

```

/* start css.sty */ .cmr-5font-size:50.cmr-7font-size:70.cmmti-5font-size:50.cmmti-
7font-size:70.cmmti-10font-style: italic; .cmsy-5font-size:50.cmsy-7font-
size:70.cmex-7font-size:70.cmex-7x-x-71font-size:49.msbm-7font-size:70.cmtt-
10font-family: monospace; .cmti-10 font-style: italic; .cmbx-10 font-weight:
bold; .cmr-17x-x-120font-size:204.cmsl-10font-style: oblique; .cmti-7x-x-71font-
size:49.cmbxti-10 font-weight: bold; font-style: italic; p.noindent text-indent:
0em td p.noindent text-indent: 0em; margin-top:0em; p.nopar text-indent:
0em; p.indent text-indent: 1.5em @media print div.crosslinks visibility:hidden;
a img border-top: 0; border-left: 0; border-right: 0; center margin-top:1em;
margin-bottom:1em; td center margin-top:0em; margin-bottom:0em; .Canvas
position:relative; li p.indent text-indent: 0em .enumerate1 list-style-
type:decimal; .enumerate2 list-style-type:lower-alpha; .enumerate3 list-style-
type:lower-roman; .enumerate4 list-style-type:upper-alpha; div.newtheorem
margin-bottom: 2em; margin-top: 2em; .obeylines-h,.obeylines-v white-space:
nowrap; div.obeylines-v p margin-top:0; margin-bottom:0; .overline text-
decoration:overline; .overline img border-top: 1px solid black; td.displaylines
text-align:center; white-space:nowrap; .centerline text-align:center; .rightline
text-align:right; div.verbatim font-family: monospace; white-space: nowrap;
text-align:left; clear:both; .fbox padding-left:3.0pt; padding-right:3.0pt;
text-indent:0pt; border:solid black 0.4pt; div.fbox display:table div.center
div.fbox text-align:center; clear:both; padding-left:3.0pt; padding-right:3.0pt;
text-indent:0pt; border:solid black 0.4pt; div.minipagewidth:100div.center,
div.center div.center text-align: center; margin-left:1em; margin-right:1em;
div.center div text-align: left; div.flushright, div.flushright div.flushright
text-align: right; div.flushright div text-align: left; div.flushleft text-align:
left; .underline text-decoration:underline; .underline img border-bottom:
1px solid black; margin-bottom:1pt; .framebox-c, .framebox-l, .framebox-r
padding-left:3.0pt; padding-right:3.0pt; text-indent:0pt; border:solid black
0.4pt; .framebox-c text-align:center; .framebox-l text-align:left; .framebox-r
text-align:right; span.thank-mark vertical-align: super span.footnote-
mark sup.textsuperscript, span.footnote-mark a sup.textsuperscript font-
size:80div.tabular, div.center div.tabular text-align: center; margin-top:0.5em;
margin-bottom:0.5em; table.tabular td pmargin-top:0em; table.tabular
margin-left: auto; margin-right: auto; div.td00 margin-left:0pt; margin-
right:0pt; div.td01 margin-left:0pt; margin-right:5pt; div.td10 margin-left:5pt;
margin-right:0pt; div.td11 margin-left:5pt; margin-right:5pt; table[rules]
border-left:solid black 0.4pt; border-right:solid black 0.4pt; td.td00 padding-
left:0pt; padding-right:0pt; td.td01 padding-left:0pt; padding-right:5pt;
td.td10 padding-left:5pt; padding-right:0pt; td.td11 padding-left:5pt; padding-
right:5pt; table[rules] border-left:solid black 0.4pt; border-right:solid black
0.4pt; .hline hr, .cline hr height : 1px; margin:0px; .tabbing-right
text-align:right; span.TEX letter-spacing: -0.125em; span.TEX span.E
position:relative;top:0.5ex;left:-0.0417em; a span.TEX span.E text-decoration:
none; span.LATEX span.A position:relative; top:-0.5ex; left:-0.4em; font-
size:85span.LATEX span.TEX position:relative; left: -0.4em; div.float
img, div.float .caption text-align:center; div.figure img, div.figure .cap-
tion text-align:center; .marginpar width:20.marginpar pmargin-top:0.4em;
margin-bottom:0.4em; .equation tdttext-align:center; vertical-align:middle;
td.eq-no width:5table.equation width:100div.math-display, div.par-math-
displaytext-align:center; math .texttt font-family: monospace; math
.textit font-style: italic; math .textsl font-style: oblique; math .textsf
font-family: sans-serif; math .textbf font-weight: bold; .partToc a,
.partToc, .likepartToc a, .likepartToc line-height: 200.chapterToc a, .chap-
terToc, .likechapterToc a, .likechapterToc, .appendixToc a, .appendixToc
line-height: 200.index-item, .index-subitem, .index-subsubitem display:block
.caption td.idfont-weight: bold; white-space: nowrap; table.caption text-

