

Теория и реализация языков программирования.

Задание 9: преобразование контекстно-свободных языков

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.10.23

Упражнение 1

Упражнение 2

Упражнение 3

Упражнение 4

Задача 1

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \{xycu \mid x, y \in \{a, b\}^*, x \neq y^R\} \subset \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c\}.$$

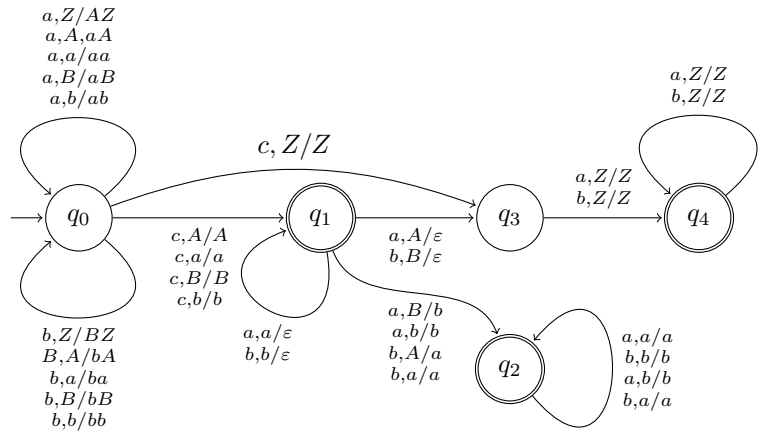
1. Определим МП-автомат $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, Z, \delta, F)$, допускающий по принимающему состоянию:

1. $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, A, B, Z\}$

2. $Q \stackrel{\text{def}}{=} \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

3. δ изображена справа

4. $F \stackrel{\text{def}}{=} \{q_1, q_2, q_4\}$



2. \mathcal{A} — детерминированный, так как из каждой конфигурации (q, w, γ) переход определен однозначно.

ε -переход $q_1 \xrightarrow{\varepsilon, Z/Z} q_3$ — единственный переход из q_1 при Z на верхушке стека.

3. Докажем, что $L \subseteq L(\mathcal{A})$:

1. Пусть $w \in \{a, b\}^*$. Докажем, что $(q_0, w, Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, w^R Z)$ по индукции по $|w|$:

$$P(n) \stackrel{\text{def}}{=} [\forall w \in \{a, b\}^*: |w| = n \leftrightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, w^R Z)]$$

i. $n = 0 \Rightarrow |w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$. Тогда $w^R \equiv \varepsilon$, и $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, \varepsilon, Z) \equiv (q_0, \varepsilon, w^R Z) \Rightarrow P(0)$.

ii. Фиксируем $n \geq 0$, пусть $P(n)$. Пусть $w \in \{a, b\}^*$, $|w| = n + 1$. Тогда $w = w_0 \sigma$, $|w_0| = n$. $P(n) \Rightarrow (q_0, w_0, Z) \vdash^* (q_0, \varepsilon, w_0^R Z)$. Тогда $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, w_0 \sigma, Z) \vdash^* (q_0, \sigma, w_0^R Z)$.
 \nrightarrow переходы из $(q_0, \sigma, w_0^R Z)$. На верхушке стека $\gamma \in \Gamma$, входной символ $\sigma \in \{a, b\}$. Во всех случаях он будет добавлен в стек (см. определение δ), значит, $(q_0, \sigma, w_0^R Z) \vdash (q_0, \varepsilon, \sigma w_0^R Z) \equiv (q_0, \varepsilon, w^R Z) \Rightarrow P(n + 1)$

2. Из определения δ $(q_0, cw, \gamma) \vdash^* (q_1, w, \gamma)$, $|\gamma| > 0$.

3. Докажем $(q_1, x, xZ) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$ по индукции по $|x|$: $P(n) \stackrel{\text{def}}{=} [\forall w \in \{a, b\}^*: |w| = n \leftrightarrow (q_1, x, xZ) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)]$

i. $n = 0 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = \varepsilon$. Тогда $(q_1, x, xZ) \equiv (q_1, \varepsilon, Z) \Rightarrow P(0)$

ii. Фиксируем $n \geq 0$. Пусть $P(n)$. Пусть $x \in \{a, b\}^*$: $|x| = n + 1 \Rightarrow x = x_0 \sigma$, $|x_0| = n \xRightarrow{P(n)} (q_1, x_0, x_0 Z) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z)$. Тогда $(q_1, x, xZ) \equiv (q_1, x_0 \sigma, x_0 \sigma Z) \vdash^* (q_1, \sigma, \sigma Z)$. Входной символ совпадает с символом на верхушке стека, из определения δ получаем, что символ будет удален из стека: $(q_1, \sigma, \sigma Z) \vdash (q_1, \varepsilon, Z) \Rightarrow P(n)$.

