Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 1: Алгоритмы и оценка сложности

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.02.13

(каноническое) Задача 1

$f(n) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, $g(n) = \log n$. Доказать: $f = \Theta(g) \Leftrightarrow \begin{cases} f = O(g) \\ g = O(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists C_1, n_1 \colon \forall n \geqslant n_1 \hookrightarrow f(n) \leqslant C_1 g(n) & (1) \\ \exists C_2, n_2 \colon \forall n \geqslant n_2 \hookrightarrow g(n) \leqslant C_2 f(n) & (2) \end{cases}$

1. Докажем утверждение: пусть $f(n), g(n) \colon \exists n_0, C_1 > 0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow \underbrace{f(n+1) - f(n)}_{\Delta_f(n)} \leqslant C_1 \underbrace{g(n+1) - g(n)}_{\Delta_g(n)}$. Тогда $f = O(g)$. Действительно, выберем $C_2 > 0$ таким образом, что $f(n_0) \leqslant C_2 g(n_0)$ (всегда можно сделать). Возьмем C для определения O как $C = \max(C_1, C_2)$. Докажем по индукции $\forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow f(n) \leqslant Cg(n)$:
   (a) $f(n_0) \leqslant C_2 g(n_0) \leqslant Cg(n_0)$■
   (b) Пусть $f(n) \leqslant Cg(n)$. Докажем для $n+1$: по условию $\Delta_f(n) = f(n+1) - f(n) \leqslant C_1(g(n+1) - g(n)) \leqslant C(g(n+1) - g(n))$. Перегруппируем, получим $f(n+1) - Cg(n+1) \leqslant f(n) - Cg(n) \overset{\text{предп.}}{\leqslant} 0$, т.е. $f(n+1) \leqslant Cg(n+1)$■
2. Докажем (1).
   (a) $\measuredangle \Delta_f(n) \overset{\text{def}}{=} f(n+1) - f(n) = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$.
   (b) $\measuredangle \Delta_g(n) \overset{\text{def}}{=} g(n+1) - g(n) = \log(n+1) - \log n = \log \frac{n+1}{n} = \log(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \bar{\bar{o}}(\frac{1}{n}) = \boxed{*}$, $n \to \infty$. Но по определению $\bar{\bar{o}}$ $\exists n_1 \colon \forall n \geqslant n_1 \hookrightarrow \boxed{*} \geqslant \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{n}$. Тогда $\frac{1}{n} \leqslant 2\boxed{*} = 2(g(n+1) - g(n))$
   (c) Получаем $\Delta_f(n) = f(n+1) - f(n) \overset{2a}{\leqslant} \frac{1}{n} \overset{2b}{\leqslant} 2(g(n+1) - g(n)) = 2\Delta_g(n)$, и по 1 получаем $f = O(g)$.
3. Докажем (2).
   (a) $\measuredangle \Delta_f(n) = \frac{1}{n+1}$. Докажем, что это больше, чем $\frac{1}{2}\frac{1}{n}$: $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} = \frac{2n-n-1}{2n(n+1)} = \frac{n-1}{2n(n+1)} \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. Итак, $\Delta_f(n) \geqslant \frac{1}{2}\frac{1}{n}$
   (b) $2b \Rightarrow \Delta_g(n) = \frac{1}{n} + \bar{\bar{o}}(\frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{2})$ при $n \geqslant n_2 > 1$. Значит, $\frac{3}{2}\frac{1}{n} \geqslant \Delta_g(n)$
   (c) $\Delta_g(n) \overset{3b}{\leqslant} \frac{3}{2}\frac{1}{n} \overset{3a}{\leqslant} \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \Delta_f(n)$ при $n \geqslant n_2$, и по 1 получаем $g = O(f)$.

(каноническое) Задача 2

$f(n) \overset{\text{def}}{=} C_{2n}^n \equiv \frac{(2n)!}{n!n!}$. Формула Стирлинга: $n! = \Theta(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n) = \Theta(\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n)$, поэтому $f(n) \equiv \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \Theta(\frac{\sqrt{2n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{n(\frac{n}{e})^{2n}}) = \Theta(\frac{4^n}{\sqrt{n}})$

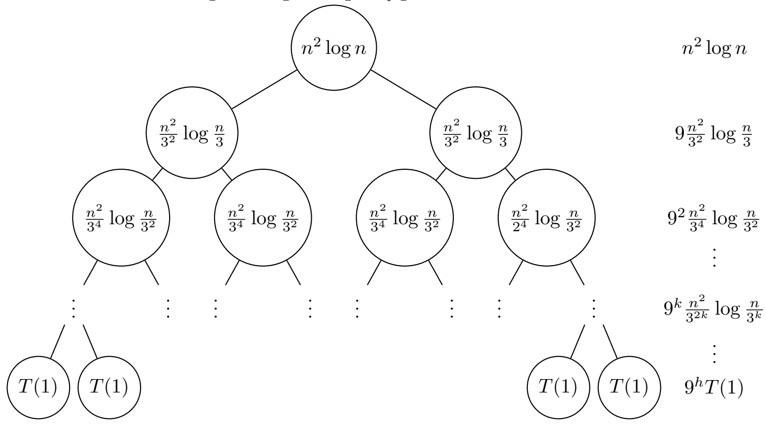
Ответ: $\boxed{C_{2n}^n = \Theta(\frac{4^n}{\sqrt{n}})}$

