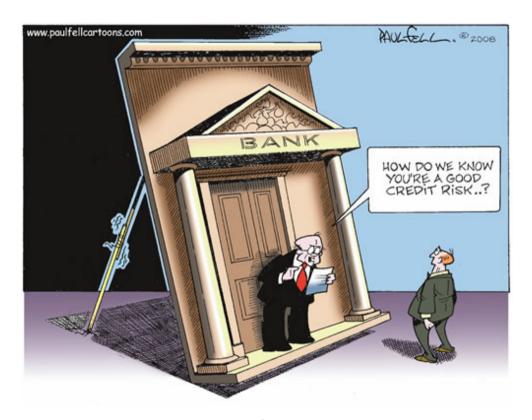


CDO synthétique, indice de CDS, tranche de CDO



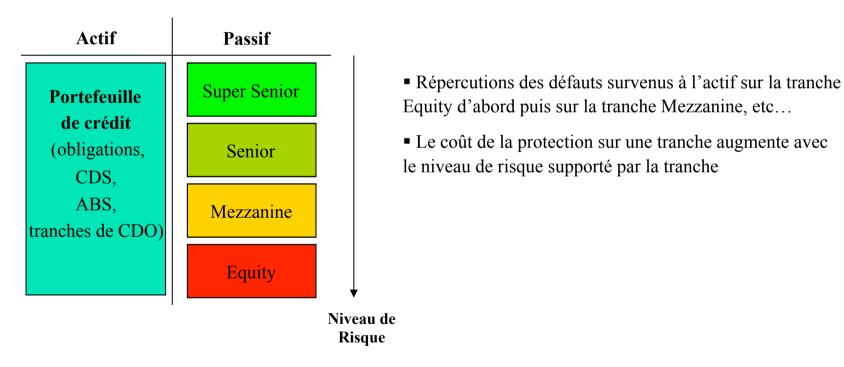
Areski COUSIN ISFA 3A



- Description générale, fonctionnement du marché
- Analyse des cash-flows
- Calcul de la prime connaissant la loi de la perte

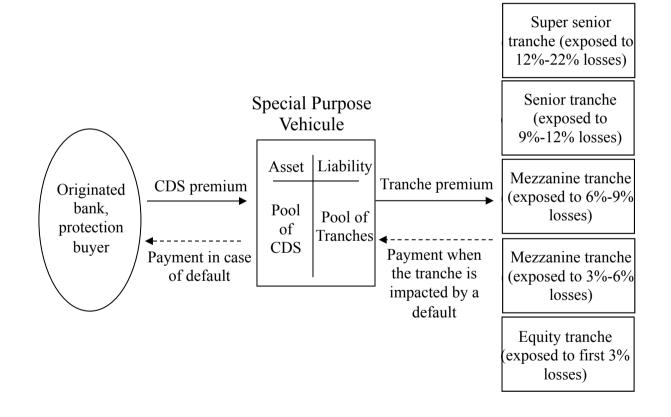
CDO - Principe Général

• Un Collateralized Debt Obligation (CDO) est le résultat du découpage d'un portefeuille de crédit en plusieurs niveaux de risque



Titrisation d'un ensemble de dettes

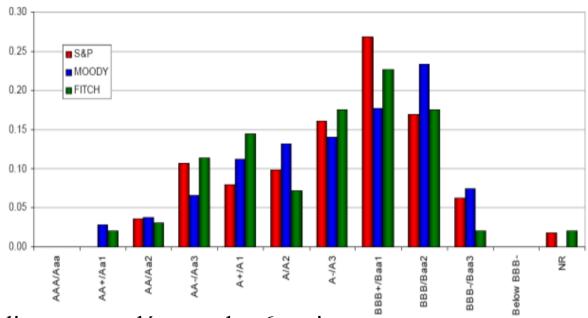
Montage d'un CDO synthétique



Indice de CDS

Ex : iTraxx Europe rassemble 125 très grandes entreprises comme Accor, Axa, Carrefour, France Telecom, Renault, SUEZ, Thomson, etc...

iTraxx Industry Group	Weight %
Autos	8.00
Consumer	24.00
Energy	16.00
Financial	20.00
Industrial	16.00
TMT	16.00

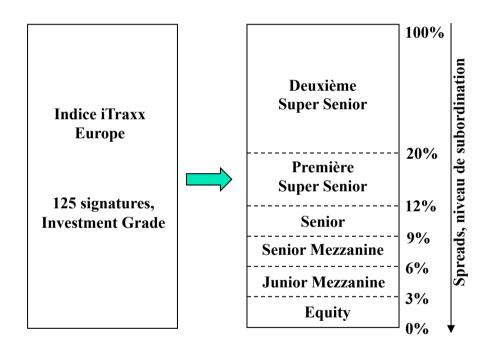


- Composition de l'indice renouvelée tous les 6 mois
 - Les CDS de l'indice sont très liquides
- Principalement, portefeuille de CDS sur de la dette de bonne qualité
 - Investment Grade bonds

