

Алгоритмы и модели вычислений.

Задание 2: Арифметические операции и линейные рекуррентные последовательности

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.02.20

Упражнение 3

Определим $A_d \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{d-1} & c_d \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Докажем по индукции $P(d) \stackrel{\text{def}}{=} [\det(A_d - \lambda E) = (-1)^d(\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - c_2\lambda^{d-2} - \dots - c_{d-1}\lambda - c_d)]$

1. База. $d = 3 \Rightarrow \det(A_3 - \lambda E) = \begin{vmatrix} (c_1 - \lambda) & c_2 & c_3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = c_1\lambda^2 - \lambda^3 + c_3 + c_2\lambda = (-1)^3(\lambda^3 - c_1\lambda^2 - c_2\lambda - c_3) \Rightarrow P(3) \blacksquare$

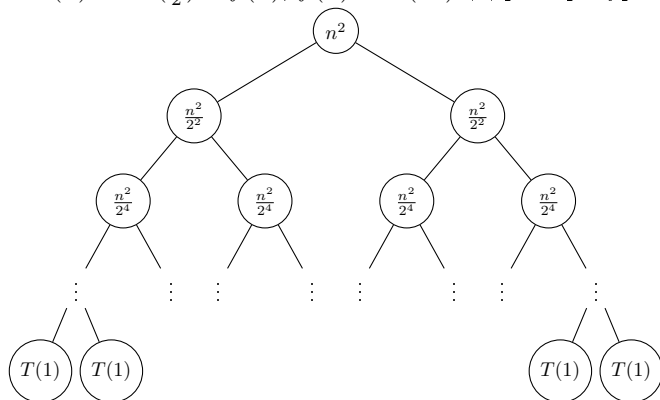
2. Пусть $P(d-1)$. Рассмотрим $\det(A_d - \lambda E) = \begin{vmatrix} (c_1 - \lambda) & c_2 & \dots & c_{d-1} & c_d \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \begin{vmatrix} (c_1 - \lambda) & c_2 & \dots & c_{d-1} \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{d+1}c_d \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \begin{vmatrix} (c_1 - \lambda) & c_2 & \dots & c_{d-1} \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{d+1}c_d \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \det(A_{d-1} - \lambda E) + (-1)^{d+1}c_d \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \det(A_{d-1} - \lambda E) + (-1)^{d+1}c_d \cdot 1$

Разложим по последнему столбцу: $\stackrel{=}{=} -\lambda \det(A_{d-1} - \lambda E) + (-1)^{d+1}c_d \cdot 1$

$\stackrel{=}{=} -\lambda(-1)^{d-1}(\lambda^{d-1} - c_1\lambda^{d-2} - \dots - c_{d-2}\lambda - c_{d-1}) - (-1)^d c_d = (-1)^d(\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - \dots - c_{d-1}\lambda - c_d)$. Получаем $P(d) \blacksquare$

(каноническое) Задача 6

$T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + f(n)$, $f(n) = O(n^2)$. Дерево рекурсии:



Ответ: $T(n) = O(n^{\log_2 7})$

n^2 Высота дерева $h = \log_2 n$.

$$7^{\frac{n^2}{2^2}} T(n) = \sum_{k=0}^{h-1} 7^k f(\frac{n}{2^k}) + 7^h T(1) \stackrel{=}{\leq}.$$

Из определения $O \exists C > 0 \exists n_0: \forall n \geq n_0 f(n) \leq Cn^2$,

$7^{\frac{n^2}{2^2}}$ откуда первая сумма $\sum_{k=0}^{h-1} 7^k f(\frac{n}{2^k}) \leq Cn^2 \sum_{k=0}^{h-1} (\frac{7}{4})^k =$

$\dots Cn^2 \frac{(7/4)^{h-1} - 1}{7/4 - 1} = C_1 n^2 ((7/4)^{\log_2 n} - C_2) = C_1 n^2 n^{\log_2 7/4} -$

$7^k \frac{n^2}{2^{2k}} C_3 n^2 = C_1 n^{\log_2 7} - C_3 n^2$. Второе слагаемое $7^h T(1) =$

$\dots 7^{\log_2 n} T(1) = Cn^{\log_2 7}$

$7^h T(1)$ Поэтому $T(n) \leq n^{\log_2 7} - C_5 n^2$

(каноническое) Задача 7

Вход: точки $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$.

Алгоритм: считаем массив расстояний $r_i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ (можно r_i^2). Ищем медиану r_m в массиве за $O(n)$

Ответ: r_m (r_{m+1} ?).

(каноническое) Задача 9

Пусть $\Sigma = \{\underbrace{0}_{\sigma_0}, \underbrace{1}_{\sigma_1}, \underbrace{2}_{\sigma_2}\}$, $\Sigma^* \supset G = \{w | \exists n: w = w_1 \dots w_n, \underbrace{\forall i \in \overline{1, n-1} \hookrightarrow |w_i - w_{i+1}| \leq 1}_{(*)}\}$. Пусть $g_n = |\{w \in L | |w| =$

$n\}|$ — количество слов длины n в языке G . Определим $g_n^i = |\{w \in G | |w| = n, w_n = \sigma_i\}|$ — количество слов длины n из G ,

оканчивающихся на i -й символ. Поскольку каждое слово оканчивается на один из символов σ_i , получаем $g_n = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$.

