

# Теория и реализация языков программирования.

## Задание 7: контекстно-свободные языки и магазинные автоматы

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.10.16

### Упражнение 1

### Упражнение 2

### Упражнение 3

1. Грамматика  $\Gamma = (\{S\}, \Sigma_n \cup \bar{\Sigma}_n, P, S)$ .  $P = \{S \rightarrow \sigma_i \bar{\sigma}_i | \sigma_i S \bar{\sigma}_i | S S\}$ .  $D_n = L(\Gamma)$ .

2. Исходное утверждение:  $\forall w \left( \underbrace{w \in D_n}_A \Rightarrow \underbrace{\forall i \leq n \forall k \leq |w| \hookrightarrow ||w[1, k]||_i \geq 0, ||w||_i = 0}_B \right)$

3. Отрицание обратного утверждения:  $\exists w: (B \wedge \neg A)$ . Пусть  $w = \varepsilon$ .

а. Тогда  $k \leq |w| \Rightarrow k = 0$ , поэтому  $\forall i \leq n \hookrightarrow ||w[1, k]||_i \equiv |\varepsilon|_{\sigma_i} - |\varepsilon|_{\bar{\sigma}_i} = 0$  и  $\forall i \leq n \hookrightarrow ||w||_i = 0$ . Получаем  $B$ .

б. Но  $w = \varepsilon$  не порождается грамматикой  $\Gamma$ : первые два правила добавляют нетерминалов, поэтому не могут быть применены, и применение третьего правила не уменьшает количества нетерминалов. Получаем  $\neg A$  ■

4. Другой пример:  $\Sigma_2 = \{\{, \}, \bar{\Sigma}_2 = \{\}, \}$   $w = \{\{\}\}$ .

Тогда  $||w||_1 = ||w||_2 = 0$ , и  $||w[1, i]||_j \geq 0 \forall i \in \overline{1, 2} \forall j \in \overline{0, 2}$ , но  $w \notin D_2$  (не ПСВ).

### Задача 1

1. Определим МП-автомат  $\mathcal{A} = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, Z, \delta, F)$ , допускающий по пустому стеку.

(a)  $n \stackrel{\text{def}}{=} 2$

(b)  $\Sigma_n \stackrel{\text{def}}{=} \{[1, \dots, [n] \equiv \{[1, [2], \bar{\Sigma}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{]1, \dots, ]n\} \equiv \{]1, ]2\}$ .

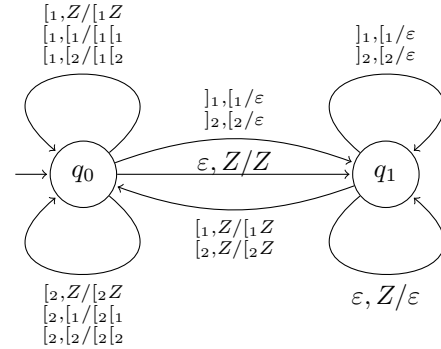
(c)  $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_n \cup \bar{\Sigma}_n \equiv \{[1, ]1, [2, ]2\}$

(d)  $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{Z\} \Sigma_n \equiv \{Z, [1, [2\}$ .

(e)  $Q \stackrel{\text{def}}{=} \{q_0, q_1\}$

(f)  $\delta$  изображена справа

(g)  $F \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$  ( $N$ -автомат)



2. Определим морфизм  $P: P: (\Sigma_n \cup \bar{\Sigma}_n)^* \rightarrow (\Sigma_n \cup \bar{\Sigma}_n)^*: P([i] = ]i, P([i] = [i$  — пары для скобок. Доопределим до морфизма:  $P(w_1 \dots w_l) = P(w_1) \dots P(w_l)$ .

