



KARL-FRANZENS-UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR PHYSIK

23S PHY.L02UB FORTGESCHRITTENPRAKTIKUM 2
678 Bachelorstudium Physik, UG2002/2021W

V. Festkörperphysik

Wachmann Elias Zach Andreas
12004232 12004790
Gruppe 12

Betreut von
Thomas Georg BONÉ, BSc MSc

24.03.2023

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung	3
2 Voraussetzungen und Grundlagen	3
2.1 Elektronenbeugung	3
2.2 Elektronen im Magnetfeld	6
2.3 Elektronen-Spin-Resonanz	7
2.4 Unsicherheitsanalyse	12
3 Versuchsanordnung	12
3.1 Elektronenbeugung und Elektronen im Magnetfeld	12
3.2 Elektronen-Spin-Resonanz	13
4 Geräteliste	14
5 Versuchsdurchführung und Messergebnisse	15
5.1 Elektronenbeugung	15
5.2 Elektronen im Magnetfeld	16
5.3 Elektronen-Spin-Resonanz	17
6 Auswertung	18
6.1 Elektronenbeugung	18
6.2 Elektronen im Magnetfeld	19
6.3 Elektronen-Spin-Resonanz	21
7 Diskussion	24
7.1 Elektronenbeugung	24
7.2 Elektronen im Magnetfeld	24
7.3 Elektronen-Spin-Resonanz	25
8 Zusammenfassung	25

1 Aufgabenstellung [1, 2]

Die im vorliegenden Protokoll beschriebene Laboreinheit zum Thema *Festkörperphysik* gliedert sich in die drei folgenden Teilversuche:

- **Elektronenbeugung an einer polykristallinen Graphitprobe**
 - Berechnung der Wellenlänge der Elektronen in Abhängigkeit der Anodenspannung
 - Bestimmung des Gitterabstands von Graphit aus den ersten beiden Beugungsringen
- **Elektronen im Magnetfeld**
 - Messung der Auslenkung des Elektronenstrahls in Abhängigkeit der Stromstärke bei zwei unterschiedlichen Anodenspannungen
 - Berechnung des Krümmungsradius der Elektronenbahn aus der Auslenkung
 - Berechnung der magnetischen Induktion aus dem Spulenstrom
 - Grafische Darstellung von $1/r$ in Abhängigkeit von B
 - Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons durch lineare Regression
- **Elektronen-Spin-Resonanz**
 - Bestimmung des Resonanzmagnetfeldes B_0 in Abhängigkeit von der gewählten Resonanzfrequenz
 - Bestimmung des Landé-Faktors von 1,1-Diphenyl-2-Pikryl-Hydrazyl (DPPH)

2 Voraussetzungen und Grundlagen

2.1 Elektronenbeugung [1]

Berechnung der Elektronenwellenlänge Um die im Versuch auftretenden Interferenzerscheinungen zu erklären wird den Elektronen, die beim Auftreffen auf die polykristalline Graphitprobe den Impuls p besitzen, eine Wellenlänge λ zugeordnet. Dieser Zusammenhang wird mit der Gleichung von de Broglie beschrieben:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1)$$

wobei $h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ Js das Planck'sche Wirkungsquantum beschreibt.

Der Impuls kann aus der Geschwindigkeit v bestimmt werden, die die Elektronen nach Durchlaufen einer Beschleunigungsspannung U_B erreicht haben:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{v^2}{2m} = q_e U_B \quad (2)$$

Dabei beschreiben $q_e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ As die Elementarladung (\equiv negative Elektronenladung) und $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg die Ruhemasse des Elektrons.

Die Wellenlänge der Elektronen ergibt sich somit zu:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e q_e U_B}} \quad (3)$$

Beugung von Elektronen an Kristallgittern In unserem Versuch trifft ein Elektronenstrahl auf eine polykristalline Graphitprobe und wird gemäß der Bragg-Bedingung gestreut:

$$2d \sin(\theta) = n\lambda \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (4)$$

Dabei ist d der Abstand zwischen den einzelnen Netzebenen im Graphitgitter, n die Beugungsordnung und θ der Bragg-Winkel (Winkel zwischen Elektronenstrahl und Gitterebenen).

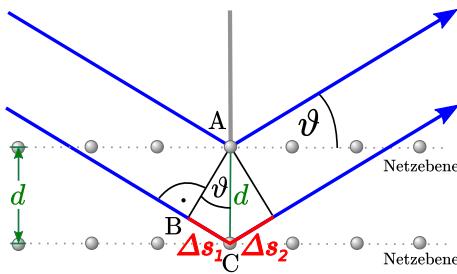


Abbildung 2.1: Bragg-Gesetz

In einer polykristallinen Graphitprobe sind die Bindungen zwischen den einzelnen Lagen gebrochen, wodurch ihre Orientierung zufällig ist. Das heißt man findet immer wieder Mikrokristalle mit der richtigen Orientierung zum Elektronenstrahl, sodass die Bragg-Bedingung erfüllt ist. Der gebeugte Elektronenstrahl ist daher in Form eines Konus aufgefächert, wodurch die Interferenzringe am Schirm entstehen.

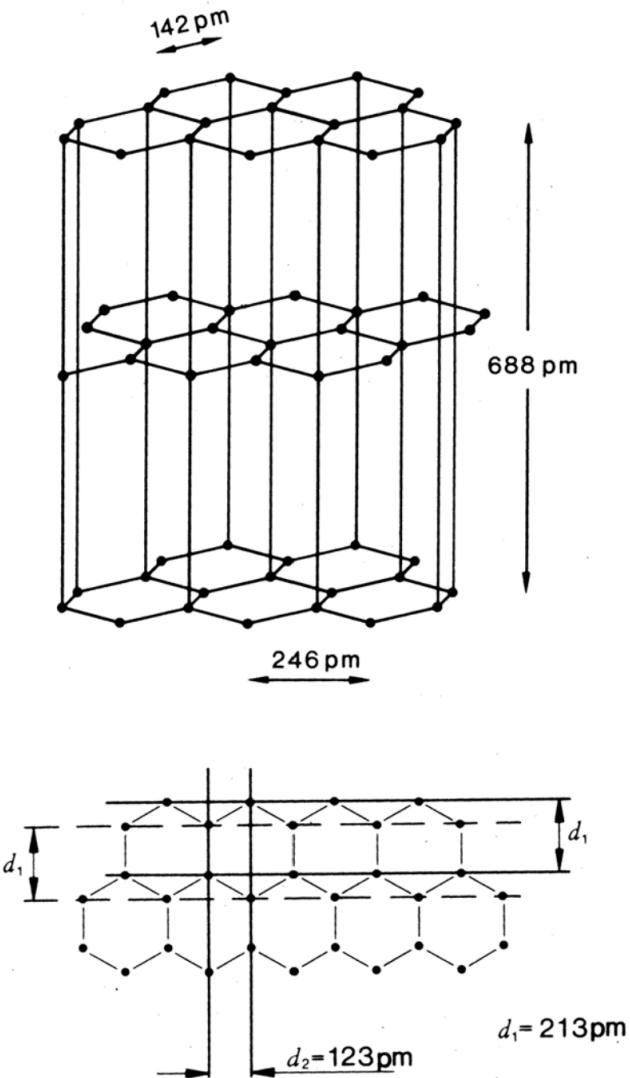


Abbildung 2.2: Kristallgitter von Graphit. Die obere Abbildung zeigt die Gitterebenen von Graphit für die ersten beiden Interferenzringe. Quelle: [1]

Der Bragg-Winkel kann aus dem Radius r des am Schirm sichtbaren Interferenzrings berechnet werden, wobei beachtet werden muss, dass der Ablenkungswinkel $\alpha = 2\theta$ doppelt so groß ist. Aus Abbildung 2.1 sieht man direkt:

$$\sin(2\alpha) = \frac{r}{R} \quad (5)$$

mit R , dem Radius der Glaskugel und r ist der Radius des Interferenzrings. Für kleine Winkel α gilt:

$$\sin(2\alpha) \approx 2 \sin(\alpha)$$

Dadurch erhält man für kleine Winkel θ :

$$\sin(\alpha) = \sin(2\theta) \approx 2 \sin(\theta)$$

Mit dieser Näherung erhält man:

$$r = \frac{2R}{d} n \lambda \quad (6)$$

Die Radien der zwei inneren Interferenzringe stammen von den Netzebenen d_1 und d_2 des Graphits für $n = 1$.

