Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 1: Алгоритмы и оценка сложности

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.02.13

(каноническое) Задача 1

$f(n) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, $g(n) = \log n$. Доказать: $f = \Theta(g) \Leftrightarrow \begin{cases} f = O(g) \\ g = O(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists C_1, n_1 \colon \forall n \geqslant n_1 \hookrightarrow f(n) \leqslant C_1 g(n) & (1) \\ \exists C_2, n_2 \colon \forall n \geqslant n_2 \hookrightarrow g(n) \leqslant C_2 f(n) & (2) \end{cases}$

1. Докажем утверждение: пусть $f(n), g(n) \colon \exists n_0, C_1 > 0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow \underbrace{f(n+1) - f(n)}_{\Delta_f(n)} \leqslant C_1 \underbrace{g(n+1) - g(n)}_{\Delta_g(n)}$. Тогда $f = O(g)$. Действительно, выберем $C_2 > 0$ таким образом, что $f(n_0) \leqslant C_2 g(n_0)$ (всегда можно сделать). Возьмем C для определения O как $C = \max(C_1, C_2)$. Докажем по индукции $\forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow f(n) \leqslant C g(n)$:
   (a) $f(n_0) \leqslant C_2 g(n_0) \leqslant C g(n_0) \blacksquare$
   (b) Пусть $f(n) \leqslant C g(n)$. Докажем для $n+1$: по условию $\Delta_f(n) = f(n+1) - f(n) \leqslant C_1(g(n+1) - g(n)) \leqslant C(g(n+1) - g(n))$. Перегруппируем, получим $f(n+1) - Cg(n+1) \leqslant f(n) - Cg(n) \overset{\text{предп.}}{\leqslant} 0$, т.е. $f(n+1) \leqslant Cg(n+1) \blacksquare$
2. Докажем (1).
   (a) $\sphericalangle \Delta_f(n) \overset{\text{def}}{=} f(n+1) - f(n) = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$.
   (b) $\sphericalangle \Delta_g(n) \overset{\text{def}}{=} g(n+1) - g(n) = \log(n+1) - \log n = \log \frac{n+1}{n} = \log(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \bar{o}(\frac{1}{n}) = \boxed{*}$, $n \to \infty$. Но по определению $\bar{o}$ $\exists n_1 \colon \forall n \geqslant n_1 \hookrightarrow \boxed{*} \geqslant \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{n}$. Тогда $\frac{1}{n} \leqslant 2\boxed{*} = 2(g(n+1) - g(n))$
   (c) Получаем $\Delta_f(n) = f(n+1) - f(n) \overset{2a}{\leqslant} \frac{1}{n} \overset{2b}{\leqslant} 2(g(n+1) - g(n)) = 2\Delta_g(n)$, и по 1 получаем $f = O(g)$.
3. Докажем (2).
   (a) $\sphericalangle \Delta_f(n) = \frac{1}{n+1}$. Докажем, что это больше, чем $\frac{1}{2}\frac{1}{n}$: $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} = \frac{2n-n-1}{2n(n+1)} = \frac{n-1}{2n(n+1)} \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. Итак, $\Delta_f(n) \geqslant \frac{1}{2}\frac{1}{n}$
   (b) $2b \Rightarrow \Delta_g(n) = \frac{1}{n} + \bar{o}(\frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{2})$ при $n \geqslant n_2 > 1$. Значит, $\frac{3}{2}\frac{1}{n} \geqslant \Delta_g(n)$
   (c) $\Delta_g(n) \overset{3b}{\leqslant} \frac{3}{2}\frac{1}{n} \overset{3a}{\leqslant} \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \Delta_f(n)$ при $n \geqslant n_2$, и по 1 получаем $g = O(f)$.

