# Теория и реализация языков программирования. Задание 6: Грамматики

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.10.09

## Задача 1

## Задача 2

$\Sigma \overset{\text{def}}{=} \{a, b\}$, $\Sigma^* \supset L \overset{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \big| w = w^R\}$ — язык палиндромов из $a, b$.

i. Определим КС-грамматику $\Gamma \overset{\text{def}}{=} (\{S\}, \Sigma, P, S)$, $P \overset{\text{def}}{=} \Big\{ \underbrace{S \longrightarrow \varepsilon}_{(1)}, \underbrace{S \longrightarrow aSa}_{(2)}, \underbrace{S \longrightarrow bSb}_{(3)}, \underbrace{S \longrightarrow a}_{(4)}, \underbrace{S \longrightarrow b}_{(5)} \Big\}$.

Докажем, что $L(\Gamma) = L$:

(a) $L(\Gamma) \subseteq L$. Пусть $w \in L(\Gamma) \Rightarrow S \Longrightarrow^* w$. $|w| = n$. Рассмотрим последовательность $\{w_k\}_{k=0}^{I} \subset (N \cup \Sigma)^*$ слов в выводе. $w_0 = S$, $w_I = w$. Индукцией по $k$ докажем $P(k) = \left[w_k = w_k^R, \forall i \colon w_k[i] = S \hookrightarrow i = \frac{|w_k|+1}{2}\right]$.

1. $k = 0 \Rightarrow w_k \equiv w_0 = S$. Поэтому $\exists! i = 1 \colon w_0[i] = S$. Но $1 \equiv \frac{1+1}{2}$ и $w_0^R = S^R = S = w_0 \Rightarrow P(0)$ ■
2. Пусть $P(n)$, $n < I$. Докажем, $P(n+1)$. $P(n) \Rightarrow w_n = w_n^R$, $\forall i \colon w_n[i] = S \hookrightarrow i = \frac{|w_n|+1}{2}$.
   Предположим, что $\nexists i \colon w_n[i] = S \Rightarrow w \in \Sigma^*$. Тогда ни одно правило не может быть применено, так как в левой части каждого правила $S \in N$. Но $n < I$ (это не конец вывода) $\Rightarrow$ противоречие.
   Значит, $\exists i \colon w_n[i] = S$. Но $P(n) \Rightarrow \forall i \colon w_n[i] = S \hookrightarrow i = \frac{|w_n|+1}{2}$. Поэтому $\exists! i = \frac{|w_n|+1}{2} \colon w_n[i] = S$. Значит, $w_n = xSy$, $|x| = |y|$, $x, y \in \Sigma^*$. $w_n^R = y^R S x^R$. $S$ в $w_n$ входит один раз $\Rightarrow x = y^R$.
   Рассмотрим правила (1)—(4):
   (1). $w_n = xSy \overset{(1)}{\Longrightarrow} x\varepsilon y \equiv xy = xx^R = w_{n+1}$ — палиндром: $(xx^R)^R = x^{R^R} x^R = xx^R$. $w_{n+1} = xy \in \Sigma^* \Rightarrow \forall i \hookrightarrow w_{n+1}[i] \neq S \Rightarrow P(n+1)$ ■
   (2). $w_n = xSx^R \overset{(2)}{\Longrightarrow} xaSax^R = w_{n+1}$. $w_{n+1}^R = x^{R^R} a^R S^R a^R x^R = xaSax^R \equiv w_{n+1}$. $a \neq S \Rightarrow \exists! i \colon w_{n+1} = S$, $i = \frac{|w_n|+1}{2} + 1 = \frac{|w_n|+3}{2} \equiv \frac{|w_{n+1}|+1}{2} \Rightarrow P(n+1)$ ■.
   (3). $w_n = xSx^R \overset{(3)}{\Longrightarrow} xbSbx^R = w_{n+1}$. $w_{n+1}^R = x^{R^R} b^R S^R b^R x^R = xbSbx^R \equiv w_{n+1}$. $b \neq S \Rightarrow \exists! i \colon w_{n+1} = S$, $i = \frac{|w_n|+1}{2} + 1 = \frac{|w_n|+3}{2} \equiv \frac{|w_{n+1}|+1}{2} \Rightarrow P(n+1)$ ■.
   (4). $w_n = xSx^R \overset{(4)}{\Longrightarrow} xax^R = w_{n+1}$. $w_{n+1}^R = x^{R^R} a^R x^R = xax^R \equiv w_{n+1}$. $w_{n+1} = xax^R \in \Sigma^* \Rightarrow \forall i \hookrightarrow w_{n+1}[i] \neq S \Rightarrow P(n+1)$ ■
   (5). $w_n = xSx^R \overset{(5)}{\Longrightarrow} xbx^R = w_{n+1}$. $w_{n+1}^R = x^{R^R} b^R x^R = xbx^R \equiv w_{n+1}$. $w_{n+1} = xbx^R \in \Sigma^* \Rightarrow \forall i \hookrightarrow w_{n+1}[i] \neq S \Rightarrow P(n+1)$ ■

