Теория и реализация языков программирования.
Задание 7: контекстно-свободные языки и магазинные автоматы

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.10.16

Упражнение 1

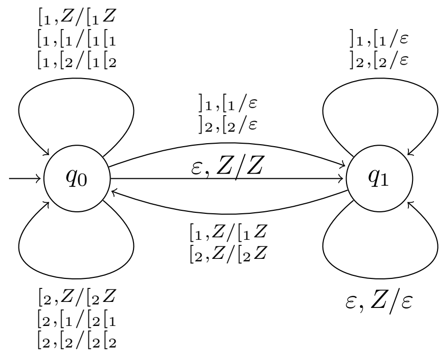
Упражнение 2

Упражнение 3

1. Грамматика $\Gamma = (\{S\}, \Sigma_n \cup \overline{\Sigma}_n, P, S)$. $P = \big\{S \longrightarrow \sigma_i\overline{\sigma}_i | \sigma_i S \overline{\sigma}_i | SS\big\}$. $D_n = L(\Gamma)$.
2. Исходное утверждение: $\forall w \left(\underbrace{w \in D_n}_{A} \Rightarrow \underbrace{\forall i \leqslant n \,\forall k \leqslant |w| \hookrightarrow ||w[1,k]||_i \geqslant 0,\ ||w||_i = 0}_{B}\right)$
3. Отрицание обратного утверждения: $\exists w\colon\ (B \wedge \neg A)$. Пусть $w = \varepsilon$.
   a. Тогда $k \leqslant |w| \Rightarrow k = 0$, поэтому $\forall i \leqslant n \hookrightarrow ||w[1,k]||_i \equiv |\varepsilon|_{\sigma_i} - |\varepsilon|_{\overline{\sigma_i}} = 0$ и $\forall i \leqslant n \hookrightarrow ||w||_i = 0$. Получаем B.
   b. Но $w = \varepsilon$ не порождается грамматикой Γ: первые два правила добавляют нетерминалов, поэтому не могут быть применены, и применение третьего правила не уменьшает количества нетерминалов. Получаем $\neg A$ ■

Задача 1

1. Определим МП-автомат $\mathcal{A} = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, Z, \delta, F)$, допускающий по пустому стеку.
   (a) $n \overset{\text{def}}{=} 2$
   (b) $\Sigma_n \overset{\text{def}}{=} \{[_1, ..., [_n\} \equiv \{[_1, [_2\}$, $\overline{\Sigma}_n \overset{\text{def}}{=} \{]_1, ...,]_n\} \equiv \{]_1,]_2\}$.
   (c) $\Sigma \overset{\text{def}}{=} \Sigma_n \cup \overline{\Sigma}_n \equiv \{[_1,]_1, [_2,]_2\}$
   (d) $\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{Z\}\Sigma_n \equiv \{Z, [_1, [_2\}$.
   (e) $Q \overset{\text{def}}{=} \{q_0, q_1\}$
   (f) δ изображена справа
   (g) $F \overset{\text{def}}{=} \varnothing$ (N-автомат)