(каноническое) Задача 2

$f(n) \overset{\text{def}}{=} C_n^{2n} \equiv \frac{(2n)!}{n!n!}$. Тогда $\ln f(n) = \ln(2n)! - 2\ln n! \boxed{=}$. По формуле Стирлинга $\boxed{=} (2n)\ln(2n) - 2n + O(\ln(2n)) - n\ln n + n - O(\ln n)$. Поскольку $O(\ln(2n)) - O(\ln n) \leqslant O(\ln(2n)) = O(\ln 2 + \ln n) = O(\ln n)$, получим $\boxed{=} 2n(\ln 2 + \ln n) - n - n\ln n + O(\ln n) = n\ln n - n(1 - 2\ln 2) + O(\ln n)$. Тогда $f(n) = e^{\cdots} = e^{n\ln n - n(1-2\ln 2) + O(\ln n)} = O(\frac{n^{n+1}}{e^n})$, так как $1 - 2\ln 2 > 1$. **ДОПИСАТЬ!**

(каноническое) Задача 3

1. $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + f(n)$, $f(n) = \Theta(n^2 \log n)$.
   (a) Докажем, что теорема неприменима. $a = 9, b = 3 \Rightarrow \log_b a = \log_3 9 = 2$.
      i. Если $\exists \varepsilon > 0 \colon f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$, то $\exists C > 0 \exists n_0$, для $n \geqslant n_0$ получим $f(n)/n^{2-\varepsilon} \leqslant C > 0$, то есть $n^2 \log n / n^{2-\varepsilon} \equiv n^\varepsilon \log n \leqslant C$, что неверно (функция неограничена сверху).
      ii. Если $f = \Theta(n^2)$, то $\exists n_0 \exists C > 0 \colon f \leqslant Cn^2$ для $n \geqslant n_0$, и $\log n \leqslant C$, что неверно (функция неограничена сверху).
      iii. Если $\exists \varepsilon > 0 \colon f = \Omega(n^{2-\varepsilon})$, то $\exists n_0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow f \geqslant Cn^{2+\varepsilon}$, и $\log n \geqslant Cn^\varepsilon$, откуда $\frac{\log^n}{n^\varepsilon} \geqslant C > 0$, что неверно, так как $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\varepsilon} = +0$
   (b) Найдем ответ через дерево рекурсии. В корне ($i = 0$) выполняется $n^2 \log n$ операций, у каждой вершины 9 детей, на уровне $i+1$ $n_{i+1} = n_i/3$. У листьев (по индукции по высоте дерева) $1 = n_h = \frac{n}{3^h}$, поэтому высота дерева *(не считая корня)* $h = \log_3 n$. Найдем суммарное время:

$$T(n) = \Theta(n^2 \log n + 9(\frac{n}{3})^2 \log \frac{n}{3} + 9^2(\frac{n}{3^2})^2 \log \frac{n}{3^2} + ... + 9^{h-1}(\frac{n}{3^{h-1}})^2 \log \frac{n}{3^{h-1}}) + 9^h T(1)$$

   Найдем сумму в аргументе Θ: $\sum\limits_{i=0}^{h-1} 9^i (\frac{n}{3^i})^2 \log \frac{n}{3^i} = n^2 \sum\limits_{i=0}^{h-1} (\log n - i \log 3) = n^2 \log n(h-1) - n^2 \frac{h-1}{2} \log 3 =$
   $= n^2 \log n(\log_3 n - 1) - n^2 \frac{\log_3 n - 1}{2} \log 3 = n^2 \log^2 n - n^2 \log n - n^2 \log n + Cn^2 = \Theta(n^2 \log^2 n)$.
   Найдем $9^h T(1) = C 9^{\log_3 n} = Cn^2$. Имеем $T(n) = \Theta(n^2 \log^2 n) + Cn^2 = \boxed{\Theta(n^2 \log^2 n)}$

2. $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + f(n)$, $f(n) = \Theta(n^2)$. $a = 16$, $b = 4$. Применим второй пункт Теоремы: $\Theta(n^{\log_b a}) \equiv \Theta(n^2)$, поэтому $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, и отсюда $T(n) = \boxed{\Theta(n^2 \log n)}$.

