

Теория и реализация языков программирования.

Задание 6: Грамматики

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.10.09

Задача 1

Задача 2

$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$, $\Sigma^* \supset L \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}$ — язык палиндромов из a, b .

1. Определим КС-грамматику $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} (\{S\}, \Sigma, P, S)$, $P \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \underbrace{S \longrightarrow \varepsilon}_{(1)}, \underbrace{S \longrightarrow aSa}_{(2)}, \underbrace{S \longrightarrow bSb}_{(3)}, \underbrace{S \longrightarrow a}_{(4)}, \underbrace{S \longrightarrow b}_{(5)} \right\}$.

Докажем, что $L(\Gamma) = L$:

- (а) $L(\Gamma) \subseteq L$. Пусть $w \in L(\Gamma) \Rightarrow S \Rightarrow^* w$. $|w| = n$. Рассмотрим последовательность $\{w_k\}_{k=0}^I \subset (N \cup \Sigma)^*$ слов в выводе. $w_0 = S$, $w_I = w$. Индукцией по k докажем $P(k) = [w_k = w_k^R, \forall i: w_k[i] = S \hookrightarrow i = \frac{|w_k|+1}{2}]$.

1. $k = 0 \Rightarrow w_k \equiv w_0 = S$. Поэтому $\exists! i = 1: w_0[i] = S$. Но $1 \equiv \frac{1+1}{2}$ и $w_0^R = S^R = S = w_0 \Rightarrow P(0)$ ■

2. Пусть $P(n)$, $n < I$. Докажем, $P(n+1)$. $P(n) \Rightarrow w_n = w_n^R, \forall i: w_n[i] = S \hookrightarrow i = \frac{|w_n|+1}{2}$.

Предположим, что $\nexists i: w_n[i] = S \Rightarrow w \in \Sigma^*$. Тогда ни одно правило не может быть применено, так как в левой части каждого правила $S \in N$. Но $n < I$ (это не конец вывода) \Rightarrow противоречие.

Значит, $\exists i: w_n[i] = S$. Но $P(n) \Rightarrow \forall i: w_n[i] = S \hookrightarrow i = \frac{|w_n|+1}{2}$. Поэтому $\exists! i = \frac{|w_n|+1}{2}: w_n[i] = S$. Значит, $w_n = xSy$, $|x| = |y|$, $x, y \in \Sigma^*$. $w_n^R = y^R S x^R$. S в w_n входит один раз $\Rightarrow x = y^R$.

Рассмотрим правила (1)–(4):

- (1). $w_n = xSy \xRightarrow{(1)} x\varepsilon y \equiv xy = xx^R = w_{n+1}$ — палиндром: $(xx^R)^R = x^{RR} x^R = xx^R$. $w_{n+1} = xy \in \Sigma^* \Rightarrow \forall i \hookrightarrow w_{n+1}[i] \neq S \Rightarrow P(n+1)$ ■
- (2). $w_n = xSx^R \xRightarrow{(2)} x a S a x^R = w_{n+1}$. $w_{n+1}^R = x^{RR} a^R S^R a^R x^R = x a S a x^R \equiv w_{n+1}$. $a \neq S \Rightarrow \exists! i: w_{n+1}[i] = S$, $i = \frac{|w_n|+1}{2} + 1 = \frac{|w_n|+3}{2} \equiv \frac{|w_{n+1}|+1}{2} \Rightarrow P(n+1)$ ■.
- (3). $w_n = xSx^R \xRightarrow{(3)} x b S b x^R = w_{n+1}$. $w_{n+1}^R = x^{RR} b^R S^R b^R x^R = x b S b x^R \equiv w_{n+1}$. $b \neq S \Rightarrow \exists! i: w_{n+1}[i] = S$, $i = \frac{|w_n|+1}{2} + 1 = \frac{|w_n|+3}{2} \equiv \frac{|w_{n+1}|+1}{2} \Rightarrow P(n+1)$ ■.
- (4). $w_n = xSx^R \xRightarrow{(4)} x a x^R = w_{n+1}$. $w_{n+1}^R = x^{RR} a^R x^R = x a x^R \equiv w_{n+1}$. $w_{n+1} = x a x^R \in \Sigma^* \Rightarrow \forall i \hookrightarrow w_{n+1}[i] \neq S \Rightarrow P(n+1)$ ■
- (5). $w_n = xSx^R \xRightarrow{(5)} x b x^R = w_{n+1}$. $w_{n+1}^R = x^{RR} b^R x^R = x b x^R \equiv w_{n+1}$. $w_{n+1} = x b x^R \in \Sigma^* \Rightarrow \forall i \hookrightarrow w_{n+1}[i] \neq S \Rightarrow P(n+1)$ ■