2. Определим морфизм P: $P\colon (\Sigma_n \cup \overline{\Sigma}_n)^* \longrightarrow (\Sigma_n \cup \overline{\Sigma}_n)^*$: $P([_i) =]_i$, $P(]_i) = [_i$ — пары для скобок. Доопределим до морфизма: $P(w_1...w_l) = P(w_1)...P(w_l)$.
3. $L = D_2 \cap \big([_1|[_2\big)^*\big(]_1|]_2\big)^*$. $w \in L \Rightarrow w = w_1w_2$, $w_1 = \big([_1|[_2\big)^{n_1}$, $w_2 = \big(]_1|]_2\big)^{n_2}$. $w \in D_2 \Rightarrow 0 = ||w||_i = ||w_1||_i + ||w_2||_i = |w_1|_{[_i} + |w_2|_{[_i} - |w_1|_{]_i} - |w_2|_{]_i}$. w_1 не содержит $]_i$, w_2 не содержит $[_i$, поэтому $0 = |w_1|_{[_i} - |w_2|_{]_i}$. Сложим равенства, получим $0 = |w_1|_{[_1} + |w_1|_{[_2} - |w_2|_{]_1} - |w_2|_{]_2} \Rightarrow |w_1| = |w_2| \Rightarrow n_1 = n_2$.
4. $w \in L$, $|w_1| = s$, $w_1 = [_{i_1}...[_{i_s}$, $w_2 =]_{j_1}...]_{j_s}$. Докажем, что $P(w_2) = w_1^R$:
   $Q(k) \overset{\text{def}}{=} \big[P(w_2)[1,k] = w_1^R[1,k]\big]$.
   a. Очевидно, $Q(0)$, так как $P(w_2)[1,0] \equiv \varepsilon \equiv w_1^R[1,0]$.
   b. Пусть $Q(k)$. Тогда $w_1 = p[_{i_{s-k+1}}...[_{i_s}$, $w_2 =]_{i_s}...]_{i_{s-k+1}}q$. То есть, k скобок от центра парные друг к другу. Обозначим их за $t = [_{i_{s-k+1}}...[_{i_s}]_{i_s}...]_{i_{s-k+1}} \Rightarrow ||t||_i = 0$, t — ПСВ. Предположим $\neg Q(k+1) \overset{Q(k)}{\Rightarrow} P(w_2)[k+1] \neq w_1^R[k+1]$. Без ограничения общности $p = p_0[_1$, $q =]_2q_0$. Тогда $w = p_0[_1t]_2q_0$. Но t — ПСВ, поэтому пара для $[_1$ — в q_0, пара для $]_2$ — в p_0: $w = ...[_2...[_1t]_2...]_1...$ — не ПСВ $\Rightarrow w \notin D_2$ — противоречие. Значит, $Q(k+1)$.
5. Пусть $w \in L$. Докажем, что $(q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$ и $(q_1, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$. $3 \Rightarrow w = w_1w_2$, $4 \Rightarrow P(w_1)^R = w_2$.
   a. Докажем $Q(k) \overset{\text{def}}{=} \big[(q_0, w_1[1,k], Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, (w_1[1,k])^R Z)\big]$:
   a. $k = 0 \Rightarrow w_1[1,k] = \varepsilon \Rightarrow (w_1[1,k])^R = \varepsilon$. Получаем $(q_0, w_1[1,k], Z) \equiv (q_0, (w_1[1,k])^R, Z) \Rightarrow Q(0)$

b. Пусть $Q(k) \Rightarrow (q_0, w_1[1,k], Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, (w_1[1,k])^R Z)$. Рассмотрим $w_1[k+1] = [_{i_{k+1}}$. По определению δ имеем $\forall\gamma(q_0, [_{i_{k+1}}, \gamma) \vdash (q_0, \varepsilon, [_{i_{k+1}}\gamma)$. Тогда $(q_0, w[1,k+1], Z) \equiv (q_0, w_1[1,k][_{i_{k+1}}, Z) \overset{Q(k)}{\vdash^*} (q_0, [_{i_{k+1}}, (w_1[1,k])^R Z) \overset{\text{def }\delta}{\vdash} (q_0, \varepsilon, w_1[k+1](w_1[1,k])^R Z) \equiv (q_0, \varepsilon, (w_1[1,k+1])^R Z) \Rightarrow Q(k+1)$.

b. Докажем $Q(k) \overset{\text{def}}{=} \left[\forall\gamma \in \Gamma^+ \hookrightarrow (q_1, w_2[1,k], P(w_2)[1,k]\gamma) \vdash^* (q_1, \varepsilon, \gamma)\right]$:

a. $k = 0 \Rightarrow w_2[1,k] \equiv \varepsilon \equiv P(w_2)[1,k] \Rightarrow Q(0)$

b. Пусть $Q(k) \Rightarrow \forall\gamma \hookrightarrow (q_1, w_2[1,k], P(w_2)[1,k]\gamma) \vdash^* (q_1, \varepsilon, \gamma)$. $\sphericalangle w_2[k+1] =]_{i_{k+1}}$.
Из определения δ получаем $\forall\gamma_1 \hookrightarrow (q_1,]_{i_{k+1}}, [_{i_{k+1}}\gamma_1) \vdash (q_1, \varepsilon, \gamma_1)$.