3. $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + \Theta(\underbrace{\frac{n^2\sqrt{n}}{\log^2 n}}_{g(n)})$. $a = 4$, $b = 2 \Rightarrow \log_b a = 2$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{4}$ и применим третий пункт Теоремы: $f(n) \overset{?}{=} \Omega(n^{2+\varepsilon})$.

   Рассмотрим $\frac{f(n)}{n^{2+\varepsilon}} = \frac{n^2\sqrt{n}}{n^2 n^\varepsilon \log^2 n} = \frac{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{\log^2 n} = \frac{n^{1/4}}{\log^2 n} = (\frac{n^{1/8}}{\log_n})^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, поэтому $\exists C > 0 \exists n_0 > 0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow f(n) \geqslant Cn^{2+\varepsilon}$. Докажем, что $\exists 0 < C < 1 \exists n_1 \colon af(n/b) \leqslant Cf(n)$. $f = \Theta(g) \Rightarrow \exists n_2 \colon \forall n \geqslant n_2 \hookrightarrow C_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant C_2 g(n)$. Тогда $af(\frac{n}{b}) \leqslant 4C_2 \frac{(\frac{n}{2})^{\frac{5}{2}}}{\log^2(\frac{n}{2})} = \frac{C_2}{\sqrt{2}C_1} \frac{\log^2 n}{\log^2(\frac{n}{2})} C_1 \frac{n^2\sqrt{n}}{\log^2 n} \leqslant \frac{C_2}{\sqrt{2}C_1} \frac{\log^2 n}{\log^2(\frac{n}{2})} f(n)$. Значит, оценка верна, и по теореме получаем $T(n) = \boxed{\Theta(\frac{n^{5/2}}{\log^2 n})}$

Сравним первую и вторую функции: $\frac{n^2 \log^2 n}{n^2 \log n} = \log n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, поэтому первый алгоритм хуже. Сравним вторую и третью функции: $\frac{n^2\sqrt{n}}{\log^2 n} \frac{1}{n^2 \log n} = \frac{n^{1/2}}{\log^3 n} = (\frac{n^{1/6}}{\log n})^3 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, поэтому третий алгоритм хуже.
Ответ: $\boxed{\text{второй алгоритм}}$ имеет наименьшую асимптотическую стоимость.

(каноническое) Задача 4

1. $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \underbrace{n}_{f(n)}$. Воспользуемся пунктом (2) Теоремы: $\log_b a = \log_2 2 = 1$, поэтому $f(n) \equiv n = \Theta(n^{\log_b a}) \equiv \Theta(n)$.

   Ответ: $\boxed{T(n) = \Theta(n \log n)}$.

2. $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + \underbrace{n^2}_{f(n)}$. Воспользуемся пунктом (3) Теоремы: $\log_b a = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a + \varepsilon}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{1-\varepsilon} = +\infty$ например при $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Поэтому из определения предела для $\varepsilon_{\lim} = 1 \, \exists n_0 > 0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow f(n) \geqslant \varepsilon_{\lim} n^{1+\varepsilon}$, значит, $f(n) = \Omega(n^{1+\varepsilon})$. Докажем условие регулярности: $af(\frac{n}{b}) \equiv 2\frac{n^2}{2^2} = \frac{1}{2}n^2 = \frac{1}{2}f(n) \leqslant \frac{1}{2}f(n)$, т.е. условие выполняется с $c = \frac{1}{2} < 1$.

   Ответ: $\boxed{T(n) = \Theta(n^2)}$

3. $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + \underbrace{\frac{n}{\log n}}_{f(n)}$. Воспользуемся пунктом (1) Теоремы: $\log_b a = \log_2 4 = 2$.

   Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a - \varepsilon}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-\varepsilon} \log n} = 0$ например при $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Из определения предела для

   $$\varepsilon_{\lim} = 1 \, \exists n_0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow f(n) \leqslant \varepsilon_{\lim} n^{2-\varepsilon},$$

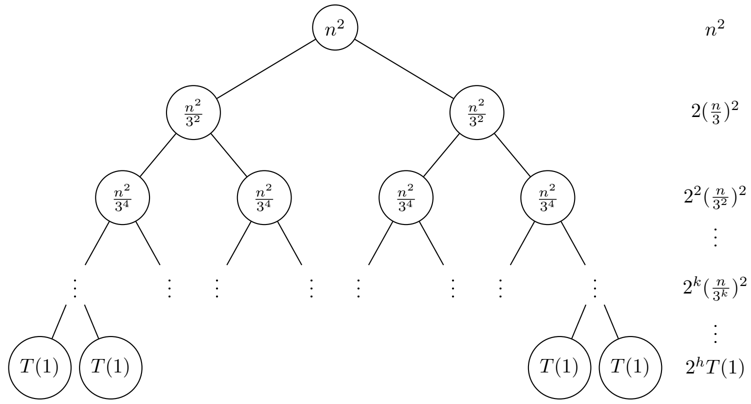
   откуда следует $f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$.

   Ответ: $\boxed{T(n) = \Theta(n^2)}$

(каноническое) Задача 5

Задача 1

1. $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + f(n)$, $f(n) = \Theta(n^2)$. Дерево рекурсии:



   Рассмотрим рекуррентность. Последовательно подставляя $T(n)$ в правую часть, получим некоторую сумму $T(n) = \sum\limits_{i=0}^{h-1} C_i \cdot f(\frac{n}{3^i}) + C_h T(1)$. Она конечна, так как аргумент $T(\cdot)$ в правой части меньше, чем в левой, причем в 3 раза. Прекращаем подставлять, когда аргумент станет равен 1. C_i — некоторые коэффициенты, найти которые можно при помощи дерева слева. Корень соответствует $i = 0$ (база), та, каждый i-й уровень соответствует i-му слагаемому суммы. **ДОПИСАТЬ ФОРМАЛЬНО** При последней, h-й подстановке $\frac{n}{3^h} = 1$, откуда $h = \log_3 n$.

   Таким образом, $T(n) = \overbrace{\sum\limits_{k=0}^{h-1} 2^k f(\frac{n^2}{3^{2k}})}^{S} + 2^h T(1)$.

   (a) Обозначим $g(n) = n^2$, по условию $f(n) = \Theta(g(n))$. Из определения Θ получаем

   $$\exists n_0 > 0, C_2 > C_1 > 0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow C_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant C_2 g(n)$$

. Рассмотрим первую сумму S при $n \geqslant n_0$:

$$n^2 C_1 \sum_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \leqslant \overbrace{\sum_{k=0}^{h-1} 2^k f(\frac{n^2}{3^{2k}})}^{S} \leqslant n^2 C_2 \sum_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \tag{1}$$

Рассмотрим $S_1(n) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \underset{\text{прогр.}}{\overset{\text{геом.}}{=}} \frac{1-\frac{2^{h-1}}{9^{h-1}}}{1-\frac{2}{9}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-2/9} = \frac{9}{7} \overset{\text{def}}{=} l$. Здесь использовалось $h = \log_3 n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$. Определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_1(\varepsilon) \colon \forall n \geqslant n_1 \hookrightarrow S_1(n) \in U_\varepsilon(l)$$

Фиксируем $\varepsilon = \varepsilon_0 = l/2$, определим $n \overset{\text{def}}{=} \max n_2(\varepsilon_0), n_0$. Тогда $\forall n \geqslant n_2 \hookrightarrow 0 < l - \varepsilon \leqslant S_1(n) \leqslant l + \varepsilon$.

