Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 2: Арифметические операции и линейные рекуррентные последовательности

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.02.20

Упражнение 3

Определим $A_d \overset{\text{def}}{=} \left\| \begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{array} \right\|$

Докажем по индукции $P(d) \overset{\text{def}}{=} \left[\det(A_d - \lambda E) = (-1)^d(\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - c_2\lambda^{d-2} - ... - c_{d-1}\lambda - c_d)\right]$

1. База. $d = 3 \Rightarrow \det(A_3 - \lambda E) = \left| \begin{array}{ccc} (c_1 - \lambda) & c_2 & c_3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{array} \right| = c_1\lambda^2 - \lambda^3 + c_3 + c_2\lambda = (-1)^3(\lambda^3 - c_1\lambda^2 - c_2\lambda - c_3) \Rightarrow P(3)$ ■

2. Пусть $\underline{P(d-1)}$. Рассмотрим $\det(A_d - \lambda E) = \left| \begin{array}{ccccc} (c_1 - \lambda) & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{array} \right| \boxed{=}$.

   Разложим по последнему столбцу: $\boxed{=} - \lambda \underbrace{\left| \begin{array}{cccc} (c_1 - \lambda) & c_2 & ... & c_{d-1} \\ 1 & -\lambda & ... & 0 \\ & ... & & \\ 0 & 0 & ... & -\lambda \end{array} \right|}_{\det(A_{d-1} - \lambda E)} + (-1)^{d+1} c_d \underbrace{\left| \begin{array}{ccccc} 1 & -\lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & ... & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{array} \right|}_{=1,\ \text{верхн.-треуг.}} \overset{P(d-1)}{=}$

   $\overset{P(d-1)}{=} -\lambda(-1)^{d-1}(\lambda^{d-1} - c_1\lambda^{d-2} - ... - c_{d-2}\lambda - c_{d-1}) - (-1)^d c_d = (-1)^d(\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - ... - c_{d-1}\lambda - c_d)$. Получаем $\underline{P(d)}$ ■

Задача 1*

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ЛРП порядка d: $a_n = \sum\limits_{i=1}^{d} c_i a_{n-i}$. Выпишем матрицу $A = \left\| \begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{array} \right\|$. Определим $\vec{a_n} = \left\| \begin{array}{c} a_n \\ a_{n-1} \\ ... \\ a_{n-d+1} \end{array} \right\|$. Тогда $\vec{a_n} = A^{n-d}\vec{g}_d$. Обозначим $\vec{a} = \vec{g}_d$. По условию существуют d различных корней $\lambda \in \{\lambda_1, ..., \lambda_d\}$ многочлена $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$. Значит, существует матрица $S = \left\| \begin{array}{ccc} s_{11} & ... & s_{1d} \\ ... & & ... \\ s_{d1} & ... & s_{dd} \end{array} \right\|$, такая что ее i-й столбец является собственным вектором $\vec{h}_i$ матрицы A, соответствующим собственному значению λ_i, и $A' = S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_d)$. S^{-1} существует, так как $\vec{h}_i$ — линейно независимы. Выразим $A = SA'S^{-1}$,

рассмотрим $A^n = \underbrace{SA'\cancelto{0}{S^{-1}\cdot S}\,A'S^{-1}\cdot ... \cdot SA'\cancelto{0}{S^{-1}\cdot S}\,A'S^{-1}}_{n} = SA'^n S^{-1}$. Определим $\vec{\xi} \overset{\text{def}}{=} \vec{e}_1 = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{array} \right\| \in \mathbb{R}^d$. Заметим, что $\vec{a}_n = \vec{\xi}^T \vec{g}_n$, откуда $a_n = \vec{\xi}^T S A'^{n-d} S^{-1} \vec{a}$. Найдем $\vec{\xi}^T S = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & ... & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} s_{11} & ... & s_{1d} \\ ... & & ... \\ s_{d1} & ... & s_{dd} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1d} \end{array} \right\|$, строка

$\vec{\xi}^T S A'^{n-d} = \left\| \begin{array}{cccc} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1d} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1^{n-d} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-d} & ... & 0 \\ & & ... & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_d^{n-d} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda_1^{n-d} s_{11} & ... & \lambda_d^{n-d} s_{1d} \end{array} \right\|$,