Значит, $(q_1, w_2[1,k+1], P(w_2)[1,k+1]\gamma) \equiv (q_1, w_2[1,k]]_{i_{k+1}}, P(w_2)[1,k][_{i_{k+1}}\gamma) \overset{Q(k)}{\vdash^*} (q_1,]_{i_{k+1}}, [_{i_{k+1}}\gamma) \overset{\text{def }\delta}{\vdash} (q_1, \varepsilon, \gamma) \Rightarrow Q(k+1)$.

c. Рассмотрим $w_2 =]_i w_2^0$. Но $4 \Rightarrow w_2 = P(w_1)^R \Rightarrow w_1 = P(w_2^0)^R[_i$ Из определения δ получаем $\forall\gamma(q_0,]_i, [_i\gamma) \vdash (q_1, \varepsilon, \gamma)$. Тогда $\underline{(q_0, w, Z)} \overset{5a}{\vdash^*} (q_0, w_2, (w_1)^R Z) \equiv (q_0,]_i w_2^0, [_i P(w_2^0)Z) \overset{\text{def }\delta}{\vdash} (q_1, w_2^0, P(w_2^0)Z) \overset{5b}{\vdash^*} \underline{(q_1, \varepsilon, Z)}$.

d. $w_1 = [_i w_1^0$. Из определения δ получаем $(q_1, [_i, Z) \vdash (q_1, \varepsilon, [_i Z)$. Тогда $(q_1, w, Z) \equiv (q_1, [_i w_1^0 w_2, Z) \overset{\text{def }\delta}{\vdash} (q_0, w_1^0 w_2, [_i Z)$. Но эта конфигурация может быть получена иначе: $(q_0, [_i, Z) \vdash (q_0, [_i, [_i Z)$. Значит, дальнейшие конфигурации также могут совпадать. Имеем $5c \Rightarrow \underline{(q_1, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)}$.

6. Пусть $w \in L^* \setminus \{\varepsilon\} \Rightarrow w = w_1...w_k, \forall i \in \overline{1,k} \hookrightarrow w_i \in L$. Определим $f\colon L^* \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$: $f(w) \ni k$ (многозначная функция). Если $w = \varepsilon$, определим $f(w) \overset{\text{def}}{=} 0$.

7. $P(k) \overset{\text{def}}{=} \left[\forall w \in L^*\colon f(w) \ni k \hookrightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)\right]$

   (a) Пусть $k = 0$. Тогда $w = \varepsilon$. $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, \varepsilon, Z) \vdash (q_1, \varepsilon, Z) \Rightarrow P(0)$.

   (b) Пусть $k = 1, w \in L^*\colon f(w) \ni 1 \Rightarrow w \equiv w_1 \in L$. $5 \Rightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z) \Rightarrow P(1)$ ■

   (c) Пусть $P(k)$. $w \in L^*\colon f(w) \ni k+1 \Rightarrow w = w_1...w_{k+1}, \forall i \in \overline{1,k+1} \hookrightarrow w_i \in L$. $\sphericalangle w_0 \overset{\text{def}}{=} w_1...w_k \in L^*$. $f(w_0) \ni k \overset{P(k)}{\Rightarrow} (q_0, w_0, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$. Тогда $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, w_0 w_{k+1}, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon w_{k+1}, Z) \overset{5}{\vdash^*} (q_1, \varepsilon, Z) \Rightarrow P(k+1)$ ■

   Получаем $\forall w \in L^* \hookrightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z) \overset{\text{def }\delta}{\vdash} (q_1, \varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow \forall w \in L^* \hookrightarrow w \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow \boxed{L^* \subseteq L(\mathcal{A})}$.