Попытка не через формулу Стирлинга (не дописано): Рассмотрим $f(n) = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)!}{n^2(n-1)!(n-1)!} = (4 - \frac{2}{n})f(n-1)$. Таким образом, $\frac{f(n)}{f(n-1)} = 4 - \frac{2}{n}$ Определим $g(n) = \frac{4^n}{\sqrt{n}}$, докажем, что $f = \Theta(g)$. Рассмотрим $\frac{g(n)}{g(n-1)} = \frac{4\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = 4\sqrt{1 - \frac{1}{n}}\boxed{=}$. По формуле Тейлора $\boxed{=}4(1 - \frac{1}{2n} + \bar{\bar{o}}(\frac{1}{n})) = 4 - \frac{2}{n} + \bar{\bar{o}}(\frac{1}{n})$
Получаем, что $\frac{f(n)}{f(n-1)} - \frac{g(n)}{g(n-1)} = \bar{\bar{o}}(\frac{1}{n})$

(каноническое) Задача 3

1. $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + f(n)$, $f(n) = \Theta(n^2 \log n)$.
   (a) Докажем, что теорема неприменима. $a = 9, b = 3 \Rightarrow \log_b a = \log_3 9 = 2$.
      i. Если $\exists \varepsilon > 0 \colon f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$, то $\exists C > 0 \exists n_0$, для $n \geqslant n_0$ получим $f(n)/n^{2-\varepsilon} \leqslant C > 0$, то есть $n^2 \log n / n^{2-\varepsilon} \equiv n^\varepsilon \log n \leqslant C$, что неверно (функция неограничена сверху).
      ii. Если $f = \Theta(n^2)$, то $\exists n_0 \exists C > 0 \colon f \leqslant Cn^2$ для $n \geqslant n_0$, и $\log n \leqslant C$, что неверно (функция неограничена сверху).
      iii. Если $\exists \varepsilon > 0 \colon f = \Omega(n^{2-\varepsilon})$, то $\exists n_0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow f \geqslant Cn^{2+\varepsilon}$, и $\log n \geqslant Cn^\varepsilon$, откуда $\frac{\log^n}{n^\varepsilon} \geqslant C > 0$, что неверно, так как $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\log n}{n^\varepsilon} = +0$

(b) Найдем ответ через дерево рекурсии.



В корне ($i=0$) выполняется $n^2 \log n$ операций, у каждой вершины 9 детей, на уровне $i+1$ $n_{i+1} = n_i/3$. У листьев (по индукции по высоте дерева) $1 = n_h = \frac{n}{3^h}$, поэтому высота дерева *(не считая корня)* $h = \log_3 n$. Найдем суммарное время (C_1, C_2 — из определения Θ для f, под записью «$\in [C_1, C_2]$» подразумеваются два неравенства):

$$T(n) = \sum_{i=0}^{h-1} 9^k f(\frac{n}{3^k}) + 9^h T(1) \in [C_1, C_2](n^2 \log n + 9(\frac{n}{3})^2 \log\frac{n}{3} + 9^2(\frac{n}{3^2})^2 \log\frac{n}{3^2} + ... + 9^{h-1}(\frac{n}{3^{h-1}})^2 \log\frac{n}{3^{h-1}}) + 9^h T(1)$$

Найдем сумму в аргументе Θ: $\sum\limits_{i=0}^{h-1} 9^i(\frac{n}{3^i})^2 \log\frac{n}{3^i} = n^2 \sum\limits_{i=0}^{h-1}(\log n - i\log 3) = n^2 \log n(h-1) - n^2\frac{h-1}{2}\log 3 =$
$= n^2 \log n(\log_3 n - 1) - n^2\frac{\log_3 n - 1}{2}\log 3 = n^2\log^2 n - n^2 \log n - n^2 \log n + Cn^2 = \Theta(n^2 \log^2 n)$.
Найдем $9^h T(1) = C9^{\log_3 n} = Cn^2$. Имеем $T(n) = \Theta(n^2\log^2 n) + Cn^2 = \boxed{\Theta(n^2 \log^2 n)}$

2. $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + f(n)$, $f(n) = \Theta(n^2)$. $a = 16$, $b = 4$. Применим второй пункт Теоремы: $\Theta(n^{\log_b a}) \equiv \Theta(n^2)$, поэтому $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, и отсюда $T(n) = \boxed{\Theta(n^2 \log n)}$.