4. Из определения δ имеем $(q_1, \sigma_1 x, \sigma_2 \gamma) \vdash (q_2, x, \sigma_2 \gamma)$ при $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \{a, b\}^*$.

5. Из определения δ имеем $(q_2, x, \gamma) \vdash^* (q_2, \varepsilon, \gamma)$, $x \in \{a, b\}^*$ (доказывается очевидно по индукции).

6. Из определения δ имеем $(q_1, x, Z) \vdash (q_3, x, Z)$

7. Из определения δ имеем $(q_3, \sigma x, Z) \vdash (q_4, x, Z)$, $\sigma \in \{a, b\}$.
8. Из определения δ имеем $(q_4, x, Z) \vdash^* (q_4, \varepsilon, Z)$, $x \in \{a, b\}^*$ (доказывается очевидно по индукции).
9. Пусть $w \in L \Rightarrow w = xcy, x \neq y^R; x, y \in \{a, b\}^*$. $x \neq y^R \Leftrightarrow x^R \neq y$. Рассмотрим случаи:
 - i. Выделим максимальную по длине общую часть w длины i у слов x^R и y : $x^R = wx_1, y = wy_1, x_1 \neq y_1$. Тогда $x = x_1^R w^R, w = xcy = x_1^R w^R cwy_1$. Цепочка конфигураций:
 $(q_0, w, Z) \equiv (q_0, x_1^R w^R cwy_1, Z) \stackrel{31}{\vdash^*} (q_0, cwy_1, wx_1 Z) \stackrel{32}{\vdash} (q_1, wy_1, wx_1 Z) \stackrel{33}{\vdash^*} (q_1, y_1, x_1 Z)$.
 А. $|x_1| > 0, |y_1| > 0, x_1[1] \neq y_1[1]$. Обозначим $y_1 = y^1 \dots y^l, \forall i \in \overline{1, l} \hookrightarrow y^i \in \{a, b\}^*$. Тогда $(q_1, y_1, x_1 Z) \equiv (q_1, y^1 \dots y^l, x_1 Z) \stackrel{34}{\vdash} (q_2, y^2 \dots y^l, x_1 Z) \stackrel{35}{\vdash^*} (q_2, \varepsilon, x_1 Z)$. $q_2 \in F \Rightarrow \underline{w \in L(\mathcal{A})}$.
 В. $|x_1| = 0, |y_1| > 0$. $y_1 = \sigma y_0, \sigma \in \{a, b\}$. $(q_1, y_1, x_1 Z) \equiv (q_1, \sigma y_0, Z) \stackrel{36}{\vdash} (q_3, \sigma y_0, Z) \stackrel{37}{\vdash} (q_4, y_0, Z) \stackrel{38}{\vdash^*} (q_4, \varepsilon, Z)$.
 $q_4 \in F \Rightarrow \underline{w \in L(\mathcal{A})}$.
 С. $|x_1| > 0, |y_1| = 0$. Тогда $(q_1, y_1, x_1 Z) \equiv (q_1, \varepsilon, x_1 Z)$.

df

Задача 2

Задача 3

$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$, $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} (N, \Sigma, P, S)$. $N \stackrel{\text{def}}{=} \{A, B, C, D, E, F, G\}$ P :

$$S \rightarrow A|B|C|E|AG$$

$$A \rightarrow C|aABC|\varepsilon$$

$$B \rightarrow bABa|aCbDaGb|\varepsilon$$

$$C \rightarrow BaAbC|aGD|\varepsilon$$

$$F \rightarrow aBaaCbA|aGE$$

$$E \rightarrow A$$

1. Удалим бесплодные символы (для упрощения):

