

Статистическое обучение

Задание 1

Сергей Володин, 374 гр.

задано 2017.02.19

Meta

Делал один. Список ссылок:

1. <http://www.stat.cmu.edu/~arinaldo/36788/subgaussians.pdf>
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Holder's_inequality

Упражнение 1

1. Неравенство Маркова: Если $X \geq 0$, то $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}X}{\varepsilon}$. Нужно: $P(X \geq \varepsilon) = \frac{\mathbb{E}X}{\varepsilon}$. Найдем $P(X < \varepsilon) = 1 - \frac{\mathbb{E}X}{\varepsilon}$, $f_X(x) = \frac{\mathbb{E}X}{x^2}$. Тогда $\mathbb{E}X = \int_0^\infty x f_X(x) dx = \int_0^\infty \mathbb{E}X \frac{dx}{x}$. Поскольку интеграл $\int_0^\infty \frac{dx}{x}$ расходится, то $\mathbb{E}X = 0$. Значит, $\boxed{X = 0}$. Проверим: $0 = P(0 \geq \varepsilon) = \frac{0}{\varepsilon}$ ■
2. Неравенство Чебышева: $P(|X - \mathbb{E}X| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$. Если обозначить $\eta = |X - \mathbb{E}X|^2$, то получим неравенство Маркова. Возьмем предыдущий пример $\Rightarrow \eta = 0 \Rightarrow X = c$ (константа). Проверим: $0 = P(0 \geq a) = \frac{0}{a^2}$ (для константы $\sigma = 0$) ■

Упражнение 2.1

Имеем: $Y \geq 0$ — случайная величина, числа $A \geq 2, B > 0$. $\forall \varepsilon \geq 0 \hookrightarrow P(Y \geq \varepsilon) \leq A \exp(-\frac{\varepsilon^2}{B^2})$.

1. Оценим $\mathbb{E}e^{\lambda Y^2} = 1 + \int_1^\infty P(e^{\lambda Y^2} > x) dx$. Перепишем $e^{\lambda Y^2} > x \Leftrightarrow \lambda Y^2 > \ln x \Leftrightarrow Y > \sqrt{\frac{\ln x}{\lambda}}$. Значит, $\mathbb{E}e^{\lambda Y^2} \leq 1 + A \int_1^\infty x^{-1/\lambda B^2} dx = 1 + A \frac{1}{1/\lambda B^2 - 1}$ при условии $\lambda \in (0, 1/B^2)$. Берём $\lambda = 1/2B^2$. Тогда $\mathbb{E}e^{\lambda Y^2} \leq 1 + A \leq 2A$ при $A \geq 2$
2. $\mathbb{E}Y = \sqrt{\frac{1}{\lambda} \ln e^{\lambda(\mathbb{E}Y)^2}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{1}{\lambda} \ln \mathbb{E}e^{\lambda Y^2}}}_{\text{Йенс. } e^{\lambda x^2}} \leq \underbrace{\sqrt{2B^2 \ln 2A}}_{(1)} = \sqrt{2}B\sqrt{\ln 2A}$. Заметим, что при $A \geq 2, \sqrt{\ln 2A} \leq \sqrt{2 \ln A}$.

Тогда $\mathbb{E}Y \leq \boxed{2B\sqrt{\ln A}}$. То есть, проведено доказательство для $C = 2$.

Упражнение 2.2

Имеем: $Y \geq 0$ — случайная величина, числа $A \geq 2, B > 0$. $\forall \varepsilon \geq 0 \hookrightarrow P(Y \geq \varepsilon) \leq A \exp(-\frac{\varepsilon}{B})$.

1. Оценим $\mathbb{E}e^{\lambda Y} = 1 + \int_1^\infty P(e^{\lambda Y} > x) dx$. Рассмотрим $e^{\lambda Y} > x \Leftrightarrow Y > \frac{\ln x}{\lambda}$. $P(Y > \frac{\ln x}{\lambda}) \leq A e^{-\frac{\ln x}{\lambda B}} = A x^{-1/\lambda B}$. Тогда $\mathbb{E}e^{\lambda Y} \leq 1 + A \int_1^\infty x^{-1/\lambda B} dx$ при $\lambda B < 1$. Берем $\lambda = 1/2B$. Тогда $\mathbb{E}e^{\lambda Y} \leq 1 + A \leq 2A$
2. $\mathbb{E}Y = \frac{1}{\lambda} \ln e^{\lambda \mathbb{E}Y} \leq \frac{1}{\lambda} \ln \mathbb{E}e^{\lambda Y} \leq \frac{1}{\lambda} 2A = 2B \ln 2A \leq \boxed{4B \ln A}$

Упражнение 3.1

<http://www.stat.cmu.edu/~arinaldo/36788/subgaussians.pdf>

https://en.wikipedia.org/wiki/Holder's_inequality

Случайная величина X — субгауссовская с параметром $\sigma \Leftrightarrow \mathbb{E}e^{\lambda X} \leq e^{\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}}$.

