilon$ . Тогда  $(q_1, x, xZ) \equiv (q_1, \varepsilon, Z) \Rightarrow P(0)$

- ii. Фиксируем  $n \geq 0$ . Пусть  $P(n)$ . Пусть  $x \in \{a, b\}^*: |x| = n + 1 \Rightarrow x = x_0 \sigma, |x_0| = n \stackrel{P(n)}{\Rightarrow} (q_1, x_0, x_0 Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$ . Тогда  $(q_1, x, xZ) \equiv (q_1, x_0 \sigma, x_0 \sigma Z) \vdash^* (q_1, \sigma, \sigma Z)$ . Входной символ совпадает с символом на верхушке стека, из определения  $\delta$  получаем, что символ будет удален из стека:  $(q_1, \sigma, \sigma Z) \vdash (q_1, \varepsilon, Z) \Rightarrow P(n)$ .

- (d) Пусть  $\sigma_1, \sigma_2 \in \{a, b\}, \sigma_1 \neq \sigma_2$ . Тогда  $(q_1, \sigma_1, U_r(\sigma_2)\gamma) \vdash (q_2, \varepsilon, \sigma_2\gamma)$  и  $(q_1, \sigma_1, \sigma_2\gamma) \vdash (q_2, \varepsilon, \sigma_2\gamma)$  — из определения  $\delta$ .

- (e) Пусть  $x \in \{a, b\}^*, \gamma \in \{a, b\}$ . Тогда  $(q_2, x, \gamma\kappa) \vdash^* (q_2, \varepsilon, \gamma\kappa)$  — доказывается очевидно по индукции (переходы из  $q_2$  в  $q_2$  определены для всех символов  $a, b$  на входе и в стеке и не изменяют стек).

- (f) Пусть  $\sigma \in \{a, b\}$ . Тогда  $(q_1, \sigma, U_r(\sigma)\gamma) \vdash (q_3, \varepsilon, \gamma)$  — из определения  $\delta$ .

- (g) Пусть  $\sigma \in \{a, b\}$ . Тогда  $(q_3, \sigma, Z) \vdash (q_4, \varepsilon, Z)$  — из определения  $\delta$

- (h) Пусть  $x \in \{a, b\}^*$ . Тогда  $(q_4, x, Z) \vdash^* (q_4, \varepsilon, Z)$  — доказывается очевидно по индукции (из  $q_4$  есть переходы в  $q_4$  по  $a$  и  $b$  при  $Z$  на верхушке стека)

- (i) Из определения  $\delta$  имеем  $(q_0, c, Z) \vdash (q_3, \varepsilon, Z)$ .

- (j) Пусть  $\underline{w} \in L \Rightarrow w = xcy, x \neq y^R; x, y \in \{a, b\}^*. x \neq y^R \Leftrightarrow x^R \neq y$ . Выделим максимальную по длине общую часть  $\tau$  длины  $i$  у слов  $x^R$  и  $y$ :  $x^R = \tau x_1, y = \tau y_1, x_1 \neq y_1$ . Тогда  $x = x_1^R \tau^R, w = xcy = x_1^R \tau^R c \tau y_1$ .

- i. Пусть  $|x_1| > 0$ .  $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, x_1^R \tau^R c \tau y_1, Z) \stackrel{4a}{\vdash^*}_{|x_1| > 0} (q_0, c \tau y_1, U_r(\tau x_1)Z) \stackrel{4b}{\vdash} (q_1, \tau y_1, U_r(\tau x_1)Z) \stackrel{|x_1| > 0}{\equiv}$

$$\equiv (q_1, \tau y_1, \tau U_r(x_1)Z) \stackrel{4c}{\vdash^*} (q_1, y_1, U_r(x_1)Z).$$

- А. Пусть  $|y_1| > 0, x_1[1] \neq y_1[1]$ . Обозначим  $y_1 = y^1 \dots y^l, \forall i \in \overline{1, l} \hookrightarrow y^i \in \{a, b\}^*$  Тогда  $(q_1, y_1, U_r(x_1)Z) \equiv$

$$(q_1, y^1 \dots y^l, U_r(x_1)Z) \stackrel{4d}{\vdash} (q_2, y^2 \dots y^l, U_r(x_1)Z) \stackrel{4e}{\vdash^*} (q_2, \varepsilon, U_r(x_1)Z). q_2 \in F \Rightarrow \underline{w} \in L(\mathcal{A}).$$

