Алгоритмы и модели вычислений. Задание 2: Арифметические операции и линейные рекуррентные последовательности

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.02.20

Упражнение 3

Определим $A_d \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} c_1 & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{Vmatrix}$

Докажем по индукции $P(d) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\det(A_d - \lambda E) = (-1)^d(\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - c_2\lambda^{d-2} - ... - c_{d-1}\lambda - c_d)\right]$

1. База. $d = 3 \Rightarrow \det(A_3 - \lambda E) = \begin{vmatrix} (c_1-\lambda) & c_2 & c_3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = c_1\lambda^2 - \lambda^3 + c_3 + c_2\lambda = (-1)^3(\lambda^3 - c_1\lambda^2 - c_2\lambda - c_3) \Rightarrow P(3)$ ■

2. Пусть $\underline{P(d-1)}$. Рассмотрим $\det(A_d - \lambda E) = \begin{vmatrix} (c_1-\lambda) & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \boxed{=}$.

   Разложим по последнему столбцу: $\boxed{=} -\lambda \underbrace{\begin{vmatrix} (c_1-\lambda) & c_2 & ... & c_{d-1} \\ 1 & -\lambda & ... & 0 \\ & ... & & \\ 0 & 0 & ... & -\lambda \end{vmatrix}}_{\det(A_{d-1}-\lambda E)} + (-1)^{d+1}c_d \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & ... & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix}}_{=1,\text{ верхн.-треуг.}} \stackrel{P(d-1)}{=}$

   $\stackrel{P(d-1)}{=} -\lambda(-1)^{d-1}(\lambda^{d-1} - c_1\lambda^{d-2} - ... - c_{d-2}\lambda - c_{d-1}) - (-1)^d c_d = (-1)^d(\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - ... - c_{d-1}\lambda - c_d)$. Получаем $\underline{P(d)}$ ■

Задача 1*

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ЛРП порядка d: $a_n = \sum\limits_{i=1}^{d} c_i a_{n-i}$. Выпишем матрицу $A = \begin{Vmatrix} c_1 & c_2 & ... & c_{d-1} & c_d \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. Определим $\vec{a_n} = \begin{Vmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ ... \\ a_{n-d+1} \end{Vmatrix}$. Тогда $\vec{a_n} = A^{n-d}\vec{g}_d$. Обозначим $\vec{a} = \vec{g}_d$. По условию существуют d различных корней $\lambda \in \{\lambda_1, ..., \lambda_d\}$ многочлена $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$. Значит, существует матрица $S = \begin{Vmatrix} s_{11} & ... & s_{1d} \\ ... & & ... \\ s_{d1} & ... & s_{dd} \end{Vmatrix}$, такая что ее i-й столбец является собственным вектором $\vec{h}_i$ матрицы A, соответствующим собственному значению λ_i, и $A' = S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_d)$. S^{-1} существует, так как $\vec{h}_i$ — линейно независимы. Выразим $A = SA'S^{-1}$,

рассмотрим $A^n = \underbrace{SA'\cancel{S^{-1}\cdot S}^{\,0} A'S^{-1}\cdot ... \cdot SA'\cancel{S^{-1}\cdot S}^{\,0} A'S^{-1}}_{n} = SA'^nS^{-1}$. Определим $\vec{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{Vmatrix} \in \mathbb{R}^d$. Заметим, что $\vec{a}_n = \vec{\xi}^T\vec{g}_n$, откуда $a_n = \vec{\xi}^T SA'^{n-d}S^{-1}\vec{a}$. Найдем $\vec{\xi}^T S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} s_{11} & ... & s_{1d} \\ ... & & ... \\ s_{d1} & ... & s_{dd} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1d} \end{Vmatrix}$, строка

$\vec{\xi}^T SA'^{n-d} = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1d} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \lambda_1^{n-d} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-d} & ... & 0 \\ & & ... & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_d^{n-d} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda_1^{n-d}s_{11} & ... & \lambda_d^{n-d}s_{1d} \end{Vmatrix}$,