```

Ensembles et relations

Warning: [jsMath](#) requires JavaScript to process the mathematics on this page.

If your browser supports JavaScript, be sure it is enabled.

[\[next\]](#) [\[tail\]](#) [\[up\]](#)

1.1 Ensembles et relations

1.1.1 Relations d'équivalences Définition 1.1.1 Soit E un ensemble. On appelle relation sur E toute partie de $E \times E$. Si \sim est une relation, on note habituellement xy à la place de (x,y) .

On dit que la relation est

- réflexive si $\forall x \in E, x \sim x$,
- symétrique si $\forall x,y \in E, x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
- antisymétrique si $\forall x,y \in E, x \sim y \wedge y \sim x \Rightarrow x = y$,
- transitive si $\forall x,y,z \in E, x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Définition 1.1.2 On appelle relation d'équivalence sur un ensemble E toute relation réflexive, symétrique et transitive.

Définition 1.1.3 Pour un élément x de E , on appelle classe de x par rapport à la relation d'équivalence l'ensemble des éléments y de E tels que yx , notée $\{C\}_\sim(x)$.

Proposition 1.1.1 Deux classes d'équivalences sont soit confondues, soit disjointes.

Démonstration Soit $x,x' \in E$, et supposons que $y \in C(x) \cap C(x')$. Soit $z \in C(x)$. On a alors zx , xy (car on a yx et la relation est symétrique) et yx' . Par transitivité de la relation, on a zx' , soit $z \in C(x')$. On a donc $C(x) \subset C(x')$ et comme x et x' jouent un rôle symétrique on a aussi $C(x') \subset C(x)$, et donc $C(x') = C(x)$.

Remarque 1.1.1 On a les équivalences suivantes

$$xy \mathrel{\sim} x \ C(y) \mathrel{\sim} C(x) = C(y)$$

Définition 1.1.4 On appelle système de représentants des classes d'équivalences une partie A de E telle que, pour tout $y \in E$, il existe un unique $x \in A$ tel que yx . Dans ce cas la famille $\{\left(C(x)\right)\}_{x \in A}$ est une partition de E .

Remarque 1.1.2 Inversement, à toute partition $\{(\{A_i\})_{i \in I}\}$ d'un ensemble E , on peut associer une unique relation d'équivalence en posant

$$xy \mathrel{\sim} \mathop{\mathrm{I}}_{x,y \in A_i}$$

Les classes d'équivalences sont alors exactement les A_i .

Définition 1.1.5 Soit E un ensemble et \sim une relation d'équivalence sur E . L'ensemble des classes d'équivalences des éléments de E est appelé ensemble quotient de E par \sim et noté E/\sim . L'application surjective $x \mapsto C(x)$ de E dans E/\sim est appelée la projection (ou la surjection) canonique.

Remarque 1.1.3 A est un système de représentants des classes d'équivalence modulo \sim , si et seulement si la restriction de la projection canonique à A est bijective de A sur E/\sim .

