MPA - Ensimag 2A **2012-13**

Séance 4 - Lois Gaussiennes

Exercice 1. On considère un couple gaussien (X, Y) de moyenne $m = (1, 0)$ et de matrice de covariance

$$K = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Décrire la densité du couple (X, Y) et ses lois marginales.
2. Soit c une constante non nulle. Décrire la loi du vecteur (Z, T) ci-dessous
$$\begin{cases} Z = X \\ T = X + cY \end{cases}$$
3. Démontrer que les variables Z et T sont indépendantes si et seulement si $c = 3$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $c = 3$. Calculer l'espérance de T et montrer qu'elle est aussi égale à
$$\mathrm{E}[T] = x + 3\,\mathrm{E}[Y|X = x]\,.$$
En déduire l'espérance conditionnelle de Y sachant $X = x$.
5. Calculer l'espérance de T^2 et, par un argument similaire à la question précédente, calculer la variance conditionnelle de Y sachant $X = x$.
6. On note
$$R^2 = \frac{\mathrm{Var}(Y) - \mathrm{Var}(Y|X = x)}{\mathrm{Var}(Y)}$$
la part de variance de Y expliquée par x. Montrer que R^2 est égal au carré du coefficient de corrélation.
7. Décrire la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.
8. Proposer un algorithme de simulation du couple (X, Y) à partir d'un simulateur `rnorm` de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et effectuer des simulations pour vérifier les résultats précédents sous `R` (avec la commande `lm`).

Exercice 2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\,, \quad f_{(X,Y)}(x, y) = C \exp(-\frac{4x^2 - 2xy + y^2}{6})$$

où C est une constante positive.

1. Montrer que le couple (X, Y) est gaussien, de moyenne $m = (0, 0)$ et de matrice de covariance
$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
En déduire la valeur de la constante C.

2. Déterminer la loi de X, de Y. Quelle est la valeur de $cov(X, Y)$? Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On pose

$$\begin{cases} U &= X - Y \\ V &= X \end{cases}$$

   Montrer que le couple (U, V) est gaussien et caractériser sa loi. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?
4. Ecrire un algorithme de simulation pour le couple (X, Y). (On prendra soin de démontrer que le couple en sortie de cet algorithme est bien de densité $f_{(X,Y)}$.)
5. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.
6. À la suite de la question précédente, écrire un nouvel algorithme de simulation du couple (X, Y).

Exercice 3. On considère un vecteur gaussien X en dimension 3 de moyenne nulle et de matrice de covariance

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & c_{13} \\ 0 & \sigma_2^2 & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

où $\det K > 0$. Les coordonnées de X sont notées X_1, X_2 et X_3. On définit le vecteur Y de la manière suivante

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_2 \\ Y_3 = X_3 - c_{13}X_1/\sigma_1^2 - c_{23}X_2/\sigma_2^2 \end{cases}$$

1. Montrer que le vecteur Y est gaussien et de moyenne nulle.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_3)$ et $\mathrm{Cov}(Y_2, Y_3)$. Montrer que les coordonnées Y_1, Y_2 et Y_3 sont indépendantes.
3. Montrer que

$$Var(X_3) = Var(Y_3) + c_{13}^2/\sigma_1^2 + c_{23}^2/\sigma_2^2$$

   En déduire la loi de Y.
4. On dispose d'un générateur aléatoire `rnorm()` retournant des variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Écrire un algorithme de simulation d'un vecteur gaussien de moyenne $m = (0, 1, 0)$ et de matrice de covariance

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$