Пусть X_1, X_2 — субгауссовские с параметрами σ_1 и σ_2 . $Y = X_1 + X_2$. Доказать: Y — субгауссовская для некоторого σ . $\mathbb{E}e^{\lambda Y} = \mathbb{E}e^{\lambda X_1} e^{\lambda X_2}$.

Неравенство Гёльдера для мат.ожиданий $\xi, \eta \geq 0, 1/p + 1/q = 1$:

$$\mathbb{E}\xi\eta \leq (\mathbb{E}\xi^p)^{1/p} (\mathbb{E}\eta^q)^{1/q}$$

Тогда $\mathbb{E}e^{\lambda Y} \leq (\mathbb{E}e^{p\lambda X_1})^{1/p} (\mathbb{E}e^{q\lambda X_2})^{1/q} \leq (e^{(p\lambda)^2 \sigma_1^2 / 2})^{1/p} (e^{(q\lambda)^2 \sigma_2^2 / 2})^{1/q} = e^{\frac{\lambda^2}{2} (p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2)} \rightarrow \min_{1/p + 1/q = 1}$

Поскольку $1/p + 1/q = 1$, $q = \frac{p}{p-1}$. Тогда $p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 = p\sigma_1^2 + \frac{p}{p-1}\sigma_2^2 \rightarrow \min_p \Rightarrow p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1}$, $q = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_2}$.

Тогда $\mathbb{E}e^{\lambda Y} \leq e^{\frac{\lambda^2(\sigma_1 + \sigma_2)^2}{2}}$

Тогда $\boxed{\sigma = \sigma_1 + \sigma_2}$

Упражнение 3.1.1

Пусть $X_1 = X_2 \sim N(0, \sigma_0^2)$. Тогда $\mathbb{E}e^{\lambda X_i} = e^{\lambda^2 \sigma_0^2 / 2}$. А $\mathbb{E}e^{\lambda(X_1 + X_2)} = \mathbb{E}e^{2\lambda X_i} = e^{\lambda^2 (2\sigma_0)^2 / 2}$. В этом примере $\sigma = 2\sigma_0$ ■

Упражнение 3.2

Пусть $X \sim N(0, 1)$. Тогда X — субгауссовская с параметром 1. Определим $X_1 = X$, $X_2 = X$ — две субгауссовские величины. Определим $Y = X_1 X_2$. Но $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X^2 = 1 \neq 0$, значит, Y не может быть субгауссовской

Упражнение 3.3

Обозначим $f(\lambda) = \mathbb{E}e^{\lambda X}$, $g(\lambda) = e^{\sigma^2 \lambda^2 / 2}$. $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{E}X^k = 1 + \lambda \mathbb{E}X + \frac{\lambda^2}{2} \mathbb{E}X^2 + \dots$. Значит, $f'(0) = \mathbb{E}X$. Найдём $g'(\lambda) = \lambda g(\lambda)$. Найдём $f(0) = g(0) = 1$. Значит, $g'(0) = 0$. Обозначим $h(\lambda) = f(\lambda) - g(\lambda)$. По условию, $h(\lambda) \leq 0$. Поскольку $h(0) = 0$, то $h'(0) = 0$. Но $h'(0) = f'(0) - g'(0) = \mathbb{E}X$. Значит, $\boxed{\mathbb{E}X = 0}$

Упражнение 3.4

Source: <http://www.stat.cmu.edu/~arinaldo/36788/subgaussians.pdf>

Пусть $\xi \geq 0$ — случайная величина, $f(\xi)$ — функция: $f(0) = 0$. Докажем, что $\mathbb{E}f(\xi) = \int_0^{\infty} f'(t)P(\xi > t)dt$

$$\int_0^{\infty} f'(t)P(\xi > t)dt = \int_0^{\infty} dt f'(t) \int_t^{\infty} dq f_{\xi}(q) = \int_0^{\infty} dq f_{\xi}(q) \underbrace{\int_0^q f'(t)dt}_{f(q) - f(0)} = \int_0^{\infty} f_{\xi}(q)f(q)dq = \mathbb{E}f(\xi) \quad \blacksquare$$