3. **Доказательство неверное, регулярность не выполняется!**
$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + \Theta(\underbrace{\frac{n^2\sqrt{n}}{\log^2 n}}_{g(n)})$. $a = 4$, $b = 2 \Rightarrow \log_b a = 2$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{4}$ и применим третий пункт Теоремы: $f(n) \stackrel{?}{=} \Omega(n^{2+\varepsilon})$.
Рассмотрим $\frac{f(n)}{n^{2+\varepsilon}} = \frac{n^2\sqrt{n}}{n^2 n^\varepsilon \log^2 n} = \frac{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{\log^2 n} = \frac{n^{1/4}}{\log^2 n} = (\frac{n^{1/8}}{\log_n})^2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, поэтому $\exists C > 0 \exists n_0 > 0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow f(n) \geqslant Cn^{2+\varepsilon}$.
Докажем, что $\exists 0 < C < 1 \exists n_1 \colon af(n/b) \leqslant Cf(n)$. $f = \Theta(g) \Rightarrow \exists n_2 \colon \forall n \geqslant n_2 \hookrightarrow C_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant C_2 g(n)$. Тогда $af(\frac{n}{b}) \leqslant 4C_2\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{5}{2}}}{\log^2(\frac{n}{2})} = \frac{C_2}{\sqrt{2}C_1}\frac{\log^2 n}{\log^2(\frac{n}{2})} C_1\frac{n^2\sqrt{n}}{\log^2 n} \leqslant \underbrace{\frac{C_2}{\sqrt{2}C_1}\frac{\log^2 n}{\log^2(\frac{n}{2})}}_{\textbf{не обязательно } <1} f(n)$. Значит, оценка верна, и по теореме получаем $T(n) = \boxed{\Theta(\frac{n^{5/2}}{\log^2 n})}$

Сравним первую и вторую функции: $\frac{n^2\log^2 n}{n^2 \log n} = \log n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, поэтому первый алгоритм хуже. Сравним вторую и третью функции: $\frac{n^2\sqrt{n}}{\log^2 n}\frac{1}{n^2 \log n} = \frac{n^{1/2}}{\log^3 n} = (\frac{n^{1/6}}{\log n})^3 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, поэтому третий алгоритм хуже.
Ответ: $\boxed{\text{второй алгоритм}}$ имеет наименьшую асимптотическую стоимость.

(каноническое) Задача 4

1. $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \underbrace{n}_{f(n)}$. Воспользуемся пунктом (2) Теоремы: $\log_b a = \log_2 2 = 1$, поэтому $f(n) \equiv n = \Theta(n^{\log_b a}) \equiv \Theta(n)$.
Ответ: $\boxed{T(n) = \Theta(n \log n)}$.

2. $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + \underbrace{n^2}_{f(n)}$. Воспользуемся пунктом (3) Теоремы: $\log_b a = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^{\log_b a+\varepsilon}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{1-\varepsilon} = +\infty$ например при $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Поэтому из определения предела для $\varepsilon_{\lim} = 1 \exists n_0 > 0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow f(n) \geqslant \varepsilon_{\lim} n^{1+\varepsilon}$, значит, $f(n) = \Omega(n^{1+\varepsilon})$.
Докажем условие регулярности: $af(\frac{n}{b}) \equiv 2\frac{n^2}{2^2} = \frac{1}{2}n^2 = \frac{1}{2}f(n) \leqslant \frac{1}{2}f(n)$, т.е. условие выполняется с $c = \frac{1}{2} < 1$.
Ответ: $\boxed{T(n) = \Theta(n^2)}$

3. $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + \underbrace{\frac{n}{\log n}}_{f(n)}$. Воспользуемся пунктом (1) Теоремы: $\log_b a = \log_2 4 = 2$.
Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^{\log_b a-\varepsilon}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-\varepsilon}\log n} = 0$ например при $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Из определения предела для

$$\varepsilon_{\lim} = 1 \exists n_0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow f(n) \leqslant \varepsilon_{\lim} n^{2-\varepsilon},$$

откуда следует $f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$.
Ответ: $\boxed{T(n) = \Theta(n^2)}$

(каноническое) Задача 5

$M(m) \overset{\text{def}}{=} Mult(m)$, $A(m) \overset{\text{def}}{=} Add(m)$.
Элементарная битовая операция — конъюнкция, дизъюнкция, сложение, умножение двух бит.
Описание алгоритма. Пусть даны числа $p = a + bx$, $q = c + dx$. Пусть числа a, b, c, d — m-битные, $x = 2^m$. Требуется найти pq.
Но $pq = (a + bx)(c + dx) = ac + x(ad + bc) + bdx^2$. Рассмотрим $\begin{cases} t_1 & = & ac \\ t_2 & = & bd \\ t_3 & = & (a+b)(c+d) \end{cases}$. Тогда $pq = t_1 + (t_3 - t_1 - t_2)x + t_2x^2$.