2.2 Elektronen im Magnetfeld [1]

Bewegt sich ein Elektron im Magnetfeld \mathbf{B} , so wirkt auf dieses die Lorentzkraft:

$$\mathbf{F}_L = -q_e (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7)$$

Wenn man davon ausgeht, dass Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} und der Vektor der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} senkrecht aufeinander stehen, so gilt:

$$F_L = -q_e \cdot v \cdot B \quad (8)$$

Die Lorentzkraft wirkt als Zentripetalkraft und zwingt das Elektron auf eine Kreisbahn mit dem Radius r , sodass folgende Beziehung gilt:

$$-q_e \cdot v \cdot B = \frac{m_e \cdot v^2}{r}$$

Die spezifische Ladung ergibt sich dann zu:

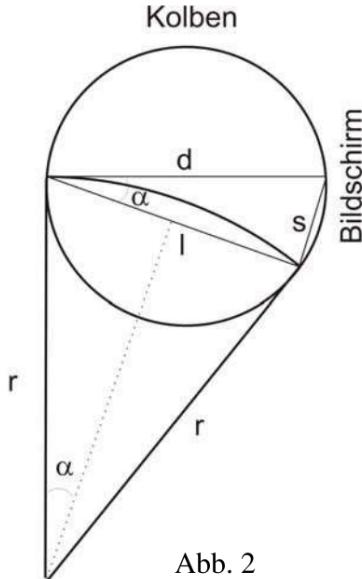
$$q_{\text{spez}} = -\frac{q_e}{m_e} = \frac{v}{rB} \quad (9)$$

Die kinetische Energie gewinnt das Elektron aus einem elektrischen Feld, in dem es beschleunigt wird (Gleichung 2). Aus den beiden Gleichungen folgt nun:

$$q_{\text{spez}} = \frac{2U_A}{(rB)^2} \quad (10)$$

Der Radius r der Kreisbahn lässt sich nicht direkt messen. Stattdessen wird diese Größe aus der Ablenkung s im Magnetfeld und aus dem Kollendurchmesser d ermittelt. Man betrach-

te dazu Abbildung 2.3.



Die magnetische Flussdichte \mathbf{B} ist:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (\text{T} = \text{Tesla})$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1} \quad (\text{Permeabilitätskonstante})$$

\mathbf{H} – die Feldstärke

Die Feldstärke des nahezu homogenen Magnetfeldes des Helmholtz-Spulenpaars ist:

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{nR^2 I}{(R^2 + a^2)^{3/2}} = 33,8 \cdot 10^2 \text{ A m}^{-1} \quad (11)$$

n – Windungszahl je Spule ($n = 320$)

R – Radius der Spulen ($R = 6,8 \text{ cm}$)

a – halber Spulenabstand ($a = 3,4 \text{ cm}$)^a

I – Stromstärke je Spule

Abbildung 2.3: Schematische Skizze des Kollens

^aInkorrekter Wert, Korrektur siehe Unterabschnitt 3.1

2.3 Elektronen-Spin-Resonanz [2]

Seit ihrer Entdeckung durch E. K. Zavoisky (1945) hat sich die Elektronenspinresonanz (ESR) zu einer wichtigen Methode zur Untersuchung von Molekül- und Kristallstrukturen, von chemischen Reaktionen und anderen Problemstellungen in Physik, Chemie, Biologie und Medizin entwickelt. Sie beruht auf der Absorption hochfrequenter elektromagnetischer Strahlung durch paramagnetische Stoffe in einem äußeren Magnetfeld, in dem die Spinzustände der Elektronen aufspalten.

Elektronen-Spin-Resonanz ist auf paramagnetische Stoffe begrenzt, da hier die Bahndrehimpulse und Spins der Elektronen zu einem von Null verschiedenen Gesamtdrehimpuls koppeln. Geeignet sind z. B. Verbindungen, in denen Atome mit nicht vollständig aufgefüllten inneren Schalen (Übergangsmetalle, seltene Erden) eingebaut sind, organische Moleküle (freie Radikale), die einzelne ungepaarte Elektronen enthalten, oder Kristalle mit Gitterfehlstellen in einem paramagnetischen Zustand.

Mit dem Gesamtdrehimpuls \mathbf{J} verbunden ist das magnetische Moment

$$\boldsymbol{\mu}_J = g_J \cdot \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \mathbf{J} \quad (12)$$

In einem Magnetfeld \mathbf{B}_0 erhält das magnetische Moment $\boldsymbol{\mu}_J$ die potentielle Energie:

$$E = -\boldsymbol{\mu}_J \cdot \mathbf{B}_0 \quad (13)$$

Sie ist gequantelt, da das magnetische Moment und der Gesamtdrehimpuls nur bestimmte diskrete Orientierungen zum Magnetfeld einnehmen können. Jeder Orientierung des Drehimpulses entspricht ein Zustand bestimmter potentieller Energie im Magnetfeld. Für die Komponente J_z des Gesamtdrehimpulses parallel zum Magnetfeld gilt

$$J_z = \hbar \cdot m_J \quad \text{mit} \quad m_J = -J, -(J-1), \dots, J-1, J \quad (14)$$

wobei die Drehimpulsquantenzahl J ganz- oder halbzahlig ist, d.h. die potentielle Energie spaltet auf in die diskreten Zeeman-Niveaus.

$$E = g_J \cdot \mu_B \cdot B_0 \cdot m_J \quad \text{mit} \quad m_J = -J, -(J-1), \dots, J-1, J \quad (15)$$

Mit der Methode der Elektronen-Spin-Resonanz kann die Energieaufspaltung direkt gemessen werden. Dazu wird senkrecht zum statischen Magnetfeld \mathbf{B}_0 ein hochfrequentes magnetisches Wechselfeld

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_{\text{HF}} \cdot \sin(\omega t) = \mathbf{B}_{\text{HF}} \cdot \sin(2\pi\nu t) \quad (16)$$

in die Probe eingestrahlt. Wenn die eingestrahlte Energie $h \cdot \nu$ dem Energieabstand ΔE zweier benachbarter Energieniveaus entspricht, d.h. wenn die Bedingungen

$$\Delta m_J = \pm 1 \quad \text{und} \quad \Delta E = h \cdot \nu = g_J \cdot \mu_B \cdot B_0 \quad (17)$$

erfüllt sind, bewirkt das Wechselfeld ein „Umklappen“ der magnetischen Momente von einer Einstellmöglichkeit im Magnetfeld B_0 in die andere. Anders ausgedrückt werden Übergänge zwischen den benachbarten Niveaus induziert und es tritt ein Resonanzeffekt auf, der sich in der Absorption von Energie aus dem eingestrahlten magnetischen Wechselfeld durch die Probe zeigt.

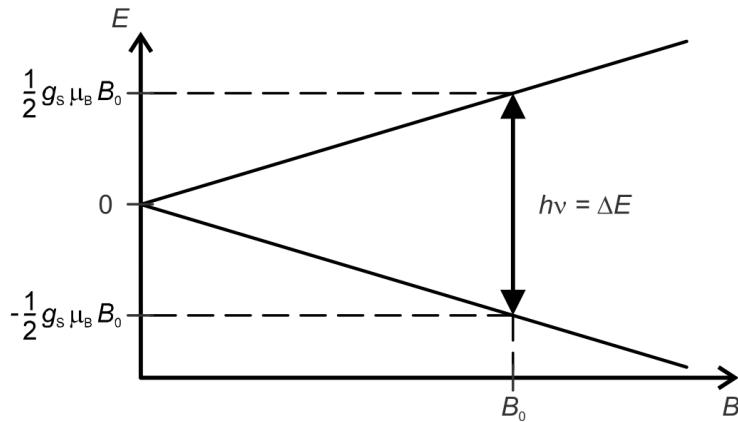


Abbildung 2.4: Energieaufspaltung des freien Elektrons im Magnetfeld und Resonanzbedingung für die Elektronen-Spin-Resonanz.