Тогда $\mathbb{E}|X|^p = \int_0^{\infty} p y^{p-1} P(|X| > y) dy$

Поскольку X — субгауссовская с параметром σ , то по неравенству Чернова $P(|X| > y) \leq 2e^{-y^2/2\sigma^2}$. Подставим в интеграл:

$$\mathbb{E}|X|^p \leq \int_0^{\infty} p y^{p-1} 2e^{-y^2/2\sigma^2} dy = \left| t = \frac{y^2}{2\sigma^2}, dy = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2t}} dt \right| = \int_0^{\infty} p(2t\sigma^2)^{(p-1)/2} 2e^{-t} \sqrt{\sigma^2/2t} dt = p(2\sigma^2)^{p/2} \int_0^{\infty} t^{p/2-1} e^{-t} dt =$$

$$= p(2\sigma^2)^{p/2} \Gamma(p/2).$$

Поскольку $\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Формула Стирлинга).

Тогда $\mathbb{E}|X|^p \leq C(\sigma) p(2\sigma^2)^{p/2} \sqrt{\pi p} \left(\frac{p}{2e}\right)^{p/2}$ и $C(\sigma) \geq 1$

Значит, $(\mathbb{E}|X|^p)^{p/2} \leq C^{1/p}(\sigma) p^{3/2p} (2\sigma^2)^{1/2} \sqrt{\pi} (2e)^{-1/2} p^{1/2}$

Поскольку $C \geq 1$ и $p \geq 1$, $C^{1/p} \leq p$

$p^{3/2p} \leq D$ — ограниченная функция

Получаем $(\mathbb{E}|X|^p)^{p/2} \leq \underbrace{C(\sigma) D (2\sigma^2)^{1/2} \sqrt{\pi/2e}}_{K(\sigma)} p^{1/2} = K(\sigma) \sqrt{p} \quad \blacksquare$

Упражнение 4.1

Плотность нормального распределения: $\psi(x) = f_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Тогда $\frac{d}{dx} \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-2x/2) e^{-\frac{x^2}{2}} = -x\psi(x)$.

Значит, $\boxed{x\psi(x) + \psi'(x) = 0}$

Упражнение 4.2

Обозначим $f_1(x) = \psi(x)(1/x - 1/x^3)$, $f_2(x) = P(X \geq x) = \int_x^{\infty} \psi(t)dt$, $f_3(x) = \psi(x)(1/x - 1/x^3 + 3/x^5)$. Доказать: при $x > 0$ $f_1 \leq f_2 \leq f_3$. Обозначим $g(x) = f_2(x) - f_1(x)$, $h(x) = f_3(x) - f_2(x)$. Нужно доказать, что $g, h \geq 0$.

Тогда $f_1'(x) = -x\psi(x)(1/x - 1/x^3) + \psi(x)(-1/x^2 + 3/x^4) = \psi(x)(3/x^4 - 1)$, $f_2'(x) = -\psi(x)$, $f_3'(x) = \psi(x)(-15/x^6 - 1)$.

Тогда $g'(x) = -\frac{3\psi(x)}{x^4} < 0$, $h'(x) = -\frac{15\psi(x)}{x^6} < 0$.

$g(+0) = +\infty$, $h(+0) = +\infty$.

$$g(+\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \cancel{f_2(x)} - f_1(x) = - \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\psi(x)}_{\rightarrow 0} \underbrace{(1/x - 1/x^3)}_{\rightarrow 0} = 0$$

$$h(+\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_3(x) - \cancel{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\psi(x)}_{\rightarrow 0} \underbrace{(1/x - 1/x^3 + 3/x^5)}_{\rightarrow 0} = 0$$

Получаем две строго монотонно убывающие непрерывные функции g, h на $(0, +\infty)$, причем обе стремятся к 0. Значит, $\forall x > 0 \Leftrightarrow g, h > 0$ ■