В. Пусть  $|y_1| = 0$ . Тогда  $w = x_1^R \tau^R c \tau y_1 \equiv x_1^R \tau^R c \tau \Rightarrow (q_0, w, Z) \equiv (q_0, x_1^R \tau^R c \tau, Z) \stackrel{4a}{\vdash^*}_{|x_1|>0} (q_0, c \tau, \tau U_r(x_1) Z) \stackrel{4b}{\vdash}_{|x_1|>0}$

$$(q_1, \tau, \tau U_r(x_1) Z) \stackrel{4e}{\vdash^*} (q_1, \varepsilon, U_r(x_1) Z). q_1 \in F \Rightarrow \underline{w \in L(\mathcal{A})}$$

ii. Пусть  $|x_1| = 0$ . Тогда  $w = \tau^R c \tau y_1$ ,  $y_1 \in \{a, b\}^*$ .  $x^R \neq y \Rightarrow \tau \neq \tau y_1 \Rightarrow |y_1| > 0 \Rightarrow y_1 = \varkappa \Psi$ ,  $\varkappa \in \{a, b\}$

А.  $|\tau| > 0 \Rightarrow \tau = \tau_0 \sigma$ ,  $\sigma \in \{a, b\}$ . Получаем  $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, \tau^R c \tau y_1, Z) \stackrel{4a}{\vdash^*}_{|\tau|>0} (q_0, c \tau y_1, U_r(\tau) Z) \stackrel{4b}{\vdash}_{|\tau|>0} (q_1, \tau y_1, U_r(\tau) Z) \equiv$

$$(q_1, \tau_0 \sigma y_1, \tau_0 U_r(\sigma) Z) \stackrel{4c}{\vdash^*} (q_1, \sigma y_1, U_r(\sigma) Z) \stackrel{4f}{\vdash} (q_3, y_1, Z) \equiv (q_3, \varkappa \Psi, Z) \stackrel{4g}{\vdash} (q_4, \Psi, Z) \stackrel{4h}{\vdash^*} (q_4, \varepsilon, Z). q_4 \in F \Rightarrow \underline{w \in L(\mathcal{A})}$$

В.  $|\tau| = 0 \Rightarrow w = x_1^R \tau^R c \tau y_1 \equiv c y_1 \Rightarrow (q_0, w, Z) \equiv (q_0, c y_1, Z) \stackrel{4i}{\vdash} (q_3, y_1, Z) \equiv (q_3, \varkappa \Psi, Z) \stackrel{4g}{\vdash} (q_4, \Psi, Z) \stackrel{4h}{\vdash^*} (q_4, \varepsilon, Z). q_4 \in F \Rightarrow \underline{w \in L(\mathcal{A})}$

5. Докажем, что  $L(\mathcal{A}) \subseteq L$ . Пусть  $w \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma)$ ,  $q \in F$ :

(a)  $q = q_1$ . В  $q_1$  прочитываются  $a, b$ . Переходы в  $q_1$  есть только из  $q_0$  по  $c$ . В  $q_0$  прочитываются символы  $a, b$ . Значит,  $w = xcy$ ,  $x, y \in \{a, b\}^*$ . Если  $x = \varepsilon$ , то был совершен переход  $q_0 \xrightarrow{c, Z/Z} q_3$  — противоречие. Автомат детерминированный, поэтому цепочка конфигураций при выводе  $w$  имеет вид  $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, xcy, Z) \stackrel{4a}{\vdash}_{|x|>0} (q_0, cy, U_r(x^R) Z) \stackrel{4b}{\vdash}_{|x|>0} (q_1, y, U_r(x^R) Z) \equiv$ . Выделим максимальную общую часть от начала для слов  $x^R$  и  $y$ :  $x^R = \tau x_1$ ,  $y = \tau y_1$ ,  $x_1 \neq y_1$ .

i.  $|\tau| = 0, |x_1| = 0 \Rightarrow |x| = 0$  — противоречие

ii.  $|\tau| > 0, |x_1| = 0 \Rightarrow \tau = \tau_0 \sigma$ ,  $\sigma \in \{a, b\}$ .  $\equiv (q_1, \tau_0 \sigma y_1, \tau_0 U_r(\sigma) Z) \stackrel{4c}{\vdash^*} (q_1, \sigma y_1, U_r(\sigma) Z) \stackrel{4f}{\vdash} (q_3, \dots)$  — противоречие, из  $q_3$  нет переходов в  $q_1$ .

iii.  $|\tau| \geq 0, |x_1| > 0$ . Тогда  $\equiv (q_1, \tau y_1, \tau U_r(x_1) Z) \stackrel{4c}{\vdash^*} (q_1, y_1, U_r(x_1) Z) \equiv$ .