   Итак, доказано $\forall k \in \overline{0, I} \hookrightarrow P(k) \Rightarrow P(I) \Rightarrow w \equiv w_I \overset{P(I)}{=} w_I^R \equiv w^R \Rightarrow w \in L$ ■

(b) $L \subseteq L(\Gamma)$. Пусть $w \in L \Rightarrow w^R = w$. $|w| = n$. Рассмотрим $n \mod 2$:

0. $n \mod 2 = 0 \Rightarrow w = xy$, $|x| = |y|$. $w = w^R \Rightarrow xy = y^R x^R$. Поскольку $|x| = |y|$, $y = x^R \Rightarrow \boxed{w = xx^R}$
0. $n \mod 2 = 1 \Rightarrow w = x\sigma y$, $|x| = |y|$, $\sigma \in \Sigma$. $w = w^R \Rightarrow x\sigma y = y^R \sigma^R x^R = y^R \sigma x^R$. Так как $|x| = |y|$, $y = x^R \Rightarrow \boxed{w = x\sigma x^R}$

Значит, $L = \{xx^R, xax^R, xbx^R \big| x \in \Sigma^*\}$.

Построим вывод $S \Longrightarrow^* xSx^R$:

a. Пусть $x = \varepsilon$. $S \overset{(1)}{\Longrightarrow} \varepsilon = \varepsilon\varepsilon^R = w \Rightarrow w \in L(\Gamma)$ ■.
b. Иначе $x = x_1 ... x_m$, $\forall i \in \overline{1, m} \hookrightarrow x_i \in \Sigma$. Рассмотрим символы $x_m, ..., x_1$. Применим правило (2), если $x_i = a$ и (3) иначе. Примененное правило обозначим за $R(i)$ Получим $S \overset{(R(m))}{\Longrightarrow} x_m S x_m \Longrightarrow ... \overset{(R(1))}{\Longrightarrow} x_1 ... x_m S x_m ... x_1$.

Теперь покажем, как получить $w$:

1. $w = xx^R$. Было получено $S \Longrightarrow^* xSx^R$. Тогда $S \Longrightarrow^* xSx^R \overset{(1)}{\Longrightarrow} xx^R$ ■
2. $w = xax^R$. Было получено $S \Longrightarrow^* xSx^R$. Тогда $S \Longrightarrow^* xSx^R \overset{(4)}{\Longrightarrow} xax^R$ ■
3. $w = xbx^R$. Было получено $S \Longrightarrow^* xSx^R$. Тогда $S \Longrightarrow^* xSx^R \overset{(5)}{\Longrightarrow} xbx^R$ ■

Получаем $w \in L(\Gamma)$.

$\boxed{\text{Ответ: } \Gamma \overset{\text{def}}{=} (\{S\}, \Sigma, P, S),\ P \overset{\text{def}}{=} \big\{S \longrightarrow \varepsilon \big| aSa \big| bSb \big| a \big| b \big\}.}$

ii. Определим грамматику $\overline{\Gamma} = \{\{S, D\}, \Sigma, \overline{P}, S\}$, $\overline{P} = \{D \longrightarrow \underbrace{aD}_{(1)} \,|\, \underbrace{bD}_{(2)} \,|\, \underbrace{\varepsilon}_{(3)},\ S \longrightarrow \underbrace{aDb}_{(4)} | \underbrace{bDa}_{(5)} | \underbrace{aSa}_{(6)} | \underbrace{bSb}_{(7)}\}$.

