Теория и реализация языков программирования.
Задание 4: Замкнутость регулярных языков, теорема Майхилла-Нероуда и минимальные автоматы

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.09.23

Упражнение 1

Задача 1

Не очень формально: Состояниями ДКА будут классы эквивалентности, а переходы будут определны также, как в доказательстве теоремы 1 из третьего задания.
Будем искать представителей классов и запоминать их. Для всех найденных классов будем добавлять состояния. Сначала $F \ni C_1 = C(\varepsilon)$. Определим C_1 как начальное. Рассмотрим $\sigma \in \Sigma$. Если $f(\sigma, \varepsilon) = 1$, значит, σ лежит в том же классе, что и ε. Определим $\delta(C_1, \sigma) = C_1$. Это соответствует определению в теореме: $\varepsilon \in C_1$, $\varepsilon\sigma \in C_1$. Если же $f(\sigma, \varepsilon) = 0$, то они лежат в разных классах. Значит, найден представитель нового класса. Запомним его, обозначим $C_2 = C(\sigma)$. Добавим состояние C_2. Определим $\delta(C_1, \sigma) = C_2$. Повторим для остальных $\sigma \in \Sigma$ (более подробно далее). Далее повторим рассуждение для всех добавленных состояний:
Заметим, что вместе с состоянием (т.е. классом) известен и представитель a_k его класса C_k (предположение индукции). Рассмотрим $\sigma \in \Sigma$. Если для всех найденных представителей $a_l \in C_l \hookrightarrow f(a_l, a_k\sigma) = 0$, то запомним $a_k\sigma$, добавим новое состояние $C(a_k\sigma)$. В любом случае, определим переход $\delta(C(a_k), \sigma) = C(a_k\sigma)$. Свойство $x_i \ni C_i \Rightarrow \delta(C_i, \sigma) = C(x_i\sigma)$ выполнено по построению.
Всего переходов конечное число (так как состояний конечное число), и на каждом шаге определяются переходы из состояния. Поэтому эта часть алгоритма завершится за конечное время.
Имеем построенный автомат со свойством: $\delta(q_0, w) = C(w)$. Выполним обход графа автомата, найдем пути до всех состояний, попутно «собирая» слова w, по которым туда можно попасть. Используя $g(w)$, пометим эти состояния принимающими, если $g(w) = 1$. Тогда $\delta(q_0, w) \in F \Leftrightarrow g(w) = 1 \Leftrightarrow w \in L$.

Более формально: $L \subset \Sigma^* \in \mathsf{REG}, \Sigma^*/\sim_L = \{C_i\} \equiv \{C_1, ..., C_n\}$ (n неизвестно, C_i попарно различны). $f\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow \{0, 1\}$ — задана, $f(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \sim_L y$. Построим ДКА $\mathcal{A}$: $L(\mathcal{A}) = L$.
$Q \overset{\text{def}}{=} \{C_i\}, q_0 \overset{\text{def}}{=} C(\varepsilon)$. Докажем, что на n-м шаге нижеописанного алгоритма выполняется
$P(n) = [\forall i \in \overline{1, n} \hookrightarrow$ найдены $x_i \in C_i, \forall \sigma \in \Sigma \hookrightarrow$ определены $\delta(C_i, \sigma) = C_j \Leftrightarrow C_i\sigma \in C_j]$.

1. ($n = 1$). $\Sigma^* \ni \varepsilon$ принадлежит какому-то классу. Без ограничения общности $\varepsilon \in C_1$. Рассмотрим все $\sigma_k \in \Sigma$. Если $f(\varepsilon, \sigma_k) = 1$, то x

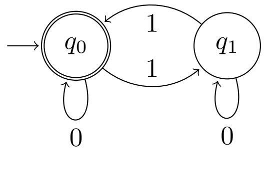
Задача 2

Задача 3

Пусть x, y — регулярные выражения. Построим НКА $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ по РВ x, y. Построим ДКА $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ по НКА $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. В предыдущем задании было показано, что количество состояний ДКА может экспоненциально зависеть от количества состояний НКА. Но последнее является $O(|x|)$, поэтому уже на этом этапе алгоритм не является эффективным.
Построим по $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ минимальные ДКА $\mathcal{A}'', \mathcal{B}''$. Если $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$, то в них будет одинаковое количество состояний (оно равно количеству классов эквивалентности, а это свойство языка, а не автомата). Также множества $Q^{\mathcal{A}''}$ и $Q^{\mathcal{B}''}$ будут изоморфны (в смысле функций перехода), так как переходы также определяются через классы эквивалентности *здесь дырка!*. Изоморфизм можно проверить обходом графов автоматов (например, поиск в ширину/глубину).
Если же $L(\mathcal{A}) \neq L(\mathcal{B})$, то алгоритм обхода графа покажет это.