Упражнение 4.3

Рассмотрим $P(X \geq x) \leq \inf_{\lambda > 0} \frac{\mathbb{E}e^{\lambda X}}{e^{\lambda x}}$. Для нормальной случайной величины $\mathbb{E}e^{\lambda X} = e^{\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} + \mu x} = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$. Значит, $\inf_{\lambda > 0} \frac{\mathbb{E}e^{\lambda X}}{e^{\lambda x}} = \inf_{\lambda > 0} \exp(\frac{\lambda^2}{2} - \lambda x)$. Находим $\lambda^* = x > 0$, получаем $P(X \geq x) \leq \exp(-\frac{x^2}{2}) = \sqrt{2\pi}\psi(x)$

Имеем две оценки: $\begin{cases} P(X \geq x) \leq \psi(x)(1/x - 1/x^3 + 3/x^5) \\ P(X \geq x) \leq \sqrt{2\pi}\psi(x) \end{cases}$

Поделим $\frac{\psi(x)(1/x - 1/x^3 + 3/x^5)}{\sqrt{2\pi}\psi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1/x - 1/x^3 + 3/x^5) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}$. Значит, оценка в (4.2) лучше, чем оценка в (4.3).

Упражнение 4.4

Рассмотрим $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $\{\xi_i\}$ — i.i.d., $\xi_i \sim Be(p)$:

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$

$q = 1 - p$. $\zeta_i = \frac{\xi_i - p}{\sqrt{npq}}$. Тогда $\mathbb{E}\zeta_i = 0$. Обозначим $S = \sum_{i=1}^n \zeta_i$. Тогда $\mathbb{E}S = 0$, $\mathbb{D}S = 1$.

$\zeta_i \in [-\frac{p}{\sqrt{npq}}, \frac{1-p}{\sqrt{npq}}]$ — субгауссовская с $\sigma_i^2 = \frac{1}{4npq}$ по Лемме Хёффдинга.

1. Неравенство Хёффдинга.

$$P(S \geq \varepsilon) \leq e^{-\varepsilon^2/2n\sigma_i^2} = e^{-2\varepsilon^2 pq}$$

2. Теорема Муавра-Лапласа:

$$P(\sum \xi_i \geq \varepsilon) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}} \right)^2} dx$$

$$\text{Найдем } P(S \geq \varepsilon) = P\left(\frac{\sum \xi_i - np}{\sqrt{npq}} \geq \varepsilon\right) = P(\sum \xi_i \geq \varepsilon\sqrt{npq} + np) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \int_{\varepsilon\sqrt{npq}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{npq}} \right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

Первая оценка $F_1(\varepsilon) = e^{-2\varepsilon^2 p(1-p)}$ зависит от p . Вторая оценка $F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$ не зависит от p . Пусть $n \rightarrow \infty$.

1. $p \rightarrow 0$ или $q \rightarrow 0$. Тогда Неравенство Хёффдинга даст $F_1(\varepsilon) = 1$, то есть, оценка бесполезна. Теорема Муавра-Лапласа даст число $F_2(\varepsilon) < 1$. В этом случае теорема Муавра-Лапласа лучше.

2. $p = \frac{1}{2}$. Тогда $1/4 = pq \rightarrow \max$. Значения $F_1(\varepsilon) = e^{-\varepsilon^2/2}$, $F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$. Обозначим $h(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Тогда

$h(0) = 1/2$, $h'(x) = e^{-x^2/2}(1/\sqrt{2\pi} - x)$. h возрастает, а затем убывает. $h(+\infty) = 0$. То есть, всегда $F_1 \geq F_2$. Это значит, что даже при $p = 1/2$ теорема Муавра-Лапласа дает лучшую оценку

Упражнение 5.1

$f^* = \arg \min_{f \in Y^X} L(f)$. $L(f) = \mathbb{E}_{X \times Y}[f(X) \neq Y] = \mathbb{E}_X \mathbb{E}_{Y|X}[f(X) \neq Y] = \mathbb{E}_X P(f(X) \neq Y|X)$. Фиксируем X , т.е. рассмотрим одно слагаемое (или подынтегральный член):

$P(f(X) \neq Y|X) = P(f = 1|X, Y = -1)P(Y = -1|X) + P(f = -1|X, Y = 1)P(Y = 1|X)$. Поскольку f зависит только от X , $P(f(X) = 1|X, Y = -1) = P(f(X) = 1|X)$. В этой сумме одна из скобок $[f(X) = \cdot]$ равна 1, а другая 0, в зависимости от значения f на X . Значит, для минимизации $\mathbb{E}_{Y|X}[f(X) \neq Y]$ нужно взять $f(X) = \arg \min_j P(Y = j|X)$

