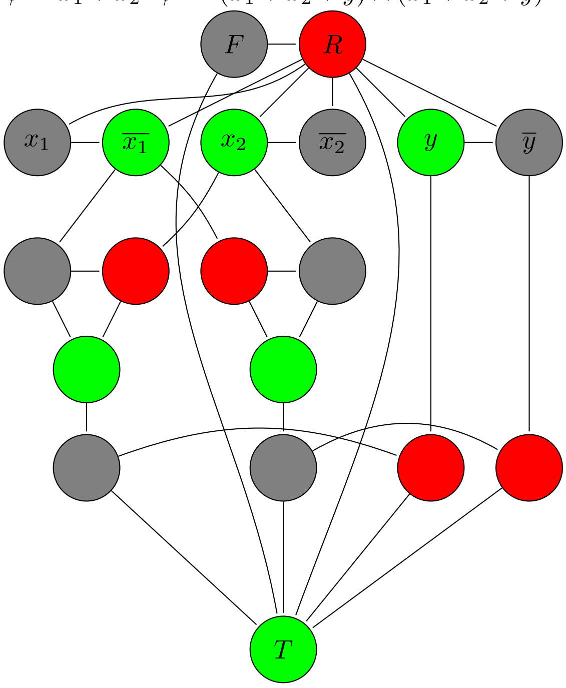
Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 6: всякая хуйня

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.20

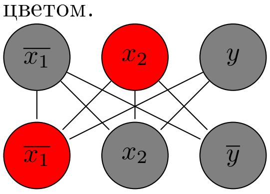
(каноническое) Задача 24

$\psi = \overline{x_1} \vee x_2$. $\psi' = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee y) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{y})$. Граф $W_{\psi'}$ с раскраской:



(каноническое) Задача 25

1. $\psi = \overline{x_1} \vee x_2$, $\psi' = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee y) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{y})$. $n = 3$, $m = 2$. Граф $Q_{\psi'}$. Клика мощности $s = m = 2$ выделена красным цветом.



2. *(доказано на семинаре)* 3-SAT $\leqslant_m^p$ CLIQUE. Формула $\chi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge \overline{x_3}$, $\chi' = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee y_1) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{y_1}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee y_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{y_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_3} \vee y_3 \vee y_4) \wedge (\overline{x_3} \vee y_3 \vee \overline{y_4}) \wedge (\overline{x_3} \vee \overline{y_3} \vee y_4) \wedge (\overline{x_3} \vee \overline{y_3} \vee \overline{y_4})$. $n = 7$, $t = m = 10$. $f(x) = (G, t)$ — граф, построенный по χ' (и число 10 — мощность искомой клики), f — функция из сводимости. Пусть в G существует клика мощности $\geqslant t$. Тогда существует клика мощности t (любой подграф из t вершин исходной клики). Тогда $f(x) \in$ CLIQUE $\overset{\text{сводимость}}{\Longrightarrow}$ $\chi' \in$ 3-SAT $\Rightarrow$ χ' — выполнима $\overset{\text{эквив. формул}}{\Longrightarrow}$ χ — выполнима — противоречие. Значит, в графе образа χ' нет клики мощности $\geqslant t \equiv 10$ ■

(каноническое) Задача 26

0. Исходный дизъюнкт $w = (a_i \vee b_i \vee c_i)$. Не будем писать индексы (рассматриваем один дизъюнкт). Рассмотрим $L \overset{\text{def}}{=} \{a, b, c, d, \overline{a} \vee \overline{b}, \overline{a} \vee \overline{c}, \overline{b} \vee \overline{c}, a \vee \overline{d}, b \vee \overline{d}, c \vee \overline{d}\}$.

