Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 8: линейное программирование

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.27

(каноническое) Задача 32

$n \in \mathbb{N}$, $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^2$. Задача: найти $(a_0, c_0) = \arg\min\limits_{(a,c)\in\mathbb{R}^2} \max\limits_{i\in\overline{1,n}} |ax_i + y_i + c|$.

Сведем к задаче ЛП: переменные (a, c, M), неравенства: $\begin{cases} ax_i + y_i + c & \leqslant & M \\ ax_i + y_i + c & \geqslant & -M \end{cases}$, $i \in \overline{1,n}$, $M \to \min$

Выпишем конкретную задачу ($n = 7$, точки даны):

$$M \to \min, \begin{cases} a + 3 + c & \leqslant & M \\ a + 3 + c & \geqslant & -M \\ 2a + 5 + c & \leqslant & M \\ 2a + 5 + c & \geqslant & -M \\ 3a + 7 + c & \leqslant & M \\ 3a + 7 + c & \geqslant & -M \\ 5a + 11 + c & \leqslant & M \\ 5a + 11 + c & \geqslant & -M \\ 7a + 14 + c & \leqslant & M \\ 7a + 14 + c & \geqslant & -M \\ 8a + 15 + c & \leqslant & M \\ 8a + 15 + c & \geqslant & -M \\ 10a + 19 + c & \leqslant & M \\ 10a + 19 + c & \geqslant & -M \end{cases}$$

Преобразуем $a = a_+ - a_-$, $c = c_+ - c_-$, новые переменные $t_1, ..., t_{14}$. Неканоническая форма ($b_1 = -3 < 0$):

$$\begin{cases} z = -M \\ t_1 = -3 - 1a_+ + 1a_- - c_+ + c_- + M \\ t_2 = 3 + 1a_+ - 1a_- + c_+ - c_- + M \\ t_3 = -5 - 2a_+ + 2a_- - c_+ + c_- + M \\ t_4 = 5 + 2a_+ - 2a_- + c_+ - c_- + M \\ t_5 = -7 - 3a_+ + 3a_- - c_+ + c_- + M \\ t_6 = 7 + 3a_+ - 3a_- + c_+ - c_- + M \\ t_7 = -11 - 5a_+ + 5a_- - c_+ + c_- + M \\ t_8 = 11 + 5a_+ - 5a_- + c_+ - c_- + M \\ t_9 = -14 - 7a_+ + 7a_- - c_+ + c_- + M \\ t_{10} = 14 + 7a_+ - 7a_- + c_+ - c_- + M \\ t_{11} = -15 - 8a_+ + 8a_- - c_+ + c_- + M \\ t_{12} = 15 + 8a_+ - 8a_- + c_+ - c_- + M \\ t_{13} = -19 - 10a_+ + 10a_- - c_+ + c_- + M \\ t_{14} = 19 + 10a_+ - 10a_- + c_+ - c_- + M \\ a_+, a_-, c_+, c_-, M, t_1, ..., t_{14} \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: $M = \frac{4}{7}$ при $(a_0, c_0) = (-\frac{12}{7}, -\frac{13}{7})$

(каноническое) Задача 33

$$P_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{ccccc} (*_1) & 0 & \leqslant & x_1 & \leqslant & 1 \\ (*_2) & \varepsilon x_1 & \leqslant & x_2 & \leqslant & 1-\varepsilon x_1 \\ (*_3) & \varepsilon x_2 & \leqslant & x_3 & \leqslant & 1-\varepsilon x_2 \end{array} \right. \right\}.$$

Путь:

1. $\vec{x}_1 = (0, 0, 0) \in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0 \leqslant 0 \leqslant 1$

   $(*_2)$ $0 \leqslant 0 \leqslant 1 - 0$

   $(*_3)$ $0 \leqslant 0 \leqslant 1 - 0$

2. $\vec{x}_2 = (1, \varepsilon, \varepsilon^2) \in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0 \leqslant 1 \leqslant 1$

   $(*_2)$ $\varepsilon \leqslant \varepsilon \leqslant 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon < \frac{1}{2})$

   $(*_3)$ $\varepsilon^2 \leqslant \varepsilon^2 \leqslant 1 - \varepsilon^2$ $(\varepsilon^2 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2})$

   Высота больше: $\varepsilon^2 > 0$

3. $\vec{x}_3 = (1, 1 - \varepsilon, \varepsilon - \varepsilon^2) \in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0 \leqslant 1 \leqslant 1$

   $(*_2)$ $\varepsilon \leqslant 1 - \varepsilon \leqslant 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon < \frac{1}{2})$

   $(*_3)$ $\varepsilon - \varepsilon^2 \leqslant \varepsilon - \varepsilon^2 \leqslant 1 - \varepsilon + \varepsilon^2$ $(2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 > 0,\ D = 4 - 8 < 0)$