а.  $|y_1| = 0 \Rightarrow \equiv (q_1, \varepsilon, U_r(x_1) Z)$ . Тогда  $w = \underbrace{x_1^R \tau^R}_x c \underbrace{\tau y_1^R}_y$ ,  $x^R = \tau x_1 \neq \tau = y \Rightarrow \underline{w \in L}$ .

б.  $|y_1| > 0$ . Тогда  $x_1[1] \neq y_1[1]$ , и  $\equiv (q_1, y_1, U_r(x_1) Z) \stackrel{4d}{\vdash}_{x_1[1] \neq y_1[1]} (q_3, \dots)$  — противоречие, из  $q_3$  нет переходов в  $q_1$ .

(b)  $q = q_2$ . В  $q_2$  есть переходы только из  $q_1$ , в  $q_2$  прочитываются  $a, b$ .  $5a \Rightarrow w = xcy$ ,  $|x| \neq 0$ ,  $x, y \in \{a, b\}^*$ . При переходе в  $q_2$  прочитывается символ, поэтому  $|y| > 0$ . Аналогично  $5a$  выделим общую часть  $x^R = \tau x_1$ ,  $y = \tau y_1$ . Аналогично  $5a$  ( $|x| > 0$ ) получаем  $(q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \tau y_1, U_r(\tau x_1) Z) \equiv$ . Рассмотрим случаи:

i.  $|\tau| = 0, |x_1| = 0 \Rightarrow |x| = 0$  — противоречие

ii.  $|\tau| > 0, |x_1| = 0 \Rightarrow \tau = \tau_0 \sigma$ ,  $\sigma \in \{a, b\}$ .  $\equiv (q_1, \tau_0 \sigma y_1, \tau_0 U_r(\sigma) Z) \stackrel{4c}{\vdash^*} (q_1, \sigma y_1, U_r(\sigma) Z) \stackrel{4f}{\vdash} (q_3, \dots)$  — противоречие, из  $q_3$  нет переходов в  $q_2$ .

iii.  $|\tau| \geq 0, |x_1| > 0$ . Тогда  $\equiv (q_1, \tau y_1, \tau U_r(x_1) Z) \stackrel{4c}{\vdash^*} (q_1, y_1, U_r(x_1) Z) \equiv$ .

а.  $|y_1| = 0 \Rightarrow \equiv (q_1, \varepsilon, U_r(x_1) Z)$ . В  $5a$  было показано, что автомат остановится в  $q_1$  — противоречие.

б.  $|y_1| > 0$ . Тогда  $x_1[1] \neq y_1[1]$ . Обозначим  $x_1 = \sigma_1 x_1^0$ ,  $y_1 = \sigma_2 y_1^0$ , и  $\equiv (q_1, \sigma_1 y_1^0, U_r(\sigma_2 x_1^0) Z) \stackrel{4d}{\vdash}_{x_1[1] \neq y_1[1]}$

$$(q_3, y_1^0, U_r(x_1^0) Z) \stackrel{4e}{\vdash^*} (q_3, \varepsilon, U_r(x_1^0) Z) \text{ (последние переходы возможны только при } x_1^0 \neq \varepsilon \text{)}.$$

Получаем  $x_1 \neq y_1 \Rightarrow x^R \neq y \Rightarrow \underline{w \in L}$ .

(c)  $q = q_4$ . В  $q_4$  прочитываются  $a, b$ ; в  $q_4$  есть переходы только из  $q_3 \xrightarrow{a, Z/Z, b, Z/Z} q_4$ , в  $q_3$  есть переходы только из  $p \in \{q_0, q_1\}$ . Рассмотрим случаи:

i.  $p = q_0$ . Если в  $q_0$  были прочитаны символы из  $\{a, b\}$ , то на верхушке стека не  $Z \Rightarrow$  переход в  $q_3$  не мог быть совершен. Получаем, что  $w = cy$ ,  $y \in \{a, b\}^*$ . Но при переходе в  $q_4$  из  $q_3$  прочитывается хотя бы один символ, поэтому  $|y| > 0 \Rightarrow \underline{w \in L}$

ii.  $p = q_1$ .  $5b \Rightarrow w = xcy$ ,  $|x| > 0$ ,  $x, y \in \{a, b\}^*$ . Аналогично  $5b$  разобьем  $x^R = \tau x_1$ ,  $y = \tau y_1$ , рассмотрим случаи:

