Теория и реализация языков программирования. Задание 9: преобразование контекстно-свободных языков

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.10.23

Упражнение 1

Упражнение 2

Упражнение 3

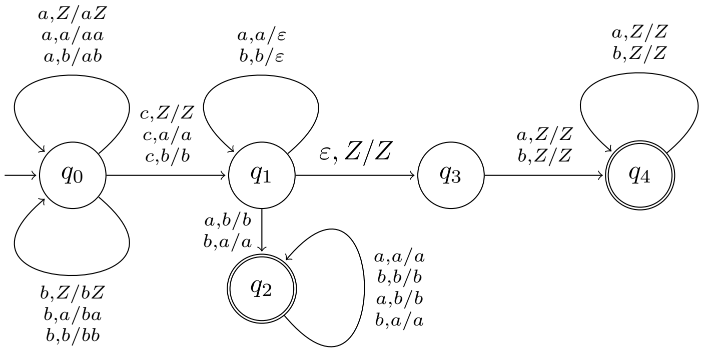
Упражнение 4

Задача 1

$L \stackrel{\text{def}}{=} \{xcy \big| x, y \in \{a, b\}^*, x \neq y^R\} \subset \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c\}$.

1. Определим МП-автомат $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, Z, \delta, F)$, допускающий по принимающему состоянию:

   1. $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, Z\}$
   2. $Q \stackrel{\text{def}}{=} \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
   3. δ изображена справа
   4. $F \stackrel{\text{def}}{=} \{q_2, q_4\}$

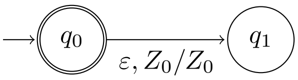


2. $\mathcal{A}$ — детерминированный, так как из каждой конфигурации (q, w, γ) переход определен однозначно.
   ε-переход $q_1 \stackrel{\varepsilon, Z/Z}{\longrightarrow} q_3$ — единственный переход из q_1 при Z на верхушке стека.

3. Докажем, что $L \subseteq L(\mathcal{A})$:

   1. Пусть $w \in \{a, b\}^*$. Докажем, что $(q_0, w, Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, w^R Z)$ по индукции по $|w|$:
      $P(n) \stackrel{\text{def}}{=} \big[\forall w \in \{a, b\}^* \colon |w| = n \hookrightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, w^R Z)\big]$
      i. $n = 0 \Rightarrow |w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$. Тогда $w^R \equiv \varepsilon$, и $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, \varepsilon, Z) \equiv (q_0, \varepsilon, w^R Z) \Rightarrow P(0)$.
      ii. Фиксируем $n \geqslant 0$, пусть $\underline{P(n)}$. Пусть $w \in \{a, b\}^*, |w| = n + 1$. Тогда $w = w_0\sigma, |w_0| = n$. $P(n) \Rightarrow (q_0, w_0, Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, w_0^R Z)$. Тогда $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, w_0\sigma, Z) \vdash^* (q_0, \sigma, w_0^R Z)$.
      $\sphericalangle$ переходы из $(q_0, \sigma, w_0^R Z)$. На верхушке стека $\gamma \in \Gamma$, входной символ $\sigma \in \{a, b\}$. Во всех случаях он будет добавлен в стек (см. определение δ), значит, $(q_0, \sigma, w_0^R Z) \vdash (q_0, \varepsilon, \sigma w_0^R Z) \equiv (q_0, \varepsilon, w^R Z) \Rightarrow \underline{P(n+1)}$
   2. Из определения δ $(q_0, cw, \gamma) \vdash^* (q_1, w, \gamma)$, $|\gamma| > 0$.
   3. Докажем $(q_1, x, xZ) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$ по индукции по $|x|$: $P(n) \stackrel{\text{def}}{=} \big[\forall w \in \{a, b\}^* \colon |w| = n \hookrightarrow (q_1, x, xZ) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)\big]$
      i. $n = 0 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = \varepsilon$. Тогда $(q_1, x, xZ) \equiv (q_1, \varepsilon, Z) \Rightarrow P(0)$
      ii. Фиксируем $n \geqslant 0$. Пусть $\underline{P(n)}$. Пусть $x \in \{a, b\}^* \colon |x| = n + 1 \Rightarrow x = x_0\sigma, |x_0| = n \stackrel{P(n)}{\Rightarrow} (q_1, x_0, x_0 Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$. Тогда $(q_1, x, xZ) \equiv (q_1, x_0\sigma, x_0\sigma \overline{Z) \vdash^*} (q_1, \sigma, \sigma Z)$. Входной символ совпадает с символом на верхушке стека, из определения δ получаем, что символ будет удален из стека: $(q_1, \sigma, \sigma Z) \vdash (q_1, \varepsilon, Z) \Rightarrow P(n)$.
   4. Из определения δ имеем $(q_1, \sigma_1 x, \sigma_2\gamma) \vdash (q_2, x, \sigma_2\gamma)$ при $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \{a, b\}^*$.
   5. Из определения δ имеем $(q_2, x, \gamma) \vdash^* (q_2, \varepsilon, \gamma)$, $x \in \{a, b\}^*$ (доказывается очевидно по индукции).
   6. Из определения δ имеем $(q_1, x, Z) \vdash (q_3, x, Z)$
   7. Из определения δ имеем $(q_3, \sigma x, Z) \vdash (q_4, x, Z)$, $\sigma \in \{a, b\}$.

