Теория и реализация языков программирования.
Задание 6: Грамматики

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.10.09

Задача 1

Задача 2

$\Sigma \overset{\text{def}}{=} \{a, b\}$, $\Sigma^* \supset L \overset{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \big| w = w^R\}$ — язык палиндромов из a, b.

1. Определим КС-грамматику $\Gamma \overset{\text{def}}{=} (\{S\}, \Sigma, P, S)$, $P \overset{\text{def}}{=} \big\{ \underbrace{S \longrightarrow \varepsilon}_{(1)}, \underbrace{S \longrightarrow aSa}_{(2)}, \underbrace{S \longrightarrow bSb}_{(3)}, \underbrace{S \longrightarrow a}_{(4)}, \underbrace{S \longrightarrow b}_{(5)} \big\}$.

   Докажем, что $L(\Gamma) = L$:

   (a) $L(\Gamma) \subseteq L$. Пусть $w \in L(\Gamma) \Rightarrow S \Longrightarrow^* w$. $|w| = n$. Рассмотрим последовательность $\{w_k\}_{k=0}^I \subset (N \cup \Sigma)^*$ слов в выводе. $w_0 = S$, $w_I = w$. Индукцией по k докажем $P(k) = \left[w_k = w_k^R, \forall i \colon w_k[i] = S \hookrightarrow i = \frac{|w_k|+1}{2}\right]$.

   1. $k = 0 \Rightarrow w_k \equiv w_0 = S$. Поэтому $\exists! i = 1 \colon w_0[i] = S$. Но $1 \equiv \frac{1+1}{2}$ и $w_0^R = S^R = S = w_0 \Rightarrow P(0) \blacksquare$
   2. Пусть $P(n)$, $n < I$. Докажем, $P(n+1)$. $P(n) \Rightarrow w_n = w_n^R$, $\forall i \colon w_n[i] = S \hookrightarrow i = \frac{|w_n|+1}{2}$.
      Предположим, что $\nexists i \colon w_n[i] = S \Rightarrow w \in \Sigma^*$. Тогда ни одно правило не может быть применено, так как в левой части каждого правила $S \in N$. Но $n < I$ (это не конец вывода) $\Rightarrow$ противоречие.
      Значит, $\exists i \colon w_n[i] = S$. Но $P(n) \Rightarrow \forall i \colon w_n[i] = S \hookrightarrow i = \frac{|w_n|+1}{2}$. Поэтому $\exists! i = \frac{|w_n|+1}{2} \colon w_n[i] = S$. Значит, $w_n = xSy$, $|x| = |y|$, $x, y \in \Sigma^*$. $w_n^R = y^R S x^R$. S в w_n входит один раз $\Rightarrow x = y^R$.
      Рассмотрим правила (1)—(4):

      (1). $w_n = xSy \overset{(1)}{\Longrightarrow} x\varepsilon y \equiv xy = xx^R = w_{n+1}$ — палиндром: $(xx^R)^R = x^{R^R} x^R = xx^R$. $w_{n+1} = xy \in \Sigma^* \Rightarrow \forall i \hookrightarrow w_{n+1}[i] \neq S \Rightarrow P(n+1) \blacksquare$

      (2). $w_n = xSx^R \overset{(2)}{\Longrightarrow} xaSax^R = w_{n+1}$. $w_{n+1}^R = x^{R^R} a^R S^R a^R x^R = xaSax^R \equiv w_{n+1}$. $a \neq S \Rightarrow \exists! i \colon w_{n+1} = S$, $i = \frac{|w_n|+1}{2} + 1 = \frac{|w_n|+3}{2} \equiv \frac{|w_{n+1}|+1}{2} \Rightarrow P(n+1) \blacksquare$.

      (3). $w_n = xSx^R \overset{(3)}{\Longrightarrow} xbSbx^R = w_{n+1}$. $w_{n+1}^R = x^{R^R} b^R S^R b^R x^R = xbSbx^R \equiv w_{n+1}$. $b \neq S \Rightarrow \exists! i \colon w_{n+1} = S$, $i = \frac{|w_n|+1}{2} + 1 = \frac{|w_n|+3}{2} \equiv \frac{|w_{n+1}|+1}{2} \Rightarrow P(n+1) \blacksquare$.