In zahlreichen Verbindungen spielt der Bahndrehimpuls eine untergeordnete Rolle und die Betrachtungen können sich auf den Spin der Elektronen beschränken. In Abbildung 2.4

ist die Situation der Einfachheit halber für ein freies Elektron dargestellt: Hier besteht der Gesamtdrehimpuls aus dem Spin s des Elektrons.

Die Drehimpulsquantenzahl ist

$$J = s = \frac{1}{2}$$

und der Landé'sche Faktor hat den Wert

$$g_J = g_s \approx 2,0023$$

Im Magnetfeld spaltet die Energie des Elektrons auf in die beiden Niveaus

$$E = g_S \cdot \mu_B \cdot B_0 \cdot m_s \quad \text{mit} \quad m_S = \pm \frac{1}{2} \quad (18)$$

die einer Ausrichtung des Elektronenspins antiparallel und parallel zum Magnetfeld entsprechen. Bei einem Übergang zwischen den beiden Niveaus ist die Auswahlregel 17 automatisch erfüllt: Die Resonanzbedingung lautet analog zu 17

$$h \cdot \nu = g_S \cdot \mu_B \cdot B_0 \quad (19)$$

Misst man nun z.B. die aus dem eingestrahlten Wechselfeld absorbierte Energie bei fester Frequenz ν in Abhängigkeit vom Magnetfeld B_0 , so erhält man eine Absorptionslinie mit einer Halbwertsbreite δB_0 . Diese Linienbreite ist bei einem homogenen Magnetfeld im einfachsten Fall Ausdruck der Unschärfe δE des Übergangs. Es gilt die Unschärferelation

$$\delta E \cdot T \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (20)$$

wobei T die Lebensdauer des Niveaus ist. Wegen Gleichung 17 gilt

$$\delta E = g \cdot \mu_B \cdot \delta B_0 \quad (21)$$

damit ist unabhängig von der Resonanzfrequenz ν

$$\delta B_0 = \frac{\hbar}{2 \cdot g_J \cdot \mu_B \cdot T} \quad (22)$$

Ausgewertet wird die Lage und die Breite der Absorptionslinien im ESR-Spektrum der untersuchten Proben:

Aus der Lage bestimmt man gemäß Gleichung 17 den Landé'schen Faktor $g_J \approx r_{\text{Probe}}$. Er liegt bei einem freien Atom oder Ion zwischen dem Wert $g_J = 1$, der bei reinem Bahnmagnetismus erreicht wird, und $g_J \approx 2,0023$ für reinen Spinnmagnetismus. Tatsächlich sind die mit der Methode der Elektronen-Spin-Resonanz untersuchten paramagnetischen Zentren jedoch nicht frei. In ein Kristallgitter eingebaut oder in Lösung von einer Solvathülle umgeben, wirken starke elektrische und magnetische Felder auf sie, die von den Atomen der Umgebung erzeugt werden. Diese Felder bewirken eine Energieverschiebung und beeinflussen die Zeeman-Aufspaltung der Elektronen. Dadurch ändert sich der Wert des g-Faktors, er wird häufig anisotrop, und in den ESR-Spektren tritt eine Feinstruktur auf. Es lassen

sich also aus dem g-Faktor Rückschlüsse auf die Bindungsverhältnisse der Elektronen und den chemischen Aufbau der untersuchten Probe ziehen.

Aus der Linienbreite können Aussagen über die dynamischen Eigenschaften gewonnen werden. Die Linienbreite wird – wenn man von nicht aufgelösten Feinstrukturen absieht – bestimmt durch mehrere Prozesse, die der Ausrichtung der magnetischen Momente entgegenwirken. Als Spin-Spin-Relaxation bezeichnet man die Wechselwirkung der ausgerichteten magnetischen Momente untereinander und als Spin-Gitter-Relaxation die Wechselwirkung der magnetischen Momente mit den fluktuiierenden elektrischen und magnetischen Feldern, die in Festkörpern durch die Gitterschwingungen oder in Flüssigkeiten durch die thermische Bewegung der Atome erzeugt werden. In einigen Fällen wird die Linienbreite durch sogenannte Austauschwechselwirkung beeinflusst und fällt erheblich kleiner aus, als bei reiner Dipol-Dipol-Wechselwirkung der Spins zu erwarten wäre.

Für praktische Anwendungen entwickelte ESR-Spektrometer arbeiten hauptsächlich bei Frequenzen von etwa 10 GHz (Mikrowellen, X-Band). Die Magnetfelder liegen entsprechend in der Größenordnung 0,1 T bis 1 T. Im vorliegenden Versuch ist das Magnetfeld B_0 deutlich schwächer. Es wird mit Hilfe zweier Helmholtz-Spulen erzeugt und kann durch geeignete Wahl des Spulenstromes zwischen 0 mT bis 4 mT eingestellt werden. Dem konstanten Spulenstrom wird ein mit 50 Hz modulierter Strom überlagert. Also setzt sich das entsprechend modulierte Magnetfeld B zusammen aus einem Gleichfeld B_0 und einem 50 Hz-Feld B_{mod} . Die Probe befindet sich in einer HF-Spule, die Teil eines elektrischen Schwingkreises hoher Güte ist. Der Schwingkreis wird durch einen frequenzvariablen HF-Oszillator zwischen 15 MHz bis 130 MHz erregt.

Ist die Resonanzbedingung 17 erfüllt, absorbiert die Probe Energie und der Schwingkreis wird belastet. Als Folge ändert sich der Wechselstromwiderstand des Schwingkreises und die Spannung über der Spule nimmt ab. Diese Spannung wird durch Gleichrichtung und Verstärkung in das Messsignal gewandelt.

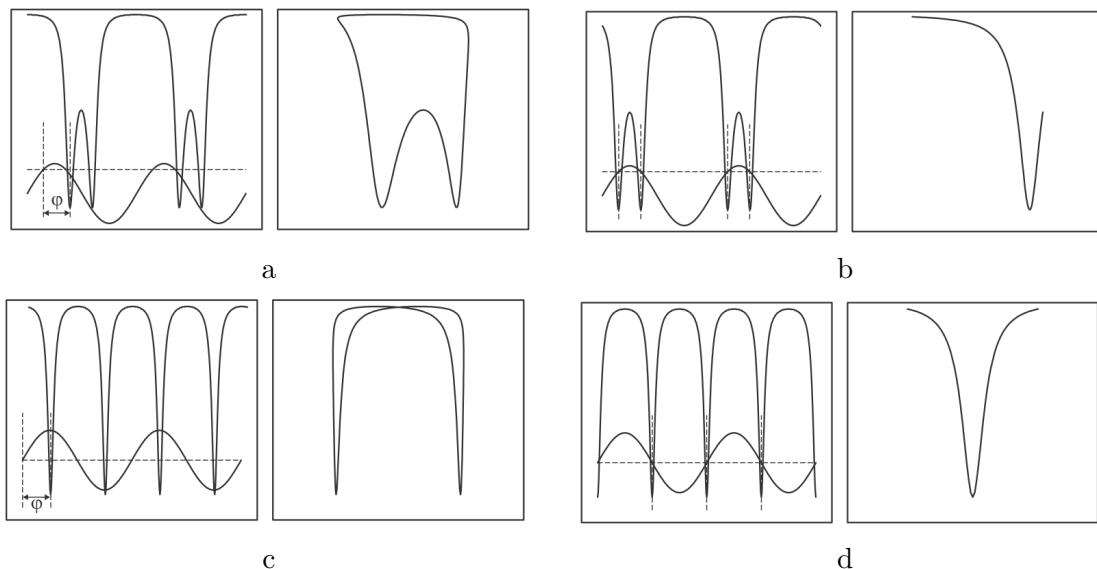


Abbildung 2.5: Oszilloskopbild des Messsignals (Y bzw. I) und des modulierten Magnetfeldes (X bzw. II). Links: Zweikanal darstellung mit DC-gekoppeltem Kanal II. Rechts: XY-Darstellung mit AC-gekoppeltem Kanal II

