Алгоритмы и модели вычислений.
Задание 7: потоки

Сергей Володин, 272 гр.

задано 2014.03.27

Определения

(сюда будут ссылки)
$(G(V,E),\, c\colon V^2 \to \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть $\Leftrightarrow$

1. $c(u,v) \geqslant 0$
2. $\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow \big((u,v) \in E \Leftrightarrow c(u,v) > 0\big)$

$f\colon V^2 \to \mathbb{Z}$ — поток в этой сети $\Leftrightarrow$

1. $\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow \big(f(u,v) \leqslant c(u,v)\big)$
2. $\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow \big(f(u,v) = -f(v,u)\big)$
3. $\forall u \in V^2 \setminus \{s,t\} \hookrightarrow f(u,V) = 0$

Упражнение 0

1. Пусть $(G(V,E),\, c\colon V^2 \to \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. Пусть $(u,v) \notin E$, $(v,u) \notin E$. Тогда $f(u,v) = f(v,u) = 0$. $(u,v) \notin E \overset{2}{\Rightarrow} c(u,v) = 0$. $(v,u) \notin E \overset{2}{\Rightarrow} c(v,u) = 0$. Но $-0 = -c(v,u) \overset{1}{\leqslant} -f(v,u) \overset{2}{=} \underline{f(u,v)} \overset{1}{\leqslant} c(u,v) = 0$, откуда $f(u,v) = f(v,u) = 0\,\blacksquare$

Упражнение 1

Пусть $(G(V,E),\, c\colon V^2 \to \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. Фиксируем $u \notin \{s,t\}$. Пусть $L = \{v \in V \big| (v,u) \in E\}$, $R = \{v \in V \big| (u,v) \in E\}$ — вершины, из которых (в которые, соответственно) есть ребра в фиксированную. Тогда $f(L,u) = f(u,R)$. Найдем

$$0 \overset{3}{=} f(u,V) \equiv \sum_{v \in V} f(u,v) = \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ (u,v) \in E \\ (v,u) \in E}} f(u,v)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ (u,v) \in E \\ (v,u) \notin E}} f(u,v)}_{S_2} + \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ (u,v) \notin E \\ (v,u) \in E}} f(u,v)}_{S_3} + \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ (u,v) \notin E \\ (v,u) \notin E}} f(u,v)}_{S_4}$$

$(u,v) \notin E$, $(v,u) \notin E \overset{1}{\Rightarrow} f(u,v) = 0$, поэтому $S_4 = 0$. Рассмотрим $S_1 = \sum\limits_{\substack{v \in V \\ (u,v) \in E \\ (v,u) \in E}} f(u,v) \overset{2}{=} \sum\limits_{\substack{v \in V \\ (u,v) \in E \\ (v,u) \in E}} (-f(v,u)) = -\sum\limits_{\substack{v \in V \\ (u,v) \in E \\ (v,u) \in E}} f(v,u) \boxed{=}$.

Переобозначим вершины, получим $\boxed{=} - \sum\limits_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E \\ (u,v) \in E}} f(u,v) = -S_1$, откуда $S_1 = 0$.

Рассмотрим $f(L,u) = \sum\limits_{(v,u) \in E} f(v,u) = -\sum\limits_{(v,u) \in E} f(u,v) = -(S_1 + S_3) \overset{S_1 = 0}{\equiv} -S_3$

Рассмотрим $f(u,R) = \sum\limits_{(u,v) \in E} f(u,v) = S_1 + S_2 \overset{S_1 = 0}{\equiv} S_2$.

Из $(*)$ получаем $0 \underset{S_4 = 0}{\overset{S_1 = 0}{\equiv}} S_2 + S_3$, откуда $S_2 = -S_3$, и $f(L,u) = f(u,R)\,\blacksquare$

Упражнение 2

Пусть $(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. f — поток в ней.
Рассмотрим $A \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\substack{u\in V\\ v\in V}} f(u,v)$. Переобозначим, получим $A = \sum\limits_{\substack{v\in V\\ u\in V}} f(v,u) \overset{2}{=} -\sum\limits_{\substack{v\in V\\ u\in V}} f(u,v) = -A$, откуда $A=0$
Но $A = \underbrace{\sum\limits_{\substack{u=s\\ v\in V}} f(u,v)}_{S_1} + \underbrace{\sum\limits_{\substack{u=t\\ v\in V}} f(u,v)}_{S_2} + \underbrace{\sum\limits_{\substack{u\in V\setminus\{s,t\}\\ v\in V}} f(u,v)}_{S_3}$.
Рассмотрим $S_3 = \sum\limits_{u\in V\setminus\{s,t\}} \underline{\sum\limits_{v\in V} f(u,v)}$. По свойству 3 каждая подчеркнутая часть равна 0, и $S_3 = 0$
Рассмотрим $S_1 = \sum\limits_{v\in V} f(s,v) \equiv |f|$
Рассмотрим $S_2 = \sum\limits_{v\in V} f(t,v) \overset{2}{=} -\sum\limits_{v\in V} f(v,t) = -f(V,t)$.
Поскольку $0 = A = S_1 + S_2$, получаем $|f| = f(V,t)\ \blacksquare$

Задача 1

Пусть $(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. f — поток в ней.