      (4). $w_n = xSx^R \overset{(4)}{\Longrightarrow} xax^R = w_{n+1}$. $w_{n+1}^R = x^{R^R} a^R x^R = xax^R \equiv w_{n+1}$. $w_{n+1} = xax^R \in \Sigma^* \Rightarrow \forall i \hookrightarrow w_{n+1}[i] \neq S \Rightarrow P(n+1) \blacksquare$

      (5). $w_n = xSx^R \overset{(5)}{\Longrightarrow} xbx^R = w_{n+1}$. $w_{n+1}^R = x^{R^R} b^R x^R = xbx^R \equiv w_{n+1}$. $w_{n+1} = xbx^R \in \Sigma^* \Rightarrow \forall i \hookrightarrow w_{n+1}[i] \neq S \Rightarrow P(n+1) \blacksquare$

      Итак, доказано $\forall k \in \overline{0, I} \hookrightarrow P(k) \Rightarrow P(I) \Rightarrow w \equiv w_I \overset{P(I)}{=} w_I^R \equiv w^R \Rightarrow w \in L \blacksquare$

   (b) $L \subseteq L(\Gamma)$. Пусть $w \in L \Rightarrow w^R = w$. $|w| = n$. Рассмотрим $n \mod 2$:

   0. $n \mod 2 = 0 \Rightarrow w = xy$, $|x| = |y|$. $w = w^R \Rightarrow xy = y^R x^R$. Поскольку $|x| = |y|$, $y = x^R \Rightarrow \boxed{w = xx^R}$.
   0. $n \mod 2 = 1 \Rightarrow w = x\sigma y$, $|x| = |y|$, $\sigma \in \Sigma$. $w = w^R \Rightarrow x\sigma y = y^R \sigma^R x^R = y^R \sigma x^R$. Так как $|x| = |y|$, $y = x^R \Rightarrow \boxed{w = x\sigma x^R}$.

   Значит, $L = \{xx^R, xax^R, xbx^R \big| x \in \Sigma^*\}$.

   Построим вывод $S \Longrightarrow^* xSx^R$:

   a. Пусть $x = \varepsilon$. $S \overset{(1)}{\Longrightarrow} \varepsilon = \varepsilon\varepsilon^R = w \Rightarrow w \in L(\Gamma) \blacksquare$.
   b. Иначе $x = x_1 \ldots x_m$, $\forall i \in \overline{1, m} \hookrightarrow x_i \in \Sigma$. Рассмотрим символы $x_m, \ldots, x_1$. Применим правило (2), если $x_i = a$ и (3) иначе. Примененное правило обозначим за $R(i)$ Получим $S \overset{(R(m))}{\Longrightarrow} x_m S x_m \Longrightarrow \ldots \overset{(R(1))}{\Longrightarrow} x_1 \ldots x_m S x_m \ldots x_1$.

   Теперь покажем, как получить w:

   1. $w = xx^R$. Было получено $S \Longrightarrow^* xSx^R$. Тогда $S \Longrightarrow^* xSx^R \overset{(1)}{\Longrightarrow} xx^R \blacksquare$
   2. $w = xax^R$. Было получено $S \Longrightarrow^* xSx^R$. Тогда $S \Longrightarrow^* xSx^R \overset{(4)}{\Longrightarrow} xax^R \blacksquare$
   3. $w = xbx^R$. Было получено $S \Longrightarrow^* xSx^R$. Тогда $S \Longrightarrow^* xSx^R \overset{(5)}{\Longrightarrow} xbx^R \blacksquare$

   Получаем $w \in L(\Gamma)$.