- (a) unkorrigierte Phasenverschiebung φ , zu niedriges Gleichfeld B_0
- (b) korrigierte Phasenverschiebung φ , zu niedriges Gleichfeld B_0
- (c) unkorrigierte Phasenverschiebung φ , passendes Gleichfeld B_0
- (d) korrigierte Phasenverschiebung φ , passendes Gleichfeld B_0

Das Messsignal erscheint am Ausgang des Betriebsgerätes zeitverzögert gegenüber dem modulierten Magnetfeld. Die Zeitverzögerung kann als Phasenverschiebung im Betriebsgerät korrigiert werden. Ein Zweikanal-Oszilloskop stellt im X-Y-Betrieb das Messsignal zusammen mit einer zum Magnetfeld proportionalen Spannung als Resonanzsignal dar. Das Resonanzsignal ist symmetrisch, wenn das Gleichfeld B_0 die Resonanzbedingung erfüllt und die Phasenverschiebung φ zwischen Messsignal und moduliertem Magnetfeld korrigiert ist (siehe Abbildung 2.5).

Als Probensubstanz wird 1,1-Diphenyl-2-Pikryl-Hydrazyl (DPPH) verwendet. Diese organische Verbindung ist ein relativ stabiles freies Radikal, das an einem Atom der Stickstoffbrücke ein ungepaartes Valenzelektron aufweist (siehe Abbildung 2.6). Dessen Bahnbewegung ist durch den Molekülaufbau praktisch ausgelöscht. Daher hat das Molekül einen g-Faktor, der fast dem eines freien Elektrons entspricht. Die Substanz ist in polykristalliner Form für die Demonstration der Elektronenspinresonanz sehr gut geeignet, da sie eine intensive ESR-Linie hat, die wegen der Austauschverschmälerung eine geringe Breite aufweist.

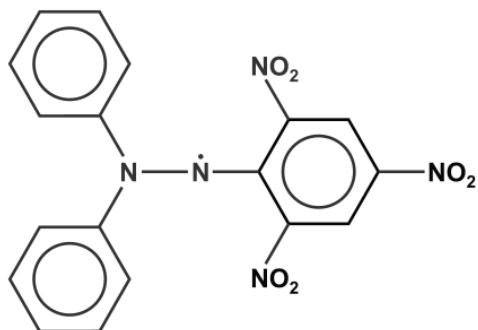


Abbildung 2.6: Chemische Struktur von 1,1-Diphenyl-2-Pikryl-Hydrazyl (DPPH)

2.4 Unsicherheitsanalyse

Die explizit angegebenen Unsicherheiten der ermittelten Messgrößen basieren auf Berechnungen durch die Unsicherheitsangabe nach den Datenblättern der verwendeten Messgeräte. Diese sind in Tabelle 4.1 vermerkt beziehungsweise referenziert.

Die Fehlerfortpflanzung der berechneten Werte basiert auf der Größtunsicherheitsmethode nach Gauß. Um diese Berechnungen zeiteffizient durchführen zu können, wird für jeden Unterpunkt der Laborübung ein Skript in **Python** implementiert. Kernstück dessen ist das package **uncertainties** [3], das intern die Fehlerfortpflanzung berechnet. Gerundet wird nach den Angaben des Skriptums der Lehrveranstaltung „Einführung in die physikalischen Messmethoden“ [4].

3 Versuchsanordnung

3.1 Elektronenbeugung und Elektronen im Magnetfeld

Der Aufbau zu den beiden Teilversuchen *Elektronenbeugung* und *Elektronen im Magnetfeld* ist ident und in Abbildung 3.1 dargestellt.

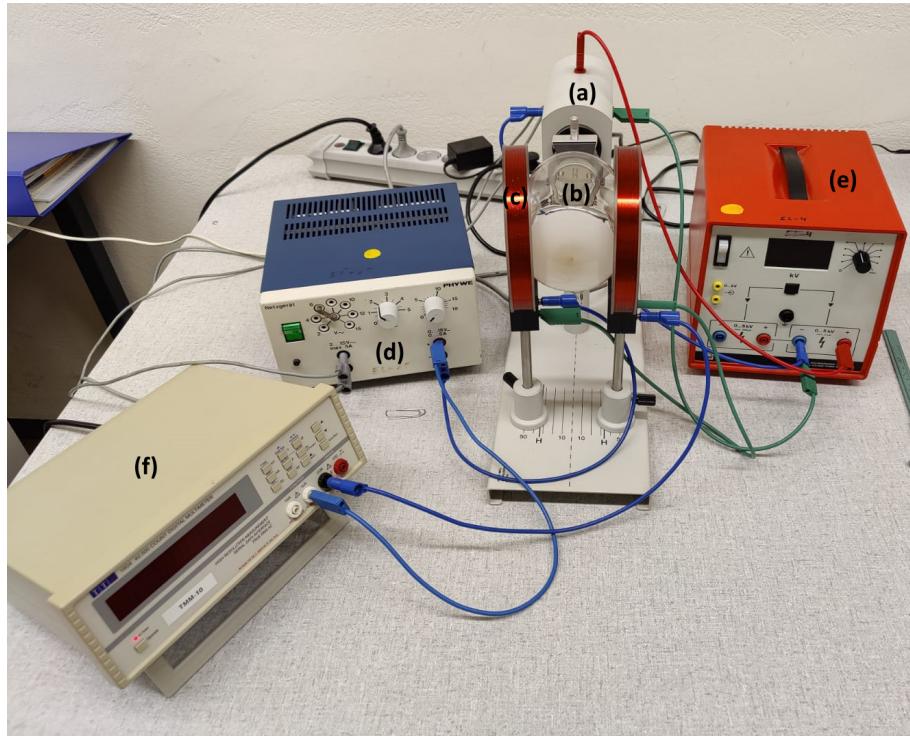


Abbildung 3.1: Versuchsaufbau der beiden Teilversuche *Elektronenbeugung* und *Elektronen im Magnetfeld*. (a) Glühkathode mit Graphitkristallgitter, (b) Elektronenbeugungsrohre, (c) Helmholtz-Spulenpaar, (d) Netzgerät, (e) Hochspannungsnetzgerät, (f) Digitalmultimeter

Korrektur zum Spulenabstand: Der halbe Spulenabstand a ist in den Versuchsunterlagen mit $a = 3,4\text{ cm}$ angegeben. Die explizite Messung des Abstands von Spuleninnenseite zu Spuleninnenseite ergab jedoch einen Wert von

$$2\tilde{a} = (7,3 \pm 0,4)\text{ cm}$$

Zusätzlich muss der für die Berechnung benötigte Abstand von Spulenmittelpunkt zu Spulenmittelpunkt gegeben sein, weswegen für den tatsächlichen Wert noch zweimal die halbe Spulenbreite von $b = (2,2 \pm 0,1)\text{ cm}$ hinzugeaddiert wurde. Dadurch ergibt sich schließlich der benötigte Abstand zu

$$a = (4,8 \pm 0,3)\text{ cm},$$

dies ist außerdem auf Abbildung 3.1 ersichtlich. Dieser Wert wurde für die Berechnungen verwendet.

3.2 Elektronen-Spin-Resonanz

Der Aufbau des Teilversuchs *Elektronen-Spin-Resonanz* ist in Abbildung 3.2 dargestellt.