3.  $L = D_2 \cap ([1[2]^*([1]2]^*)$ .  $w \in L \Rightarrow w = w_1 w_2$ ,  $w_1 = ([1[2]^{n_1}$ ,  $w_2 = ([1]2]^{n_2}$ .  $w \in D_2 \Rightarrow 0 = ||w||_i = ||w_1||_i + ||w_2||_i = |w_1|_{[i} + |w_2|_{[i} - |w_1|_{]i} - |w_2|_{]i}$ .  $w_1$  не содержит  $]i$ ,  $w_2$  не содержит  $[i$ , поэтому  $0 = |w_1|_{[i} - |w_2|_{]i}$ . Сложим равенства, получим  $0 = |w_1|_{[1} + |w_1|_{[2} - |w_2|_{]1} - |w_2|_{]2} \Rightarrow |w_1| = |w_2| \Rightarrow n_1 = n_2$ .

4.  $w \in L$ ,  $|w_1| = s$ ,  $w_1 = [i_1 \dots [i_s$ ,  $w_2 = ]j_1 \dots ]j_s$ . Докажем, что  $P(w_2) = w_1^R$ :

$Q(k) \stackrel{\text{def}}{=} [P(w_2)[1, k] = w_1^R[1, k]$ .

а. Очевидно,  $Q(0)$ , так как  $P(w_2)[1, 0] \equiv \varepsilon \equiv w_1^R[1, 0]$ .

б. Пусть  $Q(k)$ . Тогда  $w_1 = p[i_{s-k+1} \dots [i_s$ ,  $w_2 = ]i_s \dots ]i_{s-k+1} q$ . То есть,  $k$  скобок от центра парные друг к другу. Обозначим их за  $t = [i_{s-k+1} \dots [i_s]i_s \dots ]i_{s-k+1} \Rightarrow ||t||_i = 0$ ,  $t$  — ПСВ. Предположим  $\neg Q(k+1) \stackrel{Q(k)}{\Rightarrow} P(w_2)[k+1] \neq w_1^R[k+1]$ . Без ограничения общности  $p = p_0[1, q = ]_2 q_0$ . Тогда  $w = p_0[1 t ]_2 q_0$ . Но  $t$  — ПСВ, поэтому пара для  $[1$  — в  $q_0$ , пара для  $]_2$  — в  $p_0$ :  $w = \dots [2 \dots [1 t ]_2 \dots ]_1 \dots$  — не ПСВ  $\Rightarrow w \notin D_2$  — противоречие. Значит,  $Q(k+1)$ .

5. Пусть  $w \in L$ . Докажем, что  $(q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$  и  $(q_1, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$ .  $3 \Rightarrow w = w_1 w_2$ ,  $4 \Rightarrow P(w_1)^R = w_2$ .

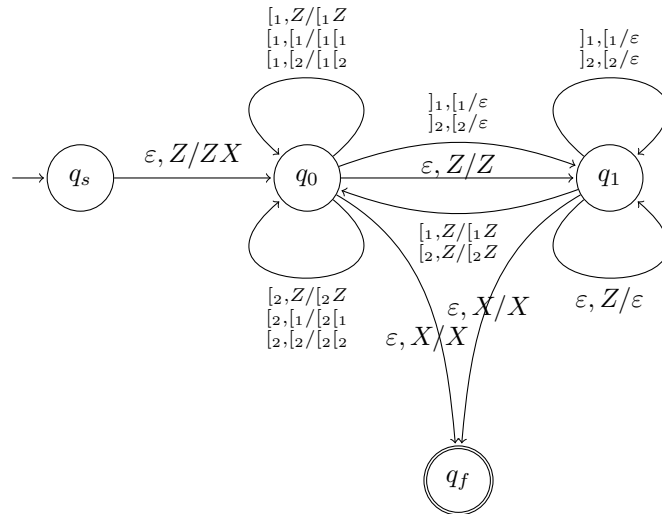
а. Докажем  $Q(k) \stackrel{\text{def}}{=} [(q_0, w_1[1, k], Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, (w_1[1, k])^R Z)]$ :