*Пояснение: $D$ порождает $\Sigma^*$. $S$ порождает непалиндромы. Если первый и последний символ непалиндрома различны, то между ними может быть все, что угодно, а если они одинаковые, то между ними должен быть непалиндром.*

1. Докажем $D \Longrightarrow^* w \in \Sigma \Leftrightarrow w \in \Sigma^*$, что равносильно $w \in \Sigma^* \Rightarrow D \Longrightarrow^* w$. Если $w = \varepsilon$, то применим $D \overset{(3)}{\Longrightarrow} \varepsilon \equiv w$. Иначе $w = w_1...w_n$, $\forall i \in \overline{1, n} \hookrightarrow w_i \in \Sigma$. Рассмотрим символы $w_1, ..., w_n$, если $w_i = a$, применим (1), иначе применим (2). Примененное правило обозначим за $P(i)$. Тогда $D \overset{P(1)}{\Longrightarrow} w_1 D \overset{P(2)}{\Longrightarrow} ... \overset{P(n)}{\Longrightarrow} w_1...w_n D \overset{(3)}{\Longrightarrow} w_1...w_n \equiv w$.
2. Рассмотрим вывод в $\overline{\Gamma}$ (из $S$). Заметим, что правила (6), (7) не изменяют количество вхождений $S$ (оно остается равным 1). Правила (4) и (5) уменьшают количество $S$ на 1. Поэтому в начале вывода несколько применений правил (6) и (7), затем применение (4) или (5).
3. Правила (6) и (7) сохраняют количество символов перед и после $S \Rightarrow$ после применений этих правил перед и после $S$ одинаковое число символов.
4. Докажем $L(\overline{\Gamma}) = \overline{L}$:
   1. $w \in L(\overline{\Gamma})$. Рассмотрим вывод $w$. Как было показано, перед применением правил (6) или (7) слово имеет вид $xSy$, $|x| = |y|$, $x, y \in \Sigma^*$. Применим (4), получим $xaDby$. Пусть $D$ порождает $w_D \in \Sigma^*$. Тогда получим $w = xaw_Dby \in \Sigma^*$. Но $|x| = |y|$, поэтому $w[|x|+1] = a \neq b = w[|w| - (|x|+1)+1] \Rightarrow w \notin L \Rightarrow w \in \overline{L}$. Аналогично при применении (5). ■
   2. $w \in \overline{L}$. $n \overset{\text{def}}{=} |w|$. Пусть $i = \min\{i \in \overline{1, n} \big| w[i] \neq w[n-i+1]\}$ *(первое несовпадение)*.
   Пусть $w = xaw_Dbx^R$ (случай $w = xbw_Dax^R$ аналогичный). Рассмотрим символы $x = x_1...x_k$. Если $x_i = a$, применим правило (6), если $x_i = b$, применим (7). Примененное правило обозначим за $P(i)$. Получаем $S \overset{P(1)}{\Longrightarrow} x_1 S x_1 \overset{P(2)}{\Longrightarrow} ... \overset{P(k)}{\Longrightarrow} x_1...x_k S x_k...x_1 \equiv xSx^R \overset{(4)}{\Longrightarrow} xaDbx^R$. В случае $w = xbw_Dax^R$ нужно последним применить (5) вместо (4). $w_D \in \Sigma^*$. В ii1 было показано, что $D \Longrightarrow^* w_D$. Поэтому $S \overset{\text{см. ранее}}{\Longrightarrow^*} xaDbx^R \Longrightarrow^* xaw_Dx^R$.