Рассмотрим $\eta(x) = \mathbb{E}[Y|X = x] = P(Y = 1|X = x) - P(Y = -1|X = x)$. Значит, $\text{sign } \eta(x) = \arg \min_j P(Y = j|X = x)$, то есть, $f^*(x) = \text{sign } \eta(x)$ ■

Упражнение 5.2

Фиксируем x . Обозначим $p = P(Y = +1|X = x)$. Тогда $\eta(x) = P(Y = +1|X = x) - P(Y = -1|X = x) = p - (1-p) = 2p - 1$. Знаем, что $|2p - 1| \geq h$. Значит, либо $p \geq \frac{h+1}{2}$, либо $p \leq \frac{1-h}{2}$

Поскольку $f^* = \text{sign}(2p - 1)$, то $[f^* = +1] = [p > 0.5]$, а $[f^* = -1] = [p < 0.5]$

$$\text{Рассмотрим } L(f^*) = \mathbb{E}_X \left(\underbrace{[p > 0.5](1-p) + [p < 0.5]p}_{l(x)} \right).$$

1. Пусть $p > 0.5$. Но тогда $p \geq \frac{1+h}{2}$. Значит, $l(x) \leq 1 - p = \frac{1-h}{2}$
 2. Пусть $p < 0.5$. Тогда $p \leq \frac{1-h}{2}$. Значит, $l(x) \leq p = \frac{1-h}{2}$
- Получаем, что $l(x) \leq \frac{1-h}{2}$. Тогда $L(f^*) = \mathbb{E}_X l(x) \leq \frac{1-h}{2}$ ■

Задача 1

Имеем $Y = \{-1, 1\}$ — метки классов, K — класс функций, $f^* = \arg \min_{f \in Y^X} L(f)$.

Рассмотрим различные элементы $x_1, x_2, x_3 \in X$.

Определим $f_i(x) = \begin{cases} \overline{f^*(x)}, & x \neq x_i \\ f^*(x), & x = x_i \end{cases}$, где $\overline{1} = -1$, $\overline{-1} = 1$.

Определим $F = \{f^*, \overline{f^*}, f_1, f_2, f_3\}$.

1. Halving (большинство). Рассмотрим произвольный $x \in X$ (первый шаг алгоритма). Если $x = x_i$, то получим значения функций $(f^*, \overline{f^*}, f^*, \overline{f^*}, f^*)$. Halving выдаст неверный ответ ($3 > 2$), то есть, $\overline{f^*}$. Если $x \neq x_i$, то получим значения функций $(f^*, \overline{f^*}, \overline{f^*}, f^*, \overline{f^*})$. Halving снова выдаст неверный ответ. То есть, количество ошибок Halving на произвольной выборке как минимум 1
2. Меньшинство без удалений. Алгоритм: голосуем меньшинством функций из F , не удаляем функции при неверном ответе. Пусть $x = x_i$. Получим значения $(f^*, \overline{f^*}, \overline{f^*}, f^*, \overline{f^*})$. Меньшинство: f^* (2 против 3). Получим правильный ответ. Пусть $x \neq x_i$. Получим значения $(f^*, \overline{f^*}, f^*, \overline{f^*}, \overline{f^*})$. Меньшинство: f^* (1 против 4). Снова правильный ответ. Поскольку удалений нет, на последующих объектах также не будет ошибок.

Построен алгоритм, который для данного F делает 0 ошибок, когда Halving делает как минимум 1 ■

Задача 2

Пусть X — объекты, $Y = \{-1, 1\}$ — метки классов. Пусть $F \subseteq Y^X$ — класс функций. $\exists f^* \in F: Y = f^*(X)$.

Определения обучаемости F :

$$1 - \delta: \exists A_n: (X \times Y)^n \rightarrow Y^X \exists n(\varepsilon, \delta) \forall \mathbb{P} \forall \varepsilon > 0 \forall \delta \in (0, 1) \forall N \geq n(\varepsilon, \delta) \hookrightarrow P(L(A(X_N))) - \inf_{f \in F} L(f) \leq \varepsilon \geq 1 - \delta$$

$$\frac{1}{2}: \exists A_n: (X \times Y)^n \rightarrow Y^X \exists n(\varepsilon) \forall \mathbb{P} \forall \varepsilon > 0 \forall N \geq n(\varepsilon) \hookrightarrow P(L(A(X_N))) - \inf_{f \in F} L(f) \leq \varepsilon \geq \frac{1}{2}$$