- a.  $k = 0 \Rightarrow w_1[1, k] = \varepsilon \Rightarrow (w_1[1, k])^R = \varepsilon$ . Получаем  $(q_0, w_1[1, k], Z) \equiv (q_0, (w_1[1, k])^R, Z) \Rightarrow Q(0)$
- b. Пусть  $Q(k) \Rightarrow (q_0, w_1[1, k], Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, (w_1[1, k])^R Z)$ . Рассмотрим  $w_1[k+1] = [i_{k+1}]$ . По определению  $\delta$  имеем  $\forall \gamma (q_0, [i_{k+1}], \gamma) \vdash (q_0, \varepsilon, [i_{k+1}]\gamma)$ . Тогда  $(q_0, w_1[1, k+1], Z) \equiv (q_0, w_1[1, k][i_{k+1}], Z) \vdash^* (q_0, [i_{k+1}], (w_1[1, k])^R Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, w_1[k+1](w_1[1, k])^R Z) \equiv (q_0, \varepsilon, (w_1[1, k+1])^R Z) \Rightarrow Q(k+1)$ .
- b. Докажем  $Q(k) \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \gamma \in \Gamma^+ \hookrightarrow (q_1, w_2[1, k], P(w_2)[1, k]\gamma) \vdash^* (q_1, \varepsilon, \gamma)]$ :
- a.  $k = 0 \Rightarrow w_2[1, k] \equiv \varepsilon \equiv P(w_2)[1, k] \Rightarrow Q(0)$
- b. Пусть  $Q(k) \Rightarrow \forall \gamma \hookrightarrow (q_1, w_2[1, k], P(w_2)[1, k]\gamma) \vdash^* (q_1, \varepsilon, \gamma)$ .  $\nrightarrow w_2[k+1] = [i_{k+1}]$ . Из определения  $\delta$  получаем  $\forall \gamma_1 \hookrightarrow (q_1, [i_{k+1}], [i_{k+1}]\gamma_1) \vdash (q_1, \varepsilon, \gamma_1)$ .
- Значит,  $(q_1, w_2[1, k+1], P(w_2)[1, k+1]\gamma) \equiv (q_1, w_2[1, k][i_{k+1}], P(w_2)[1, k][i_{k+1}]\gamma) \vdash^* (q_1, [i_{k+1}], [i_{k+1}]\gamma) \stackrel{\text{def } \delta}{\vdash} (q_1, \varepsilon, \gamma) \Rightarrow Q(k+1)$ .
- c. Рассмотрим  $w_2 = [i]w_2^0$ . Но  $4 \Rightarrow w_2 = P(w_1)^R \Rightarrow w_1 = P(w_2^0)^R[i]$  Из определения  $\delta$  получаем  $\forall \gamma (q_0, [i], [i]\gamma) \vdash (q_1, \varepsilon, \gamma)$ . Тогда  $(q_0, w, Z) \stackrel{5a}{\vdash^*} (q_0, w_2, (w_1)^R Z) \equiv (q_0, [i]w_2^0, [i]P(w_2^0)Z) \stackrel{\text{def } \delta}{\vdash} (q_1, w_2^0, P(w_2^0)Z) \stackrel{5b}{\vdash^*} (q_1, \varepsilon, Z)$ .
- d.  $w_1 = [i]w_1^0$ . Из определения  $\delta$  получаем  $(q_1, [i], Z) \vdash (q_1, \varepsilon, [i]Z)$ . Тогда  $(q_1, w, Z) \equiv (q_1, [i]w_1^0 w_2, Z) \stackrel{\text{def } \delta}{\vdash} (q_0, w_1^0 w_2, [i]Z)$ . Но эта конфигурация может быть получена иначе:  $(q_0, [i], Z) \vdash (q_0, [i], [i]Z)$ . Значит, дальнейшие конфигурации также могут совпадать. Имеем  $5c \Rightarrow (q_1, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$ .
