

Задача 3

Сергей Володин, 374 гр.

27 апреля 2016 г.

Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$G = \{(x, y) | x \in [0, \pi], y \in [0, \sin x]\} \subset \Pi = [a, b] \times [c, d]$$

Найти:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_G f(x, y) dx dy$$

Пусть $\xi \sim u[a, b]$, $\eta \sim u[c, d]$, случайные величины ξ , η — независимы. Обозначим

$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y)[(x, y) \in G]$$

Тогда

$$\mathbb{E}g(\xi, \eta) = \int_{\Pi} g(x, y) f_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \int_{\Pi} f(x, y)[(x, y) \in G] \frac{1}{b-a} \frac{1}{d-c} dx dy = \frac{1}{\mu\Pi} \int_G f(x, y) dx dy,$$

то есть,

$$I = \mu\Pi \cdot \mathbb{E}g(x, y)$$

Имеем выборку $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n \sim (\xi, \eta)$.

Тогда

$$I \approx \mu\Pi \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_k, y_k)[(x_k, y_k) \in G]$$

Для конкретной задачи $\xi \sim u[0, \pi]$, $\eta \sim u[0, 1]$

$$I \approx \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^N x_k y_k [y_k \leq \sin x_k]$$