Итак, доказано $\forall k \in \overline{0, I} \hookrightarrow P(k) \Rightarrow P(I) \Rightarrow w \equiv w_I \stackrel{P(I)}{=} w_I^R \equiv w^R \Rightarrow w \in L$ ■

- (б) $L \subseteq L(\Gamma)$. Пусть $w \in L \Rightarrow w^R = w$. $|w| = n$. Рассмотрим $n \bmod 2$:

0. $n \bmod 2 = 0 \Rightarrow w = xy$, $|x| = |y|$. $w = w^R \Rightarrow xy = y^R x^R$. Поскольку $|x| = |y|$, $y = x^R \Rightarrow \boxed{w = xx^R}$.

0. $n \bmod 2 = 1 \Rightarrow w = x\sigma y$, $|x| = |y|$, $\sigma \in \Sigma$. $w = w^R \Rightarrow x\sigma y = y^R \sigma^R x^R = y^R \sigma x^R$. Так как $|x| = |y|$, $y = x^R \Rightarrow \boxed{w = x\sigma x^R}$.

Значит, $L = \{xx^R, xax^R, xbx^R \mid x \in \Sigma^*\}$.

Построим вывод $S \Rightarrow^* xSx^R$:

- а. Пусть $x = \varepsilon$. $S \xRightarrow{(1)} \varepsilon = \varepsilon\varepsilon^R = w \Rightarrow w \in L(\Gamma)$ ■.

- б. Иначе $x = x_1 \dots x_m$, $\forall i \in \overline{1, m} \hookrightarrow x_i \in \Sigma$. Рассмотрим символы x_m, \dots, x_1 . Применим правило (2), если $x_i = a$ и

(3) иначе. Примененное правило обозначим за $R(i)$. Получим $S \xRightarrow{(R(m))} x_m S x_m \Rightarrow \dots \xRightarrow{(R(1))} x_1 \dots x_m S x_m \dots x_1$.

Теперь покажем, как получить w :

1. $w = xx^R$. Было получено $S \Rightarrow^* xSx^R$. Тогда $S \Rightarrow^* xSx^R \xRightarrow{(1)} xx^R$ ■

2. $w = xax^R$. Было получено $S \Rightarrow^* xSx^R$. Тогда $S \Rightarrow^* xSx^R \xRightarrow{(4)} xax^R$ ■

3. $w = xbx^R$. Было получено $S \Rightarrow^* xSx^R$. Тогда $S \Rightarrow^* xSx^R \xRightarrow{(5)} xbx^R$ ■

Получаем $w \in L(\Gamma)$.

Ответ: $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} (\{S\}, \Sigma, P, S)$, $P \stackrel{\text{def}}{=} \{S \longrightarrow \varepsilon, S \longrightarrow aSa, S \longrightarrow bSb, S \longrightarrow a, S \longrightarrow b\}$

2. Определим грамматику $\bar{\Gamma}$

Задача 3

$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$. $\Sigma^* \supset L \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$. КС-грамматика $\Gamma = \{N, \Sigma, P, S\}$, $P \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \underbrace{S \longrightarrow SS}_{(1)}, \underbrace{S \longrightarrow aSb}_{(2)}, \underbrace{S \longrightarrow bSa}_{(3)} \right\}$

Задача 4

$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$, $\Sigma^* \supset L \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b \leq |w|_a\}$. Определим грамматику Γ .

Задача 5