1. Для получения t_i необходимо 2 умножения чисел по m бит, одно умножение чисел по $m + 1$ бит, два сложения чисел по m бит: $2M(m) + M(m + 1) + A(m)$. Для вычисления pq таким образом требуется еще два сложение чисел длиной менее $m + 1$ и битовые сдвиги (их не считаем). Получаем $M(2m) = 2M(m) + M(m + 1) + A(m) + 2A(m + 1)$.

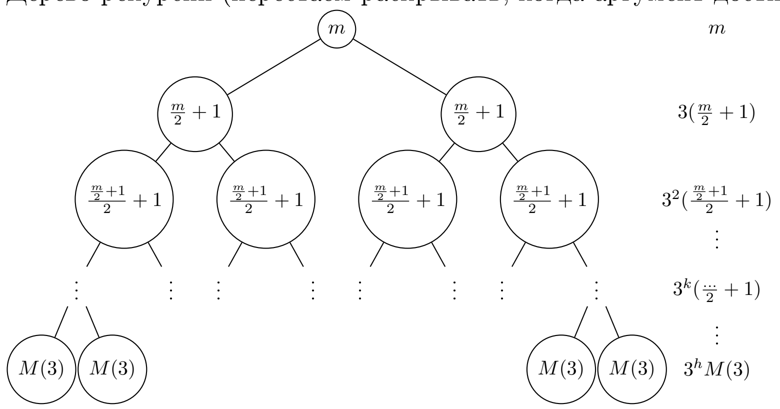
2. Докажем, что $A(m+1) = A(m)$: пусть нужно сложить числа p и q по $m+1$ бит. Представим их в виде $p = a_1+t_1x$, a_2+t_2x, где $x = 2^m$, и t_i — соответствующие старшие биты. Полусим $p + q = (a_1 + a_2) + (t_1 + t_2)x$. Сумму $a_1 + a_2$ вычислим за $A(m)$, сложение $t_1 + t_2$ — за константу (всего 4 возможных случая), далее вычислим $p + q$ за константу. Получаем $A(m + 1) = A(m) + O(1)$, откуда $A(m + 1) = O(A(m))$

3. Поскольку $M(m) \leqslant M(m + 1)$, получим $M(2m) \leqslant 3M(m + 1) + A(m) + 2A(m + 1)$, и по предыдущему пункту
$$M(2m) \leqslant 3M(m + 1) + O(A(m))$$
.

4. Поскольку $A(m) = O(m)$, $M(2m) \leqslant 3M(m + 1) + O(m)$, т.е.
$$M(m) \leqslant 3M(\frac{m}{2} + 1) + f(m), \text{ где } f(m) = O(m).$$

5. Из определения $O(m)$ получаем $\exists m_0\, \exists C > 0\colon \forall m \geqslant m_0 \hookrightarrow f(m) \leqslant Cm$

6. Дерево рекурсии (перестаем раскрывать, когда аргумент достигнет 3):



Найдем элементы последовательности аргументов f:
$a_{i+1} = \frac{a_i}{2} + 1$. $a_0 = m$. По индукции докажем $a_i \overset{?}{=} a_i' = \frac{m}{2^i} + \sum\limits_{k=0}^{i-1} \frac{1}{2^k}$.

(a) База: $a_0 = n$, $a_0' = m$ ■

(b) Переход. Пусть $a_l' = a_l$. Тогда $a_{l+1}' - a_{l+1} = \frac{m}{2^{i+1}} + \sum\limits_{k=0}^{l} \frac{1}{2^k} - \frac{a_l}{2} - 1 \boxed{=}$. Но $a_l = a_l'$, поэтому

$\boxed{=} \frac{m}{2^{i+1}} + \sum\limits_{k=0}^{l} \frac{1}{2^k} - \frac{m}{2^{i+1}} - \sum\limits_{k=0}^{l-1} \frac{1}{2^{k+1}} - 1$. Сумма $\sum\limits_{k=0}^{l-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum\limits_{k=1}^{l} \frac{1}{2^k}$, поэтому $\boxed{=} \sum\limits_{k=0}^{l} \frac{1}{2^k} - 1 - \sum\limits_{k=1}^{l} \frac{1}{2^k} = 0$ ■

Высота дерева $h \leqslant \log_2 m$, так как $a_h = 3 \Leftrightarrow \frac{m}{2^h} = 3 - \sum\limits_{k=0}^{h-1} \frac{1}{2^k} \geqslant 1 \Leftrightarrow 2^h \leqslant m \Rightarrow h \leqslant \log_2 m$

Последовательность $a_l = \frac{m}{2^l} + \sum\limits_{i=0}^{l-1} 2^{-i} \leqslant \frac{m}{2^l} + 2$. Получаем $M(m) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{h-1} 3^k f(\frac{m}{2^k} + 2) + 3^h M(2) \leqslant Cm \sum\limits_{k=0}^{h-1} (\frac{3}{2})^k + 2C \sum\limits_{k=0}^{h-1} 3^k + 3^h M(2)$. Первая сумма $\sum\limits_{k=0}^{h-1} (\frac{3}{2})^k = \frac{1-(3/2)^{h-1}}{1-3/2} \leqslant 2((3/2)^{\log_2 m}) - 2 = 2m^{\log_2 \frac{3}{2}} - 2$

