Теория и реализация языков программирования.
Задание 10: LL-анализ

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.11.13

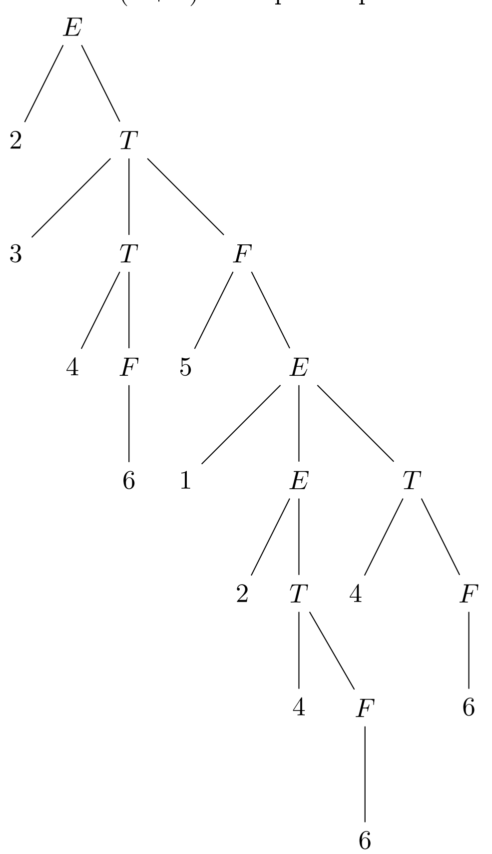
Упражнение 1

Пусть $G = (N, T, P, S)$. Занумеруем правила из P: $P = \{P_1, ..., P_n\}$.
Определим синтаксический перевод $T_l = (N, T, T', R, S)$:

1. $T' = \{1, ..., n\}$
2. R определяется через P: каждому правилу $P \ni P_i = (X, Y_1...Y_n)$ сопоставим правила в R: пусть $Y_{j_1}...Y_{j_l}$ — максимальная подпоследовательность из нетерминалов из слова $Y_1...Y_n$. Тогда $X \longrightarrow Y_1...Y_n, iY_{j_1}...Y_{j_l}) \in P'$.
   По построению нетерминалы, входящие в $\alpha \equiv Y_1...Y_n$ входят также в $\beta \equiv Y_{j_1}...Y_{j_l}$, причем с той же кратностью.

Упражнение 2

$w = a * (a + a)$. Построим правый вывод по дереву вывода (из задания):



Чтобы получить правый вывод, обойдем дерево разбора в G' следующим образом:

1. Выпишем самого левого потомка (по структуре правил, это всегда будет номер правила из G)
2. Выполним разбор оставшихся потомков справа налево.

Получаем последовательность правил правого вывода w в G: $P_r = 23514624646$.
Правый вывод *(выделен раскрываемый нетерминал)*: $\underline{E} \overset{2}{\Rightarrow} \underline{T} \overset{3}{\Rightarrow} T * \underline{F} \overset{5}{\Rightarrow} T * (\underline{E}) \overset{1}{\Rightarrow} T * (E + \underline{T}) \overset{4}{\Rightarrow} T * (E + \underline{F}) \overset{6}{\Rightarrow} T * (\underline{E} + a) \overset{2}{\Rightarrow} T * (\underline{T} + a) \overset{4}{\Rightarrow} T * (\underline{F} + a) \overset{6}{\Rightarrow} \underline{T} * (a + a) \overset{4}{\Rightarrow} \underline{F} * (a + a) \overset{6}{\Rightarrow} a * (a + a) = w$.
По определению, правый разбор — примененнные при правом выводе правила в обратном порядке: $(P_r)^R = 64642641532$.