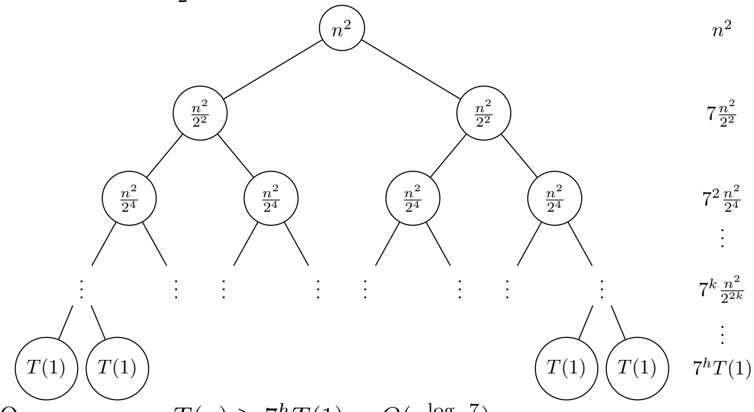
i-й элемент этой строки $(\vec{\xi}^T SA'^{n-d})_i = \lambda_i^{n-d}s_{1i}$

Найдем $S^{-1}\vec{a} = \left\|\begin{matrix} s'_{11} & \dots & s'_{d1} \\ \dots & & \dots \\ s'_{1d} & \dots & s'_{dd} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} a_d \\ a_{d-1} \\ \dots \\ a_1 \end{matrix}\right\|$ (s'_{ij} — элементы матрицы S^{-1}), i-й элемент в этом столбце равен $(S^{-1}\vec{a})_i = \sum\limits_{j=1}^{d} a_{d-j+1} s'_{ji}$

Получаем $a_n = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-d} s_{1i} \sum\limits_{j=1}^{d} a_{d-j+1} s'_{ji} \stackrel{?}{=} \sum\limits_{i=1}^{d} k_i \lambda_i^n$. Это равенство верно: в случае $\lambda_i = 0$ можно взять любое k_i (например, $k_i = 0$), иначе — $k_i = \lambda_i^{-d} s_{1i} \sum\limits_{j=1}^{d} a_{d-j+1} s'_{ji}$ ■

(каноническое) Задача 6

$T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + f(n)$, $f(n) = O(n^2)$. Дерево рекурсии:



Высота дерева $h = \log_2 n$.
$T(n) = \sum\limits_{k=0}^{h-1} 7^k f(\frac{n}{2^k}) + 7^h T(1) \boxed{\leqslant}$.
Из определения O $\exists C > 0\, \exists n_0 \colon \forall n \geqslant n_0\; f(n) \leqslant Cn^2$, откуда первая сумма $\sum\limits_{k=0}^{h-1} 7^k f(\frac{n^2}{2^{2k}}) \leqslant Cn^2 \sum\limits_{k=0}^{h-1} (\frac{7}{4})^k = Cn^2 \frac{(7/4)^{h-1}-1}{7/4-1} = C_1 n^2((7/4)^{\log_2 n} - C_2) = C_1 n^2 n^{\log_2 \frac{7}{4}} - C_3 n^2 = C_1 n^{\log_2 7} - C_3 n^2$. Второе слагаемое $7^h T(1) = 7^{\log_2 n} T(1) = Cn^{\log_2 7}$
Поэтому $T(n) \leqslant n^{\log_2 7} - C_5 n^2$

Оценка снизу $T(n) \geqslant 7^h T(1) = O(n^{\log_2 7})$, откуда
Ответ: $\boxed{T(n) = \Theta(n^{\log_2 7})}$

(каноническое) Задача 7

Вход: точки $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$.
Алгоритм: считаем массив квадратов расстояний $r_i^2 \stackrel{\text{def}}{=} x_i^2 + y_i^2$ *(можно r_i^2)*. Ищем медиану r_m в массиве за $O(n)$

for i := *1* **to** n **do**
| R[i] := X[i] * X[i] + Y[i] * Y[i] $\to t_1$
end
Res := Median(R, 1, n) $\to t_2$
Res := Sqrt(Res)$\to t_3$
Более формально:

1. Задача найти $r_m = \min\limits_{r\in\mathbb{R}} r \colon |D_r(\vec{0}) \cap \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n| \geqslant \frac{n}{2}$ $(*)$
2. Очевидно, что $r_m = r_i$ (одна из точек лежит на гранце круга).
Пусть иначе. Поскольку $n > 0$, из условия $(*)$ следует, что внутри есть хотя бы одна точка. Выберем из них точку с максимальным r_i. Из предположения получаем $r_i < r_m$. Рассмотрим круг меньшего радиуса $D_{r_i}(\vec{0})$, который содержит столько же точек, получаем противоречие с $(*)$ (условие min).
Таким образом, min можно искать только среди $r \in \{(x_i, y_i)_{i=1}^n\}$.
3. Медиана массива $(r_1, ..., r_n)$ — r_j, такое что $\frac{n}{2} \leqslant |\{i | r_i \leqslant r_j\}| < \frac{n}{2} + 1$. Поэтому $r_j = r_m$, т.е. алгоритм корректен.
4. В алгоритме используется другой массив $(r_1^1, ..., r_n^2)$, но это не изменяет ответ, так как $r_i < r_j \Leftrightarrow r_i^2 < r_j^2$, $r_i = r_j \Leftrightarrow r_i^2 = r_j^2$ для неотрицательных r_i
5. Время работы: $T(n) = nt_1 + t_2 + t_3$. t_1 — константа (модель RAM), $t_2 = O(n)$ — доказано на лекции, $t_3 = O(\log n)$ — бинпоиск корня в модели RAM. Получаем $T(n) = O(n) + O(n) + O(\log n) = O(n)$.

(каноническое) Задача 9

Пусть $\Sigma = \{\underbrace{0}_{\sigma_0}, \underbrace{1}_{\sigma_1}, \underbrace{2}_{\sigma_2}\}$, $\Sigma^* \supset G = \{w | \exists n \colon w = w_1 ... w_n, \underbrace{\forall i \in \overline{1, n-1} \hookrightarrow |w_i - w_{i+1}|}_{(*)} \leqslant 1\}$. Пусть $g_n = |\{w \in L \big| |w| = n\}|$ — количество слов длины n в языке G. Определим $g_n^i = |\{w \in G \big| |w| = n, w_n = \sigma_i\}|$ — количество слов длины n из G, оканчивающихся на i-й символ. Поскольку каждое слово оканчивается на один из символов σ_i, получаем $g_n = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$.

1. Найдем рекуррентное соотношение для последовательностей g_n^i. Получим слово $w \in G$ длины $n+1$: $w = w_1 ... w_n w_{n+1}$. Поскольку слово из языка, для него верно $(*)$. Но это условие верно и для подслова $w_1 ... w_n$. Рассмотрим последний символ слова w — w_{n+1}:

(a) $w_{n+1}=0$. Но тогда предпоследний символ слова w — w_n может быть 0 либо 1 для выполнения $(*)$. Слово $w_1 ... w_n$ может быть получено g_n^0 и g_n^1 способами соответственно. Поэтому количество способов получить w в этом случае $g_{n+1}^0 = g_n^0 + g_n^1$ $(**)$.

(b) $w_{n+1}=1$. Тогда $w_n \in \{0,1,2\}$, и $g_{n+1}^1 = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$.

(c) $w_{n+1}=2$. Тогда $w_n \in \{1,2\}$, и $g_{n+1}^2 = g_n^1 + g_n^2$.

2. Определим вектор $\mathbb{R}^3 \ni \vec{g_n} = \begin{Vmatrix} g_n^0 \\ g_n^1 \\ g_n^2 \end{Vmatrix}$. Определим матрицу $A \overset{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

   Снова рассмотрим соотношения $\begin{cases} 1a \\ 1b \\ 1c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_{n+1}^0 = g_n^0 + g_n^1 \\ g_{n+1}^1 = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2 \\ g_{n+1}^2 = g_n^1 + g_n^2 \end{cases}$.

   Заметим, что в матричном виде они записываются как $\vec{g_{n+1}} = A\vec{g_n}$ $(***)$

3. Найдем $g_1^0 = g_1^1 = g_1^2 = 1$, так как слово из одного символа удовлетворяет $(*)$. Определим $\vec{\xi} \overset{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

   Тогда, применяя $(***)$ *(доказывается тривиально по индукции)* получаем $\vec{g_n} = A^{n-1}\vec{\xi}$

4. $g_n = g_n^0 + g_n^1 + g_n^2$. Но это равно $g_n = (\vec{\xi}, A^{n-1}\vec{\xi}) = \vec{\xi}^T A^{n-1}\vec{\xi}$

5. Найдем ОНБ, в котором A имеет диагональный вид

   (a) Характеристический многочлен $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ 1 & (1-\lambda) & 1 \\ 0 & 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda) = (1-\lambda)\cdot(1+\lambda^2-2\lambda-2) = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2-2\lambda-1)$. Корни характеристического уравнения $\lambda=1$ и $\lambda \in \frac{2\pm\sqrt{4\cdot 2}}{2} = 1\pm\sqrt{2}$. Далее ищем собственные векторы.