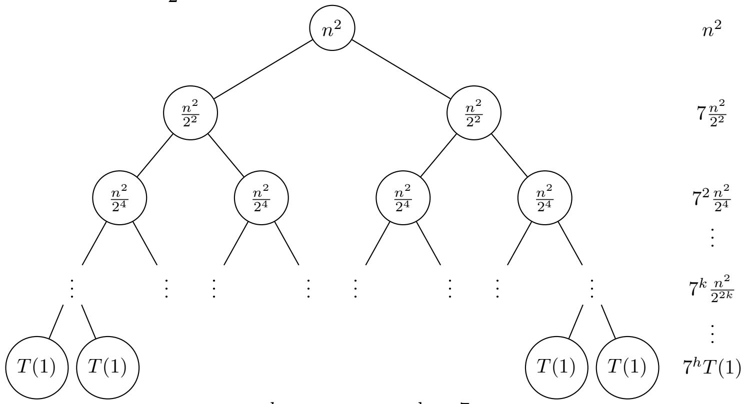
i-й элемент этой строки $(\vec{\xi}^T S A'^{n-d})_i = \lambda_i^{n-d} s_{1i}$

Найдем $S^{-1}\vec{a} = \left\| \begin{array}{ccc} s'_{11} & \dots & s'_{d1} \\ \dots & & \dots \\ s'_{1d} & \dots & s'_{dd} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} a_d \\ a_{d-1} \\ \dots \\ a_1 \end{array} \right\|$ (s'_{ij} — элементы матрицы S^{-1}), i-й элемент в этом столбце равен $(S^{-1}\vec{a})_i = \sum\limits_{j=1}^{d} a_{d-j+1}s'_{ji}$

Получаем $a_n = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-d} s_{1i} \sum\limits_{j=1}^{d} a_{d-j+1}s'_{ji} \stackrel{?}{=} \sum\limits_{i=1}^{d} k_i\lambda_i^n$. Это равенство верно: в случае $\lambda_i = 0$ можно взять любое k_i (например, $k_i = 0$), иначе — $k_i = \lambda_i^{-d} s_{1i} \sum\limits_{j=1}^{d} a_{d-j+1}s'_{ji}$ ■

(каноническое) Задача 6

$T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + f(n)$, $f(n) = O(n^2)$. Дерево рекурсии:



Высота дерева $h = \log_2 n$.

$T(n) = \sum\limits_{k=0}^{h-1} 7^k f(\frac{n}{2^k}) + 7^hT(1) \boxed{\leqslant}$.

Из определения O $\exists C > 0\, \exists n_0 \colon \forall n \geqslant n_0\, f(n) \leqslant Cn^2$, откуда первая сумма $\sum\limits_{k=0}^{h-1} 7^k f(\frac{n^2}{2^{2k}}) \leqslant Cn^2 \sum\limits_{k=0}^{h-1} (\frac{7}{4})^k = Cn^2\frac{(7/4)^{h-1}-1}{7/4-1} = C_1n^2((7/4)^{\log_2 n} - C_2) = C_1n^2n^{\log_2 \frac{7}{4}} - C_3n^2 = C_1n^{\log_2 7} - C_3n^2$. Второе слагаемое $7^hT(1) = 7^{\log_2 n}T(1) = Cn^{\log_2 7}$

Поэтому $T(n) \leqslant n^{\log_2 7} - C_5n^2$

Оценка снизу $T(n) \geqslant 7^hT(1) = O(n^{\log_2 7})$, откуда

Ответ: $\boxed{T(n) = \Theta(n^{\log_2 7})}$

(каноническое) Задача 7

Вход: точки $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$.

Алгоритм: считаем массив расстояний $r_i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ *(можно r_i^2)*. Ищем медиану r_m в массиве за $O(n)$

Ответ: r_m *(r_{m+1}?)*.

(каноническое) Задача 9

Пусть $\Sigma = \{\underbrace{0}_{\sigma_0}, \underbrace{1}_{\sigma_1}, \underbrace{2}_{\sigma_2}\}$, $\Sigma^* \supset G = \{w \big| \exists n \colon w = w_1 ... w_n, \underbrace{\forall i \in \overline{1, n-1} \hookrightarrow |w_i - w_{i+1}|}_{(*)} \leqslant 1\}$. Пусть $g_n = |\{w \in L \big| |w| = n\}|$ — количество слов длины n в языке G. Определим $g_n^i = |\{w \in G \big| |w| = n,\, w_n = \sigma_i\}|$ — количество слов длины n из G, оканчивающихся на i-й символ. Поскольку каждое слово оканчивается на один из символов σ_i, получаем $g_n = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$.