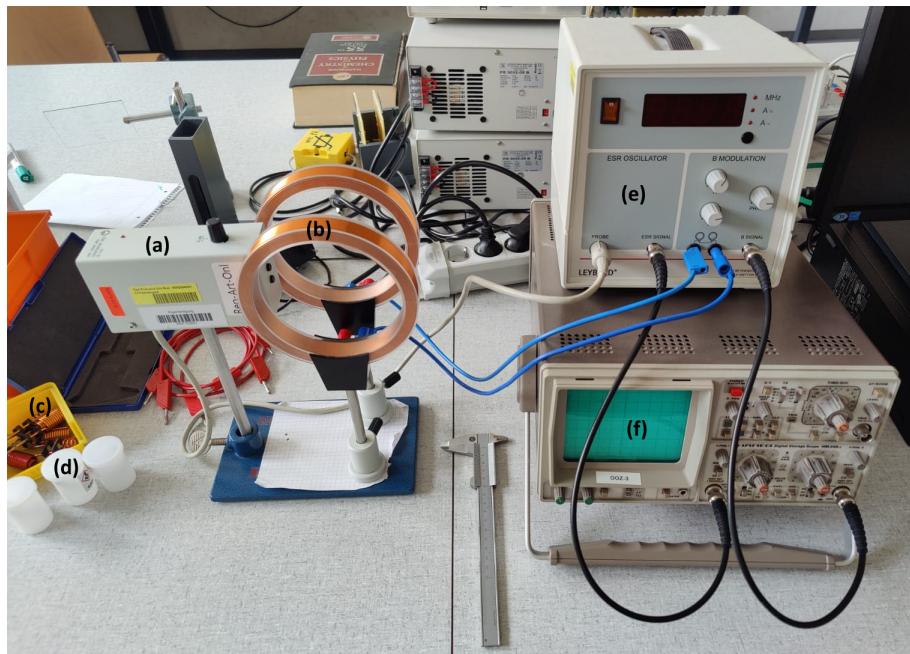


Abbildung 3.2: Versuchsaufbau zum Teilversuch *Elektronen-Spin-Resonanz*. (a) ESR-Grundgerät, (b) Helmholtz-Spulenpaar, (c) Steckspulen, (d) DPPH-Probe, (e) ESR-Betriebsgerät, (f) Oszilloskop

4 Geräteliste

Für den praktischen Aufbau und die Messungen der geforderten Größen wurden die in Tabelle 4.1 aufgelisteten Geräte und Hilfsmittel verwendet.

Tabelle 4.1: Verwendete Geräte und wichtige Materialien

Gerät	Hersteller	Modell	Inventar-Nr.	Anmerkung
Glühkathode	-	-	-	-
Graphitkristallgitter	-	-	-	-
Elektronenbeugungsrohre	-	-	-	-
Helmholtz-Spulenpaar	Leybold	555 604	-	320 Windungen, max. 2 A
Netzgerät	Phywe	11704.93	003576	220 V / 50 Hz, 220 VA
Hochspannungsnetzgerät	Leybold	522 37	-	-
Digitalmultimeter	TTi	1604	-	-
ESR-Grundgerät	Leybold	514 55	300025940001	-
Steckspulen	-	-	-	klein, mittel, groß
DPPH-Probe	-	-	-	-
ESR-Betriebsgerät	Leybold	514 571	-	-
Oszilloskop	HAMEG GmbH	HM205-2	-	analog

5 Versuchsdurchführung und Messergebnisse

5.1 Elektronenbeugung

Der Aufbau erfolgt wie in Unterabschnitt 3.1 gezeigt. Zu Beginn wird an der Glühkathode über das Hochspannungsnetzgerät eine initiale Beschleunigungsspannung von $U_B = 2 \text{ kV}$ angelegt. Auf der Kugelkalotte am milchtrüben Ende der Elektronenbeugungsrohre erscheinen konzentrische grüne Kreise um einen hellen grünen Punkt im Zentrum. Diese Interferenzmaxima (Punkt sowie Ringe) unterliegen der Bragg-Bedingung (Gleichung 4). Mithilfe eines Messschiebers wird nun der Abstand (Radius) vom ersten und zweiten Interferenzmaximum (Ring) zum nullten Maximum (Zentrum) gemessen und zur angelegten

Hochspannung notiert. Dieser Vorgang wird weitere viermal wiederholt, wobei die Beschleunigungsspannung jeweils um 0,5 kV erhöht wird, dies ist die erste Messserie. Um systematische Fehler vom ersten Experimentator im Rahmen der zeitlichen Möglichkeiten minimal zu halten, wird diese Messserie ein zweites Mal vom zweiten Experimentator wiederholt. Die erhaltenen Messwerte finden sich in Tabelle 5.1.

Tabelle 5.1: Radien des ersten und zweiten Interferenzmaximumrings $r_{1,i,j}$ und $r_{2,i,j}$ in mm in Abhängigkeit von der angelegten Beschleunigungsspannung U_B in kV. Der Laufindex i bezeichnet dabei den Index der Messung (korreliert mit der Spannung), der Index $j = \{1, 2\}$ bezeichnet den Index der Messserie. Unsicherheiten $\Delta r = 2$ mm

U_B / kV	$r_{1,i,1}$ / mm	$r_{1,i,2}$ / mm	$r_{2,i,1}$ / mm	$r_{2,i,2}$ / mm
$2,00 \pm 0,06$	17	17	31	30
$2,50 \pm 0,08$	15	15	27	26
$3,00 \pm 0,09$	13	13	24	24
$3,50 \pm 0,11$	12	13	21	24
$4,00 \pm 0,12$	11	12	20	22

5.2 Elektronen im Magnetfeld

Der Aufbau zum Teilversuch zu Elektronen im Magnetfeld ist ident zum vorhergegangen aus Unterabschnitt 5.1 und wird nicht verändert. Nun wird zusätzlich zum Hochspannungsnetzgerät auch das allgemeine Netzgerät und das Digitalmultimeter in Betrieb genommen. Schickt man über das allgemeine Messgerät Gleichstrom durch das Helmholtz-Spulenpaar, so wird zwischen den Spulen ein Magnetfeld erzeugt, über welches die Elektronen die Lorentzkraft erfahren. Dies geschieht natürlich nur bei angelegter Hochspannung an der Glühkathode. Es werden zwei Spannungen gewählt (1,8 kV und 4 kV), für die die nachfolgend beschriebenen Messserien durchgeführt werden. Die Stromstärke, welche in den Spulen herrscht, wird vom Digitalmultimeter gemessen. Es werden daraufhin in 5 mm-Schritten jene Stromstärken notiert, die nötig sind, um das Zentrum (0. Intensitätsmaximum) des Elektronenstrahls um die aktuelle Distanz abzulenken. Dabei wird bei der Ausgangstromstärke ($I_0 \approx 0,5$ mA) der auf die entsprechende Distanz eingestellte und fixierte Messschieber am Zentrum des Elektronenstrahls auf der Kugelkalotte gehalten und die Stromstärke so lange langsam erhöht, bis das Zentrum das Ende des eingestellten Messschiebers erreicht. Diese Stromstärke wird zur aktuellen Distanz notiert. Für eine minimale statistische Aussagekraft wird diese Messserie ein zweites Mal wiederholt. Die erhaltenen Messwerte finden sich in Tabelle 5.2.

Tabelle 5.2: Messergebnisse der vier Messserien zur Auswirkung der Lorentzkraft auf den Elektronenstrahl. Gemessen wurde die benötigte Stromstärke $I_{i,j,k}$ zur Ablenkung des Elektronenstrahls um eine bestimmte Distanz s bei gegebener angelegter Hochspannung an der Glühkathode. Index i beschreibt die angelegte Hochspannung, Index j die gegebene Distanz und Index k die erste oder zweite Messserie. Die Messungen wurden je für die Hochspannungen $U_{\text{HV}} = \{1,8 \text{ kV}, 4 \text{ kV}\}$ zweimal durchgeführt. Unsicherheit: $\Delta s = 2 \text{ mm}$.