1. Пусть $X \subseteq V$. Рассмотрим $A \overset{\text{def}}{=} f(X,X) \equiv \sum\limits_{\substack{u\in X\\ v\in X}} f(u,v)$. Переобозначим, получим
$$A = \sum_{\substack{v\in X\\ u\in X}} f(v,u) \overset{2}{=} -\sum_{\substack{v\in X\\ u\in X}} f(u,v) = -A,$$
откуда $A = 0\ \blacksquare$

2. Пусть $X,\ Y \subseteq V$. Рассмотрим $f(X,Y) \equiv \sum\limits_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} f(x,y) \overset{2}{=} -\sum\limits_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} f(y,x) \equiv -f(Y,X)\ \blacksquare$

3. Пусть $X,\ Y,\ Z \subseteq V,\ X\cap Y = \varnothing$. Рассмотрим $f(X\cup Y, Z) \overset{(*)}{\equiv} \sum\limits_{\substack{u\in X\cup Y\\ v\in Z}} f(u,v) = \underbrace{\sum\limits_{\substack{u\in X\\ u\in Y\\ v\in Z}} f(u,v)}_{S_1} + \underbrace{\sum\limits_{\substack{u\in X\\ u\notin Y\\ v\in Z}} f(u,v)}_{S_2} + \underbrace{\sum\limits_{\substack{u\notin X\\ u\in Y\\ v\in Z}} f(u,v)}_{S_3}$.
$S_1 = 0$, так как $u\in X \wedge u\in Y \Leftrightarrow u \in X\cap Y \Leftrightarrow u\in\varnothing$
По определению, $f(X,Z) = \sum\limits_{\substack{u\in X\\ u\in Y\\ v\in Z}} f(u,v) + \sum\limits_{\substack{u\in X\\ u\notin Y\\ v\in Z}} f(u,v) \equiv S_1 + S_2 \overset{S_1=0}{=} S_2$
По определению, $f(Y,Z) = \sum\limits_{\substack{u\in Y\\ u\in X\\ v\in Z}} f(u,v) + \sum\limits_{\substack{u\in Y\\ u\notin X\\ v\in Z}} f(u,v) \equiv S_1 + S_3 \overset{S_1=0}{=} S_3$
Тогда из $(*)$ получаем $f(X\cup Y, Z) = S_2 + S_3 = f(X,Z) + f(Y,Z)$.

4. Пусть $X,\ Y,\ Z \subseteq V,\ X\cap Y = \varnothing$. Тогда $f(Z, X\cup Y) \overset{2}{=} -f(X\cup Y, Z) \overset{3}{=} -(f(X,Z) + f(Y,Z) \equiv -f(X,Z) - f(Y,Z) \overset{2}{=} f(Z,X) + f(Z,Y)$

Задача 2

Нет, не обязательно. Пример. Рассмотрим $(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. f — поток в ней:

$$s \xrightarrow{1/1} t$$

Определим $V \supseteq X \overset{\text{def}}{=} \{s\}$, $Y \overset{\text{def}}{=} X$. Тогда $A = f(X,Y) \overset{X=Y}{\equiv} f(X,X) \overset{1}{=} 0$.
Рассмотрим $B = -f(V-X, Y) \equiv f(\{t\},\{s\}) = -\sum\limits_{\substack{u\in\{t\}\\ v\in\{s\}}} f(u,v) \equiv -f(t,s) \overset{2}{=} f(s,t) = 1$
Получаем $A = 0 \neq 1 = B\ \blacksquare$

Упражнение 3

Пусть $(G(V,E),\ c\colon V^2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. f_1 и f_2 — потоки, для которых выполнено 3, 2 (заметим, что функция c не участвует в этой части определения).
Определим функцию $f\colon V^2 \to \mathbb{R}$ как $f(u,v) \overset{\text{def}}{=} f_1(u,v) + f_2(u,v)$. По определению, f — поток в данной транспортной сети $\Leftrightarrow$

3. 3. Фиксируем $u\in V$. Рассмотрим $f(u,V) = \sum\limits_{v\in V} f(u,v) = \sum\limits_{v\in V} \big[f_1(u,v) + f_2(u,v)\big] \equiv \sum\limits_{v\in V} f_1(u,v) + \sum\limits_{v\in V} f_2(u,v) \equiv \cancelto{0}{f_1(u,V)} + \cancelto{0}{f_2(u,V)} = 0$ — выполнено всегда (зачеркнуто по свойству 3).

2. 2. Фиксируем $(u,v) \in V^2$. Рассмотрим $f(u,v) \equiv f_1(u,v) + f_2(u,v) \overset{2}{=} -f_1(v,u) - f_2(v,u) \equiv -(f_1(v,u) + f_2(v,u)) = -f(v,u)$ — выполнено всегда.

1. 1. Нужно: $\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow f(u,v) \leqslant c(u,v)$. Поэтому третье свойство выполнено для $f \Leftrightarrow \forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow f_1(u,v) + f_2(u,v) \leqslant c(u,v)$.

Поэтому сумма потоков $f_1 + f_2$ — поток $\Leftrightarrow \boxed{\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow f_1(u,v) + f_2(u,v) \leqslant c(u,v)}$.