   $\boxed{\text{Ответ: } \Gamma \overset{\text{def}}{=} (\{S\}, \Sigma, P, S),\ P \overset{\text{def}}{=} \big\{S \longrightarrow \varepsilon,\ S \longrightarrow aSa,\ S \longrightarrow bSb,\ S \longrightarrow a,\ S \longrightarrow b\big\}}$

2. Определим грамматику $\overline{\Gamma}$

Задача 3

$\Sigma \overset{\text{def}}{=} \{a, b\}$. $\Sigma^* \supset L^= \overset{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \big| |w|_a = |w|_b\}$. КС-грамматика $\Gamma = \{N, \Sigma, P, S\}$,
$P \overset{\text{def}}{=} \{ \underbrace{S \longrightarrow SS}_{(1)}, \underbrace{S \longrightarrow aSb}_{(2)}, \underbrace{S \longrightarrow bSa}_{(3)}, \underbrace{S \longrightarrow \varepsilon}_{(4)} \}$.
Докажем, что $L(\Gamma) = L^=$:

- $L(\Gamma) \subset L$. $w \in L(\Gamma) \Rightarrow S \Longrightarrow^* w$. Пусть $\{w_k\}_{k=0}^I \subset (N \cup \Sigma)^*$ — последовательность слов при выводе.
  $P(k) \overset{\text{def}}{=} \big[|w_k|_a = |w_k|_b\big]$. Докажем, что $\forall k \in \overline{0, I} \hookrightarrow P(k)$:

  1. $k = 0 \Rightarrow w_k \equiv w_0 = S$. $|w_k|_a = |S|_a = 0 = |S|_b = |w_k|_b \Rightarrow P(0)$.
  2. $P(n) \Rightarrow |w_n|_a = |w_n|_b$. $n < I$. Пусть $w_n \overset{(i)}{\Longrightarrow} w_{n+1}$. Каждое из правил (1)—(4) сохраняет равенство между $|w|_a$ и $|w|_b$:
     (1) и (4) не изменяют их, а (2) и (3) увеличивают каждое на 1 $\Rightarrow |w_{n+1}|_a = |w_{n+1}|_b \Rightarrow P(n+1)$

  Получаем $P(I) \Rightarrow |w|_a \equiv |w_I|_a \overset{P(I)}{=} |w_I|_b \equiv |w|_b \Rightarrow w \in L^=$.

- $L \subset L(\Gamma)$.
  Определим $S\colon \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{Z}$: $w \in \Sigma^* \Rightarrow S(w) = |w|_a - |w|_b$. $w \in L^= \Leftrightarrow |w|_a = |w|_b \Leftrightarrow S(w) = 0$. $|w| = n$. $w \in \Sigma^* \Rightarrow |w| = |w|_a + |w|_b = 2|w|_a \Rightarrow |w|$ — четно $\Rightarrow n = 2m$.

  Пусть $L \ni w = axa$. Тогда $0 = S(w) = |axa|_a - |axa|_b = 2 + S(x) \Rightarrow S(x) = -2$. Отсюда следует, что $|x| \geqslant 0$. Пусть $|x| = t$, $x = x_1...x_t, \forall i \in \overline{1, t} \hookrightarrow x_i \in \Sigma$. Обозначим $f(t)\colon \overline{1, t} \longrightarrow \mathbb{Z}$: $f(i) = S(ax_1...x_i)$. Тогда $f(0) \equiv S(a) = 1$, $f(t) \equiv S(ax_1...x_t) = 1 + S(x) = 1 - 2 = -1$. Заметим, что $|f(t+1) - f(t)| = 1$ *(«аналог непрерывности»)*. Поэтому $\exists i \in \overline{1, t}$: $f(t) = 0$ *«принимает промежуточное значение»*. Получаем, что $w = ax_1...x_ix_{i+1}...x_ta = w_lw_r$. Поскольку $0 = S(w) = S(w_l) + S(w_r)$ и $S(w_l) \equiv f(i) = 0$, $S(w_r) = 0$. $S(w_l) = S(w_r) = 0 \Rightarrow w_l, w_r \in L$. Поскольку $|w_l|, |w_r| \geqslant |a| = 1, |w|_l, |w_r| \leqslant |w| - 1$. Но $w, w_l, w_r \in L \Rightarrow |w|, |w_l|, |w_r|$ — четные. значит, $|w_l|, |w_r| \leqslant |w| - 2$. Итак, $w = axa \in L \Rightarrow w = w_lw_r, |w_l|, |w_r| \in \overline{1, |w| - 2}, w_l, w_r \in L$. Аналогично доказываем для $L \ni w = bxb$. Получаем $\boxed{w = \sigma x \sigma \in L \Rightarrow w = w_lw_r, |w_l|, |w_r| \in \overline{1, |w| - 2}, w_l, w_r \in L}$.