Упражнение 3

Упражнение 4

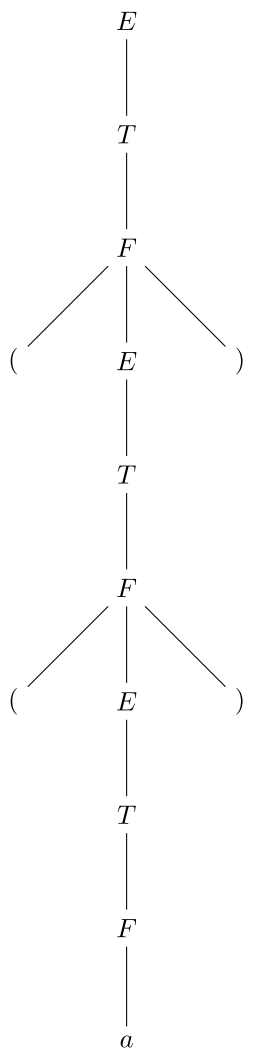
Упражнение 5

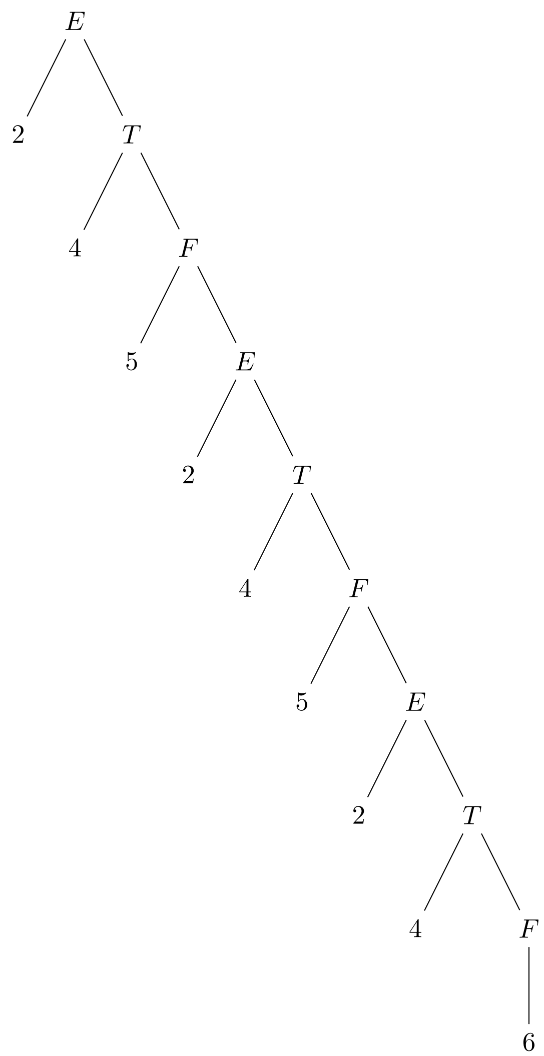
Упражнение 6

Задача 1

$w = ((a)) \in L(G)$: $\underline{E} \overset{2}{\Rightarrow} \underline{T} \overset{4}{\Rightarrow} \underline{F} \overset{5}{\Rightarrow} (\underline{E}) \overset{2}{\Rightarrow} (\underline{T}) \overset{4}{\Rightarrow} (\underline{F}) \overset{5}{\Rightarrow} ((E)) \overset{2}{\Rightarrow} ((\underline{T})) \overset{4}{\Rightarrow} ((\underline{F})) \overset{6}{\Rightarrow} ((a))$.

1. Построим дерево вывода w в G и соответствующее дерево в G':





2. Левый разбор: обойдем второе дерево в глубину, всегда выбирая самого левого непосещенного потомка: $P_l = 245245246$.
3. Правый разбор: обойдем второе дерево в глубину, как указано в решении упражнения 2: $(P_r)^R = 245245246 \Rightarrow P_r = 642542542$.

Задача 2

1. $\Sigma' = \{0, 1, \$\}$, $N' = \{S', S\}$. Пополненная грамматика $G' = (N', \Sigma', P', S')$, $P = \{\overbrace{S' \to S\$}^{(0)}, \overbrace{S \to 0S}^{(1)}, \overbrace{S \to 1S}^{(2)}, \overbrace{S \to \varepsilon}^{(3)}\}$.
2. Вычислим FIRST:

		$F_i(0)$	$F_i(1)$	$F_i(\$)$	$F_i(S)$	$F_i(S')$
0.	Определим F_0:	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
0.1.	Терминалы: $F_0(0) \overset{\text{def}}{=} \{0\}$, $F_0(1) \overset{\text{def}}{=} \{1\}$, $F_0(\$) \overset{\text{def}}{=} \{\$\}$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
0.2.	Есть правило $S \overset{(3)}{\to} \varepsilon \Rightarrow F_0(S) \overset{\text{def}}{=} \{\varepsilon\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon\}$	$\varnothing$
0.3.	Нет правила $S' \to \varepsilon \Rightarrow F_0(S') \overset{\text{def}}{=} \varnothing$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon\}$	$\varnothing$
1.	Определим $F_1 = F_0$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon\}$	$\varnothing$
1.1.	Рассмотрим символы правой части правила $S' \overset{(0)}{\to} S\$$. 1. $\underline{S}\$$ $F_0(\underline{S}) = \{\varepsilon\} \ni \varepsilon$. $F_0(\underline{S}) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_1(S')$. 2. $S\underline{\$}$ $F_0(\underline{\$}) = \{\$\} \not\ni \varepsilon$. $F_0(\underline{\$}) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_1(S')$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\$\}$
1.2.	Рассмотрим правило $S \overset{(1)}{\to} \underline{0}S$. $F_0(\underline{0}) = \{0\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_1(S) \leftarrow \{0\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0\}$	$\{\$\}$
1.3.	Рассмотрим правило $S \overset{(2)}{\to} \underline{1}S$. $F_0(\underline{1}) = \{1\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_1(S) \leftarrow \{1\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$\}$
1.4.	Рассмотрим правило $S \overset{(3)}{\to} \underline{\varepsilon}$. $\lvert\underline{\varepsilon}\rvert = 0 \Rightarrow$ не изменяем F_1	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$\}$
2.	Определим $F_2 = F_1$:	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$\}$
2.1.	Рассмотрим символы правой части правила $S' \overset{(0)}{\to} S\$$. 1. $\underline{S}\$$ $F_1(\underline{S}) = \{\varepsilon, 0, 1\} \ni \varepsilon$. $F_1(\underline{S}) \setminus \{\varepsilon\} = \{0, 1\} \to F_2(S')$. 2. $S\underline{\$}$ $F_1(\underline{\$}) = \{\$\} \not\ni \varepsilon$. $F_0(\underline{\$}) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_2(S')$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
2.2.	Рассмотрим правило $S \overset{(1)}{\to} \underline{0}S$. $F_1(\underline{0}) = \{0\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_2(S) \leftarrow \{0\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
2.3.	Рассмотрим правило $S \overset{(2)}{\to} \underline{1}S$. $F_1(\underline{1}) = \{1\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_2(S) \leftarrow \{1\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
2.4.	Рассмотрим правило $S \overset{(3)}{\to} \underline{\varepsilon}$. $\lvert\underline{\varepsilon}\rvert = 0 \Rightarrow$ не изменяем F_2	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.	Определим $F_3 = F_2$:	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.1.	Рассмотрим символы правой части правила $S' \overset{(0)}{\to} S\$$. 1. $\underline{S}\$$ $F_2(\underline{S}) = \{\varepsilon, 0, 1\} \ni \varepsilon$. $F_2(\underline{S}) \setminus \{\varepsilon\} = \{0, 1\} \to F_3(S')$. 2. $S\underline{\$}$ $F_2(\underline{\$}) = \{\$\} \not\ni \varepsilon$. $F_2(\underline{\$}) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_3(S')$.	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.2.	Рассмотрим правило $S \overset{(1)}{\to} \underline{0}S$. $F_2(\underline{0}) = \{0\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_3(S) \leftarrow \{0\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.3.	Рассмотрим правило $S \overset{(2)}{\to} \underline{1}S$. $F_2(\underline{1}) = \{1\} \not\ni \varepsilon \Rightarrow F_3(S) \leftarrow \{1\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.4.	Рассмотрим правило $S \overset{(3)}{\to} \underline{\varepsilon}$. $\lvert\underline{\varepsilon}\rvert = 0 \Rightarrow$ не изменяем F_3	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$
3.5.	Имеем $F_3 = F_2 \Rightarrow$ выход	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{\$\}$	$\{\varepsilon, 0, 1\}$	$\{\$, 0, 1\}$

3. Вычислим FOLLOW:

			$F_i(S)$	$F_i(S')$
0.	Определим F_0:		$\varnothing$	$\varnothing$
1.	Определим $F_1 = F_0$:		$\varnothing$	$\varnothing$
1.1.	Рассмотрим правило $\underbrace{S'}_{A} \overset{(0)}{\to} \underbrace{\varepsilon}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\$}_{\beta}$	(a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\$\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_1(S)$. (b) $\varepsilon \notin \text{FIRST}(\beta)$.	$\{\$\}$	$\varnothing$
1.2.	Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \overset{(1)}{\to} \underbrace{0}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\varepsilon}_{\beta}$	(a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_1(S)$. (b) $\varepsilon \in \text{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_1(S) \leftarrow F_0(S) = \varnothing$	$\{\$\}$	$\varnothing$
1.3.	Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \overset{(2)}{\to} \underbrace{1}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\varepsilon}_{\beta}$	(a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_1(S)$. (b) $\varepsilon \in \text{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_1(S) \leftarrow F_0(S) = \varnothing$	$\{\$\}$	$\varnothing$
1.4.	Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \overset{(3)}{\to} \varepsilon$. Оно не имеет вид $A \to \alpha X \beta$, не изменяем F_1		$\{\$\}$	$\varnothing$
2.	Определим $F_2 = F_1$:		$\{\$\}$	$\varnothing$
2.1.	Рассмотрим правило $\underbrace{S'}_{A} \overset{(0)}{\to} \underbrace{\varepsilon}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\$}_{\beta}$	(a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\$\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \{\$\} \to F_2(S)$. (b) $\varepsilon \notin \text{FIRST}(\beta)$.	$\{\$\}$	$\varnothing$
2.2.	Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \overset{(1)}{\to} \underbrace{0}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\varepsilon}_{\beta}$	(a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_2(S)$. (b) $\varepsilon \in \text{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_3(S) \leftarrow F_1(S) = \{\$\}$	$\{\$\}$	$\varnothing$
2.3.	Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \overset{(2)}{\to} \underbrace{1}_{\alpha}\underbrace{S}_{X}\underbrace{\varepsilon}_{\beta}$	(a) $\text{FIRST}(\beta) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \setminus \{\varepsilon\} = \varnothing \to F_2(S)$. (b) $\varepsilon \in \text{FIRST}(\beta)$, поэтому $F_3(S) \leftarrow F_2(S) = \{\$\}$	$\{\$\}$	$\varnothing$
2.4.	Рассмотрим правило $\underbrace{S}_{A} \overset{(3)}{\to} \varepsilon$. Оно не имеет вид $A \to \alpha X \beta$, не изменяем F_1		$\{\$\}$	$\varnothing$
2.5.	Имеем $F_2 = F_1 \Rightarrow$ выход		$\{\$\}$	$\varnothing$

4. Таблица переходов для $LL(1)$-анализатора:

	0	1	$
S'	$S' \xrightarrow{(0)} S\$$	$S' \xrightarrow{(0)} S\$$	$S' \xrightarrow{(0)} S\$$
S	$S \xrightarrow{(1)} 0S$	$S \xrightarrow{(2)} 1S$	$S \xrightarrow{(3)} \varepsilon$
0	ε	**Err.**	**Err.**
1	**Err.**	ε	**Err.**
$	**Err.**	**Err.**	**Acc.**

(a) $(S', 0)$: правило $S' \xrightarrow{(0)} S\$$: $\mathrm{FIRST}(S\$) = \mathrm{FIRST}(S) \oplus \mathrm{FIRST}(\$) = \{0, 1, \$\} \ni 0$

(b) $(S', 1)$: правило $S' \xrightarrow{(0)} S\$$: $\mathrm{FIRST}(S\$) = \mathrm{FIRST}(S) \oplus \mathrm{FIRST}(\$) = \{0, 1, \$\} \ni 1$

(c) $(S', \$)$: правило $S' \xrightarrow{(0)} S\$$: $\mathrm{FIRST}(S\$) = \mathrm{FIRST}(S) \oplus \mathrm{FIRST}(\$) = \{0, 1, \$\} \ni \$$

(d) $(S, 0)$: правило $S \xrightarrow{(1)} 0S$: $\mathrm{FIRST}(0S) = \{0\} \ni 0$

(e) $(S, 1)$: правило $S \xrightarrow{(2)} 1S$: $\mathrm{FIRST}(1S) = \{1\} \ni 1$

(f) $(S, \$)$: правило $S \xrightarrow{(3)} \varepsilon$: $\mathrm{FOLLOW}(S) = \{\$\} \ni \$$

Задача 3

$N \stackrel{\text{def}}{=} \{E, T, F\}$, $T \stackrel{\text{def}}{=} \{a, (,), +, *\}$, $G \stackrel{\text{def}}{=} (N, T, P, E)$, $P \stackrel{\text{def}}{=} \{E \to E + T | T | \varepsilon, T \to T * F | F, F \to (E) | a\}$