8. $\sphericalangle\delta$. Заметим, что каждый переход, кроме $q_1 \xrightarrow{\varepsilon, Z/\varepsilon} q_1$ сохраняет количество Z в стеке, и, более того, оставляет Z на дне стека.

9. Пусть $(q_a, w, \phi) \vdash^* (q_b, \varepsilon, \gamma)$. Тогда $||\gamma||_i - ||\phi||_i = ||w||_i$. Докажем по индукции:
$Q(k) \overset{\text{def}}{=} \left[\forall w\colon |w| = k\, \forall q_a\, \forall q_b\, \forall\phi\, \forall\gamma\colon (q_a, w, \phi) \vdash^* (q_b, \varepsilon, \gamma) \hookrightarrow ||\gamma||_i - ||\phi||_i = ||w||_i\right]$.

   a. $k = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$. Поскольку все ε-переходы $q_0 \xrightarrow{\varepsilon, Z/Z} q_1$ и $q_1 \xrightarrow{\varepsilon, Z/\varepsilon} q_1$ не изменяют $||\cdot||_i$ для символов стека, получаем $||w||_i \equiv 0 \equiv ||\phi||_i - ||\delta||_i \Rightarrow Q(0)$.

   b. Пусть $Q(k)$. $\sphericalangle w\colon |w| = k+1$, $(q_a, w, \phi) \vdash^* (q_c, \varepsilon, \gamma)$. $w = w_0\sigma$, $\sigma \in \Sigma$. $\sphericalangle(q_a, w, \phi) \equiv (q_a, w_0\sigma, \phi) \vdash^* (q_b, \sigma, \psi) \vdash (q_c, \varepsilon, \gamma)$. $Q(k) \Rightarrow ||\psi||_i - ||\phi||_i = ||w_0||_i$. $\sphericalangle$ последний переход. Из определения δ следует, что $||\gamma||_i - ||\psi||_i = ||\sigma||_i$: если $\sigma_i = [_i$, то в стек будет добавлена σ_i, иначе она будет удалена. Поэтому $||w||_i = ||w_0||_i + ||\sigma||_i = ||\psi||_i - ||\phi||_i + ||\gamma||_i - ||\psi||_i \equiv ||\gamma||_i - ||\phi||_i \Rightarrow Q(k+1)$.

10. Пусть $w \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

   a. Если $w = \varepsilon$, то $w \in L^*$

   b. Пусть иначе. Изначально Z в стеке, в конце его нет. Значит (8), был переход $q_1 \xrightarrow{\varepsilon, Z/\varepsilon} q_1$. Но Z был на дне стека, поэтому после стек пуст. Значит, это последняя конфигурация. Имеем $(q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z) \vdash (q_1, \varepsilon, \varepsilon)$. Рассмотрим $(q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$. Пусть $\{c_i\}_{i=0}^{I}$ — эта цепочка конфигураций, $c_i = (q_{k_i}, w_i, \gamma_i)$

      i. $\sphericalangle\delta$. Заметим, что автомат реализует алгоритм проверки на ПСВ: если была прочитана скобка $[_i$, то она положена в стек. Скобки вынимаются из стека тогда и только тогда, когда прочитана парная скобка. Значит, w — ПСВ.

      ii. Рассмотрим все конфигурации $c_{i_j}\colon \gamma_{i_j} = Z \Rightarrow c_i \equiv (q_{k_{i_j}}, w_{i_j}, Z)$. Рассмотрим первую пару $c_{i_1} \vdash^* c_{i_2}$. Было прочитано слово x_1. $9 \Rightarrow ||x_1||_i = ||Z||_i - ||Z||_i = 0$. Получаем, что x_1 — подстрока ПСВ со скобочным итогом, равным нулю. Значит, x_1 — ПСВ. Пусть $x_1 = ab$, в a только открывающие скобки, в b первая закрывающая. Пусть в b есть открывающие скобки, а именно, $b = cd$, в d первая открывающая скобка. После прочтения a автомат находится в q_0 (5a). Далее после прочтения c автомат в q_1 (5b). Стек не пуст, так как иначе эта пара конфигураций не первая. Но из q_1 нет переходов по открывающим скобкам с непустым стеком — противоречие. Получаем, что в b нет открывающих скобок $\Rightarrow x_1 \in L$. Далее рассуждение можно продолжить, так как следующий после x_1 символ в w — открывающая скобка (иначе скобочный итог отрицательный), по ней автомат переходит в q_0. Получаем, что $w = x_1...x_m$, $\forall q \in \overline{1,m} \hookrightarrow x_q \in L$. Поэтому $w \in L^*$.