$\boxed{\text{Ответ: } \overline{\Gamma} = \{\{S, D\}, \Sigma, \overline{P}, S\},\ \overline{P} = \{D \longrightarrow aD|bD|\varepsilon,\ S \longrightarrow aSa|bSb|aDb|bDa\}.}$

# Задача 3

$\Sigma \overset{\text{def}}{=} \{a, b\}$. $\Sigma^* \supset L \overset{\text{def}}{=} L^= \overset{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \big| |w|_a = |w|_b\}$. КС-грамматика $\Gamma = \{N, \Sigma, P, S\}$,
$P \overset{\text{def}}{=} \{\underbrace{S \longrightarrow SS}_{(1)}, \underbrace{S \longrightarrow aSb}_{(2)}, \underbrace{S \longrightarrow bSa}_{(3)}, \underbrace{S \longrightarrow \varepsilon}_{(4)}\}$.
Докажем, что $L(\Gamma) = L^=$:

- $L(\Gamma) \subset L$. $w \in L(\Gamma) \Rightarrow S \Longrightarrow^* w$. Пусть $\{w_k\}_{k=0}^{I} \subset (N \cup \Sigma)^*$ — последовательность слов при выводе.
  $P(k) \overset{\text{def}}{=} \big[|w_k|_a = |w_k|_b\big]$. Докажем, что $\forall k \in \overline{0, I} \hookrightarrow P(k)$:
  1. $k = 0 \Rightarrow w_k \equiv w_0 = S$. $|w_k|_a = |S|_a = 0 = |S|_b = |w_k|_b \Rightarrow P(0)$.
  2. $P(n) \Rightarrow |w_n|_a = |w_n|_b$. $n < I$. Пусть $w_n \overset{(i)}{\Longrightarrow} w_{n+1}$. Каждое из правил (1)—(4) сохраняет равенство между $|w|_a$ и $|w|_b$:
  (1) и (4) не изменяют их, а (2) и (3) увеличивают каждое на 1 $\Rightarrow |w_{n+1}|_a = |w_{n+1}|_b \Rightarrow P(n+1)$

  Получаем $P(I) \Rightarrow |w|_a \equiv |w_I|_a \overset{P(I)}{=} |w_I|_b \equiv |w|_b \Rightarrow w \in L^=$.
- $L \subset L(\Gamma)$.
  Определим $S\colon \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{Z}$: $w \in \Sigma^* \Rightarrow S(w) = |w|_a - |w|_b$. $w \in L^= \Leftrightarrow |w|_a = |w|_b \Leftrightarrow S(w) = 0$. $|w| = n$. $w \in \Sigma^* \Rightarrow |w| = |w|_a + |w|_b = 2|w|_a \Rightarrow |w|$ — четно $\Rightarrow n = 2m$.

  Пусть $L \ni w = axa$. Тогда $0 = S(w) = |axa|_a - |axa|_b = 2 + S(x) \Rightarrow S(x) = -2$. Отсюда следует, что $|x| \geqslant 0$. Пусть $|x| = t$, $x = x_1...x_t, \forall i \in \overline{1, t} \hookrightarrow x_i \in \Sigma$. Обозначим $f(t)\colon \overline{1, t} \longrightarrow \mathbb{Z}$: $f(i) = S(ax_1...x_i)$. Тогда $f(0) \equiv S(a) = 1$, $f(t) \equiv S(ax_1...x_t) = 1 + S(x) = 1 - 2 = -1$. Заметим, что $|f(t+1) - f(t)| = 1$ *(«аналог непрерывности»)*. Поэтому $\exists i \in \overline{1, t}$: $f(t) = 0$ *«принимает промежуточное значение»*. Получаем, что $w = ax_1...x_ix_{i+1}...x_ta = w_lw_r$. Поскольку $0 = S(w) = S(w_l) + S(w_r)$ и $S(w_l) \equiv f(i) = 0$, $S(w_r) = 0$. $S(w_l) = S(w_r) = 0 \Rightarrow w_l, w_r \in L$. Поскольку $|w_l|, |w_r| \geqslant |a| = 1, |w_l|, |w_r| \leqslant |w| - 1$. Но $w, w_l, w_r \in L \Rightarrow |w|, |w_l|, |w_r|$ — четные. значит, $|w_l|, |w_r| \leqslant |w| - 2$. Итак, $w = axa \in L \Rightarrow w = w_lw_r, |w_l|, |w_r| \in \overline{1, |w| - 2}, w_l, w_r \in L$. Аналогично доказываем для $L \ni w = bxb$. Получаем $\boxed{w = \sigma x \sigma \in L \Rightarrow w = w_lw_r, |w_l|, |w_r| \in \overline{1, |w| - 2}, w_l, w_r \in L}$.