$U_{\text{HV}} / \text{kV}$	s / mm	$I_{i,j,1} / \text{mA}$	$I_{i,j,2} / \text{mA}$
$1,80 \pm 0,05$	5	$40,00 \pm 0,08$	$49,00 \pm 0,09$
	10	$75,00 \pm 0,12$	$78,00 \pm 0,12$
	15	$100,00 \pm 0,14$	$108,00 \pm 0,15$
	20	$131,00 \pm 0,17$	$149,00 \pm 0,19$
	25	$164,0 \pm 0,2$	$180,0 \pm 0,2$
	30	$195,0 \pm 0,2$	$208,0 \pm 0,2$
	35	$228,0 \pm 0,2$	$240,0 \pm 0,2$
$4,00 \pm 0,12$	5	$76,00 \pm 0,12$	$60,00 \pm 0,10$
	10	$122,00 \pm 0,16$	$100,00 \pm 0,14$
	15	$165,0 \pm 0,2$	$139,00 \pm 0,18$
	20	$216,0 \pm 0,2$	$190,0 \pm 0,2$
	25	$261,0 \pm 0,3$	$245,0 \pm 0,2$
	30	$314,0 \pm 0,3$	$290,0 \pm 0,3$
	35	$360,0 \pm 0,4$	$340,0 \pm 0,3$

5.3 Elektronen-Spin-Resonanz

Der Aufbau erfolgt wie in Unterabschnitt 3.2 dargestellt. Initial wird die kleinste Steckspule – jene mit geringster Windungszahl – gewählt. Diese wird in die dafür vorgesehenen Kontakte am ESR-Grundgerät gesteckt. Die DPPH-Probe wird mittig in die Steckspule eingeführt. Am ESR-Betriebsgerät wird eine Frequenz eingestellt, bei welcher die Probe resoniert. Dies resultiert in einem der in Abbildung 2.5 dargestellten Bilder am Oszilloskop. Die Phasenverschiebung und die Amplitude der Modulationsspannung werden am ESR-Betriebsgerät derart angepasst, dass sie dem Unterbild (d) aus Abbildung 2.5 gleichen. Es wird darauf geachtet, dass sich das dargestellte Minimum genau horizontal zentriert im Bildraster des Oszilloskops befindet. Begonnen wird mit einer Resonanzfrequenz von 120 MHz, diese wird nun in Zehnerschritten reduziert (bis 20 MHz) und die jeweilige Gleichstromstärke, die nötig ist, um das eben beschriebene Bild am Oszilloskop zu erhalten, notiert. Diese wird direkt vom ESR-Betriebsgerät abgelesen. Gelangt man unter den Frequenzbereich der verwendeten Spule, in welchem noch Resonanzeffekte auftreten, so wird

die Spule durch eine größere (mehr Windungen) ausgetauscht. Es stehen drei unterschiedliche Steckspulengrößen zur Auswahl. Die zur verwendeten Steckspule und eingestellten Resonanzfrequenz abgelesene Gleichstromstärke wird notiert. Diese Messergebnisse finden sich in Tabelle 5.3.

Tabelle 5.3: Messergebnisse zum Versuch zur Elektronen-Spin-Resonanz. Zur jeweiligen Steckspulengröße (klein/mittel/groß) und eingestellten Resonanzfrequenz f_{res} (in MHz) wird die abgelesene Gleichstromstärke I_{dc} (in mA) notiert. Unsicherheit: $\Delta f = 0,1 \text{ MHz}$.

Spule	$f_{\text{res}} / \text{MHz}$	$I_{\text{dc}} / \text{mA}$
klein	120,0	1133 ± 5
	110	1031 ± 5
	100	951 ± 5
	90	845 ± 5
	80,1	757 ± 5
	70	666 ± 5
	60	567 ± 5
mittel	50,1	485 ± 4
	40,1	386 ± 4
	35,1	338 ± 3
	30	290 ± 3
groß	25	242 ± 2
	20	168 ± 2

Anschließend wurde noch qualitativ die Auswirkung der genauen Position der DPPH-Probe auf die Bildgebung durch das Oszilloskop untersucht.

6 Auswertung

6.1 Elektronenbeugung

Die Wellenlänge der Elektronen wird gemäß Gleichung 3 aus der vorliegenden Beschleunigungsspannung ermittelt und ergibt sich zu den in Tabelle 6.1 aufgelisteten Werten.

Tabelle 6.1: Elektronenwellenlängen λ_e in pm bei gegebener Beschleunigungsspannung U_B (in kV).

U_B / kV	λ_e / pm
$2,00 \pm 0,02$	$27,42 \pm 0,14$
$2,50 \pm 0,02$	$24,50 \pm 0,10$
$3,00 \pm 0,02$	$22,39 \pm 0,08$
$3,50 \pm 0,02$	$20,73 \pm 0,06$
$4,00 \pm 0,02$	$19,39 \pm 0,05$

Weiters werden aus den gemessenen Abständen in Tabelle 5.1 unter Zuhilfenahme von Gleichung 4 die Abstände der Gitterebenen in Graphit bestimmt. Dabei werden die Messungen für die beiden Abstände d_1 und d_2 (siehe Abbildung 2.2) mittels Student-t-Verteilung statistisch ausgewertet. Die Gitterabstände ergeben sich so zu:

$$d_1 = (2,28 \pm 0,19) \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad (23)$$

$$d_2 = (1,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad (24)$$

6.2 Elektronen im Magnetfeld

Mithilfe der Messwerte aus Tabelle 5.2 und den Daten zu Abbildung 2.3 kann schließlich der Krümmungsradius r der Elektronenbahn nach der folgenden Formel berechnet werden:

$$r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{d^2 - s^2} \cdot \frac{d}{s}$$

Hierbei beschreibt d den Durchmesser des Glaskolbens und s die Auslenkungen von der Nulllage. Die Krümmungsradien in Abhängigkeit ihrer Auslenkungen sind in Tabelle 6.2 aufgelistet.

Tabelle 6.2: Berechnete Krümmungsradien r in cm zu den Auslenkungen s in mm der Elektronen im homogenen Magnetfeld. Unsicherheit: $\Delta s = 2 \text{ mm}$.

s / mm	r / cm
5	180 ± 80
10	91 ± 19
15	60 ± 9
20	45 ± 5
25	36 ± 3
30	30 ± 3
35	$25,1 \pm 1,6$

Anschließend wurde die magnetische Induktion aus dem Spulenstrom berechnet. Hierzu bediente man sich der Formel neben Abbildung 2.3 zur Berechnung des B -Felds eines Helmholtzspulenpaars. Die magnetische Induktion zwischen dem Helmholtzspulenpaar in Abhängigkeit von der Stromstärke I ist in Tabelle 6.3 tabelliert.

Tabelle 6.3: Zwischen dem Helmholtzspulenpaar herrschende magnetische Induktion B in mT zu den diese Spulen durchfließenden Stromstärken I in mA. Unterschieden wird zusätzlich zwischen den angelegten Beschleunigungsspannungen $U_{\text{HV}} = \{1,8 \text{ kV}, 4 \text{ kV}\}$. Unsicherheit: $\Delta U_{\text{HV}} = 0,02 \text{ kV}$.

