

# Алгоритмы и модели вычислений.

## Задание 1: Алгоритмы и оценка сложности

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.02.13

### (каноническое) Задача 1

$$f(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, g(n) = \log n. \text{ Доказать: } f = \Theta(g) \Leftrightarrow \begin{cases} f = O(g) \\ g = O(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists C_1, n_1: \forall n \geq n_1 \hookrightarrow f(n) \leq C_1 g(n) & (1) \\ \exists C_2, n_2: \forall n \geq n_2 \hookrightarrow g(n) \leq C_2 f(n) & (2) \end{cases}$$

1. Докажем утверждение: пусть  $f(n), g(n): \exists n_0, C_1 > 0: \forall n \geq n_0 \hookrightarrow \underbrace{f(n+1) - f(n)}_{\Delta_f(n)} \leq C_1 \underbrace{g(n+1) - g(n)}_{\Delta_g(n)}$ . Тогда  $f = O(g)$ . Действительно, выберем  $C_2 > 0$  таким образом, что  $f(n_0) \leq C_2 g(n_0)$  (всегда можно сделать). Возьмем  $C$  для определения  $O$  как  $C = \max(C_1, C_2)$ . Докажем по индукции  $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(n) \leq Cg(n)$ :

(a)  $f(n_0) \leq C_2 g(n_0) \leq Cg(n_0)$  ■

(b) Пусть  $f(n) \leq Cg(n)$ . Докажем для  $n+1$ : по условию  $\Delta_f(n) = f(n+1) - f(n) \leq C_1(g(n+1) - g(n)) \leq C(g(n+1) - g(n))$ .

Перегруппируем, получим  $f(n+1) - Cg(n+1) \leq f(n) - Cg(n) \stackrel{\text{предп.}}{\leq} 0$ , т.е.  $f(n+1) \leq Cg(n+1)$  ■

2. Докажем (1).

(a)  $\Delta_f(n) \stackrel{\text{def}}{=} f(n+1) - f(n) = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ .

(b)  $\Delta_g(n) \stackrel{\text{def}}{=} g(n+1) - g(n) = \log(n+1) - \log n = \log \frac{n+1}{n} = \log(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \bar{o}(\frac{1}{n}) = \boxed{*}$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Но по определению  $\bar{o} \exists n_1: \forall n \geq n_1 \hookrightarrow \boxed{*} \geq \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \frac{1}{n}$ . Тогда  $\frac{1}{n} \leq 2 \boxed{*} = 2(g(n+1) - g(n))$

(c) Получаем  $\Delta_f(n) = f(n+1) - f(n) \stackrel{2a}{\leq} \frac{1}{n} \stackrel{2b}{\leq} 2(g(n+1) - g(n)) = 2\Delta_g(n)$ , и по 1 получаем  $f = O(g)$ .

3. Докажем (2).

(a)  $\Delta_f(n) = \frac{1}{n+1}$ . Докажем, что это больше, чем  $\frac{1}{2} \frac{1}{n}$ :  $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{n} = \frac{2n-n-1}{2n(n+1)} = \frac{n-1}{2n(n+1)} \geq 0, n \geq 1$ . Итак,  $\Delta_f(n) \geq \frac{1}{2} \frac{1}{n}$

(b)  $2b \Rightarrow \Delta_g(n) = \frac{1}{n} + \bar{o}(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{2})$  при  $n \geq n_2 > 1$ . Значит,  $\frac{3}{2} \frac{1}{n} \geq \Delta_g(n)$

(c)  $\Delta_g(n) \stackrel{3b}{\leq} \frac{3}{2} \frac{1}{n} \stackrel{3a}{\leq} \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \Delta_f(n)$  при  $n \geq n_2$ , и по 1 получаем  $g = O(f)$ .

