Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 8: линейное программирование

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.27

(каноническое) Задача 32

(каноническое) Задача 33

(каноническое) Задача 34

(каноническое) Задача 35

(каноническое) Задача 36

(Тарасов, лекция 2014.04.01)

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$, $\{t_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$. Определим $\vec{r}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 : \vec{r}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Vmatrix} t^4 & t^3 & t^2 & t \end{Vmatrix}^T$. Рассмотрим точки $\vec{x}_i = \vec{r}(t_i)$. Рассмотрим $G \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{conv}(\{\vec{x}_i\}_{i=1}^k)$ — выпуклую оболочку этих точек. Фиксируем $i_1 \neq i_2 \in \overline{1,k}$. Докажем, что $\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}$ — вершины G, соединенные ребром $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists$ гиперплоскость $\pi\colon$ $(\vec{x}_{i_1},\, \vec{x}_{i_2} \in \pi)$ и (многогранник G лежит по одну сторону от π).

1. Определим многочлен $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} (t - t_{i_1})^2 \cdot (t - t_{i_2})^2 \equiv t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$
2. Определим гиперплоскость π. $\mathbb{R}^4 \ni \vec{x} \equiv \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix}^T \in \pi \Leftrightarrow F(\vec{x}) \equiv x_1 + a_3 x_2 + a_2 x_3 + a_1 x_4 + a_0 = 0$.
3. Тогда $F(\vec{r}(t)) = P(t)$: $F(\vec{r}(t)) = F(t^4, t^3, t^2, t) = t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$
4. t_{i_1} и t_{i_2} — корни $P(t)$, откуда $P(t_{i_1}) = P(t_{i_2}) = 0$, значит, $F(\vec{x}_{i_1}) = F(\vec{x}_{i_2}) = 0$, значит, $\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2} \in \pi$
5. Фиксируем $t \in \mathbb{R}$. Тогда $F(\vec{r}(t)) = P(t) \geqslant 0$

(каноническое) Задача 37