$U_{\text{HV}} / \text{kV}$	I / mA	B / mT
1,8	44 ± 9	$0,14 \pm 0,03$
	76 ± 3	$0,238 \pm 0,012$
	104 ± 8	$0,32 \pm 0,03$
	140 ± 17	$0,44 \pm 0,06$
	172 ± 15	$0,54 \pm 0,05$
	202 ± 12	$0,63 \pm 0,05$
	234 ± 12	$0,73 \pm 0,05$
4,0	44 ± 9	$0,21 \pm 0,05$
	76 ± 3	$0,35 \pm 0,07$
	104 ± 8	$0,47 \pm 0,08$
	140 ± 17	$0,63 \pm 0,08$
	172 ± 15	$0,79 \pm 0,06$
	202 ± 12	$0,94 \pm 0,08$
	234 ± 12	$1,09 \pm 0,07$

Da nun zu bestimmten Auslenkungen (respektive Stromstärken) sowohl der Krümmungsradius als auch die magnetische Induktion bekannt sind, kann ein Plot des inversen Krümmungsradius $1/r$ gegen B erstellt werden. Es wird wieder zwischen den beiden Beschleunigungsspannungen $U_{\text{HV}} = \{1,8 \text{ kV}, 4 \text{ kV}\}$ unterschieden. Dieser Plot ist auf Abbildung 6.1 ersichtlich.

Inverser Krümmungsradius des abgelenkten Elektronenstrahls
in Abhängigkeit des Magnetfeldes

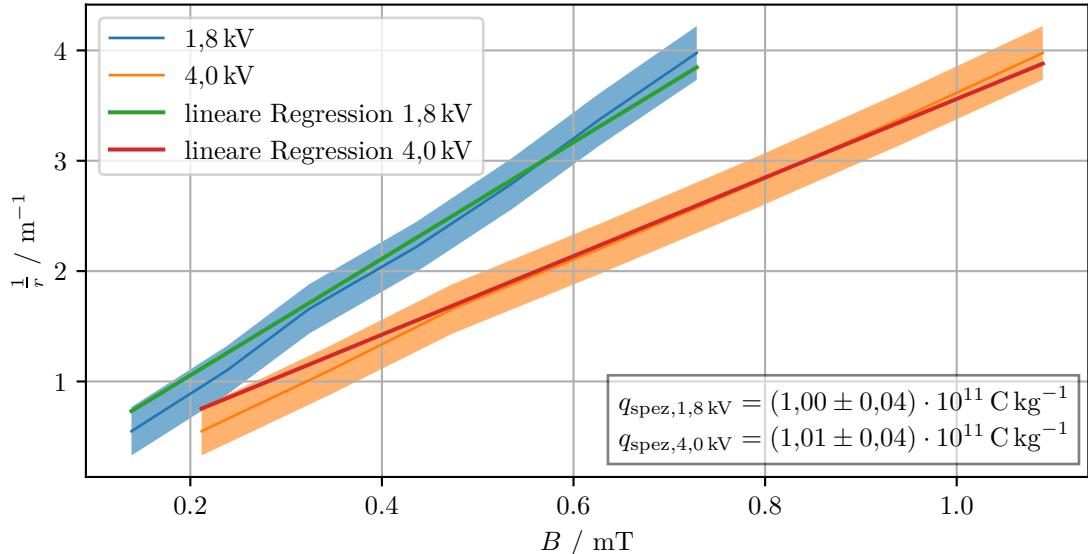


Abbildung 6.1: Inverser Krümmungsradius $1/r$ gegen magnetische Induktion B . Die Unsicherheiten der Messdaten sind als halbdurchsichtiges Band um die Datenkurve dargestellt.

Auf Abbildung 6.1 wurden darüber hinaus lineare Regressionen über die gezeichneten Kurven gerechnet. Nach Gleichung 10 kann die Steigung der Funktion $1/r$ bestimmt werden, indem man auf $1/r$ umformt und nach B ableitet.

$$\frac{\partial 1/r}{\partial B} = \sqrt{\frac{q_{\text{spez}}}{2U}}$$

Formt man diese Steigung, die über die Regression errechnet wurde, wieder auf q_{spez} um, so erhält man für die spezifische Ladung der Elektronen

$$q_{\text{spez}, 1.8 \text{ kV}} = (9.2 \pm 0.4) \cdot 10^{10} \text{ C kg}^{-1}$$

$$q_{\text{spez}, 4.0 \text{ kV}} = (9.3 \pm 0.4) \cdot 10^{10} \text{ C kg}^{-1}$$

Diese Werte finden sich auch bereits auf Abbildung 6.1.

6.3 Elektronen-Spin-Resonanz

Zu den gewählten Resonanzfrequenzen in Tabelle 5.3 fließt, abhängig von diesen, ein gewisser Strom durch die Helmholtz-Spulen. Dieser Strom kann durch den Zusammenhang

$$B = \mu_0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \cdot \frac{n}{r} \cdot I \quad (25)$$

in eine magnetische Flussdichte umgerechnet werden, welche in Tabelle 6.4 aufgelistet ist.

Tabelle 6.4: Magnetische Flussdichte B durch Helmholtz-Spulen in Abhängigkeit der Resonanzfrequenz f_{res} . Unsicherheiten: $\Delta f = 0,1 \text{ MHz}$, $\Delta B = 0,1 \text{ mT}$

Spule	$f_{\text{res}} / \text{MHz}$	$I_{\text{--}} / \text{mA}$	B / mT
klein	120,0	1133	4,8
klein	110,0	1031	4,4
klein	100,0	951	4,0
klein	90,0	845	3,6
klein	80,1	757	3,2
klein	70,0	666	2,8
klein	60,0	567	2,4
mittel	50,1	485	2,1
mittel	40,1	386	1,6
mittel	35,1	338	1,4
mittel	30,0	290	1,2
groß	25,0	242	1,0
groß	20,0	168	0,7

Trägt man die Werte der magnetischen Flussdichte und die Frequenz gegeneinander auf, so erhält man, nachdem man die Messwerte linear gefüttet hat, die auf Abbildung 6.2 dargestellte Gerade. Die Steigung gibt nun den Wert des Landé-Faktors g für DPPH an, welcher sich zu

$$g = 1,785 \pm 0,007$$

ergibt.

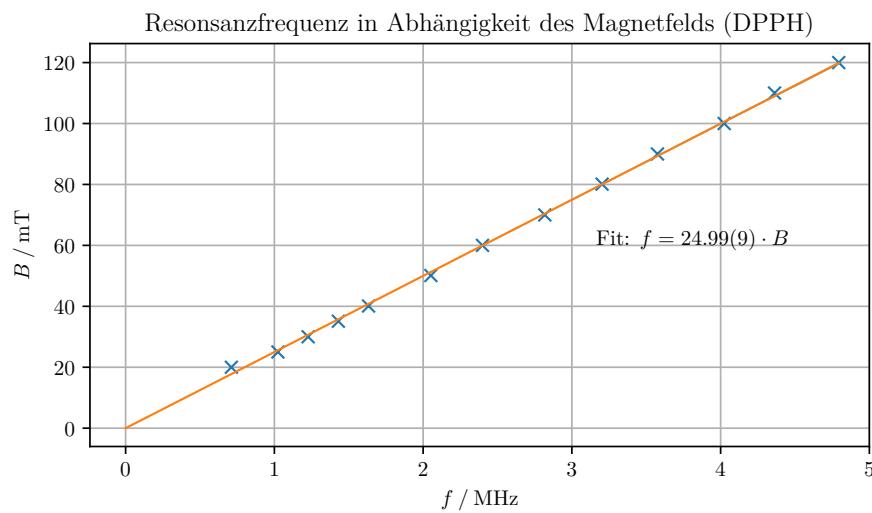


Abbildung 6.2: Fit der Resonanzfrequenz f_{res} in Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte B für DPPH

Laut Literatur würde man einen Wert von $g \approx 2$ erwarten, dieser stellt sich jedoch nicht ein und würde sich beispielsweise lediglich bei einem abgeschwächten Magnetfeld einstellen. Dieses abgeschwächte Feld wird in Tabelle 6.5 aufgelistet, womit ein Landé-Faktor von $g_{\text{red}} = 2,006 \pm 0,008$ folgen würde.