### (каноническое) Задача 2

$f(n) \stackrel{\text{def}}{=} C_n^{2n} \equiv \frac{(2n)!}{n!n!}$ . Тогда  $\ln f(n) = \ln(2n)! - 2 \ln n! \stackrel{\text{[1]}}{=} \dots$ . По формуле Стирлинга  $\stackrel{\text{[2]}}{=} (2n) \ln(2n) - 2n + O(\ln(2n)) - n \ln n + n - O(\ln n)$ . Поскольку  $O(\ln(2n)) - O(\ln n) \leq O(\ln(2n)) = O(\ln 2 + \ln n) = O(\ln n)$ , получим  $\stackrel{\text{[3]}}{=} 2n(\ln 2 + \ln n) - n - n \ln n + O(\ln n) = n \ln n - n(1 - 2 \ln 2) + O(\ln n)$ . Тогда  $f(n) = e^{\dots} = e^{n \ln n - n(1 - 2 \ln 2) + O(\ln n)} = O(\frac{n^{n+1}}{e^n})$ , так как  $1 - 2 \ln 2 > 1$ . **ДОПИСАТЬ!**  
Либо:  $n! = \Theta(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n) = \Theta(\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n)$ , поэтому  $f(n) \equiv \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \Theta(\frac{\sqrt{2n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{n(\frac{n}{e})^{2n}}) = \Theta(\frac{4^n}{\sqrt{n}})$

Ответ:  $C_n^{2n} = \Theta(\frac{4^n}{\sqrt{n}})$

### (каноническое) Задача 3

1.  $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + f(n), f(n) = \Theta(n^2 \log n)$ .

(a) Докажем, что теорема неприменима.  $a = 9, b = 3 \Rightarrow \log_b a = \log_3 9 = 2$ .

i. Если  $\exists \varepsilon > 0: f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$ , то  $\exists C > 0 \exists n_0$ , для  $n \geq n_0$  получим  $f(n)/n^{2-\varepsilon} \leq C > 0$ , то есть  $n^2 \log n / n^{2-\varepsilon} \equiv n^\varepsilon \log n \leq C$ , что неверно (функция неограничена сверху).

ii. Если  $f = \Theta(n^2)$ , то  $\exists n_0 \exists C > 0: f \leq Cn^2$  для  $n \geq n_0$ , и  $\log n \leq C$ , что неверно (функция неограничена сверху).

iii. Если  $\exists \varepsilon > 0: f = \Omega(n^{2+\varepsilon})$ , то  $\exists n_0: \forall n \geq n_0 \hookrightarrow f \geq Cn^{2+\varepsilon}$ , и  $\log n \geq Cn^\varepsilon$ , откуда  $\frac{\log n}{n^\varepsilon} \geq C > 0$ , что неверно, так как  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^\varepsilon} = +0$

(b) Найдём ответ через дерево рекурсии. В корне ( $i = 0$ ) выполняется  $n^2 \log n$  операций, у каждой вершины 9 детей, на уровне  $i + 1$   $n_{i+1} = n_i/3$ . У листьев (по индукции по высоте дерева)  $1 = n_h = \frac{n}{3^h}$ , поэтому высота дерева (не считая корня)  $h = \log_3 n$ . Найдём суммарное время:

$$T(n) = \Theta(n^2 \log n + 9(\frac{n}{3})^2 \log \frac{n}{3} + 9^2(\frac{n}{3^2})^2 \log \frac{n}{3^2} + \dots + 9^{h-1}(\frac{n}{3^{h-1}})^2 \log \frac{n}{3^{h-1}}) + 9^h T(1)$$

Найдем сумму в аргументе  $\Theta$ :  $\sum_{i=0}^{h-1} 9^i (\frac{n}{3^i})^2 \log \frac{n}{3^i} = n^2 \sum_{i=0}^{h-1} (\log n - i \log 3) = n^2 \log n (h-1) - n^2 \frac{h-1}{2} \log 3 =$   
 $= n^2 \log n (\log_3 n - 1) - n^2 \frac{\log_3 n - 1}{2} \log 3 = n^2 \log^2 n - n^2 \log n - n^2 \log n + Cn^2 = \Theta(n^2 \log^2 n).$

Найдем  $9^h T(1) = C9^{\log_3 n} = Cn^2$ . Имеем  $T(n) = \Theta(n^2 \log^2 n) + Cn^2 = \boxed{\Theta(n^2 \log^2 n)}$

2.  $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + f(n)$ ,  $f(n) = \Theta(n^2)$ .  $a = 16$ ,  $b = 4$ . Применим второй пункт Теоремы:  $\Theta(n^{\log_b a}) \equiv \Theta(n^2)$ , поэтому  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ , и отсюда  $T(n) = \boxed{\Theta(n^2 \log n)}$ .