А.  $|\tau| = 0, |x_1| = 0 \Rightarrow |x| = 0$  — противоречие

В.  $|\tau| > 0, |x_1| = 0 \Rightarrow \tau = \tau_0 \sigma$ ,  $\sigma \in \{a, b\}$ . Аналогично  $5b$  получим  $(q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \tau_0 \sigma y_1, \tau_0 U_r(\sigma) Z) \stackrel{4c}{\vdash^*} (q_1, \sigma y_1, U_r(\sigma) Z) \stackrel{4f}{\vdash} (q_3, y_1, Z)$ . При переходе из  $q_3$  в  $q_4$  был прочитан символ, поэтому  $|y_1| > 0$ . Имеем  $x^R \equiv \tau x_1 \equiv \tau \neq \tau y_1 \equiv y \Rightarrow \underline{w \in L}$ .

С.  $|\tau| \geq 0, |x_1| > 0$ .

а.  $|y_1| = 0$ . В  $5a$  было показано, что автомат остановится в  $q_1$  — противоречие.

б.  $|y_1| > 0$ . В  $5b$  было показано, что автомат остановится в  $q_2$  — противоречие.

## Задача 2

## Задача 3

$$\begin{aligned}\Sigma &\stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}, \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} (N, \Sigma, P, S). \quad N \stackrel{\text{def}}{=} \{A, B, C, D, E, F, G\} \quad P: \\ S &\rightarrow A|B|C|E|AG \\ A &\rightarrow C|aABC|\varepsilon \\ B &\rightarrow bABa|aCbDaGb|\varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &\rightarrow BaAbC|aGD|\varepsilon \\ F &\rightarrow aBaaCbA|aGE \\ E &\rightarrow A\end{aligned}$$

1. Удалим бесплодные символы (для упрощения):

- (a)  $V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$
- (b)  $V_1 = V_0 \cup \{A, B, C\} = \{a, b, A, B, C\}$
- (c)  $V_2 = V_1 \cup \{S, F, E\} = \{a, b, S, A, B, C, F, E\}$
- (d)  $V_3 = V_2 \cup \emptyset$

Тогда  $V_3 \setminus \Sigma = \{S, A, B, C, F, E\}$ . Удалим нетерминалы  $N \setminus V_3 = \{D, G\}$  и правила, их содержащие:  $N' \stackrel{\text{def}}{=} N \setminus V_3 = \{S, A, B, C, F, E\}$ ,  $P'$ :

$$\begin{aligned}S &\rightarrow A|B|C|E|AG \\ A &\rightarrow C|aABC|\varepsilon \\ B &\rightarrow bABa|aCbDaGb|\varepsilon \\ C &\rightarrow BaAbC|aGD|\varepsilon \\ F &\rightarrow aBaaCbA|aGE \\ E &\rightarrow A\end{aligned}$$

2. Удалим недостижимые символы (для упрощения):

- (a)  $V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{S\}$
- (b)  $V_1 = V_0 \cup \{A, B, C, E\}$
- (c)  $V_2 = V_1 \cup \emptyset$

$N'' \stackrel{\text{def}}{=} \{A, B, C, E, S\}$ ,  $P''$ :

$$\begin{aligned}S &\rightarrow A|B|C|E|AG \\ A &\rightarrow C|aABC|\varepsilon \\ B &\rightarrow bABa|aCbDaGb|\varepsilon \\ C &\rightarrow BaAbC|aGD|\varepsilon \\ F &\rightarrow aBaaCbA|aGE \\ E &\rightarrow A\end{aligned}$$

1,2. Имеем  $P''$ :

$$\begin{aligned}S &\rightarrow A|B|C|E \\ A &\rightarrow C|aABC|\varepsilon \\ B &\rightarrow bABa|\varepsilon \\ C &\rightarrow BaAbC|\varepsilon \\ E &\rightarrow A\end{aligned}$$

3. Удалим  $\varepsilon$ -правила:

- (a)  $A, B, C$  —  $\varepsilon$ -порождающие.
- (b)  $S, E$  —  $\varepsilon$ -порождающие ( $S \rightarrow A$ ,  $E \rightarrow A$ )

Перепишем правила, содержащие  $\varepsilon$ -порождающие нетерминалы справа ( $2^k$  правил для каждого правила, содержащего  $k$   $\varepsilon$ -порождающих нетерминалов).  $P'''$ :

$$\begin{aligned}S &\rightarrow A|B|C|E \\ A &\rightarrow C|a|aC|aB|aBC|aA|aAC|aAB|aABC \\ B &\rightarrow ba|bBa|bAa|bABa \\ C &\rightarrow ab|abC|aAb|aAbC|Bab|BabC|BaAbC \\ E &\rightarrow A\end{aligned}$$

Грамматика с такими правилами порождает язык  $L(\Gamma) \setminus \{\varepsilon\}$ .

