Теория и реализация языков программирования.
Задание 8: контекстно-свободные языки и магазинные автоматы II

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2013.10.23

Упражнение 1

1. Левый вывод однозначно задает дерево вывода, так как вывод — последовательность слов из $(N \cup T)^*$ с указанием нетерминала для каждого слова и правила. Будем определять дерево так: если $A \longrightarrow x_1...x_n$. добавим к вершине A потомков $x_1,...,x_n$ в таком порядке. Если два левых вывода различны, то построенные таким образом деревья также получатся различными.

2. Если дано дерево вывода, то левый вывод можно получить его обходом в глубину, выбирая на каждом шаге самого левого из непросмотренных потомков. Если два дерева вывода различны, то так построенные выводы также получатся различными.

3. Пусть существует единственное дерево вывода. Предположим, что существуют два различных левых вывода. Построим по ним деревья вывода. Они получатся различными — противоречие.

4. Аналогично, если существует единственный левый вывод, то существует единственное дерево вывода.

Упражнение 2

Задача 1

1. Определим МП-автомат $\mathcal{A} = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, Z, \delta, F)$, допускающий по принимающему состоянию.

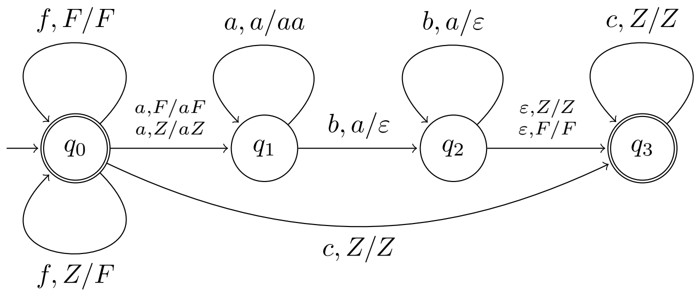
   (a) $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c, f\}$

   (b) $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{F, Z\}$

   (c) $Q \stackrel{\text{def}}{=} \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

   (d) δ изображена справа

   (e) $F \stackrel{\text{def}}{=} \{q_0, q_3\}$



2. Определим грамматику $G = (\Sigma, T, P, S)$:

   1. $T \stackrel{\text{def}}{=} \{S, X, C, F\}$
   2. P:
      i. $S \longrightarrow XC|FX|X$
      ii. $X \longrightarrow aXb|\varepsilon$
      iii. $C \longrightarrow cC|c$
      iv. $F \longrightarrow fF|f$

3. Автомат является детерминированным по определению ($|\delta(q, \sigma, \gamma)| \leqslant 1$, и если $\delta(q, \sigma, \gamma) \neq \varnothing$, то $\delta(q, \varepsilon, \gamma) = \varnothing$).

4. Докажем, что грамматика однозначная: действительно, для каждого нетерминала X, C, F можно применить только два правила, причем одно из них уменьшает количество X, C, F, а второе сохраняет. Поэтому после применения второго нельзя применить первые. Правила для X либо добавляют a, b, либо нет, причем другие правила не добавляют a, b. Значит, количество применений правила $X \longrightarrow aXb$ фиксировано для каждого слова. Аналогично получаем, что к C, F можно применить только одно правило при фиксированном порожденном слове.
   XC, FX и X не имеют пересечений в множествах порождаемых слов из терминалов: действительно, C добавляет c, F добавляет f, X не порождает c или f. Поэтому при фиксированном слове S может перейти только в одно из этих слов.

5. Докажем, что $L(G) = L$:

   (a) $L \subset L(G)$. Пусть $w \in L$. Построим вывод:

      i. Если $w = f^n a^m b^m$, $n > 0$,
      $\underline{S} \to \underline{F}X \to f\underline{F}X \to ... \to f^n\underline{X} \to f^n a\underline{X}b \to ... \to f^n a^m \underline{X} b^m \to f^n a^m b^m$.

ii. Если $w = a^n b^n c^m$, $m > 0$,
$\underline{S} \to \underline{X}C \to a\underline{X}bC \to ... \to a^n\underline{X}b^nC \to a^nb^n\underline{C} \to a^nb^nc\underline{C} \to ... \to a^nb^nc^m$.

iii. Если $w = a^n b^n$,
$\underline{S} \to \underline{X} \to a\underline{X}b \to ... \to a^n\underline{X}b^n \to a^nb^n$.

