Теория и реализация языков программирования.
Задание 5: Регулярные грамматики

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.10.02

Упражнение 1

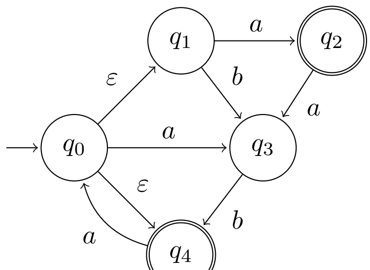
1. Докажем, что $\forall G_1$ — ПРГ $\exists G_2$ — ПГ: $L(G_1) = L(G_2)$: каждая ПРГ является ПГ, так как $T \subset T^*$, $\varepsilon \in T^*$. Поэтому можно взять $G_2 \stackrel{\text{def}}{=} G_1$.
2. Докажем, что $\forall G_2$ — ПГ $\exists G_1$ — ПРГ: $L(G_1) = L(G_2)$:
    1. Построим по G_2 НКА $\mathcal{A}$: $L(\mathcal{A}) = L(G_2)$ (алгоритм и доказательство в задаче 2).
    2. По НКА $\mathcal{A}$ построим ПРГ G_1: $L(G_1) = L(\mathcal{A})$ (алгоритм и доказательство в задаче 1).

Это доказывает, что ПРГ и ПГ порождают одно и то же множество языков.

Упражнение 2

Задача 1

Нет, предложенный алгоритм может построить грамматику, которая не будет праволинейной регулярной. Например, для автомата $\mathcal{A}_0$ из условия переход $q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1$ по алгоритму должен соответствовать правилу $q_0 \longrightarrow \varepsilon q_1$, но это правило не имеет вид $A \longrightarrow xB$ ($\varepsilon = x \notin \Sigma$) или $A \longrightarrow x$ или $A \longrightarrow \varepsilon$.



Далее $\mathcal{A}$ — абстрактный входной автомат

Заметим, что проблему можно решить, преобразовав НКА $\mathcal{A}$ в ДКА $\mathcal{B}$. Тогда ε-переходов не будет. Остается один случай, в котором $q_0 \in F$, и в q_0 есть переходы из других состояний: $\exists q_1 \colon \delta(q_1, \sigma) = q_0$. Соответствующими правилами были бы $q_0 \longrightarrow \varepsilon$, $q_1 \longrightarrow \sigma q_0$, которые не подходят для праволинейной регулярной грамматики (аксиома q_0 встречается в правой части при том, что есть переход $q_0 \longrightarrow \varepsilon$)

Алгоритм:

1. Преобразуем данный НКА $\mathcal{A}$ в ДКА $\mathcal{B}$. $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

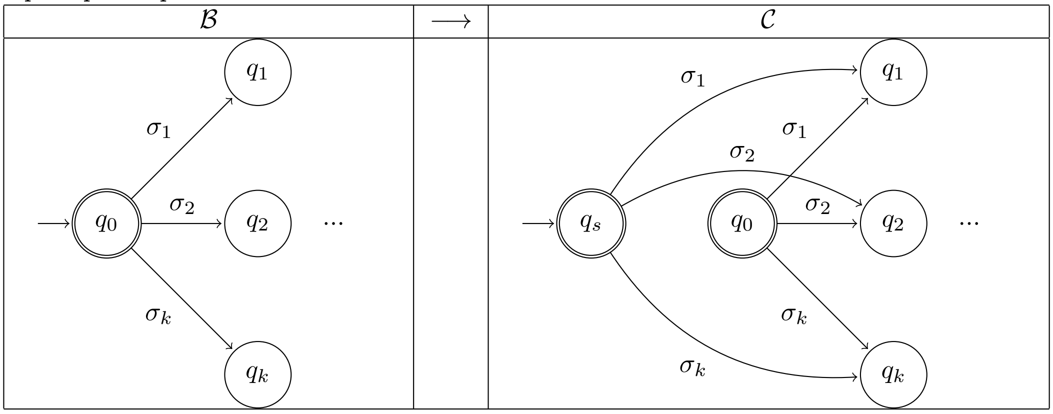
2. По ДКА $\mathcal{B} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ построим другой ДКА $\mathcal{C} = (Q', \Sigma, \delta', q_s, F')$:

   (a) $Q' \overset{\text{def}}{=} Q \cup \{q_s\}$ (добавим состояние q_s)

   (b) $\delta'(q, \sigma) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \delta(q_0, \sigma), & q = q_s \\ \delta(q, \sigma), & \text{иначе} \end{cases}$ (добавим такие же переходы из q_s, как из q_0)

   (c) $F' \overset{\text{def}}{=} F \cup \big(q_0 \in F\,?\,\{q_s\} \,:\, \varnothing\big)$ (если $q_0 \in F$, то сделаем q_s принимающим)

   Пример построения:

   Докажем, что $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{C})$:

   a. $L(\mathcal{B}) \subset L(\mathcal{C})$. Пусть $w \in L(\mathcal{B})$.

      a. $|w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon \Rightarrow q_0 \in F \Rightarrow q_s \in F' \Rightarrow w \in L(\mathcal{C})$ ■

      b. $|w| > 0 \Rightarrow w = \sigma x$, $\sigma \in \Sigma$, $x \in \Sigma^*$. Тогда $\delta'(q_s, w) \equiv \delta'(q_s, \sigma x) = \delta'(\delta'(q_s, \sigma), x)$. Обозначим $q_i \overset{\text{def}}{=} \delta'(q_s, \sigma) \overset{\text{def}\,\delta'}{\equiv} \delta(q_0, \sigma)$. Очевидно, что $q_i \neq q_s$ (иначе получим переход $q_0 \xrightarrow{\sigma} q_s$ в $\mathcal{B}$, но $q_s \notin F$). Значит, $\delta'(q_i, x) = \delta(q_i, x) \Rightarrow \delta'(q_s, w) \equiv \delta'(q_i, x) \equiv \delta(q_i, x) \equiv \delta(q_0, \sigma x) \equiv \delta(q_0, w) \in F$, т.к. $w \in L(\mathcal{B}) \Rightarrow w \in L(\mathcal{C})$ ■

   b. $L(\mathcal{C}) \subset L(\mathcal{B})$. Пусть $w \in L(\mathcal{C})$.

      a. $|w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon \Rightarrow q_s \in F \Rightarrow q_0 \in F \Rightarrow \delta(q_0, w) \equiv \delta(q_0, \varepsilon) = q_0 \in F \Rightarrow w \in L(\mathcal{B})$ ■

      b. $|w| > 0 \Rightarrow w = \sigma x$, $\sigma \in \Sigma$, $x \in \Sigma^*$. $F' \ni \delta'(q_s, w) \equiv \delta'(q_s, \sigma x) \equiv \delta'(\delta'(q_s, \sigma), x)$. Аналогично $q_i \overset{\text{def}}{=} \delta'(q_s, \sigma) \equiv \delta(q_0, \sigma) \in Q \Rightarrow \delta'(q_i, x) = \delta(q_i, x)$
      Получаем $F' \ni \delta(q_s, w) = \delta(q_i, x) = \delta(q_0, w) \Rightarrow \delta(q_0, w) \in F \Rightarrow w \in L(\mathcal{B})$ ■

3. По $\mathcal{C}$ построим ПРГ $G = (Q', \Sigma, P, q_s)$:

   1. $P = \underbrace{\{q_a \longrightarrow \sigma q_b \big| \delta'(q_a, \sigma) = q_b\}}_{(1)} \cup \underbrace{\{q_a \longrightarrow \sigma \big| \delta'(q_a, \sigma) = q_b \in F'\}}_{(2)} \cup \underbrace{\big(q_s \in F\,?\,\{q_s \longrightarrow \varepsilon\} \,:\, \varnothing\big)}_{(3)}$.
      То есть, каждому переходу $q_a \xrightarrow{\sigma} q_b$ в $\mathcal{C}$ соответствует правило $q_a \longrightarrow \sigma q_b \big| \sigma$, причем вторая часть имеется тогда и только тогда, когда $q_b \in F'$. Если q_s — принимающее, то добавляется правило $q_s \longrightarrow \varepsilon$.