Построим FIRST_1:

i	$F_i(\cdot)$							
	a	(	)	$+$	$*$	E	T	F
0	$\{a\}$	$\{(\}$	$\{)\}$	$\{+\}$	$\{*\}$	$\{\varepsilon\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
1	$\{a\}$	$\{(\}$	$\{)\}$	$\{+\}$	$\{*\}$	$\{\varepsilon, +\}$	$\varnothing$	$\{(, a\}$
2	$\{a\}$	$\{(\}$	$\{)\}$	$\{+\}$	$\{*\}$	$\{\varepsilon, +\}$	$\{(, a\}$	$\{(, a\}$
3	$\{a\}$	$\{(\}$	$\{)\}$	$\{+\}$	$\{*\}$	$\{\varepsilon, +, (, a\}$	$\{(, a\}$	$\{(, a\}$
4	$\{a\}$	$\{(\}$	$\{)\}$	$\{+\}$	$\{*\}$	$\{\varepsilon, +, (, a\}$	$\{(, a\}$	$\{(, a\}$

Ответ: $\boxed{\mathrm{FIRST}(E) = \{\varepsilon, +, (, a\}}$

Задача 4

1. $\Sigma' \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \$\}$, $N' \stackrel{\text{def}}{=} (S', S, A)$, пополненная грамматика $G' = (N', \Sigma', P', S)$.
   $P' \stackrel{\text{def}}{=} \{S' \xrightarrow{(0)} S\$, S \xrightarrow{(1)} aAaa, S \xrightarrow{(2)} bAba, A \xrightarrow{(3)} b, A \xrightarrow{(4)} \varepsilon\}$

2. Найдем FIRST_1:

i	$F_i(a)$	$F_i(b)$	$F_i(\$)$	$F_i(S)$	$F_i(S')$	$F_i(A)$
0	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{\varepsilon\}$
1	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{a, b\}$	$\varnothing$	$\{b, \varepsilon\}$
2	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{b, \varepsilon\}$
3	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{b, \varepsilon\}$

3. Возьмем $\alpha = ba$, $w = b$, $\beta = b$, $\gamma = \varepsilon$, нетерминал A. Тогда $A \xrightarrow{(3)} b \equiv \beta$, $A \xrightarrow{(4)} \varepsilon \equiv \gamma$, $S' \xRightarrow{(0)} \underline{S}\$ \xRightarrow{(2)} \underbrace{b}_{w} A \underbrace{ba\$}_{\alpha}$.

   Имеем $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\beta\alpha) \equiv \mathrm{FIRST}(ba\$) = \{b\}$ и $G \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\gamma\alpha) = \mathrm{FIRST}(bba\$) = \{b\}$ и $F \cap G = \{b\} \neq \varnothing$.
   Получаем $\exists A \exists \alpha, \beta \colon A \to \alpha, A \to \beta \in P'$, $\exists w \exists \alpha \colon S' \Rightarrow_l^* wA\alpha$, $\mathrm{FIRST}(\beta\alpha) \cap \mathrm{FIRST}(\gamma\alpha) \neq \varnothing$ — формальное отрицание утверждения Теоремы 1 из задания. Получаем, что G' — не LL(1)-грамматика.

4. Найдем FIRST_2:

i	$F_i(a)$	$F_i(b)$	$F_i(\$)$	$F_i(S)$	$F_i(S')$	$F_i(A)$
0	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
1	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{ab, aa, bb\}$	$\varnothing$	$\{b, \varepsilon\}$
2	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{ab, aa, bb\}$	$\{ab, aa, bb\}$	$\{b, \varepsilon\}$
3	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{ab, aa, bb\}$	$\{ab, aa, bb\}$	$\{b, \varepsilon\}$

5. Докажем, что G' — LL(2)-грамматика, пользуясь Теоремой 1. Рассмотрим пары правил $X \to \beta$, $X \to \gamma$:

   (a) $S \xrightarrow{(1)} \underbrace{aAaa}_{\beta}$, $S \xrightarrow{(2)} \underbrace{bAba}_{\gamma}$. Тогда $\forall \alpha \hookrightarrow$ слова из $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}_2(\beta\alpha)$ начинаются с a, слова из $G \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}_2(\gamma\alpha)$ начинаются с b, поэтому $F \cap G = \varnothing$