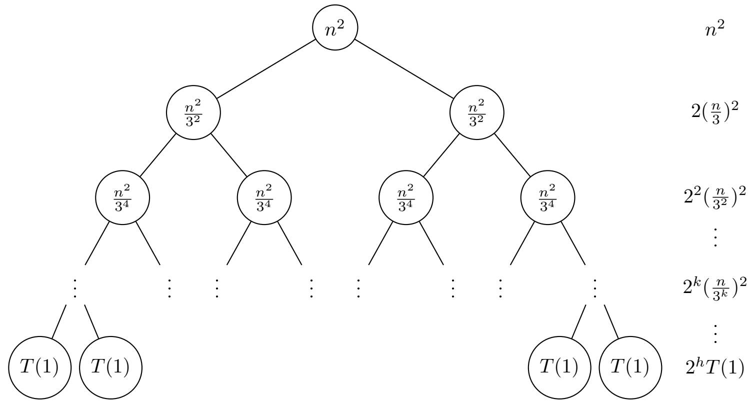
Вторая сумма $\sum\limits_{k=0}^{h-1} 3^k = \frac{3^{h-1}-1}{2} \leqslant \frac{1}{2}(m^{\log_2 3} - 1)$

Тогда $M(m) \leqslant Cm(2m^{\log_2 \frac{3}{2}} - 2) + 2C\frac{1}{2}(m^{\log_2 3} - 1) + m^{\log_2 3}T(2) = O(m^{\log_2 3})$, так как $m^{1+\log_2(3/2)} = m^{\log_2 3}$

Ответ: $\boxed{Mult(m) = O(m^{\log_2 3})}$

Задача 1

1. $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + f(n)$, $f(n) = \Theta(n^2)$. Дерево рекурсии:



Рассмотрим рекуррентность. Последовательно подставляя $T(n)$ в правую часть, получим некоторую сумму $T(n) = \sum\limits_{i=0}^{h-1} C_i \cdot f(\frac{n}{3^i}) + C_hT(1)$. Она конечна, так как аргумент $T(\cdot)$ в правой части меньше, чем в левой, причем в 3 раза. Прекращаем подставлять, когда аргумент станет равен 1. C_i — некоторые коэффициенты, найти которые можно при помощи дерева слева. Корень соответствует $i = 0$ (база), та, каждый i-й уровень соответствует i-му слагаемому суммы *(это здесь не доказано)*. При последней, h-й подстановке $\frac{n}{3^h} = 1$, откуда $h = \log_3 n$.

Таким образом, $T(n) = \overbrace{\sum\limits_{k=0}^{h-1} 2^k f(\frac{n^2}{3^{2k}})}^{S} + 2^hT(1)$.

   (a) Обозначим $g(n) = n^2$, по условию $f(n) = \Theta(g(n))$. Из определения Θ получаем

$$\exists n_0 > 0, C_2 > C_1 > 0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow C_1g(n) \leqslant f(n) \leqslant C_2g(n)$$

. Рассмотрим первую сумму S при $n \geqslant n_0$:

$$n^2C_1 \sum_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \leqslant \overbrace{\sum_{k=0}^{h-1} 2^k f(\frac{n^2}{3^{2k}})}^{S} \leqslant n^2C_2 \sum_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \qquad (1)$$

Рассмотрим $S_1(n) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \underset{\text{прогр.}}{\overset{\text{геом.}}{=}} \frac{1-\frac{2^{h-1}}{9^{h-1}}}{1-\frac{2}{9}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-2/9} = \frac{9}{7} \overset{\text{def}}{=} l$. Здесь использовалось $h = \log_3 n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_1(\varepsilon) \colon \forall n \geqslant n_1 \hookrightarrow S_1(n) \in U_\varepsilon(l)$$

Фиксируем $\varepsilon = \varepsilon_0 = l/2$, определим $n \overset{\text{def}}{=} \max n_2(\varepsilon_0), n_0$. Тогда $\forall n \geqslant n_2 \hookrightarrow 0 < l - \varepsilon \leqslant S_1(n) \leqslant l + \varepsilon$.