Снова рассмотрим (1):при $n \geqslant n_2$: $n^2 C_1 (l-\varepsilon) \leqslant n^2 C_1 \sum\limits_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \leqslant \underline{\sum\limits_{k=0}^{h-1} 2^k f(\frac{n^2}{3^{2k}})} \leqslant n^2 C_2 \sum\limits_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \leqslant n^2 C_2 (l+\varepsilon)$. Получаем

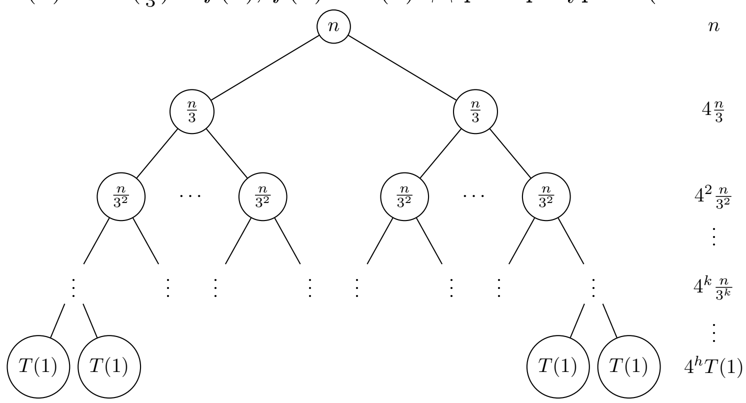
$$S(n) = \Theta(n^2)$$

(b) Рассмотрим $2^h T(1) = 2^{\log_3 n} T(1) = n^{\log_3 2} \underbrace{T(1)}_{\text{const}} = \Theta(n^{\log_3 2})$

(c) Получаем $T(n) = \Theta(n^2) + \Theta(n^{\log_3 2}) = \Theta(n^2)$. Доказательство последнего равенства в конце работы (1) ($2 > 1 > \log_3 2$, поэтому $n^{\log_3 2} = \bar{\bar{o}}(n^2)$)

Ответ: $\boxed{T(n) = \Theta(n^2)}$

2. $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + f(n)$, $f(n) = \Omega(n)$. Дерево рекурсии (все ветвления не показаны):

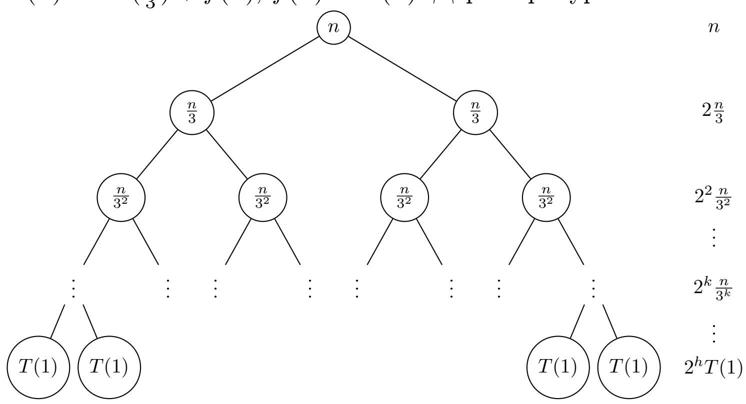


Высота дерева $h = \log_3 n$, $T(n) = \sum\limits_{k=0}^{h-1} 4^k f(\frac{n}{3^k}) + 4^h T(1)$. Из определения Ω $\exists n_0 \, \exists C > 0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow \sum\limits_{k=0}^{h-1} 4^k f(\frac{n}{3^k}) \geqslant Cn \sum\limits_{k=0}^{h-1} \frac{4^k}{3^k} \underset{\text{прогр.}}{\overset{\text{геом.}}{=}} Cn \frac{(4/3)^{h-1}-1}{4/3-1} = 3Cn(\frac{3}{4}(\frac{4}{3})^{\log_3 n} - 1) = 3Cn(\frac{4}{3}\frac{n^{\log_3 4}}{n} - 1) = 4Cn^{\log_3 4} - 3Cn$. Также $4^h = 4^{\log_3 n} = n^{\log_3 4}$, поэтому $T(n) \geqslant 4Cn^{\log_3 4} - 3Cn + n^{\log_3 4} T(1)$, откуда $T(n) = \Omega(n^{\log_3 4})$.