   (a) Пусть w — не выполнена. Тогда $a = b = c = 0$. Найдем q: $\forall d \in \{0, 1\}$ в L менее q формулы выполнены. Случаи:

      i. $d = 0$. Рассмотрим L, $\boxed{\text{выделим}}$ выполненные дизъюнкции: $\{\cancel{a}, \cancel{b}, \cancel{c}, \cancel{d}, \boxed{\overline{a} \vee \overline{b}}, \boxed{\overline{a} \vee \overline{c}}, \boxed{\overline{b} \vee \overline{c}}, \boxed{a \vee \overline{d}}, \boxed{b \vee \overline{d}}, \boxed{c \vee \overline{d}}\}$. Выполнены 6 дизъюнкции.

      ii. $d = 1$. $\{\cancel{a}, \cancel{b}, \cancel{c}, \boxed{d}, \boxed{\overline{a} \vee \overline{b}}, \boxed{\overline{a} \vee \overline{c}}, \boxed{\overline{b} \vee \overline{c}}, \cancel{a \vee \overline{d}}, \cancel{b \vee \overline{d}}, \cancel{c \vee \overline{d}}\}$. Выполнено 4 дизъюнкции.

   Значит, $q > \max(4, 6)$. Возьмем $q = 7$ и докажем вторую часть.

(b) Пусть w — выполнена. Тогда $\left[\begin{array}{lcl} a &=& 1\\ b &=& 1\\ c &=& 1\end{array}\right.$. Рассмотрим различные случаи, и подберем d так, чтобы было выполнено $\geqslant q \equiv 7$ дизъюнкций. Поскольку w и L симметричны относительно замены переменных (например, $a \leftrightarrow b$), разделим случаи по количеству $a+b+c$ (количество единиц в наборе).

   i. $(a,b,c) = (1,0,0)$. Возьмем $d=0$, получим $\{\boxed{a}, \cancel{b}, \cancel{c}, \cancel{d}, \boxed{\overline{a}\vee\overline{b}}, \boxed{\overline{a}\vee\overline{c}}, \boxed{\overline{b}\vee\overline{c}}, \boxed{a\vee\overline{d}}, \boxed{b\vee\overline{d}}, \boxed{c\vee\overline{d}}\}$ — выполнено $7 \geqslant 7 \equiv q$ дизъюнкций.

   ii. $(a,b,c) = (1,1,0)$. Возьмем $d=0$, получим $\{\boxed{a}, \boxed{b}, \cancel{c}, \cancel{d}, \cancel{\overline{a}\vee\overline{b}}, \boxed{\overline{a}\vee\overline{c}}, \boxed{\overline{b}\vee\overline{c}}, \boxed{a\vee\overline{d}}, \boxed{b\vee\overline{d}}, \boxed{c\vee\overline{d}}\}$ — выполнено $7 \geqslant 7 \equiv q$ дизъюнкций.

   iii. $(a,b,c) = (1,1,1)$. Возьмем $d=1$, получим $\{\boxed{a}, \boxed{b}, \boxed{c}, \boxed{d}, \cancel{\overline{a}\vee\overline{b}}, \cancel{\overline{a}\vee\overline{c}}, \cancel{\overline{b}\vee\overline{c}}, \boxed{a\vee\overline{d}}, \boxed{b\vee\overline{d}}, \boxed{c\vee\overline{d}}\}$ — выполнено $7 \geqslant 7 \equiv q$ дизъюнкций.

1. $\psi' = (\overline{x_1}\vee x_2 \vee y)\wedge(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{y})$.
   $L_1 = \{\overline{x_1}, x_2, y, d_1, x_1\vee\overline{x_2}, x_1\vee\overline{y}, \overline{x_2}\vee\overline{y}, \overline{x_1}\vee\overline{d_1}, x_2\vee\overline{d_1}, y\vee\overline{d_1}\}$
   $L_2 = \{\overline{x_1}, x_2, \overline{y}, d_2, x_1\vee\overline{x_2}, x_1\vee y, \overline{x_2}\vee y, \overline{x_1}\vee\overline{d_2}, x_2\vee\overline{d_2}, \overline{y}\vee\overline{d_2}\}$. Образ $\widetilde{\psi}' = L_1\cup L_2$. $k=2$ (количество дизъюнктов), Пороговое значение $kq = 2\times 7 = 14$.