4. Найдем цепные пары (множества пар соответствуют добавлениям на шагах алгоритма):

- (a)  $(S, S), (A, A), (B, B), (C, C), (E, E)$
- (b)  $(S, A), (S, B), (S, C), (S, E); (A, C); (E, A)$
- (c)  $(S, C); (S, A); (E, C)$

5. Выпишем новое множество правил  $P''''$ :

Цепная пара	Правила
$(S, S)$	$\emptyset$
$(A, A)$	$A \rightarrow a aC aB aBC aA aAC aAB aABC$
$(B, B)$	$B \rightarrow ba bBa bAa bABa$
$(C, C)$	$C \rightarrow ab abC aAb aAbC Bab BabC BaAbC$
$(E, E)$	$\emptyset$
$(S, A)$	$S \rightarrow a aC aB aBC aA aAC aAB aABC$
$(S, B)$	$S \rightarrow ba bBa bAa bABa$
$(S, C)$	$S \rightarrow ab abC aAb aAbC Bab BabC BaAbC$
$(S, E)$	$\emptyset$
$(A, C)$	$A \rightarrow ab abC aAb aAbC Bab BabC BaAbC$
$(E, A)$	$E \rightarrow a aC aB aBC aA aAC aAB aABC$
$(S, C)$	$S \rightarrow ab abC aAb aAbC Bab BabC BaAbC$
$(E, C)$	$E \rightarrow ab abC aAb aAbC Bab BabC BaAbC$

6. Нетерминалы  $A, B, C, E, S$  не являются бесплодными:  $A \rightarrow a, B \rightarrow ba, C \rightarrow ab, E \rightarrow a, S \rightarrow ab$ .

7. Удалим недостижимые:

(a)  $V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{S\}$

(b)  $V_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{S, A, B, C\}$

(c)  $V_2 = V_1$

Удаляем  $E$ .  $P^{(5)}$ :

$$A \rightarrow a|aC|aB|aBC|aA|aAC|aAB|aABC|ab|abC|aAb|aAbC|Bab|BabC|BaAbC$$

$$B \rightarrow ba|bBa|bAa|bABa$$

$$C \rightarrow ab|abC|aAb|aAbC|Bab|BabC|BaAbC$$

$$S \rightarrow a|aC|aB|aBC|aA|aAC|aAB|aABC|ba|bBa|bAa|bABa|ab|abC|aAb|aAbC|Bab|BabC|BaAbC$$

8. Приведем к нормальной форме Хомского. Добавим нетерминалы  $A', B'$ ,  $A' \rightarrow a, B' \rightarrow b$ . Заменим в правилах  $a$  на  $A'$ ,  $b$  на  $B'$ . Подчеркнем слова из нетерминалов длины 2 в правых частях правил, которые заменим на новые нетерминалы:

$$A \rightarrow a|A'C|A'B|\underline{A'BC}|A'A|\underline{A'AC}|\underline{A'AB}|\underline{A'A BC}|A'B'|\underline{A'B'C}|\underline{A'AB'}|\underline{A'A B'C}|\underline{BA'B'}|\underline{BA' B'C}|\underline{BA' AB'C}$$

$$B \rightarrow B'A'|\underline{B'BA'}|\underline{B'AA'}|\underline{B'ABA'}$$

$$C \rightarrow A'B'|\underline{A'B'C}|\underline{A'AB'}|\underline{A'A B'C}|\underline{BA'B'}|\underline{BA' B'C}|\underline{BA' AB'C}$$

$$S \rightarrow a|A'C|A'B|\underline{A'BC}|A'A|\underline{A'AC}|\underline{A'AB}|\underline{A'A BC}|B'A'|\underline{B'BA'}$$

$$S \rightarrow \underline{B'AA'}|\underline{B'A BA'}|A'B'|\underline{A'B' C}|\underline{A'AB'}|\underline{A'A B'C}|\underline{BA'B'}|\underline{BA' B'C}|\underline{BA' AB'C}$$

$$A' \rightarrow a$$

$$B' \rightarrow b$$

Заменим подчеркнутые слова на новые нетерминалы, получим

Ответ:

$$A \rightarrow a|A'C|A'B|X_0C|A'A|X_1C|X_1B|X_1X_2|A'B'|X_3C|X_1B'|X_1X_4|X_5B'|X_5X_4|X_9C$$

$$B \rightarrow B'A'|X_7A'|X_8A'|X_8X_5$$

$$C \rightarrow A'B'|X_3C|X_1B'|X_1X_4|X_5B'|X_5X_4|X_9C$$

$$S \rightarrow a|A'C|A'B|X_0C|A'A|X_1C|X_1B|X_1X_2|B'A'|X_7A'|X_8A'|X_8X_5|A'B'|X_3C|X_1B'|X_1X_4|X_5B'|X_5X_4|X_9C$$

$$A' \rightarrow a$$

$$X_2 \rightarrow BC$$

$$X_6 \rightarrow AB'$$

$$B' \rightarrow b$$

$$X_3 \rightarrow A'B'$$

$$X_7 \rightarrow B'B$$

$$X_0 \rightarrow A'B$$

$$X_4 \rightarrow B'C$$

$$X_8 \rightarrow B'A$$

$$X_1 \rightarrow A'A$$

$$X_5 \rightarrow BA'$$

$$X_9 \rightarrow X_5X_6$$

## Задача 4

## Задача 5

$\Sigma_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{[1, [2], \bar{\Sigma}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{[1, ]_2\}$ .  $D_2 \stackrel{\text{def}}{=}$  язык ПСП над  $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_2 \cup \bar{\Sigma}_2$ .  $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$ .  $\varphi: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ ,  $\varphi([1] \stackrel{\text{def}}{=} a$ ,  $\varphi([2] \stackrel{\text{def}}{=} b$ ,  $\varphi([1] \stackrel{\text{def}}{=} b$ ,  $\varphi([2] \stackrel{\text{def}}{=} a$ . Доопределим  $\varphi$  до морфизма (см. решение упр. 2 из задания 3).  $L \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(D_2 \cap \Sigma^*) \equiv \varphi(D_2)$ .  $L' \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \Delta^* \mid |w|_a = |w|_b\}$ .

1. Докажем, что  $L \subseteq L'$ . Пусть  $y \in L \equiv \varphi(D_2)$ . Тогда  $\exists x \in D_2: y = \varphi(x)$ .  $x$  — ПСП  $\Rightarrow \forall i \in \bar{1}, \bar{2} \hookrightarrow |x|_{[i]} = |x|_{]i]}$ . Сложим равенства, получим:  $|x|_{[1]} + |x|_{]2]} = |x|_{[1]} + |x|_{]2]}$ . Пусть  $x = x_1 \dots x_m$ ,  $\forall i \in \bar{1}, \bar{m} \hookrightarrow x_i \in \Sigma$ . Тогда  $y = \varphi(x) = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_m) = y_1 \dots y_m$ ,  $\forall i \in \bar{1}, \bar{m} \hookrightarrow y_i = \varphi(x_i) \in \Delta$ . Но из определения  $\varphi$  имеем  $[1, ]_2 \xrightarrow{\varphi} a$ ;  $]1, [2 \xrightarrow{\varphi} b$ . Тогда  $|y|_a = |x|_{[1]} + |x|_{]2]} \equiv |x|_{[1]} + |x|_{]2]} = |y|_b \Rightarrow y \in L'$  ■

2. Докажем, что  $L' \subseteq L$  индукцией по длине  $y \in L'$ :  $P(n) \stackrel{\text{def}}{=} [\forall y \in L': |y| \leq n \hookrightarrow y \in L]$ .

Заметим, что  $y \in L \Leftrightarrow y \in \varphi(D_2) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \neq \emptyset$ . Поэтому будем искать прообраз слова  $y$ , принадлежащий  $D_2$ .

(а)  $n = 0 \Rightarrow |y| = 0 \Rightarrow y = \varepsilon \in L'$ . Пусть  $x \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \in D_2$  (так как пустое слово — ПСП). Тогда  $y = \varepsilon \equiv \varphi(x) \Rightarrow y \in \varphi(D_2) \equiv L \Rightarrow P(0)$

(б) Фиксируем  $n > 0$ . Пусть  $P(n-1)$ . Пусть  $y \in L': |y| = n$ . Поскольку  $|y| = n > 0$ , и  $|y|$  — чётно (см. решение задачи 3 из задания 6), то  $|y| \geq 2$ . Рассмотрим первый и последний символы  $\sigma_l$  и  $\sigma_r$  слова  $y \equiv \sigma_l y_1 \sigma_r$ :