1. Найдем рекуррентное соотношение для последовательностей g_n^i . Получим слово $w \in G$ длины $n+1$: $w = w_1 \dots w_n w_{n+1}$. Поскольку слово из языка, для него верно (*). Но это условие верно и для подслова $w_1 \dots w_n$. Рассмотрим последний символ слова $w = w_{n+1}$:

- (a) $w_{n+1} = 0$. Но тогда предпоследний символ слова $w = w_n$ может быть 0 либо 1 для выполнения (*). Слово $w_1 \dots w_n$ может быть получено g_n^0 и g_n^1 способами соответственно. Поэтому количество способов получить w в этом случае $g_{n+1}^0 = g_n^0 + g_n^1$ (**).
- (b) $w_{n+1} = 1$. Тогда $w_n \in \{0, 1, 2\}$, и $g_{n+1}^1 = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$.
- (c) $w_{n+1} = 2$. Тогда $w_n \in \{1, 2\}$, и $g_{n+1}^2 = g_n^1 + g_n^2$.

2. Определим вектор $\mathbb{R}^3 \ni \vec{g}_n = \begin{pmatrix} g_n^0 \\ g_n^1 \\ g_n^2 \end{pmatrix}$. Определим матрицу $A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Снова рассмотрим соотношения } \begin{cases} 1a \\ 1b \\ 1c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_{n+1}^0 = g_n^0 + g_n^1 \\ g_{n+1}^1 = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2 \\ g_{n+1}^2 = g_n^1 + g_n^2 \end{cases}.$$

Заметим, что в матричном виде они записываются как $\vec{g}_{n+1} = A\vec{g}_n$ (***)

3. Найдем $g_1^0 = g_1^1 = g_1^2 = 1$, так как слово из одного символа удовлетворяет (*). Определим $\vec{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тогда, применяя (***) (доказывается тривиально по индукции) получаем $\vec{g}_n = A^{n-1}\vec{\xi}$

4. $g_n = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$. Но это равно $g_n = (\vec{\xi}, A^{n-1}\vec{\xi}) = \vec{\xi}^T A^{n-1} \vec{\xi}$

5. Найдем ОНБ, в котором A имеет диагональный вид

- (a) Характеристический многочлен $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ 1 & (1-\lambda) & 1 \\ 0 & 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda) = (1-\lambda) \cdot (1 +$

$\lambda^2 - 2\lambda - 2) = (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda - 1)$. Корни квадратного уравнения $\lambda = 1$ и $\lambda \in \frac{2 \pm \sqrt{4+2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Далее ищем собственные векторы.

- (b) $(\lambda = \lambda_1 = 1)$. $A - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, откуда $\vec{h}_1^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

- (c) $(\lambda = \lambda_2 = 1 + \sqrt{2})$. $A - (1 + \sqrt{2}) \cdot E = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, откуда $\vec{h}_2^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}^T$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} \perp \vec{h}_1$

- (d) $(\lambda = \lambda_3 = 1 - \sqrt{2})$. $A - (1 - \sqrt{2}) \cdot E = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, откуда $\vec{h}_3^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}^T$, $\vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} \perp \vec{h}_1, \vec{h}_2$

Получаем $S \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ — ортогональная матрица перехода к базису из собственных векторов.

Тогда $A' = S^{-1}AS \Rightarrow A = SA'S^{-1} \equiv SA'S^T$, Но $A' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \sqrt{2}) \end{pmatrix}$, поэтому

$$A'^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)$$

6. $A^n = \underbrace{SA'S^T \cdot \overset{E}{S} A'S^T \cdot \dots \cdot SA'S^T \cdot \overset{E}{S} A'S^T}_n = SA'^n S^T = S \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n) S^T$

7. Вернемся к $g_n = \vec{\xi}^T A^{n-1} \vec{\xi} = \vec{\xi}^T S \text{diag}(\lambda_1^{n-1}, \lambda_2^{n-1}, \lambda_3^{n-1}) S^T \vec{\xi} = \boxed{\frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right]}$

8. Попробуем найти рекуррентное соотношение следующим образом. Предположим, что последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ЛРП порядка d , причем все корни характеристического многочлена ее матрицы вещественные и различные. Тогда (Задача 1) $\exists k_1, \dots, k_d: g_n = k_1 \lambda_1^n + \dots + k_d \lambda_d^n$. Сравнивая с выражением выше, получаем $d = 2$, т.е. ищем рекуррентное соотношение вида $g_n = c_1 g_{n-1} + c_2 g_{n-2}$. Подставляя выражение 7 для g_n , получаем $(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1} = c_1(1 + \sqrt{2})^n + c_1(1 - \sqrt{2})^n + c_2(1 + \sqrt{2})^{n-1} + c_2(1 - \sqrt{2})^{n-1} \Leftrightarrow (1 + \sqrt{2})^{n-1}(3 + 2\sqrt{2} - c_1(1 + \sqrt{2}) - c_2) + (1 - \sqrt{2})^{n-1}(3 - 2\sqrt{2} - c_1(1 - \sqrt{2}) - c_2) = 0$, что будет выполнено при любых n при $\begin{cases} (1 + \sqrt{2})c_1 + c_2 = 3 + 2\sqrt{2} \\ (1 - \sqrt{2})c_1 + c_2 = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$,
т.е. $\boxed{g_n = 2g_{n-1} + g_{n-2}}$