Tabelle 6.5: Abgeschwächtes Magnetfeld für nicht planparallele Helmholtz-Spulen in Abhängigkeit der Resonanzfrequenz f_{res} . Unsicherheiten: $\Delta f = 0,1 \text{ MHz}$, $\Delta B = 0,1 \text{ mT}$

Spule	$f_{\text{res}} / \text{MHz}$	B / mT
klein	120,0	4,3
klein	110,0	3,9
klein	100,0	3,6
klein	90,0	3,2
klein	80,1	2,9
klein	70,0	2,5
klein	60,0	2,1
mittel	50,1	1,8
mittel	40,1	1,5
mittel	35,1	1,3
mittel	30,0	1,1
groß	25,0	0,9
groß	20,0	0,6

7 Diskussion

7.1 Elektronenbeugung

Die bestimmten Werte von $d_1 = (2,28 \pm 0,19) \cdot 10^{-10} \text{ m}$ und $d_2 = (1,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-10} \text{ m}$ decken sich mit jenen aus der Theorie, welche mit $d_{1,\text{lit}} = 213 \text{ pm}$ und $d_{2,\text{lit}} = 123 \text{ pm}$ in [1] angeführt sind. Die dabei eher höher ausfallenden Messunsicherheiten ergeben sich aus der doch eher ungenauen Messmethode der Radien der beiden Beugungskreise. Die wiederholte Messung durch den anderen der beiden Experimentatoren konnte hier sicherlich systematische Fehler mindern. Eine weitere Verbesserung – wenn auch mühsam mit dieser Methode – kann durch eine noch größere Anzahl an Messungen erreicht werden.

7.2 Elektronen im Magnetfeld

Die für die beiden unterschiedlichen anliegenden Beschleunigungsspannungen berechneten spezifischen Ladungen decken sich signifikant. Berechnet man die spezifische Ladung jedoch aus Literaturwerten¹, so kommt man auf einen Wert von

$$q_{\text{spez,lit}} = (1,758\,820\,010\,8 \pm 0,000\,000\,000\,6) \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1}.$$

¹Wikipedia

Der für eine Spannung von 4 kV berechnete Wert von

$$q_{\text{spez}, 4,0 \text{ kV}} = (9,3 \pm 0,4) \cdot 10^{10} \text{ C kg}^{-1}$$

ist also beinahe um einen Faktor 1/2 zu niedrig. Dies lässt auf systematische Fehler während der Messung schließen, oder aber einen fehlerhaften Versuchsaufbau. Die Messung der Auslenkung gestaltete sich als schwierig, da die Länge auf einer nicht-ebenen Fläche gemessen werden musste. Vordefinierte Markierungen auf der Kugelkalotte wären hilfreich gewesen, sodass dieser Fehler ausgeschlossen werden kann. Eine weitere Fehlerquelle ist die genaue Position und Dimensionierung des Helmholtzspulenpaars. Dieses war nicht fest verankert und konnte bewegt und verdreht werden. Durch etwaige Drehungen der Spulen zueinander ändert sich das Magnetfeld, wodurch die Berechnung inkorrekt ausfällt. Weiters könnten Daten über die Spulen aus der Angabe fehlerhaft sein. Der zur Berechnung des B -Felds benötigte Abstand war nachweislich zu gering angegeben. Am auffälligsten war jedoch die geringe Reproduzierbarkeit der Werte. Beim Versuch, dieselbe Stromstärke zu einer definierten Auslenkung erneut zu messen, ergaben sich stark divergierende Messwerte (siehe Tabelle 5.2). Dies führte dann auch zu dem Entschluss, wenigstens zwei Messserien aufzunehmen.

7.3 Elektronen-Spin-Resonanz

Aus den bei gegebenen Resonanzfrequenzen bestimmten Resonanzmagnetfeldern wurde für den Landé-Faktor ($g = 1,785 \pm 0,007$) ein um etwa 12 % niedrigerer Wert als der Literaturwert $g_{\text{lit}} = 2,0036$ [2] ermittelt. Als plausible Erklärung dieser doch nicht unsignifikanten Abweichung kann die fehlende Homogenität im B -Feld herangezogen werden. Da B schließlich nicht direkt gemessen, sondern über den Strom I_{\perp} ermittelt wird, liegt nahe, dass der Strom nicht, entgegen des Zusammenhangs aus Gleichung 25, vollständig in die theoretisch gegebene magnetische Flussdichte umgesetzt wird.

Gründe hierfür sind unter anderem die nicht ganz planparallel anordnabaren Spulen, das nicht vollständig homogene Magnetfeld der Spulen sowie (vermutlich eher vernachlässigbare) thermische Effekte und die radiale Ausdehnung der Spule (kein idealer Kreis).

In Tabelle 6.5 sind jene Werte des B -Felds in Abhängigkeit der Resonanzfrequenz aufgelistet, welche zu einem Landé-Faktor von $g_{\text{red}} = 2,006 \pm 0,008$ führen.

Zielführender wäre es, in zukünftigen Experimenten das B -Feld direkt – etwa mit einem Hall-Sensor – zu messen, um die Messunsicherheit zu minimieren.

8 Zusammenfassung

Der vorliegende Laborversuch zum Thema „Festkörperphysik“ unterteilte sich in drei Experimente.

Zuerst wurde die Wellenlänge von Elektronen in Abhängigkeit von der angelegten Beschleunigungsspannung experimentell durch Beugung an einem Graphitgitter bestimmt.

Ebenso wurde der Gitterabstand des Graphits mit $d_1 = (2,28 \pm 0,19) \cdot 10^{-10} \text{ m}$ und $d_2 = (1,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-10} \text{ m}$ beziffert, was sich mit den Literaturwerten deckt.

Als nächstes wurde die Auslenkung eines Elektronenstrahls in Abhängigkeit der Stromstärke bei zwei unterschiedlichen Anodenspannungen gemessen. Die daraus in weiterer Folge berechnete spezifische Ladung des Elektrons wurde mit $q_{\text{spez}} = (9,3 \pm 0,4) \cdot 10^{10} \text{ C kg}^{-1}$ bestimmt, was im Vergleich mit der Theorie um circa einen Faktor 1/2 zu niedrig ist.

Zum Schluss wurde das Resonanzmagnetfeld B_0 in Abhängigkeit von der gewählten Resonanzfrequenz qualitativ bestimmt. Daraus konnte schließlich der Landé-Faktor von 1,1-Diphenyl-2-Pikryl-Hydrazyl (DPPH) berechnet werden, welcher sich zu $g = 1,785 \pm 0,007$ ergab, was circa 12 % unter dem Literaturwert lag.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Ramsey. „Welle-Teilchen-Dualismus anhand zweier Aufgaben“. In.
- [2] LD Didactic GmbH. „Elektronenspinresonanz an DPPH“. In.
- [3] E. O. Lebigot. Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties. Website. o. D. URL: <https://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] R. Dämon u. a. „Einführung in die physikalischen Messmethoden“. In: Bd. 7. 2021.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Bragg-Gesetz	4
2.2	Graphitkristallgitter	5
2.3	Kolben Skizze	7
2.4	Zeeman-Effekt	8
2.5	Oszilloskopbild des Messsignals	11
2.6	DPPH	12
3.1	Aufbau Elektronenbeugung und Elektronen im Magnetfeld	13
3.2	Aufbau Elektronen-Spin-Resonanz	14
6.1	Inverser Krümmungsradius gegen B -Feld	21
6.2	ESR – Fit	23

Tabellenverzeichnis

4.1	Geräteliste	15
5.1	Messergebnisse Elektronenbeugung	16
5.2	Messergebnisse Elektronenstrahl im Magnetfeld	17
5.3	Messergebnisse ESR	18
6.1	Elektronenwellenlängen für gegebene Beschleunigungsspannung	19
6.2	Krümmungsradien zu Auslenkungen	19
6.3	Magnetfeldstärken zu Stromstärken	20
6.4	Magnetische Flussdichte durch Helmholtz-Spulen	22
6.5	Abgeschwächtes Magnetfeld	24