   2. G — ПРГ. Действительно, правила имеют один из видов ($\sigma \in \Sigma$) $A \longrightarrow \sigma B$, $A \longrightarrow \sigma$. Поскольку переходов в q_s в $\mathcal{C}$ нет, то аксиома q_s не будет встречаться в правых частях.
      Также отметим некоторые свойства правил:

      a. По построению $\forall P \ni p \equiv (\alpha, \beta) \hookrightarrow |\beta|_\Sigma - |\alpha|_\Sigma \in \overline{0, 1}$, то есть, количество нетерминальных символов справа либо такое же, как слева, либо на 1 больше. Действительно, для групп правил (1) и (2) эта разница равна 1, а для (3) (если там есть правила) разница равна 0.

      b. Также по построению $\mathcal{C}$ для всех правил справа нет q_s, так как в противном случае в $\mathcal{C}$ были бы переходы в q_s, что невозможно.

      c. В правилах слева всегда один нетерминал.

      d. Если $w_1 ... w_n \equiv w \in L(G)$, $n > 0$, $\forall i \in \overline{1, n} \hookrightarrow w_i \in \Sigma$, то есть, $q_s \Longrightarrow^* w_1 ... w_n$, то оно было получено применением $n - 1$ правил из (1), а затем одного правила из (2), то есть, $q_s \Longrightarrow w_1 q_1 \Longrightarrow w_1 w_2 q_2 \Longrightarrow ... \Longrightarrow w_1 w_2 ... w_{n-1} q_{n-1} \Longrightarrow w_1 ... w_n$.
         Действительно,

         a. Количество нетерминальных символов в конце равно n, значит, было применено n правил из (1) и (2)

         b. Если первым было применено правило из (3), то количество нетерминалов стало равно 0, и далее ни одно правило не могло быть применено (см. 3(2)c). При этом количество нетерминалов осталось бы равно $0 \neq n$ — противоречие.

         c. Правило из (3) не могло быть применено и далее, так как тогда бы получили q_s в правой части некоторого (предыдущего по выводу) правила.

         d. Из 3(2)db и 3(2)dc получаем, что применялись только правила из (1) и (2), а из 3(2)da — что всего таких применений было n.

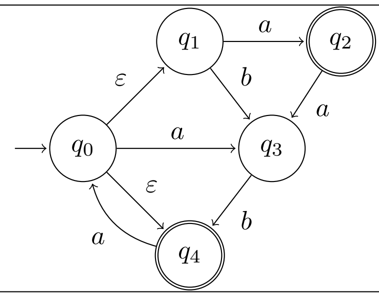
   e. Применение правила из (2) ранее, чем на последнем шаге привело бы к тому, что количество нетерминальных символов стало бы равно 0, после чего (см. 3(2)c) правила бы применяться не могли. Однако, количество нетерминальных символов было бы меньше n — противоречие.