1. Найдем рекуррентное соотношение для последовательностей g_n^i. Получим слово $w \in G$ длины $n+1$: $w = w_1 ... w_n w_{n+1}$. Поскольку слово из языка, для него верно $(*)$. Но это условие верно и для подслова $w_1 ... w_n$. Рассмотрим последний символ слова w — w_{n+1}:

   (a) $w_{n+1} = 0$. Но тогда предпоследний символ слова w — w_n может быть 0 либо 1 для выполнения $(*)$. Слово $w_1 ... w_n$ может быть получено g_n^0 и g_n^1 способами соответственно. Поэтому количество способов получить w в этом случае $g_{n+1}^0 = g_n^0 + g_n^1$ $(**)$.

   (b) $w_{n+1} = 1$. Тогда $w_n \in \{0, 1, 2\}$, и $g_{n+1}^1 = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$.

   (c) $w_{n+1} = 2$. Тогда $w_n \in \{1, 2\}$, и $g_{n+1}^2 = g_n^1 + g_n^2$.

2. Определим вектор $\mathbb{R}^3 \ni \vec{g_n} = \left\| \begin{array}{c} g_n^0 \\ g_n^1 \\ g_n^2 \end{array} \right\|$. Определим матрицу $A \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|$.

   Снова рассмотрим соотношения $\begin{cases} 1a \\ 1b \\ 1c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_{n+1}^0 = g_n^0 + g_n^1 \\ g_{n+1}^1 = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2 \\ g_{n+1}^2 = g_n^1 + g_n^2 \end{cases}$.

   Заметим, что в матричном виде они записываются как $\vec{g_{n+1}} = A\vec{g_n}$ $(***)$

3. Найдем $g_1^0 = g_1^1 = g_1^2 = 1$, так как слово из одного символа удовлетворяет $(*)$. Определим $\vec{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\|$.

   Тогда, применяя $(***)$ *(доказывается тривиально по индукции)* получаем $\vec{g_n} = A^{n-1}\vec{\xi}$

4. $g_n = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$. Но это равно $g_n = (\vec{\xi}, A^{n-1}\vec{\xi}) = \vec{\xi}^T A^{n-1}\vec{\xi}$

5. Найдем ОНБ, в котором A имеет диагональный вид

   (a) Характеристический многочлен $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}(1-\lambda) & 1 & 0\\ 1 & (1-\lambda) & 1\\ 0 & 1 & (1-\lambda)\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3-2(1-\lambda)=(1-\lambda)\cdot(1+\lambda^2-2\lambda-2)=(1-\lambda)\cdot(\lambda^2-2\lambda-1)$. Корни характеристического уравнения $\lambda=1$ и $\lambda\in\frac{2\pm\sqrt{4\cdot 2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$. Далее ищем собственные векторы.

   (b) $(\lambda=\lambda_1=1)$. $A-1\cdot E=\left\|\begin{matrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{matrix}\right\|\sim\left\|\begin{matrix}1&0&1\\0&1&0\end{matrix}\right\|$, откуда $\vec{h}_1^0=\left\|\begin{matrix}-1&0&1\end{matrix}\right\|^T$, $\vec{h}_1=\left\|\begin{matrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\|$

   (c) $(\lambda=\lambda_2=1+\sqrt{2})$. $A-(1+\sqrt{2})\cdot E=\left\|\begin{matrix}-\sqrt{2}&1&0\\1&-\sqrt{2}&1\\0&1&-\sqrt{2}\end{matrix}\right\|\sim\left\|\begin{matrix}1&-\sqrt{2}&1\\-\sqrt{2}&1&0\\0&1&-\sqrt{2}\end{matrix}\right\|\sim\left\|\begin{matrix}1&-\sqrt{2}&1\\0&1&-\sqrt{2}\end{matrix}\right\|\sim$
   $\sim\left\|\begin{matrix}1&-\sqrt{2}&1\\0&1&-\sqrt{2}\end{matrix}\right\|\sim\left\|\begin{matrix}1&0&-1\\0&1&-\sqrt{2}\end{matrix}\right\|$, откуда $\vec{h}_2^0=\left\|\begin{matrix}1&\sqrt{2}&1\end{matrix}\right\|^T$, $\vec{h}_2=\left\|\begin{matrix}1/2\\1/\sqrt{2}\\1/2\end{matrix}\right\|\perp\vec{h}_1$