   (b) $A \xrightarrow{(3)} \underbrace{b}_{\beta}$, $A \xrightarrow{(4)} \underbrace{\varepsilon}_{\gamma}$. Пусть $S \Rightarrow_l^* wA\alpha$. Тогда $\alpha[1, 2] \in \{aa, ba\}$ — действительно, нетерминал A может появиться только после применения (1) или (2). Рассмотрим эти два случая:

      i. $\alpha[1, 2] = aa$. Тогда $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}_2(\beta\alpha) = \mathrm{FIRST}_2(baa) = \{ba\}$, $G \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}_2(\gamma\alpha) = \mathrm{FIRST}_2(aa) = \{aa\}$. Поэтому $F \cap G = \varnothing$

      ii. $\alpha[1, 2] = ba$. Тогда $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}_2(\beta\alpha) = \mathrm{FIRST}_2(bba) = \{bb\}$, $G \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}_2(\gamma\alpha) = \mathrm{FIRST}_2(ba) = \{ba\}$. Поэтому $F \cap G = \varnothing$

6. Найдем FOLLOW_2:

i	$F_i(S)$	$F_i(S')$	$F_i(A)$
0	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
1	$\{\$\}$	$\varnothing$	$\{aa, ba\}$
2	$\{\$\}$	$\varnothing$	$\{aa, ba\}$

Задача 5

1. $N \overset{\text{def}}{=} \{S, A\}$, $T \overset{\text{def}}{=} \{a, b\}$, $G \overset{\text{def}}{=} \{N, T, P, S\}$. $P = \{S \to ba|A,\ A \to a|Aab|Ab\}$.

2. Удалим непосредственную левую рекурсию: $N' \overset{\text{def}}{=} \{S, A, A'\}$, $P' \overset{\text{def}}{=} \{S \to bA|A,\ A \to aA',\ A' \to abA'|bA'|\varepsilon\}$. $G' \overset{\text{def}}{=} \{N', T, P', S\}$.

3. $L(G') = L(G)$ — так как применен алгоритм

4. G'' — пополненная грамматика: $T'' \overset{\text{def}}{=} \{a, b, \$\}$, $N'' \overset{\text{def}}{=} \{S, S', A, A'\}$,
$P'' \overset{\text{def}}{=} \{S' \overset{(0)}{\to} S\$, S \overset{(1)}{\to} ba, S \overset{(2)}{\to} A, A \overset{(3)}{\to} aA', A' \overset{(4)}{\to} abA', A' \overset{(5)}{\to} bA', A' \overset{(6)}{\to} \varepsilon\}$

5. Найдем FIRST:

i	$F_i(a)$	$F_i(b)$	$F_i(\$)$	$F_i(S)$	$F_i(S')$	$F_i(A)$	$F_i(A')$
0	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{\varepsilon\}$
1	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{a, b, \varepsilon\}$
2	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{b, a\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a, b, \varepsilon\}$
3	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{b, a\}$	$\{b, a\}$	$\{a\}$	$\{a, b, \varepsilon\}$
4	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{\$\}$	$\{b, a\}$	$\{b, a\}$	$\{a\}$	$\{a, b, \varepsilon\}$

6. Докажем, что G' — LL(1)-грамматика. Рассмотрим пары правил $X \to \beta$, $X \to \gamma$:

   (a) $S \overset{(1)}{\to} \underbrace{ba}_{\beta}$, $S \overset{(2)}{\to} \underbrace{A}_{\gamma}$. Тогда $\forall \alpha \hookrightarrow F \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\beta\alpha) = \mathrm{FIRST}(b) = \{b\}$, $G \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\gamma\alpha) = \{a\} \Rightarrow F \cap G = \varnothing$

   (b) $A' \overset{(4)}{\to} \underline{a}bA'$, $A' \overset{(5)}{\to} \underline{b}A'$. Аналогично $F \cap G = \varnothing$.

   (c) $A' \overset{(4)}{\to} \underbrace{abA'}_{\beta}$, $A' \overset{(6)}{\to} \underbrace{\varepsilon}_{\gamma}$. Пусть $S' \Rightarrow_l^* wA\alpha$. Тогда $\alpha = \$$, так правила $(4), (5), (6)$ оставляют A' последним символом слова. Тогда $F \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\beta\alpha) = \{a\}$, $G \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\gamma\alpha) = \{\$\}$, поэтому $F \cap G = \varnothing$.