3. Докажем, что $L(G) = L(\mathcal{C})$, т.е. $\forall w \in \Sigma^* \hookrightarrow w \in L(G) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{C})$:
   a. $|w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$
      a. $w \in L(\mathcal{C}) \Rightarrow q_s \in F \Rightarrow$ правило $q_s \longrightarrow \varepsilon \in P$. Значит, $\varepsilon \equiv w \in L(G)$ $\blacksquare$
      b. $w \in L(G) \Rightarrow$ правило $q_s \longrightarrow \varepsilon \in P$. Тогда $q_s \in F' \Rightarrow w \in L(\mathcal{C})$ $\blacksquare$
   b. $n \stackrel{\text{def}}{=} |w| > 0 \Rightarrow w = w_1 ... w_n$, $\forall i \in \overline{1, n} \hookrightarrow w_i \in \Sigma$.
      a. $w \in L(\mathcal{C}) \Rightarrow (q_s, w) \equiv (q_s, w_1...w_n) \vdash (q_1, w_2...w_n) \vdash (q_2, w_3...w_n) \vdash ... \vdash (q_{n-1}, w_n) \vdash (q_n, \varepsilon)$, $q_n \in F'$. Тогда, по построению G имеем $P \ni q_s \longrightarrow w_1 q_1$, $q_1 \longrightarrow w_2 q_2$, ..., $q_{n-1} \longrightarrow w_n$. Значит,
      $q_s \longrightarrow w_1 q_1 \longrightarrow w_1 w_2 q_2 \longrightarrow ... \longrightarrow w_1 w_2 ... w_{n-1} q_{n-1} \longrightarrow w_1 ... w_n \in \Sigma^* \Rightarrow w \in L(G)$ $\blacksquare$
      b. $w \in L(G) \stackrel{3(2)d}{\Rightarrow} q_s \longrightarrow w_1 q_1 \longrightarrow w_1 w_2 q_2 \longrightarrow ... \longrightarrow w_1 w_2 ... w_{n-1} q_{n-1} \longrightarrow w_1 ... w_n$, и были применены правила $q_s \Rightarrow w_1 q_1$, ..., $q_{n-1} \Rightarrow w_n$ (также см. 3(2)d).
      Отсюда $\delta'(q_s, w_1) = q_1$, $\delta'(q_1, w_2) = q_2$, ..., $\delta'(q_{n-1}, w_n) \in F \Rightarrow \delta'(q_s, w) \in F \Rightarrow w \in L(\mathcal{C})$ $\blacksquare$

Применим описанный алгоритм для автомата $\mathcal{A}_0$ из условия:

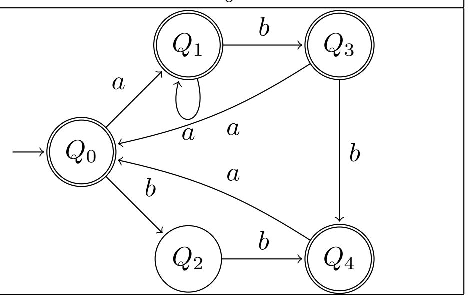
1. Построим по $\mathcal{A}_0$ ДКА $\mathcal{B}_0$:

$\mathcal{A}_0$	Построение	$\mathcal{B}_0$



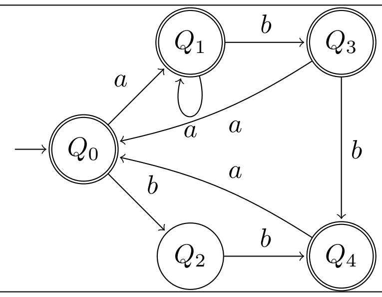
(отмечены начальная и принимающие)

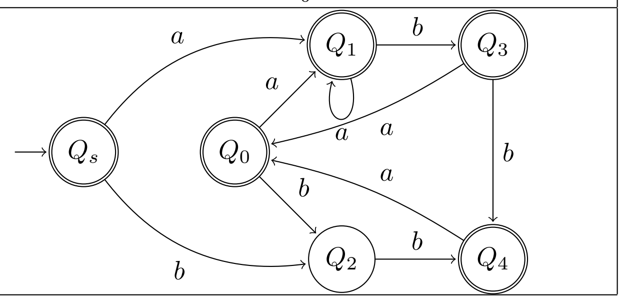
Q	q	a	b
$\rightarrow Q_0 \rightarrow$	q_0, q_1, q_4	Q_1	Q_2
$Q_1 \rightarrow$	q_0, q_1, q_2, q_3, q_4	Q_1	Q_3
Q_2	q_3	$\varnothing$	Q_4
$Q_3 \rightarrow$	q_3, q_4	Q_0	Q_4
$Q_4 \rightarrow$	q_4	Q_0	$\varnothing$



2. Построим $\mathcal{C}_0$ по $\mathcal{B}_0$, как описано в алгоритме:

$\mathcal{B}_0$	$\mathcal{C}_0$





3. Определим грамматику $G = (\Sigma, Q, P, Q_s)$. Выпишем правила $p \in P$:

Q	ε	a	b
Q_s	$Q_s \longrightarrow \varepsilon$	$Q_s \longrightarrow aQ_1 \vert a$	$Q_s \longrightarrow bQ_2$
Q_0		$Q_0 \longrightarrow aQ_1 \vert a$	$Q_0 \longrightarrow bQ_2$
Q_1		$Q_1 \longrightarrow aQ_1 \vert a$	$Q_1 \longrightarrow bQ_3 \vert b$
Q_2			$Q_2 \longrightarrow bQ_4 \vert b$
Q_3		$Q_3 \longrightarrow aQ_0 \vert a$	$Q_3 \longrightarrow bQ_4 \vert b$
Q_4		$Q_4 \longrightarrow aQ_0 \vert a$	

Задача 2

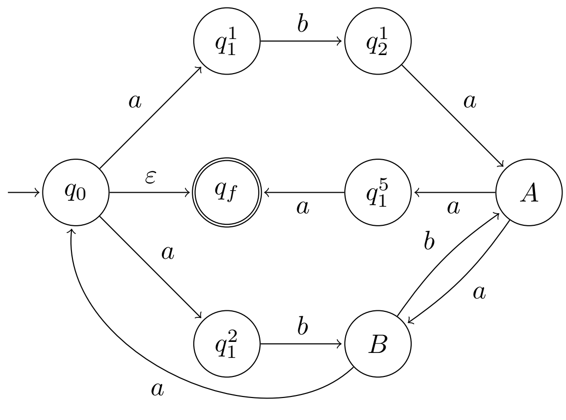
1. Пусть дана ПГ $G = (N, T, P, S)$. Построим по ней НКА $\mathcal{A} = (Q, T, \delta, q_0, F)$: $L(\mathcal{A}) = L(G)$.

1. Определим
   a. $Q = N \cup \{q_f\}$
   b. $q_0 \stackrel{\text{def}}{=} S$
   c. $F \stackrel{\text{def}}{=} \{q_f\}$
   d. $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing$
2. Рассмотрим переходы $P \ni p_i = A \longrightarrow xB$ (правила типа 1). Для них добавим
   a. Состояния $q_1^i, ..., q_{|x|-1}^i$, если $|x| > 1$.
   b. Переходы:
      1. $A \xrightarrow{\varepsilon} B$, если $x = \varepsilon$.
      2. $A \xrightarrow{x_1} B$, если $|x| = 1$, $x_1 \equiv x$.
      3. $A \xrightarrow{x_1} q_1^i \xrightarrow{x_2} q_2^i \longrightarrow ... \longrightarrow q_{n-1}^i \xrightarrow{x_n} B$, если $|x| > 1$, $x = x_1 ... x_n$.
3. Рассмотрим переходы $P \ni p_i = A \longrightarrow x$ (правила типа 2). Для них добавим
   a. Состояния $q_1^i, ..., q_{|x|-1}^i$, если $|x| > 1$.
   b. Переходы:
      1. $A \xrightarrow{\varepsilon} q_f$, если $x = \varepsilon$.
      2. $A \xrightarrow{x_1} q_f$, если $|x| = 1$, $x_1 \equiv x$.
      3. $A \xrightarrow{x_1} q_1^i \xrightarrow{x_2} q_2^i \longrightarrow ... \longrightarrow q_{n-1}^i \xrightarrow{x_n} q_f$, если $|x| > 1$, $x = x_1 ... x_n$.