Задача 4

1. $\Sigma = \{0, 1\}$. Докажем, что $L(\mathcal{A}) = L$, $L_1 \equiv L = \{w \mid |w|_1 = 2t, t \in \mathbb{Z}\}$, ДКА $\mathcal{A}:$



Докажем утверждение $P(n) = \big[\forall w \in \Sigma^*\colon |w| = n \hookrightarrow \big(q_0 \xrightarrow{w} q_i \Rightarrow i = |w|_1 \mod 2\big)\big]$.

(a) Докажем $P(0)$. Поскольку $|w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$, $P(0) = \big[q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_i \Rightarrow i = |\varepsilon|_1 \mod 2\big]$. Поскольку $\delta(q_0, \varepsilon) = q_{\underline{0}}$, и $\underline{0} = |\varepsilon|_1$, получаем $P(0)$ ■

(b) Пусть доказано $P(n)$, докажем $P(n+1)$. $P(n) = \big[\forall w \in \Sigma^*\colon |w| = n \hookrightarrow \big(q_0 \xrightarrow{w} q_i \Rightarrow i = |w|_1 \mod 2\big)\big]$. Фиксируем $w \in \Sigma^*, |w| = n+1, w = w_0\sigma, |w_0| = n, |\sigma| = 1$. $\mathcal{A}$ — полный $\Rightarrow (q_0, w) \equiv (q_0, w_0\sigma) \vdash^* (q_i, \sigma) \vdash (q_j, \varepsilon)$. $|w_0| = n \overset{P(n)}{\Rightarrow} i = |w_0|_1 \mod 2$. $i \in \{0, 1\}, \sigma \in \{0, 1\} \Rightarrow$ рассмотрим четыре случая:

a. $(i = 0, \sigma = 0)$. $(q_0, w_0 0) \vdash^* (q_0, 0) \vdash (q_0, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_0 \Rightarrow j = 0$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |0|_1 \mod 2 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = j = |w|_1 \mod 2 = 0$.

b. $(i = 0, \sigma = 1)$. $(q_0, w_0 1) \vdash^* (q_0, 1) \vdash (q_1, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_1 \Rightarrow j = 1$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |1|_1 \mod 2 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow 1 = j = |w|_1 \mod 2 = 1$.

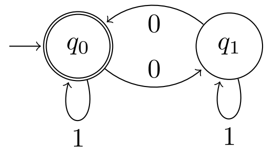
c. $(i = 1, \sigma = 0)$. $(q_0, w_0 0) \vdash^* (q_1, 0) \vdash (q_1, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_1 \Rightarrow j = 1$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |0|_1 \mod 2 = 1 + 0 = 1 \Rightarrow 1 = j = |w|_1 \mod 2 = 1$.

d. $(i = 1, \sigma = 1)$. $(q_0, w_0 1) \vdash^* (q_1, 1) \vdash (q_0, \varepsilon) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_0 \Rightarrow j = 0$. $|w|_1 \mod 2 = |w_0|_1 \mod 2 + |1|_1 \mod 2 = (1 + 1) \mod 2 = 0 \Rightarrow 0 = j = |w|_1 \mod 2 = 0$.

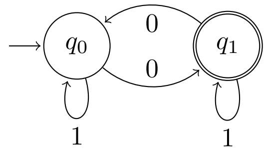
Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \hookrightarrow P(n) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \hookrightarrow \big[\forall w \in \Sigma^*\colon |w| = n \hookrightarrow \big(q_0 \xrightarrow{w} q_i \Rightarrow i = |w|_1 \mod 2\big)\big] \Rightarrow$ $\forall w \in \Sigma^* \hookrightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_{|w|_1 \mod 2}$. Пусть $w \in L \Leftrightarrow |w|_1 \mod 2 = 0 \Leftrightarrow q_0 \xrightarrow{w} q_0 \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A})$ ■

2. $\Sigma = \{0, 1\}$. $L_2 = \{w \,\big|\, |w|_0 = 2t + 1, t \in \mathbb{Z}\}$. Воспользуемся результатом (4.1) и построим ДКА $\mathcal{B}$:

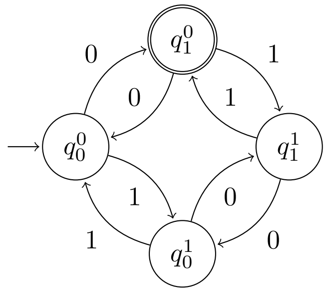
Поменяем в автомате из (4.1) нули и единицы местами. Получим $\mathcal{A}'$. Очевидно, $\mathcal{A}'$ будет распознавать все слова, в которых четное количество нулей. A' — полный, и все состояния достижимы из q_0.