Снова рассмотрим (1):при $n \geqslant n_2$: $n^2C_1(l-\varepsilon) \leqslant n^2C_1 \sum\limits_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \leqslant \underline{\sum\limits_{k=0}^{h-1} 2^k f(\frac{n^2}{3^{2k}})} \leqslant n^2C_2 \sum\limits_{k=0}^{h-1} \frac{2^k}{3^{2k}} \leqslant n^2C_2(l+\varepsilon)$. Получаем

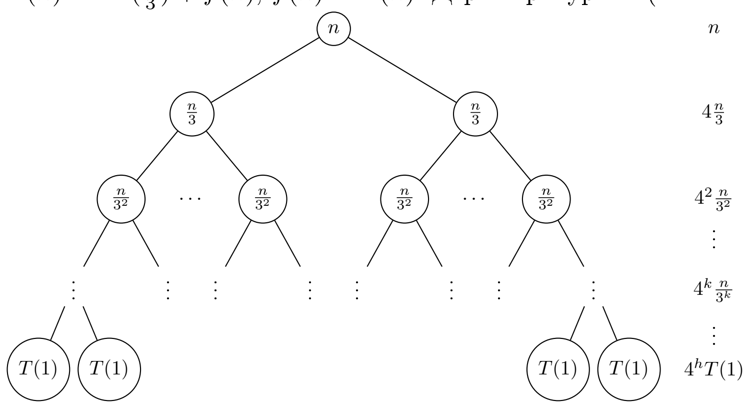
$$S(n) = \Theta(n^2)$$

   (b) Рассмотрим $2^hT(1) = 2^{\log_3 n}T(1) = n^{\log_3 2} \underbrace{T(1)}_{\text{const}} = \Theta(n^{\log_3 2})$

   (c) Получаем $T(n) = \Theta(n^2) + \Theta(n^{\log_3 2}) = \Theta(n^2)$. Доказательство последнего равенства в конце работы (1) ($2 > 1 > \log_3 2$, поэтому $n^{\log_3 2} = \bar{\bar{o}}(n^2)$)

Ответ: $\boxed{T(n) = \Theta(n^2)}$

2. $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + f(n)$, $f(n) = \Omega(n)$. Дерево рекурсии (все ветвления не показаны):

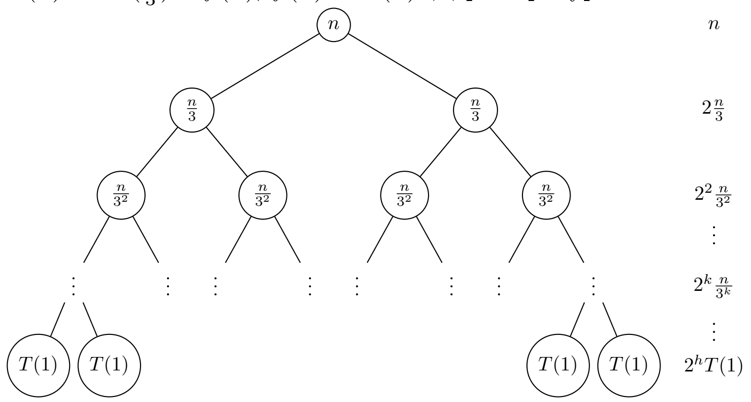


Высота дерева $h = \log_3 n$, $T(n) = \sum\limits_{k=0}^{h-1} 4^k f(\frac{n}{3^k}) + 4^hT(1)$. Из определения Ω $\exists n_0 \, \exists C > 0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow \sum\limits_{k=0}^{h-1} 4^k f(\frac{n}{3^k}) \geqslant Cn \sum\limits_{k=0}^{h-1} \frac{4^k}{3^k} \underset{\text{прогр.}}{\overset{\text{геом.}}{=}} Cn\frac{(4/3)^{h-1}-1}{4/3-1} = 3Cn(\frac{3}{4}(\frac{4}{3})^{\log_3 n} - 1) = 3Cn(\frac{4}{3}\frac{n^{\log_3 4}}{n} - 1) = 4Cn^{\log_3 4} - 3Cn$. Также $4^h = 4^{\log_3 n} = n^{\log_3 4}$, поэтому $T(n) \geqslant 4Cn^{\log_3 4} - 3Cn + n^{\log_3 4}T(1)$, откуда $T(n) = \Omega(n^{\log_3 4})$.

Асимптотическую оценку сверху получить не удастся, так как $T(n) \geqslant f(n)$, и нет верхней оценки для $f(n)$.

Ответ: $\boxed{T(n) = \Omega(n^{\log_3 4})}$

3. $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + f(n)$, $f(n) = O(n)$. Дерево рекурсии:



Высота дерева $h = \log_3 n$. Получаем $T(n) = \sum\limits_{k=0}^{h-1} 2^k f(\frac{n}{3^k}) + 2^h T(1)$. По определению O $\exists n_0 > 0\, \exists C > 0 \colon \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow \sum\limits_{k=0}^{h-1} 2^k f(\frac{n}{3^k}) \leqslant Cn \sum\limits_{k=0}^{h-1} (\frac{2}{3})^k \leqslant Cn \frac{1}{1-2/3} = 3Cn = O(n)$. Оценим $2^h T(1) = 2^{\log_3 n} T(1) = n^{\log_3 2} T(1) = O(n^{\log_3 2})$. Получаем $T(n) \leqslant O(n) + O(n^{\log_3 2})$. Но $\log_3 2 < 1$, поэтому $n^{\log_3 2} = \bar{\bar{o}}(n)$, и по 2 получаем $T(n) = O(n)$.

