Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 5: сложность вычислений: классы P, NP, co-NP II

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.13

Задача 1

Задача 2

См. (каноническое) 21

Задача 3

1. $\mathcal{C} \supset \mathsf{NP} \cup \text{co-}\mathsf{NP}$.

   (a) Пусть $L \in \mathsf{NP}$. Тогда (семинар) $L \leqslant_m^p \text{SAT} \Leftrightarrow \exists f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*\colon \forall x (x \in L \Leftrightarrow f(x) \in \text{SAT})$, f — вычислима за полиномиальное время. Определим M_{SAT}: вычисляем за полиномиальное время (определение сводимости) $f(x)$ (x — вход), спрашиваем оракула $f(x) \overset{?}{\in} \text{SAT}$ за $O(1)$. Ответ — ответ оракула (корректно из определения сводимости). Время работы полиномиально: $T(|x|) = \text{poly}(|x|) + O(1) = \text{poly}(|x|)$.

   (b) Пусть $L \in \text{co-}\mathsf{NP}$. Тогда $\overline{L} \leqslant_m^p \text{SAT} \Leftrightarrow \exists f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*\colon \forall x (x \in \overline{L} \Leftrightarrow f(x) \in \text{SAT}) \Leftrightarrow \forall x (x \in L \Leftrightarrow f(x) \notin \text{SAT})$, f — вычислима за полиномиальное время. Определим M_{SAT}: вычисляем за полиномиальное время (определение сводимости) $f(x)$ (x — вход), спрашиваем оракула $f(x) \overset{?}{\in} \text{SAT}$ за $O(1)$. Ответ — <u>противоположный</u> ответу оракула (корректно из определения сводимости). Время работы полиномиально: $T(|x|) = \text{poly}(|x|) + O(1) = \text{poly}(|x|)$.

2. $\mathcal{C} \subset \mathsf{NP} \cup \text{co-}\mathsf{NP}$

(каноническое) Задача 21

(каноническое) Задача 23

1. $\Psi(x_1, x_2) \overset{\text{def}}{=} (\neg x_1 \vee x_2)$. Базовое множество $(n = 2)$ $\{x_1, x_2, \neg x_1, \neg x_2\}$.
   Семейство подмножеств $A_\Psi = \big\{\{x_1, \neg x_1\}, \{x_2, \neg x_2\}, \{\neg x_1, x_2\}\big\}$.
   $\measuredangle A \overset{\text{def}}{=} \{x_1, x_2\}$. Получаем $A \cap \{x_1, \neg x_1\} \ni x_1$, $A \cap \{x_2, \neg x_2\} \ni x_2$, $A \cap \{\neg x_1, x_2\} \ni x_2$.
   Значит, A — протыкающее множество для A_Ψ, и $|A| = 2$.

2. $\chi(x_1, x_2, x_3) \overset{\text{def}}{=} (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \neg x_3$. Семейство подмножеств $(n = 3)$ $A_\chi = \big\{\{x_1, \neg x_1\}, \{x_2, \neg x_2\}, \{x_3, \neg x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{\neg x_1, \neg x_2\}, \{x_1, \neg x_2\}, \{\neg x_1, x_2, x_3\}, \{\neg x_3\}\big\}$. Пусть A — протыкающее множество. Тогда $A \cap \{\neg x_3\} \neq \varnothing \Rightarrow A \ni \neg x_3$. Также $A \cap \{x_1, \neg x_1\} \neq \varnothing$, поэтому A содержит x_1 или $\neg x_1$. Аналогично $x_2 \in A$ или $\neg x_2 \in A$. Получаем, что A содержит не менее трех элементов. Предположим, что их ровно 3. Рассмотрим все возможные 4 случая (или×или раньше по тексту):

   (a) $A = \{x_1, x_2, \neg x_3\}$. Тогда $A \cap \{\neg x_1, \neg x_2\} = \varnothing$ — противоречие.

   (b) $A = \{x_1, \neg x_2, \neg x_3\}$. Тогда $A \cap \{\neg x_1, x_2, x_3\} = \varnothing$ — противоречие.

   (c) $A = \{\neg x_1, x_2, \neg x_3\}$. Тогда $A \cap \{x_1, \neg x_2\} = \varnothing$ — противоречие.

   (d) $A = \{\neg x_1, \neg x_2, \neg x_3\}$. Тогда $A \cap \{x_1, x_2, x_3\} = \varnothing$ — противоречие.

   Получаем, что A содержит более трех элементов ∎