$$(a) V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$$

$$(b) V_1 = V_0 \cup \{A, B, C\} = \{a, b, A, B, C\}$$

$$(c) V_2 = V_1 \cup \{S, F, E\} = \{a, b, S, A, B, C, F, E\}$$

$$(d) V_3 = V_2 \cup \emptyset$$

Тогда $V_3 \setminus \Sigma = \{S, A, B, C, F, E\}$. Удалим нетерминалы $N \setminus V_3 = \{D, G\}$ и правила, их содержащие: $N' \stackrel{\text{def}}{=} N \setminus V_3 = \{S, A, B, C, F, E\}$, P' :

$$S \rightarrow A|B|C|E|A\cancel{G}$$

$$A \rightarrow C|aABC|\varepsilon$$

$$B \rightarrow bABa|a\cancel{C}b\cancel{D}a\cancel{G}b|\varepsilon$$

$$C \rightarrow BaAbC|a\cancel{G}\cancel{D}|\varepsilon$$

$$F \rightarrow aBaaCbA|a\cancel{G}\cancel{E}$$

$$E \rightarrow A$$

2. Удалим недостижимые символы (для упрощения):

$$(a) V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{S\}$$

$$(b) V_1 = V_0 \cup \{A, B, C, E\}$$

$$(c) V_2 = V_1 \cup \emptyset$$

$N'' \stackrel{\text{def}}{=} \{A, B, C, E, S\}$, P'' :

$$S \rightarrow A|B|C|E|A\cancel{G}$$

$$A \rightarrow C|aABC|\varepsilon$$

$$B \rightarrow bABa|a\cancel{C}b\cancel{D}a\cancel{G}b|\varepsilon$$

$$C \rightarrow BaAbC|a\cancel{G}\cancel{D}|\varepsilon$$

$$F \rightarrow a\cancel{B}aa\cancel{C}bA|a\cancel{G}\cancel{E}$$

$$E \rightarrow A$$

- 1,2. Имеем P'' :

$$S \rightarrow A|B|C|E$$

$$A \rightarrow C|aABC|\varepsilon$$

$$B \rightarrow bABa|\varepsilon$$

$$C \rightarrow BaAbC|\varepsilon$$

$$E \rightarrow A$$

3. Удалим ε -правила:

$$(a) A, B, C — \varepsilon\text{-порождающие.}$$

$$(b) S, E — \varepsilon\text{-порождающие } (S \rightarrow A, E \rightarrow A)$$

Перепишем правила, содержащие ε -порождающие нетерминалы справа (2^k правил для каждого правила, содержащего k ε -порождающих нетерминалов). P''' :

$$S \rightarrow A|B|C|E$$

$$A \rightarrow C|a|aC|aB|aBC|aA|aAC|aAB|aABC$$

$$B \rightarrow ba|bBa|bAa|bABa$$

$$C \rightarrow ab|abC|aAb|aAbC|Bab|BabC|BaAbC$$

$$E \rightarrow A$$

Грамматика с такими правилами порождает язык $L(\Gamma) \setminus \{\varepsilon\}$.

4. Найдем цепные пары (множества пар соответствуют добавлениям на шагах алгоритма):

(a) $(S, S), (A, A), (B, B), (C, C), (E, E)$

(b) $(S, A), (S, B), (S, C), (S, E); (A, C); (E, A)$

(c) $(S, C); (\cancel{S, A}); (E, C)$

5. Выпишем новое множество правил P''' :

Цепная пара	Правила
(S, S)	\emptyset
(A, A)	$A \rightarrow a aC aB aBC aA aAC aAB aABC$
(B, B)	$B \rightarrow ba bBa bAa bABa$
(C, C)	$C \rightarrow ab abC aAb aAbC Bab BabC BaAbC$
(E, E)	\emptyset
(S, A)	$S \rightarrow a aC aB aBC aA aAC aAB aABC$
(S, B)	$S \rightarrow ba bBa bAa bABa$
(S, C)	$S \rightarrow ab abC aAb aAbC Bab BabC BaAbC$
(S, E)	\emptyset
(A, C)	$A \rightarrow ab abC aAb aAbC Bab BabC BaAbC$
(E, A)	$E \rightarrow a aC aB aBC aA aAC aAB aABC$
(S, C)	$S \rightarrow ab abC aAb aAbC Bab BabC BaAbC$
(E, C)	$E \rightarrow ab abC aAb aAbC Bab BabC BaAbC$

6. Нетерминалы A, B, C, E, S не являются бесплодными: $A \rightarrow a, B \rightarrow ba, C \rightarrow ab, E \rightarrow a, S \rightarrow ab$.