  $P(m) \overset{\text{def}}{=} \big[\forall w \in L\colon |w| = 2m \hookrightarrow w \in L(\Gamma)\big]$. Докажем $\forall i \geqslant 0 \hookrightarrow P(i)$:
  1. $m = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$. $S \overset{(4)}{\Longrightarrow} \varepsilon = w \Rightarrow w \in L(\Gamma)$
  2. Пусть $P(m)$. Докажем $P(m+1)$. Рассмотрим $w \in L$: $|w| = 2(m+1) > 2$. Значит, $w = \sigma_1 x \sigma_2$. Заметим, что $|x| = 2m$. Рассмотрим варианты для $(\sigma_1, \sigma_2)$:
     1. $\sigma_1 = a, \sigma_2 = b$. Тогда $w \in L \Rightarrow 0 = S(w) = |axb|_a - |axb|_b = 1 + |x|_a - |x|_b - 1 = S(x)$. Как было замечено, $|x| = 2m$, поэтому, по предположению индукции, $S \overset{P(m)}{\Longrightarrow^*} x$. Но $S \overset{(2)}{\Longrightarrow} aSb \overset{P(m)}{\Longrightarrow^*} axb \Rightarrow w \in L(\Gamma)$

2. $\sigma_1 = b, \sigma_2 = a$. Аналогично получаем $w = bxa$, $x \in L(\Gamma) \Rightarrow S \overset{(3)}{\Longrightarrow} bSa \overset{P(m)}{\Longrightarrow^*} bxa \Rightarrow w \in L(\Gamma)$

3, 4. $\sigma \overset{\text{def}}{=} \sigma_1 = \sigma_2$. Разобьем слово $w = \sigma x \sigma$ на *подслова* $w = w_1 ... w_k$, $\forall i \in \overline{1, k} \hookrightarrow w_i \in \Sigma^* \cap L$, $|w_i| \leqslant |w| - 2$, $w_i[1] \neq w_i[|w_i|]$.
Для этого воспользуемся утверждением в рамочке (см. выше): разобьем $w = w_l w_r$, потом, если первый и последний символы $w_l$ совпадают, повторим для него (возможно, так как $w_l \in L$ по построению): $w_l = w_{ll} w_{lr}$, аналогично для $w_r$. Всего разбиений будет не больше $|w|$, так как части разбиения непустые (см. утверждение) $\Rightarrow$ алгоритм конечен. Каждое разбиение дает подслова из $L$ — также см. утверждение. И части разбиения не длиннее исходного слова, а также $w_l, w_r \leqslant |w| - 2$. Значит, $w_i \leqslant |w| - 2$. Поэтому $S \overset{P(m)}{\Longrightarrow^*} w_l$, $S \overset{P(m)}{\Longrightarrow^*} w_r$ — по предположению индукции. Покажем, как вывести $w$ из $S$: воспользуемся правилом (1) $k-1$ раз: $S \overset{(1)}{\Longrightarrow} SS \overset{(1)}{\Longrightarrow} ... \overset{(1)}{\Longrightarrow} S^k$. Далее воспользуемся выводами $w_i$: $S^k \overset{\text{вывод } w_1}{\Longrightarrow^*} w_1 S^{k-1} \Longrightarrow^* ... \overset{\text{вывод } w_k}{\Longrightarrow^*} w_1 ... w_k \equiv w \Rightarrow w \in L(\Gamma)$