6. Пусть  $w \in L^* \setminus \{\varepsilon\} \Rightarrow w = w_1 \dots w_k, \forall i \in \overline{1, k} \hookrightarrow w_i \in L$ . Определим  $f: L^* \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ :  $f(w) \ni k$  (многозначная функция). Если  $w = \varepsilon$ , определим  $f(w) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ .
7.  $P(k) \stackrel{\text{def}}{=} [\forall w \in L^*: f(w) \ni k \hookrightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)]$
- (a) Пусть  $k = 0$ . Тогда  $w = \varepsilon$ .  $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, \varepsilon, Z) \vdash (q_1, \varepsilon, Z) \Rightarrow P(0)$ .
- (b) Пусть  $k = 1, w \in L^*: f(w) \ni 1 \Rightarrow w \equiv w_1 \in L$ .  $5 \Rightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z) \Rightarrow P(1)$  ■
- (c) Пусть  $P(k)$ .  $w \in L^*: f(w) \ni k+1 \Rightarrow w = w_1 \dots w_{k+1}, \forall i \in \overline{1, k+1} \hookrightarrow w_i \in L$ .  $\nrightarrow w_0 \stackrel{\text{def}}{=} w_1 \dots w_k \in L^*$ .  $f(w_0) \ni k \stackrel{P(k)}{\Rightarrow} (q_0, w_0, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$ . Тогда  $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, w_0 w_{k+1}, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon w_{k+1}, Z) \stackrel{5}{\vdash^*} (q_1, \varepsilon, Z) \Rightarrow P(k+1)$  ■
- Получаем  $\forall w \in L^* \hookrightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z) \stackrel{\text{def } \delta}{\vdash} (q_1, \varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow \forall w \in L^* \hookrightarrow w \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow \boxed{L^* \subseteq L(\mathcal{A})}$ .
8.  $\nrightarrow \delta$ . Заметим, что каждый переход, кроме  $q_1 \xrightarrow{\varepsilon, Z/\varepsilon} q_1$  сохраняет количество  $Z$  в стеке, и, более того, оставляет  $Z$  на дне стека.
9. Пусть  $(q_a, w, \phi) \vdash^* (q_b, \varepsilon, \gamma)$ . Тогда  $\|\gamma\|_i - \|\phi\|_i = \|w\|_i$ . Докажем по индукции:  
 $Q(k) \stackrel{\text{def}}{=} [\forall w: |w| = k \forall q_a \forall q_b \forall \phi \forall \gamma: (q_a, w, \phi) \vdash^* (q_b, \varepsilon, \gamma) \hookrightarrow \|\gamma\|_i - \|\phi\|_i = \|w\|_i]$ .
- a.  $k = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$ . Поскольку все  $\varepsilon$ -переходы  $q_0 \xrightarrow{\varepsilon, Z/Z} q_1$  и  $q_1 \xrightarrow{\varepsilon, Z/\varepsilon} q_1$  не изменяют  $\|\cdot\|_i$  для символов стека, получаем  $\|w\|_i \equiv 0 \equiv \|\phi\|_i - \|\delta\|_i \Rightarrow Q(0)$ .