   (b) $(\lambda=\lambda_1=1)$. $A - 1\cdot E = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$, откуда $\vec{h}_1^0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^T$, $\vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}$

   (c) $(\lambda=\lambda_2=1+\sqrt{2})$. $A-(1+\sqrt{2})\cdot E = \begin{Vmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim$
   $\sim \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{Vmatrix}$, откуда $\vec{h}_2^0 = \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}^T$, $\vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{Vmatrix} \perp \vec{h}_1$

   (d) $(\lambda=\lambda_3=1-\sqrt{2})$. $A-(1-\sqrt{2})\cdot E = \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}$,
   откуда $\vec{h}_3^0 = \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}$, $\vec{h}_3 = \begin{Vmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{Vmatrix} \perp \vec{h}_1, \vec{h}_2$

   Получаем $S \overset{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/2 & 1/2 \end{Vmatrix}$ — ортогональная матрица перехода к базису из собственных векторов.

   Тогда $A' = S^{-1}AS \Rightarrow A = SA'S^{-1} \equiv SA'S^T$, Но $A' = \operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & (1-\sqrt{2}) \end{Vmatrix}$, поэтому $A'^n = \operatorname{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)$

6. $A^n = \underbrace{SA'\cancel{S^T\cdot S}^{E}A'S^T\cdot\ldots\cdot SA'\cancel{S^T\cdot S}^{E}A'S^T}_{n} = SA'^nS^T = S\operatorname{diag}(\lambda_1^n,\lambda_2^n,\lambda_3^n)S^T$

7. Вернемся к $g_n = \vec{\xi}^TA^{n-1}\vec{\xi} = \vec{\xi}^TS\operatorname{diag}(\lambda_1^{n-1},\lambda_2^{n-1},\lambda_3^{n-1})S^T\vec{\xi} = \boxed{\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}\right]}$

8. Попробуем найти рекуррентное соотношение следующим образом. Предположим, что последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ЛРП порядка d, причем все корни характеристического многочлена ее матрицы вещественные и различные. Тогда (Задача 1) $\exists k_1,...,k_d\colon g_n = k_1\lambda_1^n + ... + k_2\lambda_d^n$. Сравнивая с выражением выше, получаем $d=2$, т.е. ищем рекуррентное соотношение вида $g_n = c_1g_{n-1}+c_2g_{n-2}$. Подставляя выражение 7 для g_n, получаем $(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1} = c_1(1+\sqrt{2})^n + c_1(1-\sqrt{2})^n + c_2(1+\sqrt{2})^{n-1} + c_2(1-\sqrt{2})^{n-1} \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})^{n-1}(3+2\sqrt{2}-c_1(1+\sqrt{2})-c_2) + (1-\sqrt{2})^{n-1}(3-2\sqrt{2}-c_1(1-\sqrt{2})-c_2) = 0$, что будет выполнено при любых n при $\begin{cases} (1+\sqrt{2})c_1 + c_2 = 3+2\sqrt{2} \\ (1-\sqrt{2})c_1 + c_2 = 3-2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$,

   т.е. $\boxed{g_n = 2g_{n-1}+g_{n-2}}$

9. Вычилим $g_{2014} =$ 981693600999550323090155724724604166206307282224947533127597003627195974359465385282213009
2567185880159936393527462287750016250695661904890040871818104141322231823681871534548437613653786249727
2785247720491012219807232607980494871964788980842814109033161842422339596260323417836542815901642749689573
5890700889746413068481025172139850235307623547976495214758714499699402008663234825405949784867089235973668
8575014218752348522250309728792601270069507399073980145889604183799360532629470024452263296285524185896678
2631798710557997423351374248485616450622394012426366144662745043995902048923883147167702198223719419200759
4717297100674408018080398636720792815068223733692344668276165692065750386897370283837718176856672996064
46922723959103267893575891237679005123194083522025559 $\approx 9.82 \times 10^{770} \approx 10^{771}$ (Код на python)

10. $g_{2014} = \frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^{2015} + (1-\sqrt{2})^{2015})$. Поскольку $-1 < 1-\sqrt{2} < 0$, $|1-\sqrt{2}|^{2015} < 1$. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{2015} = \frac{1}{2} \cdot 10^{2015 \lg(1+\sqrt{2})} = 10^{2015 \lg(1+\sqrt{2}) - \lg 2} \approx 10^{771}$, и получаем $\boxed{g_n \approx 10^{771}}$