1.5. Докажем, что $L(G) = L(\mathcal{A})$

   a. Пусть $w \in L(G), n = |w| > 0, w \equiv w_1 ... w_n$. Правила типа 1 не изменяют количество нетерминальных символов, а правила типа 2 — уменьшают на 1. Аксиома — один нетерминал. В левой части каждого правила один нетерминал. Поэтому вывод слова w имеет следующий вид: $m - 1$ применений правил типа 1, затем применение правила типа 2 — т.к. после правила (2) нельзя применить никакое правило. Также каждое правило не уменьшает количество нетерминальных символов. То есть, $S = q_0 \longrightarrow w_1 w_2 ... w_{i_1} q_1 \longrightarrow w_1 w_2 ... w_{i_1} ... w_{i_2} q_2 \longrightarrow ... \longrightarrow w_1 ... w_{i_{m-1}} q_{m-1} \longrightarrow w_1 ... w_n$. По построению имеем $(q_0, w) \vdash^* (q_1, w_{i_1+1} ... w_n) \vdash^* (q_2, w_{i_2+1} ... w_n) \vdash^* (q_{m-1}, w_{i_{m-1}} ... w_n) \vdash (q_f, \varepsilon)$, $q_f \in F \Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$.
   b. Пусть $w \in L(G), |w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$. Тогда во всех m примененных правилах $x_i = \varepsilon$, а последнее — типа 2: $q_0 \longrightarrow q_{i_1} \longrightarrow ... \longrightarrow q_{i_{m-1}} \varepsilon$. По построению, $\delta(q_0, \varepsilon) = q_{i_1}, ..., \delta(q_{i_{m-1}}, \varepsilon) = q_f$. Получаем $w \in L(\mathcal{A})$
   c. Пусть $w \in L(\mathcal{A})$. Тогда $F \ni \delta(q_0, w) = q_f$ (т.к. $F = \{q_f\}$). Рассмотрим цепочку конфигураций $(q_0, w) \vdash^* (q_f, \varepsilon)$. Выпишем оттуда все состояния A_i: $A_i \in N$. Тогда переходы $A_i \xrightarrow{x_i} A_{i+1}$ между ними были добавлены на шагах 1(2)b, а последний переход $A_m \xrightarrow{x_m} q_f$ — на шаге 1(3)b. Поэтому в грамматике есть правила $S \Rightarrow x_1 A_1, ..., A_m \Rightarrow x_m$. Отсюда $w \in L(G)$.

2. Построим НКА $\mathcal{A}$ по грамматике G: $S \longrightarrow abaA | abB | \varepsilon,\ A \longrightarrow aB | aa,\ B \longrightarrow bA | aS$



3. Запишем систему уравнений: $\begin{cases} (1) \quad S = abaA + abB + \varepsilon \\ (2) \quad A = aB + aa \\ (3) \quad B = bA + aS \end{cases}$. Подставим (3) в (2), получим $A = abA + aaS + aa$. Отсюда $A = (ab)^*(aaS + aa)$. Подставим в (3): $B = b(ab)^*(aaS + aa) + aS$. Подставим A, B в (1):

$$S = aba(ab)^*(aaS + aa) + ab(b(ab)^*(aaS + aa) + aS) + \varepsilon \equiv aba(ab)^*aaS + aba(ab)^*aa + abb(ab)^*aaS + abb(ab)^*aa + abaS + \varepsilon \equiv$$

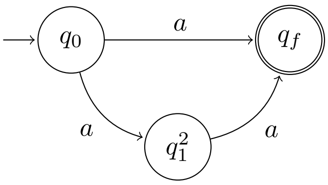
$$\equiv (aba(ab)^*aa + abb(ab)^*aa + aba)S + aba(ab)^*aa + abb(ab)^*aa + \varepsilon \Rightarrow$$

$S = (aba(ab)^*aa + abb(ab)^*aa + aba)^*(aba(ab)^*aa + abb(ab)^*aa + \varepsilon)$.

4. Нет: $S \longrightarrow abaA \longrightarrow abaaa$, $S \longrightarrow abaA \longrightarrow abaaB \longrightarrow abaaaS \longrightarrow abaaa$.

Задача 3

Для приведенного мной алгоритма это неверно. Возьмем грамматику G: $P = \{S \longrightarrow a, S \longrightarrow aa\}$. Она будет праволинейной (все правила имеют вид $S \longrightarrow x$, $x \in \Sigma^*$) и однозначной: она порождает язык $\{a, aa\}$, каждое слово может быть получено единственным способом. Но алгоритм построит автомат $\mathcal{A}$, который не будет детерминированным, так как $\delta(q_0, a) = \{q_f, q_1^2\}$.



Задача 4

Рассмотрим грамматику G: $P = \{S \longrightarrow 0S1, S \longrightarrow \varepsilon\}$. $L \overset{\text{def}}{=} \{0^n 1^n \big| n \geqslant 0\}$. Докажем, что $w \in L(G) \Leftrightarrow w \in L$.