3.  $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + \underbrace{\Theta(\frac{n^2 \sqrt{n}}{\log^2 n})}_{g(n)}$ .  $a = 4$ ,  $b = 2 \Rightarrow \log_b a = 2$ . Возьмем  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  и применим третий пункт Теоремы:  $f(n) \stackrel{?}{=} \Omega(n^{2+\varepsilon})$ .

Рассмотрим  $\frac{f(n)}{n^{2+\varepsilon}} = \frac{n^2 \sqrt{n}}{n^2 n^{\varepsilon} \log^2 n} = \frac{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{\log^2 n} = \frac{n^{1/4}}{\log^2 n} = (\frac{n^{1/8}}{\log n})^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ , поэтому  $\exists C > 0 \exists n_0 > 0: \forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(n) \geq Cn^{2+\varepsilon}$ .  
 Докажем, что  $\exists 0 < C < 1 \exists n_1: af(n/b) \leq Cf(n)$ .  $f = \Theta(g) \Rightarrow \exists n_2: \forall n \geq n_2 \hookrightarrow C_1 g(n) \leq f(n) \leq C_2 g(n)$ . Тогда  $af(\frac{n}{b}) \leq$   
 $4C_2 \frac{(\frac{n}{2})^{\frac{5}{2}}}{\log^2(\frac{n}{2})} = \frac{C_2}{\sqrt{2}C_1} \frac{\log^2 n}{\log^2(\frac{n}{2})} C_1 \frac{n^2 \sqrt{n}}{\log^2 n} \leq \frac{C_2}{\sqrt{2}C_1} \frac{\log^2 n}{\log^2(\frac{n}{2})} f(n)$ . Значит, оценка верна, и по теореме получаем  $T(n) = \boxed{\Theta(\frac{n^{5/2}}{\log^2 n})}$

Сравним первую и вторую функции:  $\frac{n^2 \log^2 n}{n^2 \log n} = \log n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ , поэтому первый алгоритм хуже. Сравним вторую и третью функции:  $\frac{n^2 \sqrt{n}}{\log^2 n} \frac{1}{n^2 \log n} = \frac{n^{1/2}}{\log^3 n} = (\frac{n^{1/6}}{\log n})^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ , поэтому третий алгоритм хуже.

Ответ: второй алгоритм имеет наименьшую асимптотическую стоимость.

## (каноническое) Задача 4

1.  $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \underbrace{n}_{f(n)}$ . Воспользуемся пунктом (2) Теоремы:  $\log_b a = \log_2 2 = 1$ , поэтому  $f(n) \equiv n = \Theta(n^{\log_b a}) \equiv \Theta(n)$ .

Ответ:  $T(n) = \Theta(n \log n)$ .

2.  $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + \underbrace{n^2}_{f(n)}$ . Воспользуемся пунктом (3) Теоремы:  $\log_b a = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a + \varepsilon}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\varepsilon} = +\infty$  например при

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Поэтому из определения предела для  $\varepsilon_{\lim} = 1 \exists n_0 > 0: \forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(n) \geq \varepsilon_{\lim} n^{1+\varepsilon}$ , значит,  $f(n) = \Omega(n^{1+\varepsilon})$ .  
 Докажем условие регулярности:  $af(\frac{n}{b}) \equiv 2\frac{n^2}{2^2} = \frac{1}{2}n^2 = \frac{1}{2}f(n) \leq \frac{1}{2}f(n)$ , т.е. условие выполняется с  $c = \frac{1}{2} < 1$ .