Упражнение 4

Пусть $N = (G(V,E),\, c\colon V^2 \to \mathbb{N} \cup \{0\}, s, t)$ — транспортная сеть. Пусть f_1 — поток в ней. Пусть $N' = (G'(u,v), c', s, t)$ — остаточная сеть для N и f_1. Пусть найден увеличивающий путь в остаточной сети, т.е. последовательность вершин $s \equiv v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_{k-1} \to v_k \equiv t$, такая, что $M \overset{\text{def}}{=} \min\limits_{i \in \overline{0,k-1}} c'(v_i, v_{i+1}) > 0$. Считаем путь простым (если путь не простой, выкенем цикл, получится простой путь). Определим функцию $f_2(u,v) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \begin{cases} M, & (v_i, v_{i+1}) = (u,v) \\ -M, & (v_i, v_{i+1}) = (v,u) \end{cases}$. Поскольку путь простой, то каждое (неориентированное) ребро встречается в нем только один раз. Значит, в сумме максимум один элемент ненулевой, и получаем $f_2(u,v) = \begin{cases} M, & \exists i\colon (u,v) = (v_i, v_{i+1}) \\ -M, & \exists i\colon (v,u) = (v_i, v_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$:

1. $f_2(u,v) = \begin{cases} M, & \exists i\colon (u,v) = (v_i, v_{i+1}) \\ -M, & \exists i\colon (v,u) = (v_i, v_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} -M, & \exists i\colon (v,u) = (v_i, v_{i+1}) \\ M, & \exists i\colon (u,v) = (v_i, v_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = -\begin{cases} M, & \exists i\colon (v,u) = (v_i, v_{i+1}) \\ -M, & \exists i\colon (u,v) = (v_i, v_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} =$ $= -f_2(v,u)$, поэтому для f_2 и N выполнено свойство 2

2. Фиксируем $u \in V \setminus \{t, s\}$.

   (a) Пусть u не входит в увеличивающий путь. Тогда $\forall v \in V\, \forall i \in \overline{0, k-1} \hookrightarrow (u,v) \neq (v_i, v_{i+1})$, значит, $f_2(u,v) = 0$, и $\sum\limits_{v \in V} f_2(u,v) = 0$.

   (b) Пусть u входит в увеличивающий путь. $u \neq s \wedge u \neq t$, поэтому u — не первая, и не последняя вершина в пути. Значит, $\exists v_1, v_2\colon (v_1, u),\ (u, v_2)$ — смежные ребра из пути, и других ребер из пути, инцидентных u нет (путь простой). Тогда $\sum\limits_{v \in V} f_2(u,v) = 0 + \ldots + 0 + f_2(u, v_1) + f_2(u, v_2) + 0 + \ldots + 0 = (-M) + M = 0\ \blacksquare$

   Получаем для f_2 свойство 3

3. $f_2(u,v) = \begin{cases} M, & \exists i\colon (u,v) = (v_i, v_{i+1}) & (1) \\ -M, & \exists i\colon (v,u) = (v_i, v_{i+1}) & (2) \\ 0, & \text{иначе} & (3) \end{cases}$

   (1). $\exists i\colon (u,v) = (v_i, v_{i+1})$. $f_2(u,v) = M = \min\limits_{j \in \overline{0,k-1}} c'(v_j, v_{j+1}) \leqslant c'(v_i, v_{i+1})$ (минимум меньше каждого)

   (2). $\exists i\colon (v,u) = (v_i, v_{i+1})$. $f_2(u,v) = -M < 0 \leqslant c'(u,v)$ (пропускная способность $c' = c - f_1$ неотрицательна, так как f_1 — поток в N, откуда $f_1 \leqslant c$).

   (3). $f_2(u,v) = 0 \leqslant c'(u,v)$ (пропускная способность неотрицательна)

   Получаем, что для f_2 выполнено свойство 1 для сети N'

Получаем, что f_2 — поток в N'. Докажем, что $f_1 + f_2$ — поток в N. По это выполнено, если $\forall (u,v) \in V^2 \hookrightarrow f_1(u,v) + f_2(u,v) \leqslant c(u,v)$. Фиксируем $(u,v) \in V^2$. f_2 — поток в N', поэтому $f_2(u,v) \leqslant c'(u,v) \equiv c(u,v) - f_1(u,v)$, поэтому $f_1(u,v) + f_2(u,v) \leqslant f_1(u,v) + c(u,v) - f_1(u,v) \equiv c(u,v)\ \blacksquare$
Докажем, что $f_1 + f_2$ — поток в исходной сети N после этой итерации ФФ: алгоритм добавляет к $f_1(v_i, v_{i+1})$ величину M, вычитает из $f_1(v_{i+1}, v_i)$ M. Рассмотрим разность $(f_1 + f_2) - f_1 = f_2$, которая как равна этой величине (M в случае (v_i, v_{i+1}) в пути, $-M$ в случае (v_{i+1}, v_i) в пути, 0 иначе) $\blacksquare$