   (d) $A' \overset{(5)}{\to} \underbrace{bA'}_{\beta}$, $A' \overset{(6)}{\to} \underbrace{\varepsilon}_{\gamma}$. Пусть $S' \Rightarrow_l^* wA\alpha$. Аналогично $\alpha = \$$. Тогда $F \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\beta\alpha) = \{b\}$, $G \overset{\text{def}}{=} \mathrm{FIRST}(\gamma\alpha) = \{\$\}$, поэтому $F \cap G = \varnothing$.

7. Найдем FOLLOW:

i	$F_i(S')$	$F_i(S)$	$F_i(A)$	$F_i(A')$
0	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
1	$\varnothing$	$\{\$\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
2	$\varnothing$	$\{\$\}$	$\{\$\}$	$\varnothing$
3	$\varnothing$	$\{\$\}$	$\{\$\}$	$\{\$\}$
4	$\varnothing$	$\{\$\}$	$\{\$\}$	$\{\$\}$

8. Построим LL-анализатор:

	a	b	$\$$
S'	$S' \overset{(0)}{\to} S\$$	$S' \overset{(0)}{\to} S\$$	**Err.**
S	$S \overset{(2)}{\to} A$	$S \overset{(1)}{\to} ba$	**Err.**
A	$A \overset{(3)}{\to} aA'$	**Err.**	**Err.**
A'	$A' \overset{(4)}{\to} abA'$	$A' \overset{(5)}{\to} bA'$	$A' \overset{(6)}{\to} \varepsilon$
a	ε	**Err.**	**Err.**
b	**Err.**	ε	**Err.**
$\$$	**Err.**	**Err.**	**Acc.**

Задача 6

1. Предположим, что $L \overset{\text{def}}{=} a^* \cup a^n b^n$ — LL-язык. Тогда $\exists k \exists G\colon L(G) = L$ и G — LL(k)-грамматика.

2. Рассмотрим слова $x_i \overset{\text{def}}{=} a^{2k+i} b^{2k+i}$ и $y_i \overset{\text{def}}{=} a^{2k+i}$. Фиксируем i. Рассмотрим левые выводы x_i и y_i (они единственные по предположению 1). Пусть их наибольшая совпадающая часть $S \Rightarrow_l^* w_i A_i \alpha_i$. Имеем $w_i A_i \alpha_i \Rightarrow^* x_i$ и $w_i A_i \alpha_i \Rightarrow^* y_i$, причем нетерминал A_i раскрывается в этих выводах на первом шаге различными способами (применяются разные правила). Определим $n_i \overset{\text{def}}{=} |w_i|$, $m_i \overset{\text{def}}{=} 2k + i - n_i$

3. Поскольку $w_i \in T^*$ и $w_i A_i \alpha_i \Rightarrow^* a^{2k+i}$, получаем $w_i \in a^*$.

4. Рассмотрим утверждение
$$P \overset{\text{def}}{=} \left[\forall i \hookrightarrow |w_i| > k + i\right].$$
   (a) Предположим, что P верно. Рассмотрим $m_i \equiv 2k + i - n_i < 2k + i - k - i = k$. Эта последовательность принимает конечное количество значений. Рассмотрим нетерминалы A_i. Их также конечное число. Поэтому пара (m_i, A_i) принимает конечное количество значений. По принципу Дирихле получаем $\exists i_1 < i_2\colon A_{i_1} = A_{i_2}, m_{i_1} = m_{i_2}$. Определим $A \overset{\text{def}}{=} A_{i_1} \equiv A_{i_2}$, $t \overset{\text{def}}{=} m_{i_1} \equiv m_{i_2}$, $w_1 \overset{\text{def}}{=} w_{i_1}$, $w_2 \overset{\text{def}}{=} w_{i_2}$, $\alpha_1 \overset{\text{def}}{=} \alpha_{i_1}$, $\alpha_2 \overset{\text{def}}{=} \alpha_{i_2}$. Перепишем свойство: $w_1 A \alpha_1 \Rightarrow^* a^{2k+i_1}, a^{2k+i_1} b^{2k+i_1}$, аналогично для i_2. $|w_1| = n_{i_1}, w_1 \overset{3}{\in} a^*$, поэтому $w_1 = a^{n_{i_1}}$. Значит, $A\alpha_1 \Rightarrow^* a^t, a^t b^{2k+i_1}$, $A\alpha_2 \Rightarrow^* a^t, a^t b^{2k+i_2}$, так как $t = m_{i_1} = m_{i_2} = 2k + i_1 - n_1 = 2k + i_2 - n_2$. Рассмотрим вывод $A\alpha_2 \Rightarrow^* a^t b^{2k+i_2}$. Далее называем его «этим» выводом.
   Определим утверждения:
      i. $R \overset{\text{def}}{=}$ «в "этом" выводе A порождает хотя бы один b»
      ii. $Q \overset{\text{def}}{=}$ «в "этом" выводе α_2 порождает хотя бы один b»