Поэтому, переопределив $F'' = Q'' \setminus F$, получим $\mathcal{A}'' \equiv \mathcal{B}$, который распознает все слова, в которых нечетное количество нулей.



3. Поскольку $L_3 = \{$слова из 0 и 1, в которых четное число единиц и нечетное число нулей$\} =$ $= \{$слова из 0 и 1, в которых четное число единиц$\} \cap \{$слова из 0 и 1, в которых нечетное число нулей$\} \equiv L_1 \cap L_2$, построим $\mathcal{C}\colon L(\mathcal{C}) = L_3$ по алгоритму, который докажем далее, в (4.4):



4. Дано: Σ — алфавит, $\mathcal{A} = (Q^{\mathcal{A}}, \Sigma, q_0^{\mathcal{A}}, \delta^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} = (Q^{\mathcal{B}}, \Sigma, q_0^{\mathcal{B}}, \delta^{\mathcal{B}}, F^{\mathcal{B}})$ — полные ДКА, в которых все состояния достижимы из начальных. $\Sigma^* \supset L^{\mathcal{A}} = L(\mathcal{A}), \Sigma^* \supset L^{\mathcal{B}} = L(\mathcal{B})$. Задача: построить ДКА $\mathcal{C} = (Q^{\mathcal{C}}, \Sigma, q_0^{\mathcal{C}}, \delta^{\mathcal{C}}, F^{\mathcal{C}})\colon L(\mathcal{C}) = L^{\mathcal{A}} \cap L^{\mathcal{B}}$.

Определим $Q^{\mathcal{C}} = Q^{\mathcal{A}} \times Q^{\mathcal{B}}$ — множество всех пар состояних исходных автоматов.
Для краткости будем обозначать $Q^{\mathcal{C}} \ni (q_i^{\mathcal{A}}, q_j^{\mathcal{B}}) \overset{\text{def}}{\equiv} q_j^i$.
Определим $q_0^{\mathcal{C}} \overset{\text{def}}{=} q_0^0$, $F^{\mathcal{C}} = \{q_j^i \big| q_i^{\mathcal{A}} \in F^{\mathcal{A}} \wedge q_j^{\mathcal{B}} \in F^{\mathcal{B}}\}$
Определим $\delta^{\mathcal{C}}(q_j^i, \sigma) = \big(\delta^{\mathcal{A}}(q_i^{\mathcal{A}}, \sigma), \delta^{\mathcal{B}}(q_j^{\mathcal{B}}, \sigma)\big)$
Докажем утверждение
$P(n) = \big[\forall w \in \Sigma^*\colon |w| = n \hookrightarrow q_0^0 \xrightarrow{w} \big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, w),\, \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, w)\big)\big]$

a. $(n = 0)$ $\Sigma^* \ni w, |w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$. Тогда $\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0, \varepsilon) \overset{\text{по опр.}}{=} \big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, \varepsilon), \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, \varepsilon)\big)$, как и требовалось.

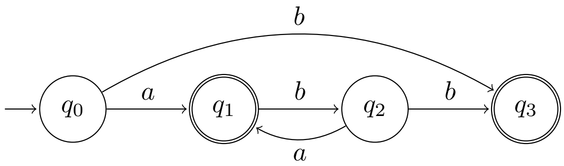
b. $(n = 1)$ $\Sigma^* \ni w, |w| = 1 \Rightarrow w = \sigma \in \Sigma$. Тогда $\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0, w) = \delta^{\mathcal{C}}(q_0^0, \sigma) \overset{\text{по опр.}}{=} \big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, \sigma), \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, \sigma)\big)$, как и требовалось.

c. $(n+1)$. Пусть $P(n)$. Докажем $P(n+1)$. Фиксируем $\Sigma^* \ni w\colon |w| = n+1$. Тогда $w \equiv w_0\sigma$, $|w_0| = n\, \sigma \in \Sigma$. $\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0, w) = \delta^{\mathcal{C}}(q_0^0, w_0\sigma) \equiv \delta^{\mathcal{C}}(\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0, w_0), \sigma) \overset{P(n)}{=} \delta^{\mathcal{C}}\big(\big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, w_0),\, \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, w_0)\big), \sigma\big) \overset{\text{по опр.}}{=} \big(\delta^{\mathcal{A}}(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, w_0), \sigma), \delta^{\mathcal{B}}(\delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, w_0), \sigma)\big) \underset{\delta^{\mathcal{A}}, \delta^{\mathcal{B}}}{\overset{\text{св-во}}{=}}$ $\big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, w), \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, w)\big) \Rightarrow P(n+1)$.