- b. Пусть  $Q(k)$ .  $\nrightarrow w: |w| = k+1, (q_a, w, \phi) \vdash^* (q_c, \varepsilon, \gamma)$ .  $w = w_0 \sigma, \sigma \in \Sigma$ .  $\nrightarrow (q_a, w, \phi) \equiv (q_a, w_0 \sigma, \phi) \vdash^* (q_b, \sigma, \psi) \vdash (q_c, \varepsilon, \gamma)$ .  $Q(k) \Rightarrow \|\psi\|_i - \|\phi\|_i = \|w_0\|_i$ .  $\nrightarrow$  последний переход. Из определения  $\delta$  следует, что  $\|\gamma\|_i - \|\psi\|_i = \|\sigma\|_i$ : если  $\sigma_i = [i]$ , то в стек будет добавлена  $\sigma_i$ , иначе она будет удалена. Поэтому  $\|w\|_i = \|w_0\|_i + \|\sigma\|_i = \|\psi\|_i - \|\phi\|_i + \|\gamma\|_i - \|\psi\|_i \equiv \|\gamma\|_i - \|\phi\|_i \Rightarrow Q(k+1)$ .
10. Пусть  $w \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ .
- a. Если  $w = \varepsilon$ , то  $w \in L^*$
- b. Пусть иначе. Изначально  $Z$  в стеке, в конце его нет. Значит (8), был переход  $q_1 \xrightarrow{\varepsilon, Z/\varepsilon} q_1$ . Но  $Z$  был на дне стека, поэтому после стек пуст. Значит, это последняя конфигурация. Имеем  $(q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z) \vdash (q_1, \varepsilon, \varepsilon)$ . Рассмотрим  $(q_0, w, Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$ . Пусть  $\{c_i\}_{i=0}^f$  — эта цепочка конфигураций,  $c_i = (q_{k_i}, w_i, \gamma_i)$
- i.  $\nrightarrow \delta$ . Заметим, что автомат реализует алгоритм проверки на ПСВ: если была прочитана скобка  $[i]$ , то она положена в стек. Скобки вынимаются из стека тогда и только тогда, когда прочитана парная скобка. Значит,  $w$  — ПСВ.
- ii. Рассмотрим все конфигурации  $c_{i_j}: \gamma_{i_j} = Z \Rightarrow c_i \equiv (q_{k_{i_j}}, w_{i_j}, Z)$ . Рассмотрим первую пару  $c_{i_1} \vdash^* c_{i_2}$ . Было прочитано слово  $x_1$ .  $9 \Rightarrow \|x_1\|_i = \|Z\|_i - \|Z\|_i = 0$ . Получаем, что  $x_1$  — подстрока ПСВ со скобочным итогом, равным нулю. Значит,  $x_1$  — ПСВ. Пусть  $x_1 = ab$ , в  $a$  только открывающие скобки, в  $b$  первая закрывающая. Пусть в  $b$  есть открывающие скобки, а именно,  $b = cd$ , в  $d$  первая открывающая скобка. После прочтения  $a$  автомат находится в  $q_0$  (5a). Далее после прочтения  $c$  автомат в  $q_1$  (5b). Стек не пуст, так как иначе эта пара конфигураций не первая. Но из  $q_1$  нет переходов по открывающим скобкам с непустым стеком — противоречие. Получаем, что в  $b$  нет открывающих скобок  $\Rightarrow x_1 \in L$ . Далее рассуждение можно продолжить, так как следующий после  $x_1$  символ в  $w$  — открывающая скобка (иначе скобочный итог отрицательный), по ней автомат переходит в  $q_0$ . Получаем, что  $w = x_1 \dots x_m, \forall q \in \overline{1, m} \hookrightarrow x_q \in L$ . Поэтому  $w \in L^*$ .