(каноническое) Задача 28

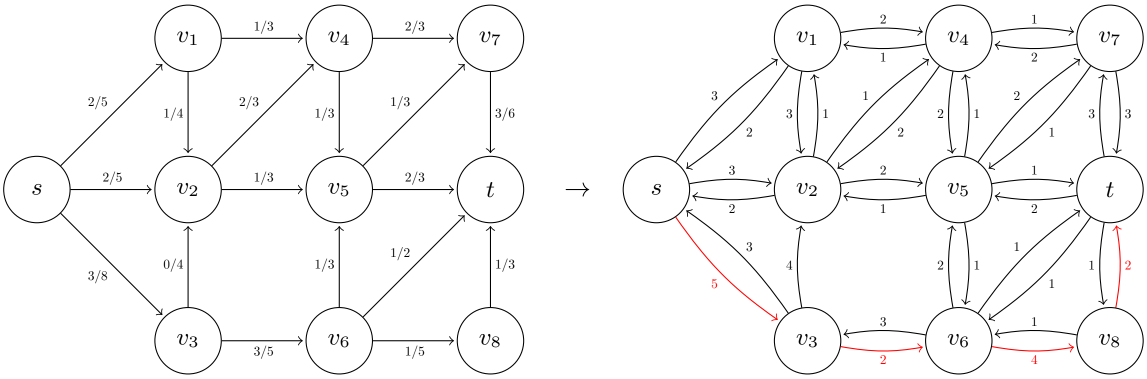
Транспортная сеть $N(G(V,E), c, s, t)$ и поток f в ней (см. картинку ниже)

1. $|f| = 2 + 2 + 3 = 7$.

2. Нет (см. далее).

3. k-я итерация алгоритма. M — величина увеличивающего пути:

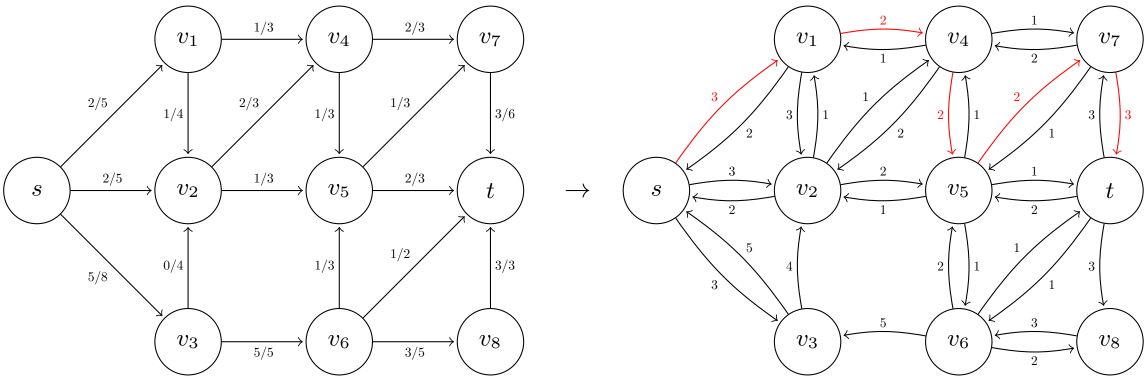
Сеть и поток　　　　Остаточная сеть　　　　M



2

4. $k+1$-я итерация алгоритма. M — величина увеличивающего пути:

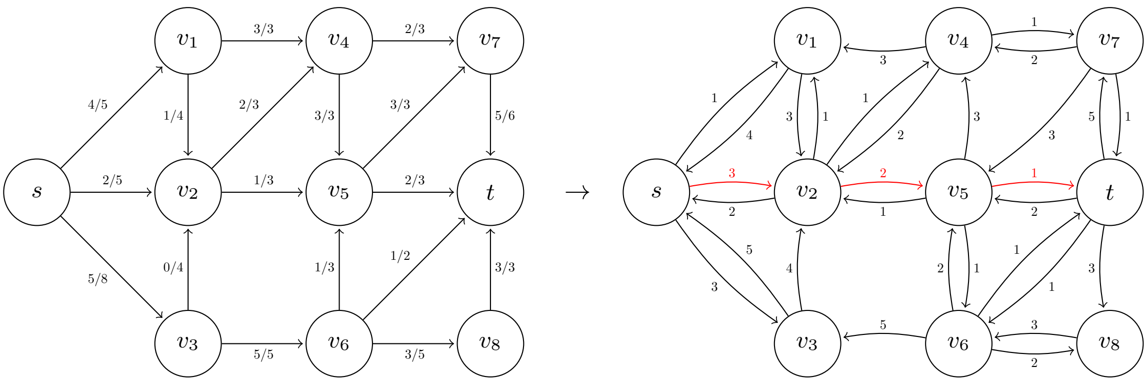
Сеть и поток　　　　Остаточная сеть　　　　M



2

5. $k+2$-я итерация алгоритма. M — величина увеличивающего пути:

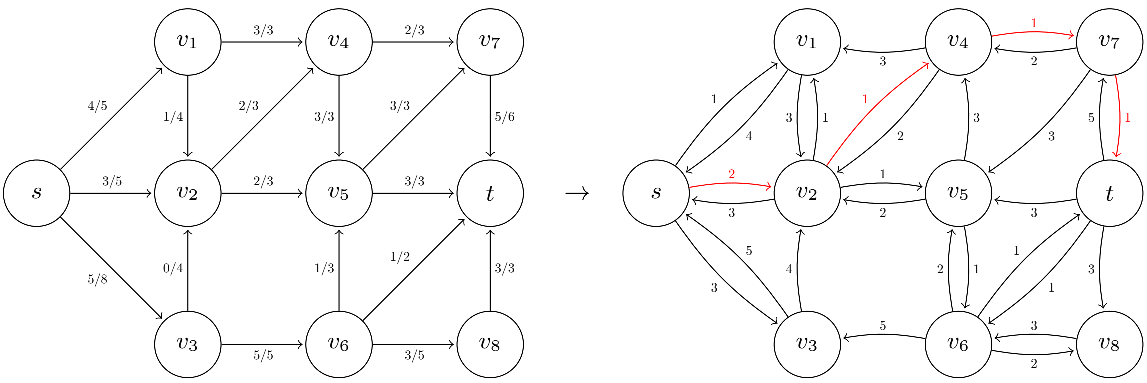
Сеть и поток　　　　Остаточная сеть　　　　M



1

6. $k+3$-я итерация алгоритма. M — величина увеличивающего пути:

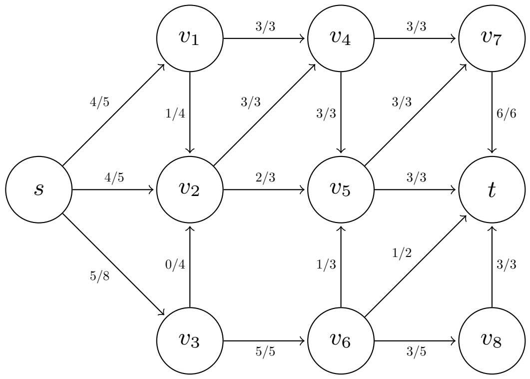
Сеть и поток　　　　Остаточная сеть　　　　M



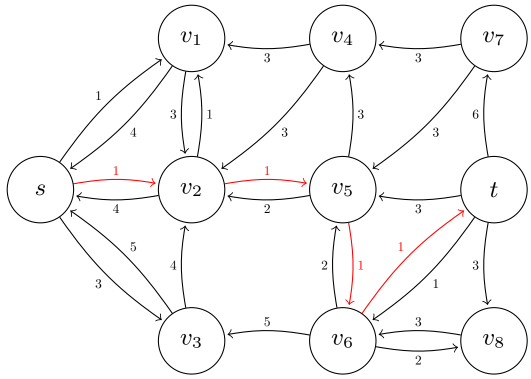
1

7. $k+4$-я итерация алгоритма. M — величина увеличивающего пути:

Сеть и поток Остаточная сеть M



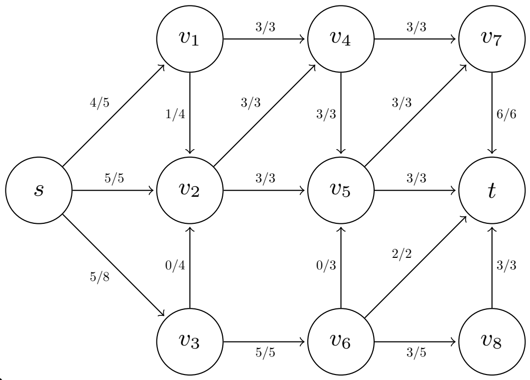
$\rightarrow$



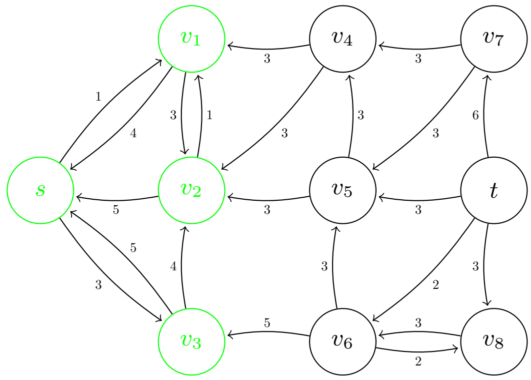
1

8. $k+5$-я итерация алгоритма. M — величина увеличивающего пути:

Сеть и поток Остаточная сеть M



$\rightarrow$



0

Зеленым выделены достижимые из s вершины, t не зеленая, алгоритм останавливается.

9. Максимальный поток равен $|f| = 14$

10. (Теорема, семинар, Кормен) максимальный поток равен минимальному разрезу, который строится следующим образом: S — достижимые из s, $T = V \setminus S$. Алгоритм: ищем максимальный поток (ФФ), на последнем шаге (нет увеличивающего пути) строим S и T.

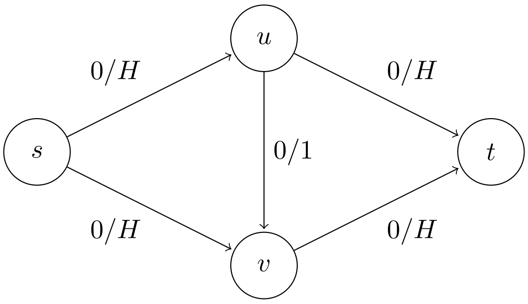
11. Для данного случая $S = \{s, v_1, v_2, v_3\}$, $T = \{v_4, v_5, v_6, v_7, t, v_8\}$, $c(S,T) = 3+3+3+5 = 14$