Асимптотическую оценку сверху получить не удастся, так как $T(n) \geqslant f(n)$, и нет верхней оценки для $f(n)$.

Ответ: $\boxed{T(n) = \Omega(n^{\log_3 4})}$

3. $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + f(n)$, $f(n) = O(n)$. Дерево рекурсии:



Высота дерева $h = \log_3 n$. Получаем $T(n) = \sum\limits_{k=0}^{h-1} 2^k f(\frac{n}{3^k}) + 2^h T(1)$. По определению O $\exists n_0 > 0 \, \exists C > 0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow \sum\limits_{k=0}^{h-1} 2^k f(\frac{n}{3^k}) \leqslant Cn \sum\limits_{k=0}^{h-1} (\frac{2}{3})^k \leqslant Cn \frac{1}{1-2/3} = 3Cn = O(n)$. Оценим $2^h T(1) = 2^{\log_3 n} T(1) = n^{\log_3 2} T(1) = O(n^{\log_3 2})$. Получаем $T(n) \leqslant O(n) + O(n^{\log_3 2})$. Но $\log_3 2 < 1$, поэтому $n^{\log_3 2} = \bar{\bar{o}}(n)$, и по 2 получаем $T(n) = O(n)$.

С другой стороны, $T(n) \geqslant 2^h T(1) = \Omega(n^{\log_3 2})$.

Ответ: $\boxed{T(n) = O(n),\, T(n) = \Omega(n^{\log_3 2})}$

Задача 2

Задача 3

Вспомогательные утверждения

1. Пусть $f_1 = \Theta(g_1)$, $f_2 = \Theta(g_2)$, $g_2 = \bar{\bar{o}}(g_1), g_2(n) > 0$. Тогда $f_1 + f_2 = \Theta(g_1)$. Доказательство:
   Из определения Θ получаем $\exists n_0\, \exists C_i^j > 0, (i, j) \in \overline{1,2}^2 \colon \forall n \geqslant n_0 \begin{cases} C_1^1 g_1(n) & \leqslant & f_1(n) & \leqslant & C_2^1 g_1(n) \\ C_1^2 g_2(n) & \leqslant & f_2(n) & \leqslant & C_2^2 g_2(n) \end{cases}$ (n_0 — максимальное из двух определений). Тогда

   $$C_1^1 \xleftarrow{n\to\infty} C_1^1 + C_1^2 \cancelto{0}{\frac{g_2(n)}{g_1(n)}} = \frac{C_1^1 g_1(n) + C_1^2 g_2(n)}{g_1(n)} \leqslant \underline{\frac{f_1(n) + f_2(n)}{g_1(n)}} \leqslant \frac{C_2^1 g_1(n) + C_2^2 g_2(n)}{g_1(n)} = C_2^1 + C_2^2 \cancelto{0}{\frac{g_2(n)}{g_1(n)}} \xrightarrow{n\to\infty} C_2^1$$

   Здесь использовалось определение $\bar{\bar{o}}$. Из определения предела для $\varepsilon = \varepsilon_0 = \min(C_1^1, C_2^1)/2$ получаем при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ $(C_1^1 - \varepsilon) g_1(n) \leqslant f_1(n) + f_2(n) \leqslant (C_2^1 + \varepsilon) g_1(n)$, а из этого следует $f_1 + f_1 = \bar{\bar{o}}(g_1)$$\blacksquare$

2. Пусть $f_1 = O(g_1)$, $f_2 = O(g_2)$, $g_2 = \bar{\bar{o}}(g_1), g_2(n) > 0$. Тогда $f_1 + f_2 = O(g_1)$. Доказательство выше (нужно взять правую часть большого неравенства).