Теория и реализация языков программирования. Задание 4: Замкнутость регулярных языков, теорема Майхилла-Нероуда и минимальные автоматы

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.09.25

Упражнение 1

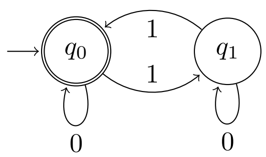
Задача 1

Задача 2

Задача 3

Задача 4

1. $\Sigma = \{0, 1\}$. Докажем, что $L(\mathcal{A}) = L$, $L = \{w \mid |w|_1 = 2t, t \in \mathbb{Z}\}$, ДКА $\mathcal{A}:$



Докажем утверждение $P(n) = \big[\forall w \in \Sigma^* \colon |w| = n \hookrightarrow \big(q_0 \xrightarrow{w} q_i \Rightarrow i = |w|_1 \mod 2\big)\big]$.

(a) Докажем $P(0)$. Поскольку $|w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$, $P(0) = \big[q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_i \Rightarrow i = |\varepsilon|_1 \mod 2\big]$. Поскольку $\delta(q_0, \varepsilon) = q_{\underline{0}}$, и $\underline{0} = |\varepsilon|_1$, получаем $P(0)$ $\blacksquare$

(b) Пусть доказано $P(n)$, докажем $P(n+1)$. $P(n) = \big[\forall w \in \Sigma^* \colon |w| = n \hookrightarrow \big(q_0 \xrightarrow{w} q_i \Rightarrow i = |w|_1 \mod 2\big)\big]$. Фиксируем $w \in \Sigma^*, |w| = n+1, w = w_0\sigma, |w_0| = n, |\sigma| = 1$. $\mathcal{A}$ — полный $\Rightarrow (q_0, w) \equiv (q_0, w_0\sigma) \vdash^* (q_i, \sigma) \vdash (q_j, \varepsilon)$. $|w_0| = n \overset{P(n)}{\Rightarrow} i = |w_0|_1 \mod 2$. $i \in \{0, 1\}, \sigma \in \{0, 1\} \Rightarrow$ рассмотрим четыре случая:

   a. $(i = 0, \sigma = 0)$. $(q_0, w_0 0) \vdash^* (q_0, 0) \vdash (q_0, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_0 \Rightarrow j = 0$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |0|_1 \mod 2 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = j = |w|_1 \mod 2 = 0$.

   b. $(i = 0, \sigma = 1)$. $(q_0, w_0 1) \vdash^* (q_0, 1) \vdash (q_1, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_1 \Rightarrow j = 1$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |1|_1 \mod 2 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow 1 = j = |w|_1 \mod 2 = 1$.

   c. $(i = 1, \sigma = 0)$. $(q_0, w_0 0) \vdash^* (q_1, 0) \vdash (q_1, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_1 \Rightarrow j = 1$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |0|_1 \mod 2 = 1 + 0 = 1 \Rightarrow 1 = j = |w|_1 \mod 2 = 1$.

   d. $(i = 1, \sigma = 1)$. $(q_0, w_0 1) \vdash^* (q_1, 1) \vdash (q_0, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_0 \Rightarrow j = 0$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |1|_1 \mod 2 = (1 + 1) \mod 2 = 0 \Rightarrow 0 = j = |w|_1 \mod 2 = 0$.

Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \hookrightarrow P(n) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \hookrightarrow \big[\forall w \in \Sigma^* \colon |w| = n \hookrightarrow \big(q_0 \xrightarrow{w} q_i \Rightarrow i = |w|_1 \mod 2\big)\big] \Rightarrow \forall w \in \Sigma^* \hookrightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_{|w|_1 \bmod 2}$. Пусть $w \in L \Leftrightarrow |w|_1 \mod 2 = 0 \Leftrightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_0 \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A})$ $\blacksquare$

Задача 5

Задача 6