(каноническое) Задача 29

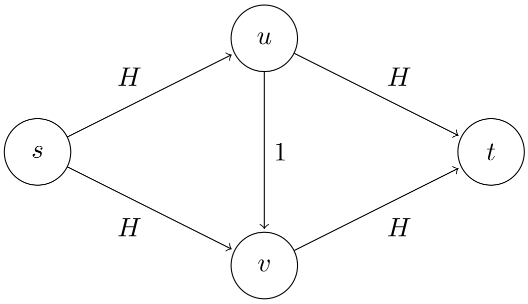
(Кормен)

Рассмотрим транспортную сеть:

Сеть



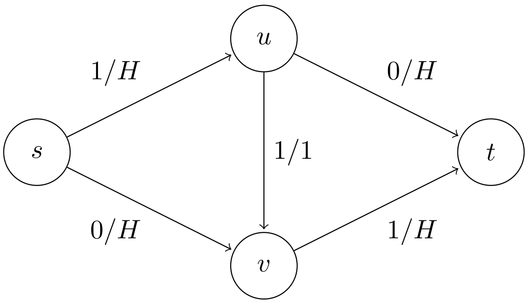
Остаточная сеть



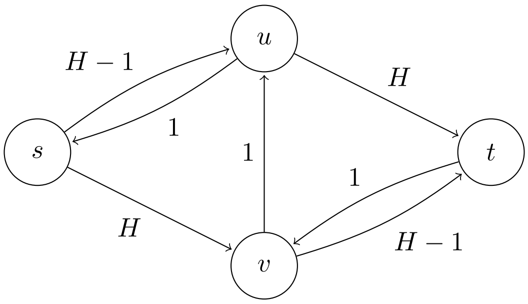
1. На каждом шаге алгоритм выбирает увеличивающий путь.

2. Пусть на первом шаге выбран увеличивающий путь $s \to u \to v \to t$ величины 1. После первой итерации исходная сеть и остаточная сеть:

   Сеть

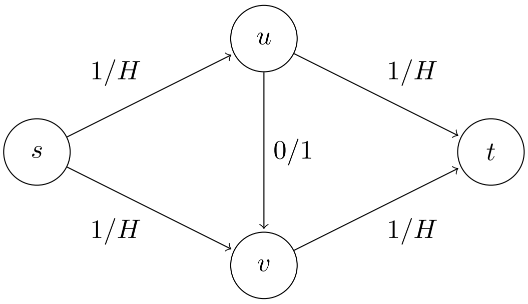
   

   Остаточная сеть

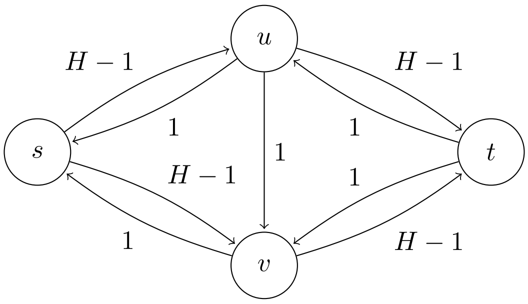
   

3. Пусть на втором шаге выбран увеличивающий путь $s \to v \to u \to t$ величины 1. После второй итерации исходная сеть и остаточная сеть:

   Сеть

   Остаточная сеть

4. Остаточная сеть после второй итерации содержит остаточную сеть для входной сети при $H-1$, поэтому при таком выборе путей будет совершено $2H$ итераций (максимальный поток равен $2H$).

5. Размер входа $f(H) = \Theta(\log H)$ (описание сети — константа), время $T(H) = \Omega(H)$ (по количеству итераций), откуда

$$\forall c \geqslant\hookrightarrow \lim_{H\to\infty} \frac{T(H)}{f^c(H)} \geqslant \lim_{H\to\infty} \frac{C_1 \cdot H}{C_2^c \log^c H} = \lim_{H\to\infty} c_3 \frac{H}{\log^c H} = +\infty \Rightarrow T(H) \neq \mathrm{poly}(f(H)).$$

   То есть, время работы неполиномиально по длине битовой записи входа.

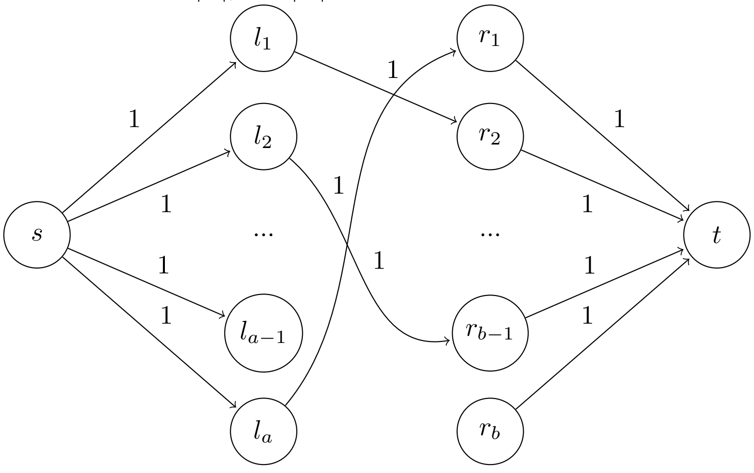
(каноническое) Задача 30

Пусть $G(V,E)$ — двудольный граф с долями L и R. Считаем, что $E \subseteq L \times R$ (только слева направо). Задача: найти максимальное по мощности $E_0 \subseteq E$, такое что любые два ребра из E_0 не смежны, то есть, каждая вершина $v \in V$ инцидентна не более, чем одному ребру из E'. Определим $G'(V', E')$:

$$V' = V \cup \{s,t\}. E' = (\bigcup_{l \in L} \{(s,l)\}) \cup E \cup (\bigcup_{r \in R} \{(r,t)\}).$$

Задададим все пропускные способности $c(u,v) = \begin{cases} 1, & (u,v) \in E' \\ 0, & (u,v) \notin E' \end{cases}$. Тогда $N \overset{\text{def}}{=} (G', c, s, t)$ — транспортная сеть.