  $P(m) \overset{\text{def}}{=} \big[\forall w \in L\colon |w| = 2m \hookrightarrow w \in L(\Gamma)\big]$. Докажем $\forall i \geqslant 0 \hookrightarrow P(i)$:

  1. $m = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$. $S \overset{(4)}{\Longrightarrow} \varepsilon = w \Rightarrow w \in L(\Gamma)$
  2. Пусть $P(m)$. Докажем $P(m+1)$. Рассмотрим $w \in L$: $|w| = 2(m+1) > 2$. Значит, $w = \sigma_1 x \sigma_2$. Заметим, что $|x| = 2m$. Рассмотрим варианты для (σ_1, σ_2):
     1. $\sigma_1 = a, \sigma_2 = b$. Тогда $w \in L \Rightarrow 0 = S(w) = |axb|_a - |axb|_b = 1 + |x|_a - |x|_b - 1 = S(x)$. Как было замечено, $|x| = 2m$, поэтому, по предположению индукции, $S \overset{P(m)}{\Longrightarrow^*} x$. Но $S \overset{(2)}{\Longrightarrow} aSb \overset{P(m)}{\Longrightarrow^*} axb \Rightarrow w \in L(\Gamma)$
     2. $\sigma_1 = b, \sigma_2 = a$. Аналогично получаем $w = bxa$, $x \in L(\Gamma) \Rightarrow S \overset{(3)}{\Longrightarrow} bSa \overset{P(m)}{\Longrightarrow^*} bxa \Rightarrow w \in L(\Gamma)$

     3, 4. $\sigma \overset{\text{def}}{=} \sigma_1 = \sigma_2$. Разобьем слово $w = \sigma x \sigma$ на *подслова* $w = w_1...w_k$,
     $\forall i \in \overline{1, k} \hookrightarrow w_i \in \Sigma^* \cap L$, $|w_i| \leqslant |w| - 2$, $w_i[1] \neq w_i[|w_i|]$.
     Для этого воспользуемся утверждением в рамочке (см. выше): разобьем $w = w_lw_r$, потом, если первый и последний символы w_l совпадают, повторим для него (возможно, так как $w_l \in L$ по построению): $w_l = w_{ll}w_{lr}$, аналогично для w_r. Всего разбиений будет не больше $|w|$, так как части разбиения непустые (см. утверждение) $\Rightarrow$ алгоритм конечен. Каждое разбиение дает подслова из L — также см. утверждение. И части разбиения не длиннее исходного слова, а также $w_l, w_r \leqslant |w| - 2$. Значит, $w_i \leqslant |w| - 2$. Поэтому $S \overset{P(m)}{\Longrightarrow^*} w_l$, $S \overset{P(m)}{\Longrightarrow^*} w_r$ — по предположению индукции. Покажем, как вывести w из S: воспользуемся правилом (1) $k - 1$ раз:
     $S \overset{(1)}{\Longrightarrow} SS \overset{(1)}{\Longrightarrow} ... \overset{(1)}{\Longrightarrow} S^k$. Далее воспользуемся выводами w_i: $S^k \overset{\text{вывод } w_1}{\Longrightarrow^*} w_1S^{k-1} \Longrightarrow^* ... \overset{\text{вывод } w_k}{\Longrightarrow^*} w_1...w_k \equiv w \Rightarrow w \in L(\Gamma)$

Задача 4

$\Sigma \overset{\text{def}}{=} \{a, b\}$, $\Sigma^* \supset L \overset{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \big| |w|_b \leqslant |w|_a\}$. Определим грамматику Γ.

Задача 5