С другой стороны, $T(n) \geqslant 2^h T(1) = \Omega(n^{\log_3 2})$.

Ответ: $\boxed{T(n) = O(n),\ T(n) = \Omega(n^{\log_3 2})}$

Задача 2

Модифицируем Решето Эратосфена: для каждого вычеркнутого числа будем запоминать какую-либо пару (i, j), «из-за которой» оно вычеркнуто. А именно:
Число $l < n$ — не простое $\overset{\text{корректность}}{\Leftrightarrow}$ число l вычеркнуто $\Leftrightarrow$ выполнена строчка Prime$[\underbrace{i*i+i*j}_{l}] = \mathit{False} \Leftrightarrow$ существует (i, j) из цикла, такая что i — простое, $i*(i+j) = l$.
Первая часть алгоритма (решето + запоминание пар):

for i := *1* **to** n **do**
  Prime[i] := *True* $\to c_1$
  I[i] := -1 $\to c_2$
  J[i] := -1 $\to c_3$
end
for i := *2 to* $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ **do**
  if Prime[i] == *True* $\to c_4$ **then**
    j := 0 $\to c_5$
    while i*i + i*$j \leq n \to c_6$ **do**
      Prime[i*i+i*j] = *False* $\to c_7$
      I[i*i+i*j] = i $\to c_8$
      J[i*i+i*j] = j $\to c_9$
      j = j + 1 $\to c_{10}$
    end
  end
end

Таким образом, для каждого числа $l \in \overline{2, n}$ известно, простое ли оно, и, если нет, один его простой делитель $I[l]$ и частное от деления $\frac{l}{I[l]} \equiv I[l] + J[l]$. Заметим, что для частного $I[l] + J[l]$ это свойство тоже выполняется (так как оно меньше, чем делимое). Поэтому будем повторять такое получение простых делителей:

i := n
while Prime[i] == *False* $\to c_{11}$ **do**
  print I[i] $\to c_{12}$
  i := I[i] + J[i] $\to c_{13}$
end
print i

1. Докажем конечность времени работы. Поскольку $I[i]+J[i]$ — частное от деления i на число, большее единицы (простой делитель i), то на каждой итерации i уменьшается.

2. Докажем корректность. А именно, пусть $n = p_1^{k_1}...p_s^{k_s}$ — разложение на простые множители. Тогда алгоритм напечатает числа $\underbrace{p_1, ..., p_1}_{k_1}, ..., \underbrace{p_s, ..., p_s}_{k_s}$ в некотором порядке, и, возможно, число 1.

   Считаем, что до цикла цикл совершил $k = 0$ итераций. Утверждение:

$$P(k) = \begin{cases} \text{Напечатаны } k \text{ простых делителей } n\text{: } q_1, ..., q_k & (1)_k \\ i \text{ — частное от деления } n \text{ на } q_1 \cdot ... \cdot q_k\text{, т.е } i = \frac{n}{\prod\limits_{z=1}^{k} q_z} & (2)_k \end{cases}$$

   (a) База. На нулевом шаге $(k = 0)$ ничего не напечатно, поэтому $(1)_0$, $i = n = \frac{n}{1}$ (внизу пустое произведение), поэтому $(2)_0$

   (b) Переход. Пусть выполнено t шагов, выполнено $P(t)$. Докажем $P(t+1)$ (в случае, если цикл продолжает работу): цикл продолжает работу $\Rightarrow$ Prime$[i]$==False. Значит, $i = I[i](I[i]+J[i])$, и $I[i]$ — простое. Поэтому будет напечатан простой делитель $q_{t+1} \overset{\text{def}}{=} I[i]$ числа i (он $t+1$-й по предположению индукции $(1)_t$). Но n делится на i по $(2)_t$, поэтому напечатан еще один простой делитель n, значит, $(1)_{t+1}$ ■

   Из того же свойства $I[i] + J[i] = \frac{i}{I[i]} = \frac{i}{q_{t+1}} \overset{(2)_t}{=} \frac{n}{q_1...q_t}\frac{1}{q_{t+1}}$, откуда $(2)_{t+1}$ ■

   Итак, после последней, k-й итерации имеем $P(k)$. Цикл завершился, значит, i — простое (либо 1, см. заполнение массива Prime в самом начале). И из $P(k)$ следует, что $i = \frac{n}{q_1...q_k}$, и $q_1, ..., q_k$ напечатаны. Последняя команда печатает последний простой делитель i (или, возможно, единицу). Корректность доказана

3. Оценим время работы алгоритма.

   (a) Докажем, что асимптотика первой части не поменялась, т.е. равна асимптотике Решета. Действительно, добавились только константы c_2, c_3, c_8, c_9 к другим константам. Таким образом, время работы первой части $O(n \log \log n)$.

