

# Теория и реализация языков программирования.

## Задание 4: Замкнутость регулярных языков, теорема Майхилла-Нероуда и минимальные автоматы

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.09.25

Сделано позже срока сдачи.

### Задача 2

Идея обсуждалась вместе с Владом Гончаренко.

1. В одну сторону утверждение из условия очевидно: если  $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$ , то  $\forall w \hookrightarrow w \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{B})$ , в том числе и для тех, о которых говорится в условии.
2. Докажем в другую сторону.  $M = \{w \mid |w| \leq |Q^{\mathcal{A}}| \cdot |Q^{\mathcal{B}}|\}$ . Если входные автоматы не полные, пополним их.
  1. Утверждение: дан ДКА  $\mathcal{A}$ ,  $|Q| = n$ , Состояние  $q_i \in Q$  достижимо. Тогда кратчайший путь (слово) из  $q_0$  в  $q_i$  не больше  $n$ . Действительно, пусть иначе (кратчайший путь  $w$  имеет большую длину). Значит (принцип Дирихле), автомат в какой-то вершине  $q_1$  побывал дважды:  $w = xyz$ ,  $(q_0, w) \equiv (q_0, xyz) \vdash (q_1, yz) \vdash (q_1, z) \vdash (q_i, \varepsilon)$ ,  $|y| > 0$ . Удалив  $y$ , получим  $w' = xz$ , также попадем в  $q_i$ :  $(q_0, w') \equiv (q_0, xz) \vdash (q_1, z) \vdash (q_i, \varepsilon)$ , но путь стал короче — противоречие ( $xyz$  — самый короткий).
  2. Рассмотрим автомат  $\mathcal{C}$ , имитирующий работу двух входных автоматов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  (такой построен в задаче 4.4). В нем  $|Q^{\mathcal{A}}| \cdot |Q^{\mathcal{B}}|$  состояний. Кратчайшие пути до достижимых состояний не длиннее  $|Q^{\mathcal{A}}| \cdot |Q^{\mathcal{B}}|$  (п. 1), поэтому, перебрав все  $w \in M$  (то есть, слова, которые не длиннее  $|Q^{\mathcal{A}}| \cdot |Q^{\mathcal{B}}|$ , в том числе и те, которые могут быть кратчайшими путями), автомат  $\mathcal{C}$  побывает в каждом достижимом состоянии. Значит, пара  $(q_i^{\mathcal{A}}, q_j^{\mathcal{B}})$  из конечных состояний входных автоматов после прочтения слов  $w \in M$  достигнет всех своих возможных значений. То есть,

$$\forall q_j^i \text{ — достижимое} \hookrightarrow \exists m \in M: q_0^0 \xrightarrow{m} q_j^i.$$

3. Рассмотрим произвольное  $w \in \Sigma^*$ . Пусть  $q_0^0 \xrightarrow{w} q_j^i$  (здесь используется полнота автоматов). Значит,  $q_j^i$  — достижимое. Тогда (п.2) для него существует  $m_0 \in M: q_0^0 \xrightarrow{m_0} q_j^i$ , иными словами,  $q_0^{\mathcal{A}} \xrightarrow{m_0} q_i^{\mathcal{A}}, q_0^{\mathcal{B}} \xrightarrow{m_0} q_j^{\mathcal{B}}$ . Из условия имеем  $\forall m \in M \hookrightarrow m \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow m \in L(\mathcal{B})$ . В том числе это выполнено и для  $m_0: m_0 \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow m_0 \in L(\mathcal{B})$ . Значит,  $q_i^{\mathcal{A}} \in F^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow q_j^{\mathcal{B}} \in F^{\mathcal{B}}$ . А это означает, что  $w \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{B})$  ■