   (d) $(\lambda=\lambda_3=1-\sqrt{2})$. $A-(1-\sqrt{2})\cdot E=\left\|\begin{matrix}\sqrt{2}&1&0\\1&\sqrt{2}&1\\0&1&\sqrt{2}\end{matrix}\right\|\sim\left\|\begin{matrix}1&\sqrt{2}&1\\\sqrt{2}&1&0\\0&1&\sqrt{2}\end{matrix}\right\|\sim\left\|\begin{matrix}1&\sqrt{2}&1\\0&1&\sqrt{2}\end{matrix}\right\|\sim\left\|\begin{matrix}1&0&-1\\0&1&\sqrt{2}\end{matrix}\right\|$,
   откуда $\vec{h}_3^0=\left\|\begin{matrix}1&-\sqrt{2}&1\end{matrix}\right\|$, $\vec{h}_3=\left\|\begin{matrix}1/2\\-1/\sqrt{2}\\1/2\end{matrix}\right\|\perp\vec{h}_1,\vec{h}_2$

   Получаем $S\overset{\text{def}}{=}\left\|\begin{matrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&1/2&1/2\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&1/2&1/2\end{matrix}\right\|$ — ортогональная матрица перехода к базису из собственных векторов.

   Тогда $A'=S^{-1}AS\Rightarrow A=SA'S^{-1}\equiv SA'S^T$, Но $A'=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\left\|\begin{matrix}1&0&0\\0&(1+\sqrt{2})&0\\0&0&(1-\sqrt{2})\end{matrix}\right\|$, поэтому $A'^n=\operatorname{diag}(\lambda_1^n,\lambda_2^n,\lambda_3^n)$

6. $A^n=\underbrace{SA'\cancel{S^T\cdot S}^{E}A'S^T\cdot\ldots\cdot SA'\cancel{S^T\cdot S}^{E}A'S^T}_{n}=SA'^nS^T=S\operatorname{diag}(\lambda_1^n,\lambda_2^n,\lambda_3^n)S^T$

7. Вернемся к $g_n=\vec{\xi}^TA^{n-1}\vec{\xi}=\vec{\xi}^TS\operatorname{diag}(\lambda_1^{n-1},\lambda_2^{n-1},\lambda_3^{n-1})S^T\vec{\xi}=\boxed{\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}\right]}$

8. Попробуем найти рекуррентное соотношение следующим образом. Предположим, что последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ЛРП порядка d, причем все корни характеристического многочлена ее матрицы вещественные и различные. Тогда (Задача 1) $\exists k_1,\ldots,k_d\colon g_n=k_1\lambda_1^n+\ldots+k_2\lambda_d^n$. Сравнивая с выражением выше, получаем $d=2$, т.е. ищем рекуррентное соотношение вида $g_n=c_1g_{n-1}+c_2g_{n-2}$. Подставляя выражение 7 для g_n, получаем $(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}=c_1(1+\sqrt{2})^n+c_1(1-\sqrt{2})^n+c_2(1+\sqrt{2})^{n-1}+c_2(1-\sqrt{2})^{n-1}\Leftrightarrow(1+\sqrt{2})^{n-1}(3+2\sqrt{2}-c_1(1+\sqrt{2})-c_2)+(1-\sqrt{2})^{n-1}(3-2\sqrt{2}-c_1(1-\sqrt{2})-c_2)=0$, что будет выполнено при любых n при $\begin{cases}(1+\sqrt{2})c_1+c_2=3+2\sqrt{2}\\(1-\sqrt{2})c_1+c_2=3-2\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1=2\\c_2=1\end{cases}$,
   т.е. $\boxed{g_n=2g_{n-1}+g_{n-2}}$

9. Найдем $g_{2014}=$ 9816936009995503230901557247246041662063072822494753312759700362719597435946538528221300925
   671858801599363935274622877500162506956619048900408718181041413222318236818715345484376136537862497272785
   247720491012219807232607980494871964788980842814109033161842422339596260323417836542815901642749689573589
   070088974641306848102517213985023530762354797649521475871449969940200866323482540594978486708923597366885
   750142187523485222503097287926012700695073990739801458896041837993605326294700244522632962855241858966782
   631798710557997423351374248485616450622394012426366144662745043995902048923883147167702198223719419200759
   471729710067440801808039863672079281506822373369234466827616569206575038689737028383771817685667299606446
   92272395910326789357589123767900512319408352202559