   (b) Оценим время работы второй части алгоритма: цикл совершает одну итерацию на каждый простой делитель по доказанному $(1)_k$. Найдем худший случай. Пусть $n = p_1^{k_1}...p_s^{k_s}$. Количество напечатанных чисел — $k_1 + ... + k_s$. Фиксируя набор делителей и сумму $k_1 + ... + k_s$, получаем, что минимальное число n при них — p_1^k. Теперь, меняя набор делителей при фиксированном k найдем, что минимальное число n будет при $p_1 = 2$ (минимальное простое). То есть, худший случай — степени двойки (чтобы при ограниченном сверху n получить максимальное число $k_1 + ... + k_s$ нужно взять ближайшую степень двойки снизу). Для них $k = \log_2 n$, т.е. последняя часть алгоритма совершит $\log n$ шагов. На каждом шаге выполняется константное число действий, поэтому время работы второй части $O(\log n)$

Итоговое время $T(n) = O(n \log\log n) + O(\log n) = O(n \log\log n)$, т.е. совпадает с временем работы Решета.

Задача 3

Задачу рассказывал Пименов на курсе Алгоритмы: построение и анализ

Фиксируем n. Рассмотрим внешний цикл. Если число i не простое, совершается C_1 операций (эта и следующая константы не зависят от n), иначе выполняется внутренний цикл, который совершает не более, чем $C_2\lceil \frac{n}{i}\rceil$ операций (из условия $i*i+i*j \leqslant n$ получаем $j \leqslant \frac{n-i*i}{i} \leqslant \frac{n}{i}$). Пусть P_n — множество простых чисел, не превосходящих n. Тогда $T(n) \leqslant C_2 \sum\limits_{i\in P_n} \lceil \frac{n}{i}\rceil + C_1 \sum\limits_{x\in \overline{2,n}\setminus P_n} 1$.

Мощность $|\overline{2,n} \setminus P_n| \leqslant n$, поэтому второе слагаемое — $O(n)$.

Оценим первую сумму. $\sum\limits_{i\in P_n} \lceil \frac{n}{i}\rceil \leqslant C_3 n \sum\limits_{i\in P_n} \frac{1}{i} \boxed{\leqslant}$.

Используем факт из Википедии [1]: $\sum\limits_{p\in P_n} \frac{1}{p} \leqslant C_4 \log\log x$, подставим: $\boxed{\leqslant} C_3 C_4 n \log\log n = O(n \log\log n)$.

Получаем $T(n) \leqslant O(n) + O(n\log\log n) = O(n \log\log n)$ ■

Вспомогательные утверждения

1. Пусть $f_1 = \Theta(g_1)$, $f_2 = \Theta(g_2)$, $g_2 = \bar{\bar{o}}(g_1), g_2(n) > 0$. Тогда $f_1 + f_2 = \Theta(g_1)$. Доказательство:
   Из определения Θ получаем $\exists n_0\, \exists C_i^j > 0, (i,j) \in \overline{1,2}^2 : \forall n \geqslant n_0 \left\{ \begin{array}{ccccc} C_1^1 g_1(n) & \leqslant & f_1(n) & \leqslant & C_2^1 g_1(n) \\ C_1^2 g_2(n) & \leqslant & f_2(n) & \leqslant & C_2^2 g_2(n) \end{array} \right.$ (n_0 — максимальное из двух определений). Тогда

   $$C_1^1 \xleftarrow{n\to\infty} C_1^1 + C_1^2 \cancelto{0}{\frac{g_2(n)}{g_1(n)}} = \frac{C_1^1 g_1(n) + C_1^2 g_2(n)}{g_1(n)} \leqslant \underline{\frac{f_1(n)+f_2(n)}{g_1(n)}} \leqslant \frac{C_2^1 g_1(n) + C_2^2 g_2(n)}{g_1(n)} = C_2^1 + C_2^2 \cancelto{0}{\frac{g_2(n)}{g_1(n)}} \xrightarrow{n\to\infty} C_2^1$$

   Здесь использовалось определение $\bar{\bar{o}}$. Из определения предела для $\varepsilon = \varepsilon_0 = \min(C_1^1, C_2^1)/2$ получаем при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ $(C_1^1 - \varepsilon) g_1(n) \leqslant f_1(n) + f_2(n) \leqslant (C_2^1 + \varepsilon) g_1(n)$, а из этого следует $f_1 + f_1 = \bar{\bar{o}}(g_1)$ ■

2. Пусть $f_1 = O(g_1)$, $f_2 = O(g_2)$, $g_2 = \bar{\bar{o}}(g_1), g_2(n) > 0$. Тогда $f_1 + f_2 = O(g_1)$. Доказательство выше (нужно взять правую часть большого неравенства).

Список литературы

[1] Википедия: Простое число. Раздел «некоторые свойства»