2. Возьмем набор $(x_1, x_2, y, d_1, d_2) = (0,1,1,1,0)$.
   Рассмотрим $L_1 = \{\boxed{\overline{x_1}}, \boxed{x_2}, \boxed{y}, \boxed{d_1}, \cancel{x_1\vee\overline{x_2}}, \cancel{x_1\vee\overline{y}}, \cancel{\overline{x_2}\vee\overline{y}}, \boxed{\overline{x_1}\vee\overline{d_1}}, \boxed{x_2\vee\overline{d_1}}, \boxed{y\vee\overline{d_1}}\}$ — выполнено 7 дизъюнкций
   Рассмотрим $L_2 = \{\boxed{\overline{x_1}}, \boxed{x_2}, \cancel{\overline{y}}, \cancel{d_2}, \cancel{x_1\vee\overline{x_2}}, \boxed{x_1\vee y}, \boxed{\overline{x_2}\vee y}, \boxed{\overline{x_1}\vee\overline{d_2}}, \boxed{x_2\vee\overline{d_2}}, \boxed{\overline{y}\vee\overline{d_2}}\}$ — выполнено 7 дизъюнкций
   Получаем, что в $\widetilde{\psi}'$ выполнено $2\times 7 = 14 \geqslant 14 \equiv kq$ дизъюнкций $\blacksquare$.

(каноническое) Задача 27

Пусть $f\colon \text{ГЦ} \subset \Sigma^* \to \{0,1\}$, $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \text{ГЦ}$, и $T_f(x) = \text{poly}(|x|)$ (f вычислима за полиномиальное по $|x|$ время).

1. Построим алгоритм поиска гамильтонова цикла (если он существует), использующий f. Фиксируем граф G, его описание $x \in \Sigma^*$. Обозначим за $h(G,v)$ граф, полученный из G удалением вершины v и перенаправлением ребер, инцидентных v: Если в G есть ребра $(u,v),(v,w)$, в $h(G,v)$ есть ребро (v,w).

   (a) Если в G нет гамильтонова цикла, за один вызов $f(x)$ выдадим ответ. Время $T_f(x)$ — полиномиально по $|x|$.

   (b) Пусть первый вызов вернул 1, т.е. в графе есть гамильтонов цикл. Найдем его. Фиксируем произвольную вершину v графа G. Рассмотрим граф $h(G,v)$. Он также гамильтонов: пусть в G есть цикл $s \leftrightarrow ... \leftrightarrow u \leftrightarrow v \leftrightarrow w \leftrightarrow ... \leftrightarrow s$ Тогда (по построению) в $h(G,v)$ есть цикл $s \leftrightarrow ... \leftrightarrow u \leftrightarrow w \leftrightarrow ... \leftrightarrow s$. Он гамильтонов, так как содержит все вершины (все вершины G кроме v — это вершины $h(G,v)$).
   Будем пребирать все вершины v' графа $h(G,v)$, смежные с v в G и рассматривать $h(h(G,v),v')$.

      i. Хотя бы один из них будет гамильтоновым. Действительно, в гамильтоновом цикле в G содержится v. Значит, содержится некоторая инцидентная ей вершина v' (они стоят рядом). Удалением v и v' получаем гамильтонов путь в $h(h(G,v),v')$.

      ii. Докажем обратное. Пусть при некоторой v' граф $h(h(G,v),v')$ — гамильтонов. Тогда в G в некотором гамильтоновом цикле v и v' стояли рядом. Предположим противное, (в $h(G,v)$ нет гамильтонова цикла с ребром (v,v')). Фиксируем Рассмотрим ГЦ в G: $s \leftrightarrow ... \leftrightarrow$

   Значит, в некотором гамильтоновом пути в G вершины u и v стояли рядом *todo*. Продолжим этот процесс, пока не останутся две вершины v_1 и v_2. Они стоят рядом. Полученная последовательность $(v, u, u', ..., u^{(l)}, v_1, v_2, v)$ — искомый гамильтонов цикл.

2. Псевдокод

```
path(x)
{
    if(!f(x)) return(empty); // no path
    else
    {
    }
}
```

3. Время работы. Всего в графе n вершин, для каждой перебираем не более, чем n, откуда сложность $T(x) = O(n^2)$. Поскольку $|x| = \Omega(n)$, то $T(x) = O(|x|^2) = \text{poly}(|x|)$. Более точно, используя псевдокод: *todo*.