Докажем, что $(1 - \delta) \Leftrightarrow (\frac{1}{2})$

1. $(1 - \delta) \Rightarrow \frac{1}{2}$: определим A_n во втором определении как A_n из первого, определим $n(\varepsilon) = n(\varepsilon, \frac{1}{2})$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \geq n(\varepsilon, \frac{1}{2}) \hookrightarrow P(L(A(X_N))) - \inf_{f \in F} L(f) \leq \varepsilon \geq \frac{1}{2} \blacksquare$$

2. $(-)$

$\frac{1}{2} \Rightarrow (1 - \delta)$: Пусть $\overline{1 - \delta}$ и $\frac{1}{2}$:

Поскольку $\exists f^* \in F: f^*(X) = Y$, то $\inf_{f \in F} L(f) = 0$

Обозначим $Q(X_N) = L(A(X_N)) = \mathbb{E}_{X \times Y} [A(X_N)(x) \neq y] = P_{X \times Y}(A(X_N)(x) \neq y) = P_X(A(X_N)(x) \neq f^*(x))$

Обозначим $\alpha_{AFL}(\varepsilon, N) = P(L(A(X_N)) \leq \varepsilon) = P_{X_N}(\underbrace{P_X(A(X_N)(x) \neq f^*(x))}_{L(A(X_N))} \leq \varepsilon) = P_{X_N}(Q(X_N) \leq \varepsilon)$

Тогда имеющиеся условия можно переписать:

$$\begin{cases} \exists(A, n(\varepsilon)) & \forall(\mathbb{P}, \varepsilon, N \geq n(\varepsilon)) & \hookrightarrow & \alpha(\varepsilon, N) \geq \frac{1}{2} \\ \forall(A, n(\varepsilon, \delta)) & \exists(\mathbb{P}, \varepsilon, \delta, N \geq n(\varepsilon, \delta)) & : & \alpha(\varepsilon, N) < 1 - \delta \end{cases}$$

Возьмем $(A, n(\varepsilon))$ для (2) из (1). Тогда $\exists(\varepsilon, N \geq n(\varepsilon), \delta): \frac{1}{2} \leq \alpha(\varepsilon, N) < 1 - \delta$. Значит, $\delta < \frac{1}{2}$

В качестве алгоритма A выберем алгоритм из (1). Фиксируем $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

Найдем $n(\varepsilon, \delta)$, такое что $\forall N \geq n(\varepsilon, \delta) \hookrightarrow \alpha(\varepsilon, N) \geq 1 - \delta$.

Выберем $N \geq \max\{n(t), n(\varepsilon)\}$. Величину $t < \varepsilon$ выберем позже (при выборе нового t допустимые N могут только увеличиться, что только увеличит $\alpha(\varepsilon, N)$) **тут проблема**

Тогда $\alpha(\varepsilon, N) \geq \frac{1}{2}$, так как $N \geq n(\varepsilon)$. Также $\alpha(t, N) \geq \frac{1}{2}$

Рассмотрим $\alpha(\varepsilon, N) = \underbrace{P_{X_N}(Q(X_N) = 0) + P_{X_N}(Q(X_N) \in (0, t])}_{\alpha(t, N) \geq 1/2} + P_{X_N}(Q(X_N) \in (t, \varepsilon]) = p_0 + p_t + q_t \geq 1/2$.

Пусть $t \rightarrow 0$. Тогда $p_t \rightarrow 0$, $q_t \rightarrow \alpha(\varepsilon, N) - p_0$. Пусть $t \rightarrow \varepsilon$. Тогда $p_t \rightarrow \alpha(\varepsilon, N) - p_0$, $q_t \rightarrow 0$

- (a) $p_0 < \delta$. Тогда $q_t \xrightarrow{t \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon, N) - p_0 \geq 1/2 - p_0 > 1/2 - \delta$. Значит, можно выбрать t , такое что $q_t \geq 1/2 - \delta$. После выбора t получим $N \geq n(t)$ и $\alpha(t, N) = p_0 + p_t \geq 1/2$. Значит, $\alpha(\varepsilon, N) = \underbrace{p_0 + p_t}_{\alpha(t, N) \geq 1/2} + \underbrace{q_t}_{\geq 1/2 - \delta} \geq 1 - \delta$

- (b) $p_0 \geq \delta$. Тогда возможен случай $\forall N \geq n_0 P(Q(X_N) = 0) \geq 1/2$.