7. Удалим недостижимые:

(a) $V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{S\}$

(b) $V_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{S, A, B, C\}$

(c) $V_2 = V_1$

Удаляем E . $P^{(5)}$:

$$A \rightarrow a|aC|aB|aBC|aA|aAC|aAB|aABC|ab|abC|aAb|aAbC|Bab|BabC|BaAbC$$

$$B \rightarrow ba|bBa|bAa|bABa$$

$$C \rightarrow ab|abC|aAb|aAbC|Bab|BabC|BaAbC$$

$$S \rightarrow a|aC|aB|aBC|aA|aAC|aAB|aABC|ba|bBa|bAa|bABa|ab|abC|aAb|aAbC|Bab|BabC|BaAbC$$

8. Приведем к нормальной форме Хомского. Добавим нетерминалы A', B' , $A' \rightarrow a, B' \rightarrow b$. Заменяем в правилах a на A' , b на B' . Подчеркнем слова из нетерминалов длины 2 в правых частях правил, которые заменим на новые нетерминалы:

$$A \rightarrow a|A'C|A'B|A'BC|A'A|A'AC|A'AB|A'ABC|A'B'|A'B'C|A'AB'|A'A'B'C|BA'B'|BA'B'C|BA'AB'C$$

$$B \rightarrow B'A'|B'BA'|B'AA'|B'ABA'$$

$$C \rightarrow A'B'|A'B'C|A'AB'|A'AB'C|BA'B'|BA'B'C|BA'AB'C$$

$$S \rightarrow a|A'C|A'B|A'BC|A'A|A'AC|A'AB|A'ABC|B'A'|B'BA'|B'AA'|B'ABA'$$

$$S \rightarrow B'AA'|B'ABA'|A'B'|A'B'C|A'AB'|A'A'B'C|BA'B'|BA'B'C|BA'AB'C$$

$$A' \rightarrow a$$

$$B' \rightarrow b$$

Заменяем подчеркнутые слова на новые нетерминалы:

$$A \rightarrow a|A'C|A'B|X_0C|A'A|X_1C|X_1B|X_1X_2|A'B'|X_3C|X_1B'|X_1X_4|X_5B'|X_5X_4|X_9C$$

$$B \rightarrow B'A'|X_7A'|X_8A'|X_8X_5$$

$$C \rightarrow A'B'|X_3C|X_1B'|X_1X_4|X_5B'|X_5X_4|X_9C$$

$$S \rightarrow a|A'C|A'B|X_0C|A'A|X_1C|X_1B|X_1X_2|B'A'|X_7A'|X_8A'|X_8X_5|A'B'|X_3C|X_1B'|X_1X_4|X_5B'|X_5X_4|X_9C$$

$$A' \rightarrow a$$

$$B' \rightarrow b$$

$$X_0 \rightarrow A'B$$

$$X_1 \rightarrow A'A$$

$$X_2 \rightarrow BC$$

$$X_3 \rightarrow A'B'$$

$$X_4 \rightarrow B'C$$

$$X_5 \rightarrow BA'$$

$$X_6 \rightarrow AB'$$

$$X_7 \rightarrow B'B$$

$$X_8 \rightarrow B'A$$

$$X_9 \rightarrow X_5X_6$$

Задача 4

Задача 5

$\Sigma_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{[1, [2], \bar{\Sigma}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{[1,]_2\}$. $D_2 \stackrel{\text{def}}{=}$ язык ПСП над $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_2 \cup \bar{\Sigma}_2$. $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$. $\varphi: \Sigma^* \longrightarrow \Delta^*$, $\varphi([1] \stackrel{\text{def}}{=} a$, $\varphi([2] \stackrel{\text{def}}{=} b$, $\varphi(]_1 \stackrel{\text{def}}{=} b$, $\varphi(]_2 \stackrel{\text{def}}{=} a$. Доопределим φ до морфизма (см. решение упр. 2 из задания 3). $L \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(D_2 \cap \Sigma^*) \equiv \varphi(D_2)$.