Ответ:  $T(n) = \Theta(n^2)$

3.  $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + \underbrace{\frac{n}{\log n}}_{f(n)}$ . Воспользуемся пунктом (1) Теоремы:  $\log_b a = \log_2 4 = 2$ .

Рассмотрим  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a - \varepsilon}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1-\varepsilon} \log n} = 0$  например при  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Из определения предела для

$$\varepsilon_{\lim} = 1 \exists n_0: \forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(n) \leq \varepsilon_{\lim} n^{2-\varepsilon},$$

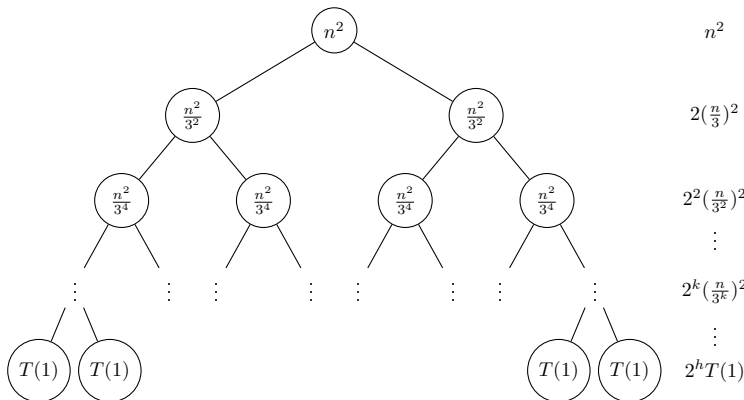
откуда следует  $f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$ .

Ответ:  $T(n) = \Theta(n^2)$

## (каноническое) Задача 5

### Задача 1

1.  $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + f(n)$ ,  $f(n) = \Theta(n^2)$ . Дерево рекурсии:



Таким образом,  $T(n) = \sum_{k=0}^{h-1} 2^k f(\frac{n}{3^{2k}}) + 2^h T(1)$ .

Рассмотрим рекуррентность. Последовательно подставляя  $T(n)$  в правую часть, получим некоторую сумму  $T(n) = \sum_{i=0}^{h-1} C_i \cdot f(\frac{n}{3^i}) + C_h T(1)$ . Она конечна, так как аргумент  $T(\cdot)$  в правой части меньше, чем в левой, причем в 3 раза. Прекращаем подставлять, когда аргумент станет равен 1.  $C_i$  — некоторые коэффициенты, найти которые можно при помощи дерева слева. Корень соответствует  $i = 0$  (база), та, каждый  $i$ -й уровень соответствует  $i$ -му слагаемому суммы. **ДОПИСАТЬ ФОРМАЛЬНО** При последней,  $h$ -й подстановке  $\frac{n}{3^h} = 1$ , откуда  $h = \log_3 n$ .

(a) Обозначим  $g(n) = n^2$ , по условию  $f(n) = \Theta(g(n))$ . Из определения  $\Theta$  получаем

$$\exists n_0 > 0, C_2 > C_1 > 0: \forall n \geq n_0 \hookrightarrow C_1 g(n) \leq f(n) \leq C_2 g(n)$$

. Рассмотрим первую сумму  $S$  при  $n \geq n_0$ :

$$n^2 C_1 \sum_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \leq \overbrace{\sum_{k=0}^{h-1} 2^k f\left(\frac{n^2}{3^{2k}}\right)}^S \leq n^2 C_2 \sum_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \quad (1)$$

Рассмотрим  $S_1(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \stackrel{\text{геом. прогр.}}{=} \frac{1 - \frac{2^{h-1}}{9^{h-1}}}{1 - \frac{2}{9}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 2/9} = \frac{9}{7} \stackrel{\text{def}}{=} l$ . Здесь использовалось  $h = \log_3 n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ . Определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon): \forall n \geq n_1 \hookrightarrow S_1(n) \in U_\varepsilon(l)$$

Фиксируем  $\varepsilon = \varepsilon_0 = l/2$ , определим  $n \stackrel{\text{def}}{=} \max n_2(\varepsilon_0), n_0$ . Тогда  $\forall n \geq n_2 \hookrightarrow 0 < l - \varepsilon \leq S_1(n) \leq l + \varepsilon$ .

