

Методы оптимизации. Сдача, задача 3

Сергей Володин, 374 гр.

7 мая 2016 г.

Задача 3

Пусть $\{a_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$. $\rho > 0$. Функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(y) = \left(\sum |a_i, y|^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}$$

Задача (1):

$$\sup_{\|y\|_2 \leq 1} f(y)$$

Требуется построить двойственную задачу.

Перепишем (1):

$$\min_{\|y\| \leq 1} -f(y)$$

Функция Лагранжа:

$$L(y, \lambda) = -f(y) + \lambda(\|y\| - 1)$$

Двойственная задача:

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} L(y, \lambda) \rightarrow \max_{\lambda \geq 0}$$

Перепишем и получим двойственную задачу:

$$-\inf_{y \in \mathbb{R}^n} L(y, \lambda) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} -L(y, \lambda) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (f(y) - \lambda\|y\| + \lambda) = \underbrace{\sup_{y \in \mathbb{R}^n} (f(y) - \lambda\|y\|_2) + \lambda}_{g(\lambda)} \rightarrow \min_{\lambda \geq 0}$$

Осталось найти $g(\lambda)$. Обозначим

$$v(\lambda) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \underbrace{f(y) - \lambda\|y\|_2}_{M(y, \lambda)}.$$

Тогда $g(\lambda) = \lambda + v(\lambda)$. Найдём v .

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Заметим, что $f(\alpha y) = \left(\sum_{i=1}^m |(a_i, \alpha y)|^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} = \left(|\alpha|^\rho \sum_{i=1}^m |(a_i, y)|^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} = |\alpha| f(y)$. Также $\|\alpha y\|_2 = |\alpha| \cdot \|y\|_2$, откуда $M(\alpha y, \lambda) = |\alpha| (f(y) - \lambda\|y\|_2)$.

Фиксируем $\lambda \geq 0$. Пусть $\exists y \in \mathbb{R}^n: f(y) - \lambda\|y\|_2 > 0$. Тогда возьмём $0 < \alpha_k \rightarrow \infty$ и получим $M(\alpha_k y, \lambda) = \alpha_k \underbrace{M(y, \lambda)}_{>0} \rightarrow +\infty$.

То есть, $v(\lambda) = +\infty$

Пусть верно обратное, то есть, $\forall y \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow f(y) - \lambda\|y\|_2 \leq 0$. Но это значит, что $v(\lambda) \leq 0$. Но $v(\lambda) \geq M(0, \lambda) = 0$, значит, $v(\lambda) = 0$.

Перепишем условие $\forall y \in \mathbb{R}^n f(y) - \lambda\|y\|_2 \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\|y\|_2} = \lambda^*$.

Получаем, что $g(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \lambda \geq \lambda^* \\ +\infty & \lambda \in [0, \lambda^*] \end{cases}$

Заметим, что решением двойственной задачи $\inf_{\lambda \geq 0} g(\lambda)$ является число λ^* , так как $\inf g(\mathbb{R}_+) = \inf[\lambda^*, +\infty] = \lambda^*$.

Также

$$\lambda^* = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\|y\|} = \sup_{\|y\|=1, t \in \mathbb{R}_+} \frac{f(ty)}{\|ty\|} = \sup_{\|y\|=1} f(y) = \sup_{\|y\|=1, t \in [0, 1]} tf(y) = \sup_{\|y\| \leq 1} f(y)$$

То есть, число λ^* является решением исходной задачи (1).

Вопрос: этого достаточно, или нужно найти λ^* (т.е. решить исходную задачу)?