8. Из определения δ имеем $(q_4, x, Z) \vdash^* (q_4, \varepsilon, Z)$, $x \in \{a, b\}^*$ (доказывается очевидно по индукции).
9. Пусть $w \in L \Rightarrow w = xcy, x \neq y^R; x, y \in \{a, b\}^*$. $x \neq y^R \Leftrightarrow x^R \neq y$. Рассмотрим случаи:
    i. Выделим максимальную по длине общую часть w длины i у слов x^R и y: $x^R = wx_1, y = wy_1$, $x_1 \neq y_1$. Тогда $x = x_1^R w^R, w = xcy = x_1^R w^R cwy_1$. Цепочка конфигураций:
    $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, x_1^R w^R cwy_1, Z) \overset{31}{\vdash^*} (q_0, cwy_1, wx_1 Z) \overset{32}{\vdash} (q_1, wy_1, wx_1 Z) \overset{33}{\vdash^*} (q_1, y_1, x_1 Z)$.
        A. $|x_1| > 0, |y_1| > 0$, $x_1[1] \neq y_1[1]$. Обозначим $y_1 = y^1 ... y^l$, $\forall i \in \overline{1, l} \hookrightarrow y^i \in \{a, b\}^*$. Тогда $(q_1, y_1, x_1 Z) \equiv (q_1, y^1 ... y^l, x_1 Z) \overset{34}{\vdash} (q_2, y^2 ... y^l, x_1 Z) \overset{35}{\vdash^*} (q_2, \varepsilon, x_1 Z)$. $q_2 \in F \Rightarrow \underline{w \in L(\mathcal{A})}$.
        B. $|x_1| = 0, |y_1| > 0$. $y_1 = \sigma y_0$, $\sigma \in \{a, b\}$. $(q_1, y_1, x_1 Z) \equiv (q_1, \sigma y_0, Z) \overset{36}{\vdash} (q_3, \sigma y_0, Z) \overset{37}{\vdash} (q_4, y_0, Z) \overset{38}{\vdash^*} (q_4, \varepsilon, Z)$. $q_4 \in F \Rightarrow \underline{w \in L(\mathcal{A})}$.
        C. $|x_1| > 0, |y_1| = 0$. Тогда $(q_1, y_1, x_1 Z) \equiv (q_1, \varepsilon, x_1 Z)$.



Задача 2

Задача 3

Задача 4

Задача 5

Задача 6