Снова рассмотрим (1): при  $n \geq n_2$ :  $n^2 C_1 (l - \varepsilon) \leq n^2 C_1 \sum_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \leq \sum_{k=0}^{h-1} 2^k f\left(\frac{n^2}{3^{2k}}\right) \leq n^2 C_2 \sum_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \leq n^2 C_2 (l + \varepsilon)$ . Получаем

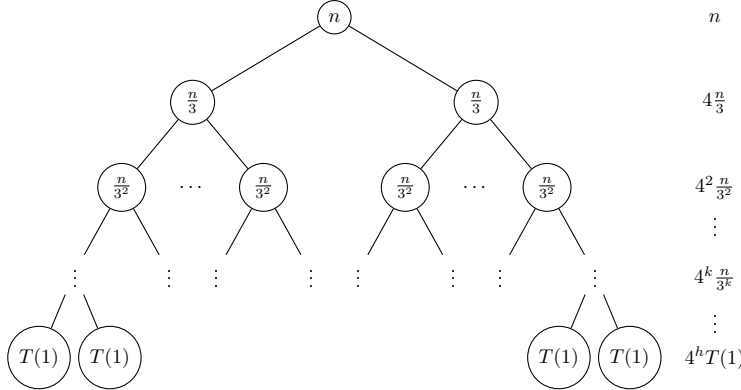
$$S(n) = \Theta(n^2)$$

(b) Рассмотрим  $2^h T(1) = 2^{\log_3 n} T(1) = n^{\log_3 2} \underbrace{T(1)}_{\text{const}} = \Theta(n^{\log_3 2})$

(c) Получаем  $T(n) = \Theta(n^2) + \Theta(n^{\log_3 2}) = \Theta(n^2)$ . Доказательство последнего равенства в конце работы (1) ( $2 > 1 > \log_3 2$ , поэтому  $n^{\log_3 2} = \bar{o}(n^2)$ )

Ответ:  $T(n) = \Theta(n^2)$

2.  $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + f(n)$ ,  $f(n) = \Omega(n)$ . Дерево рекурсии (все ветвления не показаны):



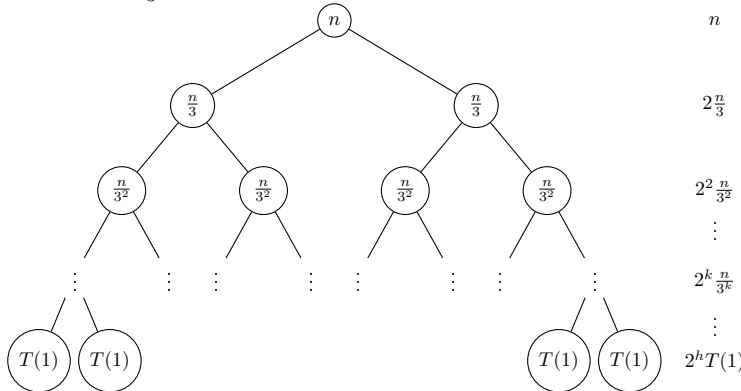
Высота дерева  $h = \log_3 n$ ,  $T(n) = \sum_{k=0}^{h-1} 4^k f(\frac{n}{3^k}) + 4^h T(1)$ . Из определения  $\Omega \exists n_0 \exists C > 0: \forall n \geq n_0 \hookrightarrow \sum_{k=0}^{h-1} 4^k f(\frac{n}{3^k}) \geq$

$Cn \sum_{k=0}^{h-1} \frac{4^k}{3^k} \stackrel{\text{геом. прогр.}}{=} Cn \frac{(4/3)^{h-1} - 1}{4/3 - 1} = 3Cn \left( \frac{3}{4} \left( \frac{4}{3} \right)^{\log_3 n} - 1 \right) = 3Cn \left( \frac{4}{3} \frac{n^{\log_3 4}}{n} - 1 \right) = 4Cn^{\log_3 4} - 3Cn$ . Также  $4^h = 4^{\log_3 n} = n^{\log_3 4}$ , поэтому  $T(n) \geq 4Cn^{\log_3 4} - 3Cn + n^{\log_3 4} T(1)$ , откуда  $T(n) = \Omega(n^{\log_3 4})$ .