- $\sigma_l = a, \sigma_r = b$ . Тогда  $y = ay_1b$ .  $|y_1| = n-2 \leq n-1 \xrightarrow{P(n-1)} \exists x_1 \in D_2: \varphi(x_1) = y_1$ . Определим  $x = [1x_1]_1$ .  $x_1 \in D_2 \Rightarrow x_1$  — ПСП  $\Rightarrow x$  — ПСП, так как получен из ПСП добавлением скобок типа 1 слева и справа  $\Rightarrow x \in D_2$ . Но  $\varphi(x) \equiv \varphi([1x_1]_1) = \varphi([1])\varphi(x_1)\varphi([1]) = ay_1b \equiv y$ . Получаем  $\varphi^{-1}(y) \cap D_2 \ni x \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \neq \emptyset$ .
- $\sigma_l = b, \sigma_r = b$ . Тогда  $y = by_1a$ .  $|y_1| = n-2 \leq n-1 \xrightarrow{P(n-1)} \exists x_1 \in D_2: \varphi(x_1) = y_1$ . Определим  $x = [2x_1]_2$ .  $x_1 \in D_2 \Rightarrow x_1$  — ПСП  $\Rightarrow x$  — ПСП, так как получен из ПСП добавлением скобок типа 2 слева и справа  $\Rightarrow x \in D_2$ . Но  $\varphi(x) \equiv \varphi([2x_1]_2) = \varphi([2])\varphi(x_1)\varphi([2]) = by_1a \equiv y$ . Получаем  $\varphi^{-1}(y) \cap D_2 \ni x \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \neq \emptyset$ .
- $\sigma_l = \sigma_r$ . Тогда  $y = \sigma y_1 \sigma \in L'$ . Воспользуемся утверждением в рамочке из решения задачи 3 задания 6:

$$y = \sigma y_1 \sigma \in L' \Rightarrow \exists y_l, y_r: y = y_l y_r, |y_l|, |y_r| \in \bar{1}, |y| - 2, y_l, y_r \in L'$$

Но  $|y_l|, |y_r| \leq |y| - 2 = n - 2 \leq n - 1 \xrightarrow{P(n-1)} \exists x_l, x_r \in D_2: y_l = \varphi(x_l), y_r = \varphi(x_r)$ . Определим  $x \stackrel{\text{def}}{=} x_l x_r$ . Тогда  $x \in D_2$  (конкатенация ПСП — ПСП), и  $\varphi(x) = \varphi(x_l x_r) = \varphi(x_l)\varphi(x_r) = y_l y_r = y \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \ni x \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \neq \emptyset$

■

Ответ: Верно, что  $L = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$ .

## Задача 6

Автомат  $\mathcal{A} = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, Z_0, \delta, \emptyset)$  из 7-го задания:

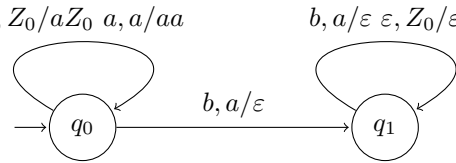
1.  $\Sigma = \{a, b\}$

2.  $\Gamma = \{a, Z_0\}$

3.  $Q = \{q_0, q_1\}$

4.  $\delta$  изображена справа

Определим грамматику  $G = (N, \Sigma, P, S)$ .  $N = \{S\} \cup \{[qZp] \mid q, p \in Q, Z \in \Gamma\}$



1. Добавим правила  $S \rightarrow [q_0 Z_0 q_0] \mid [q_0 Z_0 q_1]$

2. Рассмотрим переходы из  $\delta$ , добавим правила

(а)  $\delta \ni q_0 \xrightarrow{a, Z_0/aZ_0} q_0: [q_0 Z_0 q_0] \rightarrow a[q_0 a q_0][q_0 Z_0 q_0] \mid a[q_0 a q_1][q_1 Z_0 q_0], [q_0 Z_0 q_1] \rightarrow a[q_0 a q_0][q_0 Z_0 q_1] \mid a[q_0 a q_1][q_1 Z_0 q_1]$

(б)  $\delta \ni q_0 \xrightarrow{a, a/aa} q_0: [q_0 a q_0] \rightarrow a[q_0 a q_0][q_0 a q_0] \mid a[q_0 a q_1][q_1 a q_0], [q_0 a q_1] \rightarrow a[q_0 a q_0][q_0 a q_1] \mid a[q_0 a q_1][q_1 a q_1]$