(b) $L(G) \subset L$. Очевидно, C порождает c^k, $k > 0$; F порождает f^l, $l > 0$; X порождает $a^n b^n$, $n \geqslant 0$. Также заметим. Пусть $w \in L(G)$. Рассмотрим вывод. Рассмотрим первое правило:

i. $S \to X$. Тогда $w = a^n b^n \in L$

ii. $S \to XC$. Тогда $w = a^n b^n c^n \in L$

iii. $S \to FX$. Тогда $w = f^n a^m b^m \in L$.

6. Докажем, что $L(\mathcal{A}) = L$:

(a) Пусть $w \in L$.

i. $w = a^n b^n c^m, n > 0, m \geqslant 0$. Тогда $(q_0, a^nb^nc^m, Z) \vdash (q_1, a^{n-1}b^nc^m, aZ) \vdash (q_1, a^{n-2}b^nc^m, aaZ) \vdash ... \vdash (q_1, b^nc^m, a^nZ) \vdash (q_2, b^{n-1}c^m, a^{n-1}Z) \vdash (q_2, b^{n-2}c^m, a^{n-2}Z) \vdash ... \vdash (q_2, c^m, Z) \vdash (q_3, c^m, Z) \vdash ... \vdash (q_3, \varepsilon, Z)$. $q_3 \in F \Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$.

ii. $w = c^m, m \geqslant 0$. Тогда $(q_0, c^m, Z) \vdash (q_3, c^m, Z) \vdash ... \vdash (q_3, \varepsilon, Z)$. $q_3 \in F \Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$

iii. $w = f^n, n \geqslant 0$. Тогда $(q_0, f^n, Z) \vdash (q_0, f^{n-1}, F) \vdash ... \vdash (q_0, \varepsilon, F)$. $q_0 \in F \Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$

iv. $w = f^n a^m b^m, n \geqslant 0, m > 0$. Тогда $(q_0, f^n a^m b^m) \overset{6(a)iii}{\vdash^*} (q_0, a^m b^m, F) \overset{6(a)i}{\vdash^*} (q_2, \varepsilon, F) \vdash (q_3, \varepsilon, F)$. $q_3 \in F \Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$.

(b) Пусть $w \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow (q_0, w, Z) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma)$, $q \in F \equiv \{q_0, q_3\}$.

i. $q = q_0$. Переходы в q_0 только из q_0 по f, поэтому $w = f^m \in L$

ii. $q = q_3$. Переходов в q_3 три:

A. Был совершен переход $q_0 \xrightarrow{c,Z/Z} q_3$. Как было отмечено, в q_0 переходы только по f. Но эти переходы заменяют Z на дне стека на F, поэтому переход из данного случая не мог быть произведен. Значит, $w = cw_1$, и цепочка конфигураций имеет вид $(q_0, cw_1, Z) \vdash (q_3, w_1, Z)$. Но из q_3 переходы только по c, значит, $w = c^l \in L$

B. Был совершен переход $q_2 \xrightarrow{\varepsilon,Z/Z} q_3$. Поскольку на дне стека Z, а не F, то символы f не были прочитаны (они могут быть прочитаны только в q_0, когда Z на дне стека, и прочтение заменит Z на f). Рассмотрим последний переход в q_2. Это был переход вида $\xrightarrow{b,a/\varepsilon} q_2$ (других нет), значит, в стеке был символ a. В q_2 есть переходы только из q_1, поэтому перед попаданием в q_2 (буквы a удаляются из стека при прочтении b) конфигурация была $(q_1, b^nx, a^n\gamma)$. Но буквы a могли быть добавлены только при прочтении a, другие символы не могли быть прочитаны, поэтому $w = a^nb^nx$. Из q_3 есть переходы только по c, значит, $w = a^nb^nc^m \in L$

C. Был совершен переход $q_2 \xrightarrow{\varepsilon,F/F} q_3$. Значит, были прочтены f. Аналогично получаем, что $w = f^na^mb^mx$. Но из q_3 нет переходов при F на верхушке стека, значит, $x = \varepsilon$, и $w = f^na^mb^m \in L$.

