# Алгоритмы и модели вычислений.
# Задание 7: потоки

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.27

## Определения

*(сюда будут ссылки)*
$(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}, s, t)$ — транспортная сеть $\Leftrightarrow$

1. $c(u,v) \geqslant 0$
2. $\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow \big((u,v)\in E \Leftrightarrow c(u,v) > 0\big)$

$c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}$ — поток в этой сети $\Leftrightarrow$

1. $\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow \big(f(u,v) \leqslant c(u,v)\big)$
2. $\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow \big(f(u,v) = -f(v,u)\big)$
3. $\forall u \in V^2 \setminus \{s,t\} \hookrightarrow f(u,V) = 0$

## Упражнение 0

1. Пусть $(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. Пусть $(u,v)\notin E$, $(v,u)\notin E$. Тогда $f(u,v) = f(v,u) = 0$. $(u,v)\notin E \overset{2}{\Rightarrow} c(u,v) = 0$. $(v,u)\notin E \overset{2}{\Rightarrow} c(v,u) = 0$. Но $-0 = -c(v,u) \overset{1}{\leqslant} -f(v,u) \overset{2}{=} \underline{f(u,v)} \overset{1}{\leqslant} c(u,v) = 0$, откуда $f(u,v) = f(v,u) = 0\,\blacksquare$

## Упражнение 1

Пусть $(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. Фиксируем $u \notin \{s,t\}$. Пусть $L = \{v \in V \big| (v,u)\in E\}$, $R = \{v \in V \big| (u,v) \in E\}$ — вершины, из которых (в которые, соответственно) есть ребра в фиксированную. Тогда $f(L,u) = f(u,R)$. Найдем

$$0 \overset{3}{=} f(u,V) \equiv \sum_{v\in V} f(u,v) = \underbrace{\sum_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E\\(v,u)\in E}} f(u,v)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E\\(v,u)\notin E}} f(u,v)}_{S_2} + \underbrace{\sum_{\substack{v\in V\\(u,v)\notin E\\(v,u)\in E}} f(u,v)}_{S_3} + \underbrace{\sum_{\substack{v\in V\\(u,v)\notin E\\(v,u)\notin E}} f(u,v)}_{S_4}$$

$(u,v)\notin E$, $(v,u)\notin E \overset{1}{\Rightarrow} f(u,v) = 0$, поэтому $S_4 = 0$. Рассмотрим $S_1 = \sum\limits_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E\\(v,u)\in E}} f(u,v) \overset{2}{=} \sum\limits_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E\\(v,u)\in E}} (-f(v,u)) = -\sum\limits_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E\\(v,u)\in E}} f(v,u) \boxed{=}$.

Переобозначим вершины, получим $\boxed{=} -\sum\limits_{\substack{u\in V\\(v,u)\in E\\(u,v)\in E}} f(u,v) = -S_1$, откуда $S_1 = 0$.

Рассмотрим $f(L,u) = \sum\limits_{(v,u)\in E} f(v,u) = -\sum\limits_{(v,u)\in E} f(u,v) = -(S_1 + S_3) \overset{S_1=0}{\equiv} -S_3$

Рассмотрим $f(u,R) = \sum\limits_{(u,v)\in E} f(u,v) = S_1 + S_2 \overset{S_1=0}{\equiv} S_2$.

Из $(*)$ получаем $0 \underset{S_4=0}{\overset{S_1=0}{\equiv}} S_2 + S_3$, откуда $S_2 = -S_3$, и $f(L,u) = f(u,R)\,\blacksquare$

## Упражнение 2

Пусть $(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. $f$ — поток в ней.
Рассмотрим $A \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\substack{u \in V \\ v \in V}} f(u,v)$. Переобозначим, получим $A = \sum\limits_{\substack{v \in V \\ u \in V}} f(v,u) \overset{2}{=} -\sum\limits_{\substack{v \in V \\ u \in V}} f(u,v) = -A$, откуда $A = 0$
Но $A = \underbrace{\sum\limits_{\substack{u=s \\ v \in V}} f(u,v)}_{S_1} + \underbrace{\sum\limits_{\substack{u=t \\ v \in V}} f(u,v)}_{S_2} + \underbrace{\sum\limits_{\substack{u \in V \setminus \{s,t\} \\ v \in V}} f(u,v)}_{S_3}$.
Рассмотрим $S_3 = \sum\limits_{u \in V \setminus \{s,t\}} \underline{\sum\limits_{v \in V} f(u,v)}$. По свойству 3 каждая подчеркнутая часть равна 0, и $S_3 = 0$
Рассмотрим $S_1 = \sum\limits_{v \in V} f(s,v) \equiv |f|$
Рассмотрим $S_2 = \sum\limits_{v \in V} f(t,v) \overset{2}{=} -\sum\limits_{v \in V} f(v,t) = -f(V,t)$.
Поскольку $0 = A = S_1 + S_2$, получаем $|f| = f(V,t)$ $\blacksquare$

## Задача 1

Пусть $(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. $f$ — поток в ней.

1. Пусть $X \subseteq V$. Рассмотрим $A \overset{\text{def}}{=} f(X,X) \equiv \sum\limits_{\substack{u \in X \\ v \in X}} f(u,v)$. Переобозначим, получим

$$A = \sum_{\substack{v \in X \\ u \in X}} f(v,u) \overset{2}{=} -\sum_{\substack{v \in X \\ u \in X}} f(u,v) = -A,$$

   откуда $A = 0$ $\blacksquare$

2. Пусть $X,\ Y \subseteq V$. Рассмотрим $f(X,Y) \equiv \sum\limits_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} f(x,y) \overset{2}{=} -\sum\limits_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} f(y,x) \equiv -f(Y,X)$ $\blacksquare$

3. Пусть $X,\ Y,\ Z \subseteq V,\ X \cap Y = \varnothing$. Рассмотрим $f(X \cup Y, Z) \overset{(*)}{\equiv} \sum\limits_{\substack{u \in X \cup Y \\ v \in Z}} f(u,v) = \underbrace{\sum\limits_{\substack{u \in X \\ u \in Y \\ v \in Z}} f(u,v)}_{S_1} + \underbrace{\sum\limits_{\substack{u \in X \\ u \notin Y \\ v \in Z}} f(u,v)}_{S_2} + \underbrace{\sum\limits_{\substack{u \notin X \\ u \in Y \\ v \in Z}} f(u,v)}_{S_3}$.
   $S_1 = 0$, так как $u \in X \wedge u \in Y \Leftrightarrow u \in X \cap Y \Leftrightarrow u \in \varnothing$
   По определению, $f(X,Z) = \sum\limits_{\substack{u \in X \\ u \in Y \\ v \in Z}} f(u,v) + \sum\limits_{\substack{u \in X \\ u \notin Y \\ v \in Z}} f(u,v) \equiv S_1 + S_2 \overset{S_1=0}{=} S_2$
   По определению, $f(Y,Z) = \sum\limits_{\substack{u \in Y \\ u \in X \\ v \in Z}} f(u,v) + \sum\limits_{\substack{u \in Y \\ u \notin X \\ v \in Z}} f(u,v) \equiv S_1 + S_3 \overset{S_1=0}{=} S_3$
   Тогда из $(*)$ получаем $f(X \cup Y, Z) = S_2 + S_3 = f(X,Z) + f(Y,Z)$.