(с)  $\delta \ni q_0 \xrightarrow{b, a/\varepsilon} q_1: [q_0 a q_1] \rightarrow b$

(д)  $\delta \ni q_1 \xrightarrow{b, a/\varepsilon} q_1: [q_1 a q_1] \rightarrow b$

(е)  $\delta \ni q_0 \xrightarrow{\varepsilon, Z_0/\varepsilon} q_1: [q_1 Z_0 q_1] \rightarrow \varepsilon$

3. Удалим бесплодные нетерминалы:

(а)  $V_0 = \{a, b\}$

(б)  $V_1 = V_0 \cup \{[q_0 a q_1], [q_1 a q_1], [q_1 Z_0 q_1]\}$

(с)  $V_2 = V_1 \cup \{[q_0 Z_0 q_1]\}$

(д)  $V_3 = V_2 \cup \{S\}$

(е)  $V_4 = V_3$ .

Имеем правила  $S \rightarrow [q_0 Z_0 q_1], [q_0 Z_0 q_1] \rightarrow a[q_0 a q_1][q_1 Z_0 q_1], [q_0 a q_1] \rightarrow a[q_0 a q_1][q_1 a q_1] \mid b, [q_1 a q_1] \rightarrow b, [q_1 Z_0 q_1] \rightarrow \varepsilon$

4. Удалим недостижимые нетерминалы:

- (a)  $V_0 = \{S\}$
- (b)  $V_1 = V_0 \cup \{[q_0 Z_0 q_1]\}$
- (c)  $V_2 = V_1 \cup \{[q_0 a q_1], [q_1 Z_0 q_1]\}$
- (d)  $V_3 = V_2 \cup \{[q_1 a q_1]\}$
- (e)  $V_4 = V_3$

(все достижимы)

5. Переобозначим:

$$S \rightarrow \underbrace{[q_0 Z_0 q_1]}_A, \underbrace{[q_0 Z_0 q_1]}_A \rightarrow a \underbrace{[q_0 a q_1]}_B \underbrace{[q_1 Z_0 q_1]}_C, \underbrace{[q_0 a q_1]}_B \rightarrow a \underbrace{[q_0 a q_1]}_B \underbrace{[q_1 a q_1]}_D \mid b, \underbrace{[q_1 a q_1]}_D \rightarrow b, \underbrace{[q_1 Z_0 q_1]}_C \rightarrow \varepsilon,$$

получим

$$S \rightarrow A, A \rightarrow aBC, B \rightarrow aBD \mid b, D \rightarrow b, C \rightarrow \varepsilon$$

6. Из  $D, C$  есть только правила  $D \rightarrow b, C \rightarrow \varepsilon$ , поэтому они раскрываются единственным образом. Уберем их, получим грамматику  $G'$ , причем  $G' — однозначная \Leftrightarrow G — однозначная$ :

$$S \rightarrow A, A \rightarrow aB, B \rightarrow aBb \mid b$$

Аналогично для  $S \rightarrow A$  (раскрывается единственным образом). Получим  $G''$ :  $G'' — однозначная \Leftrightarrow G' — однозначная$ :

$$S \rightarrow aB, B \rightarrow aBb \mid b$$

После применения правила  $B \rightarrow b$  нельзя применить правило  $B \rightarrow aBb$ , и каждое применение  $B \rightarrow aBb$  увеличивает количество символов  $a$  и  $b$  на 1. Поэтому количество его применений фиксировано для каждого  $w \in L(G'')$ . Отсюда получаем, что грамматика  $G'' — однозначная \Rightarrow G' — однозначная \Rightarrow G — однозначная$ .

Ответ:

1.  $G: S \rightarrow \underbrace{[q_0 Z_0 q_1]}_A, \underbrace{[q_0 Z_0 q_1]}_A \rightarrow a \underbrace{[q_0 a q_1]}_B \underbrace{[q_1 Z_0 q_1]}_C, \underbrace{[q_0 a q_1]}_B \rightarrow a \underbrace{[q_0 a q_1]}_B \underbrace{[q_1 a q_1]}_D \mid b, \underbrace{[q_1 a q_1]}_D \rightarrow b, \underbrace{[q_1 Z_0 q_1]}_C \rightarrow \varepsilon$
2. После переобозначения  $S \rightarrow A, A \rightarrow aBC, B \rightarrow aBD \mid b, D \rightarrow b, C \rightarrow \varepsilon$
3.  $G — однозначная$ .