Асимптотическую оценку сверху получить не удастся, так как  $T(n) \geq f(n)$ , и нет верхней оценки для  $f(n)$ .

Ответ:  $T(n) = \Omega(n^{\log_3 4})$

3.  $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + f(n)$ ,  $f(n) = O(n)$ . Дерево рекурсии:



Высота дерева  $h = \log_3 n$ . Получаем  $T(n) = \sum_{k=0}^{h-1} 2^k f(\frac{n}{3^k}) + 2^h T(1)$ . По определению  $O \exists n_0 > 0 \exists C > 0: \forall n \geq n_0 \hookrightarrow$

$\sum_{k=0}^{h-1} 2^k f(\frac{n}{3^k}) \leq Cn \sum_{k=0}^{h-1} \left( \frac{2}{3} \right)^k \leq Cn \frac{1}{1 - 2/3} = 3Cn = O(n)$ . Оценим  $2^h T(1) = 2^{\log_3 n} T(1) = n^{\log_3 2} T(1) = O(n^{\log_3 2})$ . Получаем

$T(n) \leq O(n) + O(n^{\log_3 2})$ . Но  $\log_3 2 < 1$ , поэтому  $n^{\log_3 2} = \bar{o}(n)$ , и по 2 получаем  $T(n) = O(n)$ .  
С другой стороны,  $T(n) \geq 2^h T(1) = \Omega(n^{\log_3 2})$ .

Ответ:  $T(n) = O(n), T(n) = \Omega(n^{\log_3 2})$

## Задача 2

## Задача 3

### Вспомогательные утверждения

1. Пусть  $f_1 = \Theta(g_1), f_2 = \Theta(g_2), g_2 = \bar{o}(g_1), g_2(n) > 0$ . Тогда  $f_1 + f_2 = \Theta(g_1)$ . Доказательство:

Из определения  $\Theta$  получаем  $\exists n_0 \exists C_i^j > 0, (i, j) \in \overline{1, 2}^2: \forall n \geq n_0 \left\{ \begin{array}{l} C_1^1 g_1(n) \leq f_1(n) \leq C_2^1 g_1(n) \\ C_1^2 g_2(n) \leq f_2(n) \leq C_2^2 g_2(n) \end{array} \right. \quad (n_0 - \text{максималь-}$   
ное из двух определений). Тогда

$$C_1^1 \overset{n \rightarrow \infty}{\leftarrow} C_1^1 + C_1^2 \overset{0}{\cancel{g_2(n)}} = \frac{C_1^1 g_1(n) + C_1^2 g_2(n)}{g_1(n)} \leq \frac{f_1(n) + f_2(n)}{g_1(n)} \leq \frac{C_2^1 g_1(n) + C_2^2 g_2(n)}{g_1(n)} = C_2^1 + C_2^2 \overset{0}{\cancel{g_2(n)}} \overset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} C_2^1$$

Здесь использовалось определение  $\bar{o}$ . Из определения предела для  $\varepsilon = \varepsilon_0 = \min(C_1^1, C_2^1)/2$  получаем при  $n \geq n_0(\varepsilon)$   $(C_1^1 - \varepsilon)g_1(n) \leq f_1(n) + f_2(n) \leq (C_2^1 + \varepsilon)g_1(n)$ , а из этого следует  $f_1 + f_2 = \bar{o}(g_1)$  ■

2. Пусть  $f_1 = O(g_1), f_2 = O(g_2), g_2 = \bar{o}(g_1), g_2(n) > 0$ . Тогда  $f_1 + f_2 = O(g_1)$ . Доказательство выше (нужно взять правую часть большого неравенства).