Получаем  $\boxed{L(\mathcal{A}) \subseteq L^*}$ .

## Задача 2

1. Пусть  $N = (\Sigma, \Gamma_N, Q_N, \delta_N, Z_0, q_0, F_N)$  — МП-автомат, допускающий по пустому стеку. Построим МП-автомат  $P = (\Sigma, \Gamma, Q, \delta, Z_0, q_s, F)$ , допускающий по заключительному состоянию :  $L(N) = L(P)$ .
  - a.  $\Gamma = \Gamma_N \cup \{X\}$
  - b.  $Q = Q_N \cup \{q_s, q_f\}$
  - c.  $F = \{q_f\}$
  - d.  $\delta = \delta_N$  с добавленными переходами:  $q_s \xrightarrow{\varepsilon, Z_0/Z_0X} q_0, q_i \xrightarrow{\varepsilon, X/X} q_f, q_i \in Q_N$ .
  1. Пусть  $w \in L(N)$ . Тогда  $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \text{ — в } N$ . Для  $P$ :  $(q_s, w, Z_0) \vdash (q_0, w, Z_0X) \vdash^* (q, \varepsilon, X) \vdash (q_f, \varepsilon, X)$ . Переходы, отмеченные (\*) возможны, так как в  $P$  сохранены переходы из  $N$ . Добавление  $X$  на дно стека не изменит работу автомата, т.к.  $X$  не будет удаляться из стека (в противном случае получим удаление символа из пустого стека в  $N$ ). Но  $q_f \in F \Rightarrow w \in L(P)$
  2. Пусть  $w \in L(P)$ . Принимающее состояние одно, поэтому цепочка конфигураций имеет вид  $(q_s, w, Z_0) \vdash^* (q_f, \varepsilon, \gamma)$ . Из  $q_s$  переход один, поэтому цепочка имеет вид  $(q_s, w, Z_0) \vdash (q_0, w, Z_0X) \vdash^* (q_f, \varepsilon, \gamma)$ . Переходы в  $q_f$  только при  $X$  на верхушке стека. Также  $X$  всегда остается на дне стека, т.к. переходы из исходного автомата не удаляют  $X$ . Поэтому  $\gamma = X$ . Имеем  $(q_0, w, Z_0X) \vdash^* (q, \varepsilon, X) \vdash (q_f, \varepsilon, X)$ . Удалим  $X$ , получим цепочку конфигураций в  $N$ :  $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(N)$ .
2. Пусть  $P = (\Sigma, \Gamma_P, Q_P, \delta_P, Z_0, q_0, F_P)$  — МП-автомат, допускающий по принимающему состоянию. Построим МП-автомат  $N = (\Sigma, \Gamma, Q, \delta, Z_0, q_s, F)$ , принимающий по пустому стеку :  $L(N) = L(P)$ .
  - a.  $F = \emptyset$
  - b.  $\Gamma = \Gamma_P \cup \{X\}$
  - c.  $Q = Q_P \cup \{q_s, q_f\}$
  - d.  $\delta = \delta_P$  с добавленными переходами:  $q_s \xrightarrow{\varepsilon, Z_0/Z_0X} q_0; q_i \xrightarrow{\varepsilon, \gamma/\gamma} q_f, \gamma \in \Gamma, q_i \in F$ ; а также  $q_f \xrightarrow{\varepsilon, \gamma/\varepsilon} q_f, \gamma \in \Gamma$ .
  - (a) Пусть  $w \in L(P)$ . Тогда в  $P$   $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \mu), q \in F$ . Тогда в  $N$  имеем  $(q_s, w, Z_0) \vdash (q_0, w, Z_0X) \vdash^* (q, \varepsilon, \mu X) \vdash (q_f, \varepsilon, \kappa) \vdash^* (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$ . Корректность переходов (\*) доказывается также, как в предыдущем пункте, переходы (\*<sub>2</sub>) возможны, т.к. в  $\delta$  есть переходы  $q_f \xrightarrow{\varepsilon, \gamma/\varepsilon} q_f$ . Получаем  $(q_s, w, Z) \vdash^* (q_f, \varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(N)$ .
  - (b) Пусть  $w \in L(N)$ . После  $q_s$  в стеке на дне всегда  $X$ . В конце его нет, и в изначальном автомате  $P$  нет удалений  $X$  (т.к.  $X \notin \Gamma_P$ ). Значит, был переход  $q_f \rightarrow q_f$ . Но из  $q_f$  нет переходов в другие состояния, поэтому  $q_f$  — последнее состояние:  $(q_s, w, Z_0) \vdash (q_0, w, Z_0X) \vdash^* (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$ . Найдем первую конфигурацию с конца, состояние которой — не  $q_f$ :  $(q_s, w, Z_0) \vdash (q_0, w, Z_0X) \vdash^* (q, w, \mu X) \vdash^* (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$ . Переходы в  $q_f$  есть только из  $q_k \in F$ , поэтому  $q \in F$ . Отсюда получаем цепочку конфигураций в  $P$ :  $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, w, \mu)$ , так как наличие одного символа на дне стека не изменяет работу автомата в данном случае.  $q \in F \Rightarrow w \in L(P)$ .
3. МП-автомат, эквивалентный автомату из задачи 1, принимающий по допускающему состоянию:



## Задача 3

1.  $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c\}$ . КС-грамматика  $\Gamma \equiv (N, \Sigma, P, S)$ .
  - (a)  $N \stackrel{\text{def}}{=} \{S, A, B, A_1, A_2, B_1\}$
  - (b)  $P = \{S \rightarrow A|B, A \rightarrow A_1A_2, A_1 \rightarrow aA_1b|\varepsilon, A_2 \rightarrow cA_2|\varepsilon, B \rightarrow aBc|B_1, B_1 \rightarrow bB_1|\varepsilon\}$

1.  $L \stackrel{\text{def}}{=} \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee i = k, i, j, k \geq 0\}$

2. Докажем, что  $A_1$  порождает  $a^i b^i$ :

i. Фиксируем  $i$ . Применим  $A_1 \rightarrow aA_1b$   $i$  раз, получим  $a^i A_1 b^i$ . Применим  $A_1 \rightarrow \varepsilon$ . Получим  $a^i b^i$

ii. Пусть  $A_0 \rightarrow^* w \in \Sigma^*$ . Заметим, что к  $A_1$  могут быть применены только правила  $A_1 \rightarrow aA_1b$  и  $A_1 \rightarrow \varepsilon$ . Оба не добавляют нетерминалов, первое не уменьшает количество  $A_1$ , второе уменьшает его на 1. Значит (КС-грамматика, правила применяются к нетерминалам), в выводе  $i$  применений первого, одно применение второго. Получаем  $w = a^i b^i$ .

3. Аналогично (используя количество нетерминалов в правилах) докажем, что  $A_2$  порождает  $c^j$ ,  $B_1$  порождает  $b^k$ ,  $B$  порождает  $a^i b^j c^i$ .

4. Пусть  $w \in L$ . Построим вывод  $w$  в  $\Gamma$ :

i. Если  $w = \varepsilon$ , то вывод следующий:  $S \xrightarrow{S \rightarrow B} B \xrightarrow{B \rightarrow B_1} B_1 \xrightarrow{B_1 \rightarrow \varepsilon} \varepsilon$

ii. Пусть  $w \neq \varepsilon, w = a^i b^i c^k$ .  $S \xrightarrow{S \rightarrow A_1 A_2} A_1 A_2$ .

А.  $12 \Rightarrow A_1 \rightarrow^* a^i b^i$

В.  $13 \Rightarrow A_2 \rightarrow^* c^j$

Получаем  $S \rightarrow^* a^i b^i c^j$

iii. Пусть  $w \neq \varepsilon, w = a^i b^j a^i$ .  $13 \Rightarrow S \rightarrow^* a^i b^j c^i$ .

Получаем  $\boxed{L \subseteq L(\Gamma)}$

5. Пусть  $S \rightarrow^* w$ . Из  $S$  могут быть получены только  $A$  и  $B$ . Рассмотрим эти случаи:

i. Первое правило  $S \rightarrow A$ . Из  $A$  могут быть получены только  $A_1 A_2$ ,  $12 \Rightarrow$  из  $A_1$  получено  $a_i b_i$ ,  $13 \Rightarrow$  из  $A_2$  —  $c_j$ .  
Получаем, что  $w = a^i b^i c^j \in L$ .

ii. Первое правило  $S \rightarrow B$ .  $13 \Rightarrow$  из  $B$  может быть получено только  $w \equiv a_i b^j c^i \in L$

Получаем  $\boxed{L(\Gamma) \subseteq L}$