MPA - Ensimag 2A **2012-13**

Séance 3 - Conditionnement - Matrice de covariance

Exercice 1. Absence de corrélation n'est pas indédendance. Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$. On pose $Z = U + V$ et $T = U - V$. Montrer que les variables Z et T sont non-corrélées et qu'elles ne sont pas indépendantes.

Exercice 2. . Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$. On pose

$$\begin{array}{rcl} T & = & X + Y \\ U & = & Y + Z \\ V & = & Z \end{array}$$

Déterminer la matrice de covariance et la loi du triplet (T, U, V).

Exercice 3. Loi jointe du minimum et du maximum de deux variables de loi exponentielle. On considère un couple (X, Y) de densité définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 , \quad f(x, y) = \left\{ \begin{array}{cc} 2\, e^{-x-y} & \text{si } 0 < x < y\,, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

1. Rappeler le principe de simulation d'un couple de variable aléatoires (X, Y) de densité $f(x, y)$.
2. Calculer les densités des lois marginales et des lois conditionnelles du couple (X, Y).
3. Montrer que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ $(x > 0)$ peut se représenter comme la loi de la somme $x + W$, où W est une variable de loi exponentielle de paramètre 1.
4. Ecrire un algorithme de simulation du couple (X, Y) faisant explicitement appel à un changement de variables. Prouver la validité de cet algorithme.
5. Soit `alea` un générateur aléatoire de loi uniforme. On considère l'algorithme suivant

```
Repeter
U <- -log(alea) ;
V <- -log(alea) ;
Jusqu'a (U < V) ;
X <- U ; Y <- V ;
```

   Argumenter (sans calcul) du fait que la loi du couple (X, Y) en sortie de cet algorithme est identique à la loi du couple $(\min(U, V), \max(U, V))$, où U, V sont des variables indépendantes et de loi exponentielle de paramètre 1.

6. En déduire que la loi de X en sortie de l'algorithme précédent est la loi exponentielle de paramètre 2.
7. Soit $x > 0$ et soit $t > x$. En sortie de l'algorithme précédent, justifier que l'on a

$$\mathrm{P}(Y \leq t \mid X = x) = \frac{\mathrm{P}(x < V \leq t)}{\mathrm{P}(V > x)},$$

et calculer la densité de la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.
8. Démontrer que le couple (X, Y) en sortie de l'algorithme précédent admet $f(x, y)$ pour densité jointe.
9. Soit $x > 0$. En utilisant la question 3, montrer que $\mathrm{E}[Y \mid X = x] = x + 1$. En déduire que $\mathrm{E}[XY \mid X = x] = x^2 + x$.
10. Déduire de la question précédente l'espérance $\mathrm{E}[Y]$ et la covariance $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Exercice 4. Combien de nombres aléatoires sont nécessaires en moyenne pour dépasser 1/2. On considère une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$. Soit a un nombre tel que $0 < a < 1$. On définit la variable aléatoire $N(a)$ de sorte que

$$N(a) = \min\{n \geq 1\,,\ X_1 + \cdots + X_n > a\}.$$

1. Soit $x \in (0, 1)$. En discutant selon les valeurs $x > a$ ou $x \leq a$, donner une expression de l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}[N(a) \mid X_1 = x]$ ne laissant plus appara tre le conditionnement.

2. Déduire de la question précédente que, pour tout $a \in (0, 1)$, nous avons

$$\mathrm{E}[N(a)] = 1 + \int_0^a E[N(x)]dx.$$

3. Résoudre l'équation précédente pour trouver l'expression de $\mathrm{E}[N(a)]$, pour tout a et en particulier, pour $a = 1/2$.

Exercice 5. Nombre de records. On considère une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$, et on pose $U_0 = x$, $(0 < x < 1)$. On dit qu'il y a record au temps m si la variable U_m est plus grande que toutes les variables précédentes. On note N_n le nombre de records au temps $n \geq 1$. On pose ensuite

$$\forall n \geq 1, \quad f_n(x) = E[N_n]$$

1. Calculer $f_1(x)$.
2. Donner une formule reliant l'espérance conditionnelle $E[N_{n+1}|U_1 = u]$ à la fonction f_n.

3. En déduire que

$$1 - f_{n+1}(x) = x(1 - f_n(x)) - \int_x^1 f_n(u)du.$$

4. On suppose que f_n est dérivable et on appelle g_n sa dérivée. Trouver la récursion satisfaite par g_n puis la résoudre.
5. En déduire que
$$f_n(x) = h_n - \left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right)$$
où $h_n = \sum_{i=1}^n 1/i$.

Exercice 6. Factorisation d'une somme de variables aléatoires. Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0,1)$. Le but de ce problème est de montrer que les variables aléatoires $(1+U)\sqrt{V}$ et $U+V$ ont même loi (sans calculer cette loi).

1. On considère $X = \min(U,V)$ et $Y = \max(U,V)$. Calculer la covariance du couple (X,Y). Les variables X et Y sont elles indépendantes ? (Justifier)
2. Soit B un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^2$. En considérant les événements $A = (U < V)$ et $\bar{A}$, montrer que

$$\mathrm{P}((X,Y) \in B) = 2 \iint_B \mathbb{1}_{\{0<u<v<1\}} dudv.$$

   En déduire que la densité jointe du couple (X,Y) est égale à

$$f(x,y) = 2\mathbb{1}_D(x,y)\,,\ \text{ou}\, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ 0 < x < y < 1\}.$$

3. Soit $y \in (0,1)$. Calculer la densité de la loi de Y et montrer que la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est uniforme sur $(0,y)$.
4. Montrer que le couple (X,Y) admet la même loi que le couple $(U\sqrt{V}, \sqrt{V})$.
5. Déduire de la question précédente que les variables aléatoires $(1+U)\sqrt{V}$ et $U+V$ ont même loi.
6. Montrer (directement) que la densité de la variable $U+V$ est égale à

$$g(z) = z\mathbb{1}_{(0,1)}(z) + (2-z)\mathbb{1}_{(1,2)}(z)\,, \quad z \in \mathbb{R}\,.$$