1. Докажем, что $L \subseteq L'$. Пусть $y \in L \equiv \varphi(D_2)$. Тогда $\exists x \in D_2: y = \varphi(x)$. x — ПСП $\Rightarrow \forall i \in \overline{1, 2} \hookrightarrow |x|_{[i]} = |x|_{]i}$. Сложим равенства, получим: $|x|_{[1]} + |x|_{]2} = |x|_{]1} + |x|_{[2}$. Пусть $x = x_1 \dots x_m$, $\forall i \in \overline{1, m} \hookrightarrow x_i \in \Sigma$. Тогда $y = \varphi(x) = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_m) = y_1 \dots y_m$, $\forall i \in \overline{1, m} \hookrightarrow y_i = \varphi(x_i) \in \Delta$. Но из определения φ имеем $[1,]_2 \xrightarrow{\varphi} a;]_1, [2 \xrightarrow{\varphi} b$. Тогда $|y|_a = |x|_{[1]} + |x|_{]2} \equiv |x|_{]1} + |x|_{[2} = |y|_b \Rightarrow y \in L'$ ■
2. Докажем, что $L' \subseteq L$ индукцией по длине $y \in L'$: $P(n) \stackrel{\text{def}}{=} [\forall y \in L': |y| \leq n \hookrightarrow y \in L]$.
Заметим, что $y \in L \Leftrightarrow y \in \varphi(D_2) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \neq \emptyset$. Поэтому будем искать прообраз слова y , принадлежащий D_2 .
 - (а) $n = 0 \Rightarrow |y| = 0 \Rightarrow y = \varepsilon \in L'$. Пусть $x \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \in D_2$ (так как пустое слово — ПСП). Тогда $y = \varepsilon \equiv \varphi(x) \Rightarrow y \in \varphi(D_2) \equiv L \Rightarrow P(0)$
 - (б) Фиксируем $n > 0$. Пусть $P(n-1)$. Пусть $y \in L': |y| = n$. Поскольку $|y| = n > 0$, и $|y|$ — чётно (см. решение задачи 3 из задания 6), то $|y| \geq 2$. Рассмотрим первый и последний символы σ_l и σ_r слова $y \equiv \sigma_l y_1 \sigma_r$:
 - i. $\sigma_l = a, \sigma_r = b$. Тогда $y = ay_1b$. $|y_1| = n-2 \leq n-1 \xrightarrow{P(n-1)} \exists x_1 \in D_2: \varphi(x_1) = y_1$. Определим $x = [1x_1]_1$. $x_1 \in D_2 \Rightarrow x_1$ — ПСП $\Rightarrow x$ — ПСП, так как получен из ПСП добавлением скобок типа 1 слева и справа $\Rightarrow x \in D_2$. Но $\varphi(x) \equiv \varphi([1x_1]_1) = \varphi([1]\varphi(x_1)\varphi(]_1) = ay_1b \equiv y$. Получаем $\varphi^{-1}(y) \cap D_2 \ni x \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \neq \emptyset$.
 - ii. $\sigma_l = b, \sigma_r = b$. Тогда $y = by_1a$. $|y_1| = n-2 \leq n-1 \xrightarrow{P(n-1)} \exists x_1 \in D_2: \varphi(x_1) = y_1$. Определим $x = [2x_1]_2$. $x_1 \in D_2 \Rightarrow x_1$ — ПСП $\Rightarrow x$ — ПСП, так как получен из ПСП добавлением скобок типа 2 слева и справа $\Rightarrow x \in D_2$. Но $\varphi(x) \equiv \varphi([2x_1]_2) = \varphi([2]\varphi(x_1)\varphi(]_2) = by_1a \equiv y$. Получаем $\varphi^{-1}(y) \cap D_2 \ni x \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \neq \emptyset$.
 - iii. $\sigma_l = \sigma_r$. Тогда $y = \sigma y_1 \sigma \in L'$. Воспользуемся утверждением в рамочке из решения задачи 3 задания 6:

$$y = \sigma y_1 \sigma \in L' \Rightarrow \exists y_l, y_r: y = y_l y_r, |y_l|, |y_r| \in \overline{1, |y| - 2}, y_l, y_r \in L'$$

Но $|y_l|, |y_r| \leq |y| - 2 = n - 2 \leq n - 1 \xrightarrow{P(n-1)} \exists x_l, x_r \in D_2: y_l = \varphi(x_l), y_r = \varphi(x_r)$. Определим $x \stackrel{\text{def}}{=} x_l x_r$. Тогда $x \in D_2$ (конкатенация ПСП — ПСП), и $\varphi(x) = \varphi(x_l x_r) = \varphi(x_l) \varphi(x_r) = y_l y_r = y \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \ni x \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \cap D_2 \neq \emptyset$

■

Задача 6