Обозначим $a = |L|$, $b = |R|$. Поясняющая картинка:



1. Пусть f — поток в N. Тогда $|f|$ задает некоторое паросочетание E_0, причем $|f| = |E_0|$
   (a) Вершина s соединена только с вершинами из L. Фиксируем одну $l \in L$. Предположим, что $f(s,l) < 0$. Тогда (2) $f(l,s) > 0$. Но $c(l,s) = 0$, так как так как $(l,s) \notin E'$. Получаем противоречие (1): $f(l,s) > 0 = c(l,s)$. Значит, $f(s,l) \geqslant 0$, т.е. $f(s,l) \in \{0,1\}$.
   (b) Обозначим $L_0 = \{l \in L \big| f(s,l) = 1\}$. Тогда $f(s,L) = |L_0|$, так как $c(\cdot,\cdot) \in \{0,1\}$. s инцидентна только вершинам из L, поэтому для остальных вершин $v \notin L$ по 1 имеем $f(s,v) = 0$. Значит, $f(s,V) = |L_0|$. Аналогично получаем $f(r,t) \geqslant 0$, обозначим $R_0 = \{r \in R \big| f(r,t) = 1\}$, и $f(R,t) \equiv f(V,t) = |R_0|$. Но по $f(s,V) = f(V,t)$, откуда $|L_0| = |R_0|$.
   (c) Фиксируем $l \in L$. Пусть $l \in L_0$. Тогда $\exists! r \in R\colon f(l,r) = 1$:
      i. Фиксируем $r \in R$. Пусть $f(l,r) < 0$. Тогда $f(r,l) > 0$. Но $(r,l) \notin E \subseteq L \times R$, откуда $c(r,l) = 0 < f(r,l)$ — противоречие (1)
      ii. ($\exists$) Пусть иначе. Тогда $\forall r \in R \hookrightarrow f(l,r) \leqslant 0$. Из 1(c)i получаем, что $f(l,r) = 0$. Тогда $f(l,R) = 0$. Но l и t не смежны, поэтому (свойство 1) $f(l, V \setminus \{s\}) = 0$. Получим $0 \overset{3}{=} f(l,V) \overset{3}{=} f(l,s) + f(l, V \setminus \{s\})$. Первое слагаемое равно -1, так как $f(s,l) = 1$ $(l \in L_0)$, второе равно нулю, получаем $0 = -1$ — противоречие ■
      iii. (!) Пусть иначе. Поскольку $\forall r \in R \hookrightarrow f(l,r) \geqslant 0$ (1(c)i), найдем $0 \overset{3}{=} f(l,V) \overset{3}{=} \underbrace{f(l,s)}_{=-1} + \cancelto{0}{f(l,t)} + \cancelto{0}{f(l,L)} + \underbrace{f(l,R)}_{\geqslant 2} \geqslant 1$ — противоречие.
   (d) Пусть $l \in L_0$, $r \in R$: $f(l,r) > 0$. Тогда $r \in R_0$. Пусть иначе. Тогда $f(r,t) = 0$ (ребра (t,r) нет в E'). Получаем $f(r,V) = f(r,l) + f(r,t) = -1 \neq 0$ — противоречие с 3.
   (e) Пусть $r \in R_0$. Тогда $\exists l \in L\colon f(l,r) = 1$. Пусть иначе. r смежна (возможно) только с вершинами из L, поэтому $f(r,V) = \underbrace{f(r,t)}_{=1} + \cancelto{0}{f(r,L)} = 1$ — противоречие. По 1d эта существующая $l \in L_0$.
   (f) Построена функция $E_0 \colon L_0 \to R_0$. Действительно, для каждой $l \in L$ найдена единственная (1c) вершина $r \in R_0$ (1d). По 1e эта функция сюръективная (все значения достигаются), и по 1b она — биекция ($|R_0| = |L_0|$). Значит, E_0 — паросочетание ■
   (g) Было доказано (1b), что $|L_0| = |R_0| = f(s,V) \equiv |f|$, откуда мощность паросочетания равна величине потока ■
2. Пусть $E_0 \subseteq E \subseteq L \times R$ — паросочетание. Тогда существует поток f в N, причем $|f| = |E_0|$
   (a) Определим
      - $f(E_0) = 1$ (для каждой пары)
      - $f(s, L_0) = 1$, где $L_0 = \{l \in L \big| \exists r \in R\colon (l,r) \in E_0\}$
      - $f(R_0, t) = 1$, где $R_0 = \{r \in R \big| \exists l \in L\colon (l,r) \in E_0\}$
      - $f(E_0^T) = -1$ $(E_0^T = \{(r,l) \big| (l,r) \in E_0\})$
      - $f(L_0, s) = -1$
      - $f(t, R_0) = -1$

- $f(u,v) = 0$ в остальных случаях

(b) Тогда $\forall (u,v) \in E' \hookrightarrow f(u,v) = -f(v,u)$

(c) Единицы добавлены только на существующих ребрах, поэтому $f(u,v) \leqslant c(u,v)$

(d) E_0 — паросочетание, поэтому функция $E_0 \colon L_0 \to R_0$ — биекция.