   Получаем $\boxed{L(\mathcal{A}) \subseteq L^*}$.

Задача 2

Задача 3

1. $\Sigma \overset{\text{def}}{=} \{a, b, c\}$. КС-грамматика $\Gamma \equiv (N, \Sigma, P, S)$.
   (a) $N \overset{\text{def}}{=} \{S, A, B, A_1, A_2, B_1\}$
   (b) $P = \{S \longrightarrow A|B,\ A \longrightarrow A_1A_2,\ A_1 \longrightarrow aA_1b|\varepsilon,\ A_2 \longrightarrow cA_2|\varepsilon,\ B \longrightarrow aBc|B_1,\ B_1 \longrightarrow bB_1|\varepsilon\}$

1. $L \overset{\text{def}}{=} \{a^ib^jc^k \big| i = j \vee i = k,\ i, j, k \geqslant 0\}$
2. Докажем, что A_1 порождает a^ib^i:
   i. Фиксируем i. Применим $A_1 \longrightarrow aA_1b$ i раз, получим $a^iA_1b^i$. Применим $A_1 \longrightarrow \varepsilon$. Получим a^ib^i
   ii. Пусть $A_0 \longrightarrow^* w \in \Sigma^*$. Заметим, что к A_1 могут быть применены только правила $A_1 \longrightarrow aA_1b$ и $A_1 \longrightarrow \varepsilon$. Оба не добавляют нетерминалов, первое не уменьшает количество A_1, второе уменьшает его на 1. Значит (КС-грамматика, правила применяются к нетермиранам), в выводе i применений первого, одно применение второго. Получаем $w = a^ib^i$.
3. Аналогично (используя количество нетерминалов в правилах) докажем, что A_2 порождает c^j, B_1 порождает b^k, B порождает $a^ib^jc^i$.
4. Пусть $w \in L$. Построим вывод w в Γ:
   i. Если $w = \varepsilon$, то вывод следующий: $S \overset{S\to B}{\longrightarrow} B \overset{B\to B_1}{\longrightarrow} B_1 \overset{B_1\to\varepsilon}{\longrightarrow} \varepsilon$
   ii. Пусть $w \neq \varepsilon, w = a^ib^ic^k$. $S \overset{S\to A_1A_2}{\longrightarrow} A_1A_2$.
      A. $12 \Longrightarrow A_1 \to^* a^ib^i$
      B. $13 \Longrightarrow A_2 \to^* c^j$
      Получаем $S \to^* a^ib^ic^j$
   iii. Пусть $w \neq \varepsilon, w = a^ib^ja^i$. $13 \Rightarrow S \to^* a^ib^jc^i$.

   Получаем $\boxed{L \subseteq L(\Gamma)}$
5. Пусть $S \longrightarrow^* w$. Из S могут быть получены только A и B. Рассмотрим эти случаи:
   i. Первое правило $S \longrightarrow A$. Из A могут быть получены только A_1A_2, $12 \Rightarrow$ из A_1 получено a_ib_i, $13 \Rightarrow$ из A_2 — c_j. Получаем, что $w = a^ib^ic^j \in L$.
   ii. Первое правило $S \longrightarrow B$. $13 \Rightarrow$ из B может быть получено только $w \equiv a_ib^jc^i \in L$

   Получаем $\boxed{L(\Gamma) \subseteq L}$