1.1.2 Relations d'ordre Définition 1.1.6 Soit E un ensemble. On appelle relation d'ordre sur E toute relation binaire \leq sur E qui est à la fois réflexive, transitive et antisymétrique. On appelle relation d'ordre strict sur E toute relation binaire $<$ sur E qui est transitive et qui vérifie $x < y \Rightarrow x \not\leq y$.

Remarque 1.1.4 On vérifie immédiatement que les applications

$$\leq \mapsto \text{ définie par } x \leq y \Leftrightarrow (x < y \text{ et } x \leq y)$$

et

$$< \mapsto \text{ définie par } x < y \Leftrightarrow (x \leq y \text{ et } x \neq y)$$

réalisent des bijections réciproques l'une de l'autre entre les relations d'ordre sur E et les relations d'ordre strict sur E . On conviendra donc dans la suite d'associer ainsi canoniquement une relation d'ordre strict à toute relation d'ordre et réciproquement.

Définition 1.1.7 On dit que la relation d'ordre \leq sur E est totale si

$$\mathop{\mathrm{I}}_{a,b \in E} \text{ on a } a \leq b \text{ ou } b \leq a$$

Dans le cas contraire, on dit que la relation d'ordre est partielle.

Remarque 1.1.5 On prendra garde aux relations d'ordre partielles qui ont des propriétés un peu déroutantes. L'exemple typique d'une telle relation est la relation d'inclusion entre deux sous-ensembles d'un même ensemble E .

1.1.3 Eléments extrémaux Définition 1.1.8 Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et A une partie de E . Soit $a \in E$. On dit que

- a est un majorant de A si $\forall x \in A, x \leq a$
- a est un plus grand élément de A s'il appartient à A et est un majorant de A

On définit de même minorant et plus petit élément.

Définition 1.1.9 Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et A une partie de E . Soit $a \in E$. On dit que a est borne supérieure de A si l'ensemble des majorants de A est non vide et admet a comme plus petit élément. On définit de même une borne inférieure.

Remarque 1.1.6 L'antisymétrie de la relation d'ordre assure clairement l'unicité d'un plus grand ou plus petit élément, et donc l'unicité d'une borne supérieure ou inférieure. On prendra garde que les uns comme les autres peuvent très bien ne pas exister, même lorsque la relation d'ordre est totale comme le montre l'exemple de $E = \mathbb{R}, A =]0, 1[$.

Définition 1.1.10 Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et A une partie de E . Soit $a \in E$. On dit que a est un élément maximal de A si

$$a \in A \text{ et } \forall x \in A, a \leq x \Rightarrow a = x$$

autrement dit si A n'admet aucun élément strictement plus grand que a . On définit de même la notion d'élément minimal de A .

Remarque 1.1.7 Lorsque \leq est une relation d'ordre total, il est clair que la notion d'élément maximal coïncide avec la notion de plus grand élément. Mais il n'en est pas de même pour une relation d'ordre partiel. Plus grand élément signifie "plus grand que tous les autres" alors que élément maximal signifie "il n'y en a pas de strictement plus grand".

1.1.4 L'axiome de Zorn L'existence d'éléments maximaux dans certains ensembles partiellement ordonnés est souvent une propriété essentielle comme on le verra par la suite. Cette existence est claire dans les ensembles finis. Dans les ensembles infinis, elle résulte la plupart du temps d'un axiome appelé l'axiome de Zorn. Pour cela on introduira la définition suivante

Définition 1.1.11 On dit qu'un ensemble ordonné (E, \leq) est inductif si toute partie non vide totalement ordonnée de E admet un majorant.

Axiome 1.1.1 (Zorn) Tout ensemble inductif admet un élément maximal.

Remarque 1.1.8 On montre que cet axiome est équivalent à l'axiome beaucoup plus naturel suivant

Axiome 1.1.2 (Axiome du choix) Soit E un ensemble. Il existe une application f de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ dans E telle que $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \neq \emptyset, f(A) \in A$.

Remarque 1.1.9 Ce dernier axiome signifie simplement que l'on peut choisir "simultanément" un élément $a = f(A)$ dans chaque partie non vide A de E .

[\[next\]](#) [\[front\]](#) [\[up\]](#)