   Высота больше: $\varepsilon - \varepsilon^2 > \varepsilon^2$ $(\varepsilon < \frac{1}{2})$

4. $\vec{x}_4 = (0, 1, \varepsilon) \in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0 \leqslant 0 \leqslant 1$

   $(*_2)$ $0 \leqslant 1 \leqslant 1$

   $(*_3)$ $\varepsilon \leqslant \varepsilon \leqslant 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon < \frac{1}{2})$

   Высота больше: $\varepsilon > \varepsilon - \varepsilon^2$ $(\varepsilon > 0)$

5. $\vec{x}_5 = (0, 1, 1 - \varepsilon) \in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0 \leqslant 0 \leqslant 1$

   $(*_2)$ $0 \leqslant 1 \leqslant 1$

   $(*_3)$ $\varepsilon \leqslant 1 - \varepsilon \leqslant 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon < \frac{1}{2})$

   Высота больше: $1 - \varepsilon > \varepsilon$ $(\varepsilon < \frac{1}{2})$

6. $\vec{x}_6 = (1, 1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon + \varepsilon^2) \in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0 \leqslant 1 \leqslant 1$

   $(*_2)$ $\varepsilon \leqslant 1 - \varepsilon \leqslant 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon < \frac{1}{2})$

   $(*_3)$ $\varepsilon - \varepsilon^2 \leqslant 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \leqslant 1 - \varepsilon + \varepsilon^2$ $(2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 > 0,\ D = 4 - 8 < 0)$

   Высота больше: $1 - \varepsilon + \varepsilon^2 > 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$

7. $\vec{x}_7 = (1, \varepsilon, 1 - \varepsilon^2) \in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ ()

   $(*_2)$ $\varepsilon \leqslant \varepsilon \leqslant 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon > \frac{1}{2})$

   $(*_3)$ $\varepsilon^2 \leqslant 1 - \varepsilon^2 \leqslant 1 - \varepsilon^2$ $(\varepsilon^2 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2})$

   Высота больше: $1 - \varepsilon^2 > 1 - \varepsilon + \varepsilon^2$ $(\varepsilon < \frac{1}{2})$

8. $\vec{x}_8 = (0, 0, 1) \in P_\varepsilon$:

   $(*_1)$ $0 \leqslant 0 \leqslant 1$

   $(*_2)$ $0 \leqslant 0 \leqslant 1$

   $(*_3)$ $0 \leqslant 1 \leqslant 1$

   Высота больше: $1 > 1 - \varepsilon^2$ $(\varepsilon > 0)$

(каноническое) Задача 34

(доказано в одну сторону)

$A = \left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^{m,n}$. $P_1 \overset{\text{def}}{=} \left[\exists p \in \mathbb{R}^m \colon A^T p < 0\right]$. $P_2 \overset{\text{def}}{=} \left[\exists y \in \mathbb{R}^n \colon y \geqslant 0,\ y \neq 0,\ Ay = 0\right]$. Доказать: $\neg P_1 \Leftrightarrow P_2$

1. $e_i \overset{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} 0 & \dots & \underbrace{1}_{i} & \dots & 0 \end{Vmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow e \overset{\text{def}}{=} (e_1, ..., e_n)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ — тоже стандартное, т.е. матрица Грама в e единичная, т.е. $(\begin{Vmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{Vmatrix}) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$

2. Пусть P_2.
   (a) Тогда $\exists y \colon Ay = 0,\ y \geqslant 0,\ y \neq 0$. Обозначим столбцы матрицы $A = \begin{Vmatrix} \underline{b_1} & \dots & \underline{b_n} \end{Vmatrix}$. $y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow y = \begin{Vmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{Vmatrix}^T$ Тогда $Ay = 0 \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} \underline{b_1} & \dots & \underline{b_n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{Vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b_i} y_i \overset{(*)}{=} 0$. Условие $y \neq 0 \Rightarrow \exists i \in \overline{1,n} \colon y_i \neq 0$. Без ограничения общности это y_1. Тогда в $(*)$ перенесем всё, кроме $y_1 \underline{b_1}$ в правую часть, и поделим на $y_1 \neq 0$: $\underline{b_1} = -\frac{y_2}{y_1}\underline{b_2} - ... - \frac{y_n}{y_1}\underline{b_n}$
   (b) Рассмотрим $A^T p = \begin{Vmatrix} \underline{b_1}^T \\ \dots \\ \underline{b_n}^T \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (\underline{b_1}, p) \\ \dots \\ (\underline{b_n}, p) \end{Vmatrix}$
   (c) Предположим, что P_1, т.е. $\exists p \colon \forall i \in \overline{1,n} \hookrightarrow (\underline{b_i}, p) < 0$.
   Рассмотрим $(\underline{b_1}, p) = (-\frac{y_2}{y_1}\underline{b_2} - ... - \frac{y_n}{y_1}\underline{b_n}, p) = -\frac{y_2}{y_1}(\underline{b_2}, p) - ... - \frac{y_n}{y_1}(\underline{b_n}, p)$. Поскольку $(\underline{b_i}, p) < 0$, $\frac{y_i}{y_1} \geqslant 0$, то $(b_1, p) \geqslant 0$ — противоречие.
   (d) Значит, $\neg P_1$.