# Задача 4

$\Sigma \overset{\text{def}}{=} \{a, b\}$, $\Sigma^* \supset L \overset{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \big| |w|_b \leqslant |w|_a\} \equiv \{w \in \Sigma^* \big| S(w) \geqslant 0\}$ *(определение $S(w)$ см. в задаче 3).*
Определим КС-грамматику $\Gamma = \{\{S\}, \Sigma, P, S\}$,
$P \overset{\text{def}}{=} \{\underbrace{S \longrightarrow SS}_{(1)}, \underbrace{S \longrightarrow aSb}_{(2)}, \underbrace{S \longrightarrow bSa}_{(3)}, \underbrace{S \longrightarrow \varepsilon}_{(4)}, \underbrace{S \longrightarrow aS}_{(5)}\}$
(добавим в грамматику из предыдущей задачи правила $S \longrightarrow Sa$ и $S \longrightarrow aS$).
Докажем, что $L(\Gamma) = L$:

- $L(\Gamma) \subset L$. $w \in L(\Gamma) \Rightarrow S \Longrightarrow^* w$. Пусть $\{w_k\}_{k=0}^{I} \subset (N \cup \Sigma)^*$ — последовательность слов при выводе.
  $P(k) \overset{\text{def}}{=} \big[S(w_k) \geqslant 0\big]$. Докажем, что $\forall k \in \overline{0, I} \hookrightarrow P(k)$:

  1. $k = 0 \Rightarrow w_k \equiv w_0 = S$. $|w_k|_a = |S|_a = 0 = |S|_b = |w_k|_b \Rightarrow P(0)$.

  2. $P(n) \Rightarrow S(w_n) \geqslant 0$. $n < I$. Пусть $w_n \overset{(i)}{\Longrightarrow} w_{n+1}$. Каждое из правил (1)—(4) не уменьшает разницу $|w|_a - |w|_b \equiv S(w)$: (1) и (4) не изменяют операнды, (2) и (3) увеличивают каждое на 1, (5) увеличивает разницу на 1$\Rightarrow S(w_{n+1}) \geqslant 0 \Rightarrow P(n+1)$

  Получаем $P(I) \Rightarrow S(w) \equiv S(w_I) \geqslant 0 \Rightarrow w \in L$.

- $L \subset L(\Gamma)$. Докажем, что $\forall w \in L \, \exists w^= \in L^=$: $w$ — слово $w_0$ с добавленными в некоторые позиции символами $a$. Действительно, рассмотрим $w$, удалим из него $S(w)$ любых символов $a$, получим $w_0$, $S(w_0) = 0 \Rightarrow w_0 \in L^=$, и $w$ получается из $w_0$ добавлением символов $a$ (в те же позиции, с которых они были удалены).

  Фиксируем $w \in L$, $|w| = n$; $w^=$ найдем из доказанного утверждения выше. $|w^=| = n^=$, $w^= \in L^= \Rightarrow \exists \{x_i\}_{i=0}^{I} \subset \{S\} \cup \Sigma^*$ — последовательность слов при выводе слова $w^=$ в грамматике $\Gamma^=$ *из предыдущей задачи*, $\{p_i\}_{i=1}^{I}$ — примененные правила.
  Определим $f \colon \overline{1, n^=} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$: $f(i)$ — количество букв $a$, которые нужно добавить после $i$-го символа $w^=$, чтобы получить после всех добавлений $w$, то есть, $w = w_1^= a^{f(1)} w_2^= a^{f(2)} ... w_n^= a^{f(n^=)}$.

  Модифицируем вывод, добавив буквы $a$.

  Заметим, что если в $\Gamma$ было применено правило $\alpha_1 \alpha_2 S \alpha_3 \Longrightarrow \alpha_1 \alpha_2 \beta \alpha_3$, то после добавления символа $a$ то же правило из $\Gamma$ также может быть применено: $\alpha_1 a \alpha_2 S \alpha_3 \Longrightarrow \alpha_1 a \alpha_2 \beta \alpha_3$, аналогично в случае, где $a$ добавлено после $S$. Иными словами, добавление букв $a$ оставляет возможность применить те же правила к тем же символам $S$ в последующих шагах вывода, причем результатом будет слово с добавленной буквой $a$. Такие же рассуждения применимы к добавлению многих букв $a$.