1. $w \in L \Rightarrow w = 0^n 1^n$

   a. $n = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$. Но $P \ni S \longrightarrow \varepsilon \Rightarrow w \equiv \varepsilon \in L(G)$.

   b. $n > 0$. Применим первое правило n раз, после чего применим второе: $S \longrightarrow 0S1 \longrightarrow 00S11 \longrightarrow ... \longrightarrow \underbrace{0...0}_{n} S \underbrace{1...1}_{n} \longrightarrow$

   $0^n 1^n \Rightarrow w \in L(G)$

2. $w \in L(G)$. Первое правило сохраняет количество нетерминалов, второе уменьшает на 1. Поэтому в выводе сначала n применений первого правила, а затем одно применение второго. Количество терминалов не уменьшается. Вывод имеет вид $S \longrightarrow 0S1 \longrightarrow ... \longrightarrow \underbrace{0...0}_{n} S \underbrace{1...1}_{n} \longrightarrow 0^n 1^n \in L$

G — линейная, так как в правых частях правил не более одного нетерминала. Но $L \equiv L(G) \notin \mathsf{REG}$ — было доказано на семинаре. Поэтому получаем, что утверждение $\forall G$ — линеная $\hookrightarrow L(G) \in \mathsf{REG}$ — неверно.

Задача 5

Пусть $\Sigma = \{\sigma_1, ...\sigma_n\} \supseteq L, L_{\sigma_1}, ..., L_{\sigma_n} \in \mathsf{REG}$. Докажем, что подстановка $L_{\sigma_1}, ..., L_{\sigma_n}$ в L $L' = \{L_{w_1}...L_{w_k} \big| w_1...w_k \in L\} \in \mathsf{REG}$ индукцией по $R_3(L)$ — количеству применений третьего пункта определения при получении языка L (см. решение предыдущего задания)

1. $R_3(L) = 0 \Rightarrow$

   (a) $L = \varnothing$. Тогда $L' = \varnothing$, так как ни одно слово w не в L. Получаем $L' \in \mathsf{REG}$ ■

   (b) $L = \{\varepsilon\}$. Тогда $L' = \varepsilon$ (конкатенация из 0 строк). Получаем $L' \in \mathsf{REG}$ ■

   (c) $L = \{\sigma\}$. Тогда $L' = L_\sigma \in \mathsf{REG}$ ■

2. Пусть $\forall L$: $R_3(L) \leqslant n \hookrightarrow L' \in \mathsf{REG}$. Докажем для $n+1$. Варианты:

   (a) $L = XY$, $X, Y \in \mathsf{REG}$. Тогда подстановка в X $L'_X \in \mathsf{REG}$ по предположению индукции. Аналогично для L'_Y. Но $L' = L'_X L'_Y$: $L' = \{L_{w_1}...L_{w_k} \big| w_1...w_k \in XY\} = \{L_{w_1}...L_{w_m}...L_{w_k} \big| w_1...w_m \in X, w_{m+1}...w_k \in Y\} = \{L_{w_1}...L_{w_m} \big| w_1...w_m \in X\} \cdot \{L_{w_{m+1}}...L_{w_k} \big| w_{m+1}...w_k \in Y\} = L'_X L'_Y$, поэтому $L' \in \mathsf{REG}$.

   (b) $L = X|Y, X, Y \in \mathsf{REG}$. Аналогично $L'_X, L'_Y \in \mathsf{REG}$. Но $L' = \{L_{w_1}...L_{w_k} \big| w_1...w_k \in X|Y\} = \{L_{w_1}...L_{w_k} \big| w_1...w_k \in X\} \cup \{L_{w_1}...L_{w_k} \big| w_1...w_k \in Y\} = L'_X L'_Y \in \mathsf{REG}$ ■

   (c) $L = X^*, X \in \mathsf{REG}$. По предположению, $L'_X \in \mathsf{REG}$. Но $L' = \{L_{w_1}...L_{w_k} \big| w_1...w_k \in X^*\} = \{(L_{w_1}...L_{w_k})^* \big| w_1...w_k \in X\} = {L'}^*_X \in \mathsf{REG}$ ■

Задача 6

Задача 7