Задача 2

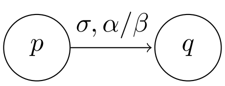
Задача 3

1. $M' = (\Sigma, \Gamma, Q', q_0, Z, \delta', F)$ — расширенный МП-автомат, допускающий по принимающему состоянию. Построим *обычный* МП-автомат $M = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, Z, \delta, F)$, допускающий по принимающему состоянию:

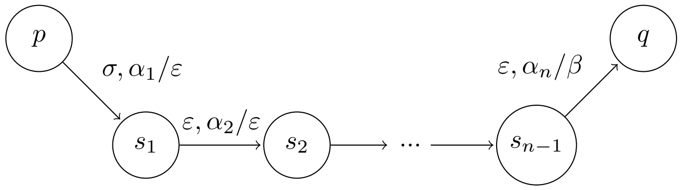
(a) $Q = Q' \cup \bigcup\limits_{i=1}^{|\delta'|} Q_i$, где для каждого перехода i в исходном автомате $\delta(q, \sigma, \alpha) \ni (s, \beta)$ определено
$$Q_i \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \varnothing, & |\alpha| = 1 \\ \{s_i^1, ..., s_i^{|\alpha|-1}\} & |\alpha| \geqslant 2 \end{cases} \text{— } |\alpha| - 1 \text{ новых состояний.}$$

(b) $\delta = \bigcup\limits_{i=1}^{|\delta'|} \delta_i$, где для каждого перехода i в исходном автомате $\delta(q, \sigma, \alpha) \ni (s, \beta)$ определено
$$\delta_i \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} q \xrightarrow{\sigma,\alpha/\beta} s, & |\alpha| = 1 \\ q \xrightarrow{\sigma,\alpha_1/\varepsilon} s_i^1 \cup s_i^1 \xrightarrow{\varepsilon,\alpha_2/\varepsilon} s_i^2 \cup ... \cup s_i^{n-1} \xrightarrow{\varepsilon,\alpha_n/\beta} s & |\alpha| \geqslant 1 \end{cases}, \text{ где } \alpha = \alpha_1...\alpha_n, \ \forall i \in \overline{1,n} \hookrightarrow \alpha_i \in \Gamma \text{ во втором случае.}$$

Иными словами, переходы, удаляющие один символ не изменяются, а остальные переходы вида



заменяются на переходы



   1. ($L(M') \subseteq L(M)$) Пусть $w \in L(M')$. Рассмотрим цепочку конфигураций в исходном автомате. Каждый переход, удаляющий один символ из стека может быть совершен в новом автомате, т.к. он содержится в δ. Переходы, удаляющие больше одного символы также могут быть совершены (по построению). Получаем, что M оказывается в том же состоянии q, что и M'. $q \in F \Rightarrow w \in L(M)$
   2. ($L(M) \subseteq L(M')$). Пусть $w \in L(M) \Rightarrow q_0 \xrightarrow{w} q \in F$. Рассмотрим цепочку конфигураций. Переходы по состояниям $s_i^1 ... s_i^n$ можно «свернуть» в один переход из исходного по построению (степени исхода и захода у созданных вершин равны 1, поэтому, путь из s_j^i может быть только в соответствующее состояние q). Таким образом, исходный автомат также может оказаться в состоянии $q \in F \Rightarrow w \in L(M')$

2. *В задании не дано определение детерминированного расширенного МП-автомата, поэтому используется определение для обычных МП-автоматов (одно правило по первому символу, который удаляется из стека)*
   Пусть M' — детерминированный, докажем, что M — детерминированный. Действительно, из созданных состояний s_i^j переход один по построению, и в другое состояние.
   По определению детерминированности M' имеем
   $\forall q \in Q' \, \forall \sigma \in \Sigma \, \forall \gamma \in \Gamma \hookrightarrow |\delta'(q, \sigma, \gamma)| \leqslant 1$, и
   $\forall \sigma \in \Sigma \, \forall \gamma \in \Gamma \hookrightarrow (\delta'(q, \varnothing, \gamma) \neq \varnothing \Rightarrow \delta'(q, \sigma, \gamma) = \varnothing)$ Поскольку для каждого измененного перехода из q было изменено только состояние, куда совершается переход и символ, удаляемый из стека (вместо слова), получаем это же утверждение для $M \Rightarrow M$ — детерминированный.

Задача 4

Задача 5