3. Пусть $\neg P_2$. Предположим, что $\neg P_1$
   (a) Выпишем $A = \begin{Vmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{Vmatrix}$ — по строкам.
   (b) Рассмотрим $Q = \{A^T p \big| p \in \mathbb{R}^m\}$. $A^T p = \begin{Vmatrix} a_1^T & \dots & a_m^T \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_m \end{Vmatrix} = a_1^T p_1 + ... + a_m^T p_m \Rightarrow$
   $Q \equiv < a_1^T, ..., a_m^T > \subseteq \mathbb{R}^n$ (линейная оболочка транспонированных строк A).
   (c) $\neg P_1 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R}^m \hookrightarrow \neg(A^T p < 0) \Leftrightarrow \forall x \in Q \hookrightarrow \neg(Q < 0)$. Определим $\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n \big| x < 0\}$. Тогда $Q \cap \mathbb{R}^n_- = \varnothing$
   (d) $\neg P_2 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n \colon y \geqslant 0,\ y \neq 0 \hookrightarrow Ay \neq 0$. Рассмотрим $Ay = \begin{Vmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (a_1^T, y) \\ \dots \\ (a_m^T, y) \end{Vmatrix}$.
   $Ay \neq 0 \Leftrightarrow \exists i \in \overline{1,m} \colon (a_i^T, y) \neq 0 \Leftrightarrow y \notin < a_1^T, ..., a_m^T >^{\perp}$. Определим $\mathbb{R}^{\geqslant}_{\neq 0} = \{x \in \mathbb{R}^n \big| x \geqslant 0 \wedge x \neq 0\}$.
   Тогда $Q^{\perp} \cap \mathbb{R}^{\geqslant}_{\neq 0} = \varnothing$
   (e) Тогда $\exists Q = < a_1^T, ..., a_m^T > \colon \begin{cases} Q \cap \mathbb{R}^n_- = \varnothing \\ Q^{\perp} \cap \mathbb{R}^{\geqslant}_{\neq 0} = \varnothing \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow}$ противоречие ???

(каноническое) Задача 35

(каноническое) Задача 36

(Тарасов, лекция 2014.04.01)

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$, $\{t_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$. Определим $\vec{r} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 : \vec{r}(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} t^4 & t^3 & t^2 & t \end{Vmatrix}^T$. Рассмотрим точки $\vec{x}_i = \vec{r}(t_i)$. Рассмотрим $G \overset{\text{def}}{=} \operatorname{conv}(\{\vec{x}_i\}_{i=1}^k)$ — выпуклую оболочку этих точек. Фиксируем $i_1 \neq i_2 \in \overline{1,k}$. Докажем, что $\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}$ — вершины G, соединенные ребром $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists$ гиперплоскость π: $(\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2} \in \pi)$ и (многогранник G лежит по одну сторону от π).

1. Определим многочлен $P(t) \overset{\text{def}}{=} (t - t_{i_1})^2 \cdot (t - t_{i_2})^2 \equiv t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$
2. Определим гиперплоскость π. $\mathbb{R}^4 \ni \vec{x} \equiv \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix}^T \in \pi \Leftrightarrow F(\vec{x}) \equiv x_1 + a_3 x_2 + a_2 x_3 + a_1 x_4 + a_0 = 0$.
3. Тогда $F(\vec{r}(t)) = P(t)$: $F(\vec{r}(t)) = F(t^4, t^3, t^2, t) = t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$
4. t_{i_1} и t_{i_2} — корни $P(t)$, откуда $P(t_{i_1}) = P(t_{i_2}) = 0$, значит, $F(\vec{x}_{i_1}) = F(\vec{x}_{i_2}) = 0$, значит, $\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2} \in \pi$
5. Фиксируем $t \in \mathbb{R}$. Тогда $F(\vec{r}(t)) = P(t) \geqslant 0$. Значит, все точки $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^k$ лежат по одну сторону от π. Значит, G лежит по одну сторону
6. Пусть t: $\vec{r}(t) \in \pi \Leftrightarrow F(\vec{r}(t)) = 0 \Leftrightarrow P(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{t_{i_1}, t_{i_2}\}$

■

(каноническое) Задача 37