  Каждый символ $w_i^=$ был получен из правил (2) или (3) грамматики $\Gamma^=$ (остальные правила не добавляют терминалов). Пусть это произошло на $j(i)$-м шаге вывода. Покажем, как модифицировать этот шаг, чтобы после $i$-го символа $w^=$ добавить $f(i)$ букв $a$:

  1. $w_i^= = a$, $p_{j(i)} = (2)$. То есть $x_{j(i)-1} \equiv \alpha S \beta \overset{(2)}{\Longrightarrow} \alpha \underline{a} S b \beta \equiv x_{j(i)}$. Заменим это на
  $\alpha S \beta \overset{(2)}{\Longrightarrow} \alpha \underline{a} S b \beta \underbrace{\overset{(5)}{\Longrightarrow} \alpha \underline{a} a S b \beta \overset{(5)}{\Longrightarrow} ... \overset{(5)}{\Longrightarrow} \alpha \underline{a} a^{f(i)} S b \beta}_{f(i) \text{ раз}}$ — верное применение правил в $\Gamma$.

  2. $w_i^= = a$, $p_{j(i)} = (3)$. То есть $x_{j(i)-1} \equiv \alpha S \beta \overset{(3)}{\Longrightarrow} \alpha b S \underline{a} \beta \equiv x_{j(i)}$. Заменим это на
  $\alpha S \beta \overset{(1)}{\Longrightarrow} \alpha S S \beta \overset{(2)}{\Longrightarrow} \alpha b S \underline{a} S \beta \underbrace{\overset{(5)}{\Longrightarrow} \alpha b S \underline{a} a S \beta \overset{(5)}{\Longrightarrow} ... \overset{(5)}{\Longrightarrow} \alpha b S \underline{a} a^{f(i)} S \beta}_{f(i) \text{ раз}} \overset{(4)}{\Longrightarrow} \alpha b S \underline{a} a^{f(i)} \beta$ — верное применение правил в $\Gamma$.

  3. $w_i^= = b$, $p_{j(i)} = (3)$. То есть $x_{j(i)-1} \equiv \alpha S \beta \overset{(3)}{\Longrightarrow} \alpha \underline{b} S a \beta \equiv x_{j(i)}$. Заменим это на
  $\alpha S \beta \overset{(3)}{\Longrightarrow} \alpha \underline{b} S a \beta \underbrace{\overset{(5)}{\Longrightarrow} \alpha \underline{b} a S a \beta \overset{(5)}{\Longrightarrow} ... \overset{(5)}{\Longrightarrow} \alpha \underline{b} a^{f(i)} S a \beta}_{f(i) \text{ раз}}$ — верное применение правил в $\Gamma$.

4. $w_i^= = b$, $p_{j(i)} = (2)$. То есть $x_{j(i)-1} \equiv \alpha S\beta \xRightarrow{(2)} \alpha aS\underline{b}\beta \equiv x_{j(i)}$. Заменим это на $\alpha S\beta \xRightarrow{(1)} \alpha SS\beta \xRightarrow{(3)} \alpha aS\underline{b}S\beta \underbrace{\xRightarrow{(5)} \alpha aS\underline{b}aS\beta \xRightarrow{(5)} ... \xRightarrow{(5)} \alpha aS\underline{b}a^{f(i)}S\beta}_{f(i) \text{ раз}} \xRightarrow{(4)} \alpha aS\underline{b}a^{f(i)}\beta$ — верное применение правил в $\Gamma$.

Дальнейшее применение правил (после этой измененной части) останется возможным (см. выше), результатом будет «старый» результат, с $f(i)$ буквами $a$ после соответствующего символа (также показано ранее).
Таким образом получено слово $\acute{w} = w_1^= ... w_i^= a^{f(i)} ... w_{n^=}^=$, получен его вывод в $\Gamma$. Применим такие же рассуждения для остальных символов, получим вывод $w$ в $\Gamma \Rightarrow w \in L(\Gamma)$ ■

$\boxed{\text{Ответ: } \Gamma = \{\{S\}, \Sigma, P, S\},\ P = \big\{S \longrightarrow SS\big|aSb\big|bSa\big|\varepsilon\big|aS\big\}.}$

# Задача 5