   Рассмотрим случаи:
      i. Пусть $\urcorner R$. Тогда A в «этом» выводе порождает a^p. Пусть в выводе $A\alpha_2 \Rightarrow^* a^t$ нетерминал A порождает a^q.
         A. Пусть $p = q$. Поскольку первые правила в выводах различны (по построению), получаем неоднозначность грамматики, так как $A \Rightarrow^* a^p$ можно вывести двумя способами. Поэтому <u>G — не LL(k)-грамматика</u>.
         B. Пусть $p \neq q$. Изменим «этот» вывод: выведем из A слово a^q вместо a^p. Количество символов a в выведенной из S цепочке изменится, а количество b — нет. Изначально они были равны. Получаем, что $L(G) \neq L$ — <u>противоречие</u>.
      ii. Пусть $\urcorner Q$. Тогда α_2 в «этом» выводе порождает ε, так как после b не может следовать a. Значит, $A \Rightarrow^* a^t b^{2k+i_2}$. Рассмотрим вывод $(*)$ $A\alpha_1 \Rightarrow^* a^t b^{2k+i_1}$. Пусть из α_1 здесь выводится x. Изменим вывод $(*)$: выведем из A слово $a^t b^{2k+i_2}$, а из α_1 — x. Получим, что выведенное таким образом из S слово w не из L: $|w|_b \geqslant 2k + i_2$. После b не может следовать a, поэтому $|w|_a = 2k + i_1$. Это <u>противоречие</u>, а именно, $L(G) \neq L$.
      iii. Последний случай: пусть верно $R \wedge Q$. Тогда в «этом» выводе $A\alpha_2 \Rightarrow^* yu$, где $y = a^t b^{t_1}$ порождается α, а $u = b^{2k+i_2-t_1}$ порождается α_2. $R \Rightarrow t_1 > 0$. Рассмотрим другой вывод $A\alpha_2 \Rightarrow^* a^t$. Из его существования следует, что $\alpha_2 \Rightarrow^* a^d$. Изменим «этот» вывод, выводя из α_2 цепочку a^d. Получим слово $w = a^{2k+i_2} b^{t_1} a^d \in L$. Поскольку после b не может следовать a, $d = 0$. В w меньше символов b, чем в слове, полученном при «этом» выводе (так как $Q \Rightarrow u \neq \varnothing$), а символов a — столько же . Из утверждения R получаем, что символы b там есть — $t_1 > 0$). Значит, $L(G) \ni w \notin L$ — <u>противоречие</u>.

   (b) $\urcorner P \Rightarrow \exists i\colon |w_i| \leqslant k + i$. Определим $A \overset{\text{def}}{=} A_i$, $n \overset{\text{def}}{=} n_i$, $m \overset{\text{def}}{=} m_i$, $x \overset{\text{def}}{=} x_i$, $y \overset{\text{def}}{=} y_i$. $w \overset{3}{=} a^n$, Тогда $A\alpha \Rightarrow^* a^m b^{2k+i}, a^m$. $m \equiv 2k + i - n \geqslant 2k + i - k - i = k$. Рассмотрим вывод $S \Rightarrow_l^* wA\alpha \Rightarrow^* x, y$. При выводе x и y нетерминал A был раскрыт различными способами соответсвенно (по построению): $A \to \beta$, $A \to \gamma$. Имеем эти два правила и $X = \mathrm{FIRST}_k(\beta\alpha) \supset \mathrm{FIRST}_k(a^m) \overset{m \geqslant k}{=} \{a^k\}$, $Y = \mathrm{FIRST}_k(\gamma\alpha) \supset \mathrm{FIRST}_k(a^m b^{2k+i}) \overset{m \geqslant k}{=} \{a^k\}$, но $a^k \in X \cap Y \neq \varnothing$, поэтому
   <u>G — не LL(k)-грамматика</u> по Теореме 1.

5. В непротиворечивых рассмотренных случаях получено, что G — не LL(k)-грамматика, что противоречит изначальному предположению 1, отрицание предположения: <u>L — не LL-язык</u> ■