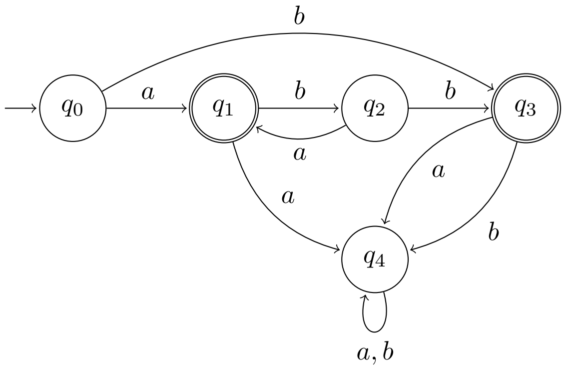
Получаем $w \in L^{\mathcal{A}} \cap L^{\mathcal{B}} \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \begin{cases} w \in L(\mathcal{A}) \\ w \in L(\mathcal{B}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, w) \in F^{\mathcal{A}} \\ \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, w) \in F^{\mathcal{B}} \end{cases} \Leftrightarrow \big(\delta^{\mathcal{A}}(q_0^{\mathcal{A}}, w), \delta^{\mathcal{B}}(q_0^{\mathcal{B}}, w)\big) \in F^{\mathcal{C}} \overset{P(|w|)}{\Leftrightarrow}$ $\delta^{\mathcal{C}}(q_0^0, w) \in F^{\mathcal{C}} \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{C})$ ■

Задача 5

Исходный автомат $\mathcal{A}$:

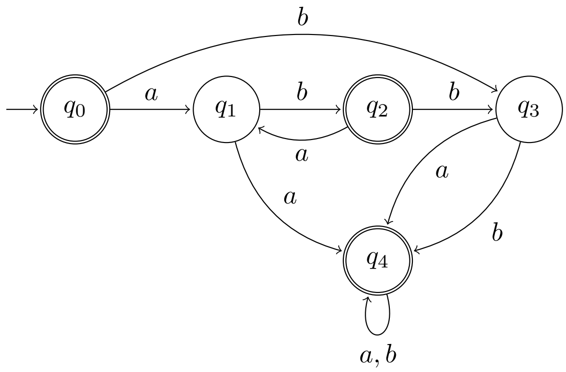


Пополним автомат $\mathcal{A}$ до $\mathcal{A}'$ и удалим недостижимые из q_0 состояния: добавим $q_4 \in Q'$, $q_4 \notin F'$, в него направим недостающие переходы:



$L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$, так как $x \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow x \in L(\mathcal{A}')$, потому что $Q \subset Q'$, $F = F', \delta \subset \delta'$. $x \notin L(\mathcal{A}) \Rightarrow$ либо $q_0 \xrightarrow{x} q \notin F$, но тогда $q_0 \xrightarrow{x} q \notin F' \Rightarrow x \notin L(\mathcal{A}')$, либо $\delta(q_0, x) = \varnothing$, тогда $\delta'(q_0, x) = q_4$, потому что был выполнен переход в q_4, которого не было в $\mathcal{A}$ (по построению, добавлены переходы только в q_4), и при обработке последующих символов $\mathcal{A}'$ остается в q_4.

Построим A'': $L(\mathcal{A}'') = \overline{L(\mathcal{A}')} \equiv \overline{L(\mathcal{A})}$ по полному автомату $\mathcal{A}'$, определив $F'' \stackrel{\text{def}}{=} Q' \setminus F'$:

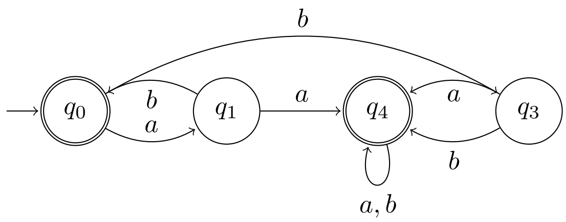


Далее построим по $\mathcal{A}''$ минимальный $\mathcal{A}'''$ по алгоритму:

1. $\{\ 0 \quad 2 \quad 4 \ | \ 1 \quad 3\ \}$

2. $\{\ 0 \quad 2 \ | \ 4 \ | \ 1 \ | \ 3\ \}$ — OK

3. $\{\ 0 \quad 2 \ | \ 4 \ | \ 1 \ | \ 3\ \}$ — OK



Задача 6