(e) Рассмотрим $l \in L \setminus L_0$. Получаем, что (рассматриваем только существующие ребра) $f(l,V) = \cancelto{0}{f(l,s)} + \cancelto{0}{f(l,R)} = 0$

(f) Рассмотрим $l \in L$. Получаем, что (рассматриваем только существующие ребра) $f(l,V) = \underbrace{f(l,s)}_{=-1} + \underbrace{f(l,R)}_{=1} = 0$.
$f(l,R) = 1$, так как E_0 — биекция.

(g) Аналогично для $r \in R$: $\forall r \in R \hookrightarrow f(r,V) = 0$

(h) Получаем свойство 3

(i) Получаем, что f — поток в N ■

(j) Найдем $|f| = f(s,V) = f(s,L) = f(s,L_0) = |L_0| = |E_0|$ ■

Алгоритм: По $G(V,E)$ строим сеть N (конструкция выше), ищем максимальный поток f, по нему построим паросочетание E_0 (см. 1).
Оно будет максимально. Пусть иначе. Тогда по большему паросочетанию $E_0'\colon |E_0'| > |E_0|$ найдем поток f', такой что $f' = |E_0'|$ (см. 2). Получим $|f'| \overset{2}{=} |E_0'| > |E_0| \overset{1}{=} |f|$, т.е. f — не максимальный поток — противоречие.

(каноническое) Задача 31.1

1. Пусть заданы $n \in \mathbb{N}$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, $\{\beta_i\}_{i=1}^n$, $\{\gamma_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\forall i \in \overline{1,n} \hookrightarrow \gamma_{ii} = 0$. Построим сеть $(G(V,E),c,s,t)$:

   (a) $V \overset{\text{def}}{=} \{V_i\}_{i=1}^n \cup \{s,t\}$

   (b) $c(s,V_i) \overset{\text{def}}{=} \beta_i$

   (c) $c(V_i,t) \overset{\text{def}}{=} \alpha_i$

   (d) $c(V_i,V_j) \overset{\text{def}}{=} \gamma_{ij}$

   (e) $c(u,v) = 0$ в остальных случаях

   Определим $E = \{(u,v) \in E \big| c(u,v) > 0\}$.

2. Рассмотрим некоторый разрез $S, T = V \setminus S$. $s \in S$, $t \in T$. Пусть $X = S \cap \{V_i\}_{i=1}^n$, $Y \overset{\text{def}}{=} \{V_i\}_{i=1}^n \setminus X$. Тогда величина разреза $c(S,T) = \sum\limits_{\substack{u \in S\\ v \in T}} c(u,v) = \sum\limits_{y \in Y} c(s,y) + \sum\limits_{x \in X} c(x,t) + \sum\limits_{\substack{x \in X\\ y \in Y}} c(x,y) = \sum\limits_{V_i \in X} \alpha_i + \sum\limits_{V_i \in Y} \beta_i + \sum\limits_{\substack{V_i \in X\\ V_j \in Y}} \gamma_{ij}$. Обозначим $A \overset{\text{def}}{=} \{i \big| V_i \in X\}$, $B \overset{\text{def}}{=} \{j \big| V_j \in Y\}$. Тогда $c(S,T) = \sum\limits_{i \in A} \alpha_i + \sum\limits_{j \in B} \beta_j + \sum\limits_{\substack{i \in A\\ j \in B}} \gamma_{ij} = g(A,B)$, где $g(A,B)$ — функция из условия, которую нужно минимизировать.

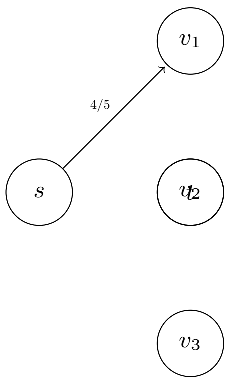
3. Фиксируем A, B: $A \cap B = \varnothing, A \cup B = \overline{1,n}$ — распределение программ. Заметим, что тогда $S = \{s\} \cup V_A$, $T = \{t\} \cup V_B$ — разрез. Тогда (предыдущее рассуждение) для него верно равенство $c(S,T) = g(A,B)$.

4. Алгоритм: строим сеть по входу $(n, \alpha_i, \beta_i, \gamma_{ij})$, ищем минимальный разрез, по нему строим ответ. Пусть найденный ответ не минимальный. Тогда существует лучшее распределение, значит, существует меньший разрез — противоречие.

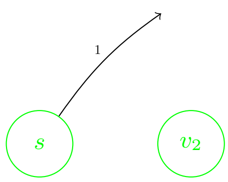
(каноническое) Задача 31.2

1-я итерация алгоритма. M — величина увеличивающего пути:

Сеть и поток | Остаточная сеть | M



$\rightarrow$



0