4

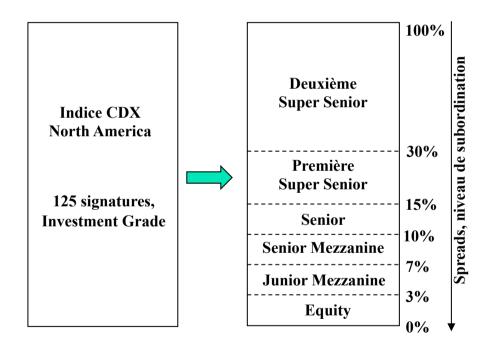
Tranche standardisée de CDO sur Indice

• iTraxx Europe Main : 0-3%, 3-6%, 6-9%, 9-12%, 12-20%

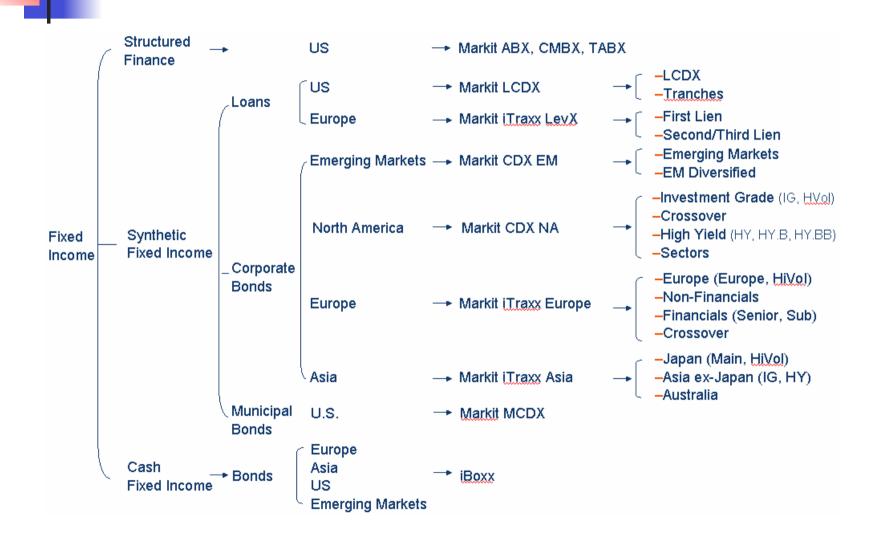


Tranche standardisée de CDO sur Indice

• CDX North America: 0-3%, 3-7%, 7-10%, 10-15%, 15-30%



Markit Indices



Markit Indices

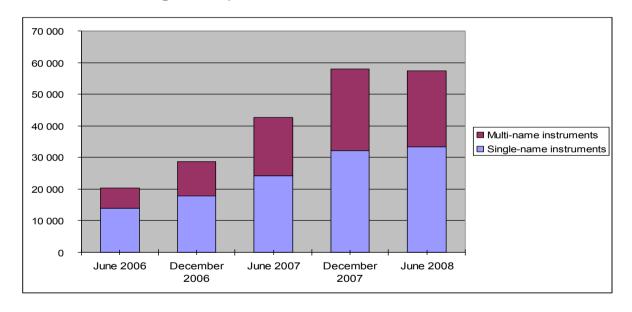
	Index	# Entities (1)	Roll Dates	Maturity in years (2)	Underlying	Sub-Indices
LCDX	LCDX	100	4/3 – 10/3	3, 5	North American First Lien Senior Secured Loans	
CDX	IG	125	3/20 – 9/20	1, 2, 3, 5, 7, 10	Investment Grade	HVol — 30 names in IG with High Volatility Sectors
	НҮ	100	3/27 - 9/27	5	High Yield	НҮ.В, НҮ.ВВ, НВ
	XO	35	3/20 - 9/20	3, 5, 7, 10	Cross-Over (7B or 6B) ⁽³⁾	
	EM	14 (can vary)	3/20 - 9/20	5	Emerging Markets (Sovereign)	
	EM Div	40	3/20 - 9/20	5	Emerging Markets Diversified (Sovereign and Corporate)	
MCDX	MCDX	50 credits	4/3 – 10/3	3, 5, 10	U.S. Municipal Bonds	

Markit Indices

	Index	# Entities (1)	Roll Dates	Maturity in years (2)	Underlying
iTraxx Europe	Europe	125	3/20 – 9/20	3, 5, 7, 10	Top 125 single name CDS contract by volume
	Non Financials	100	3/20 – 9/20	5, 10	
	Senior Financials	25	3/20 – 9/20	5, 10	
	Sub Financials	25	3/20 – 9/20	5, 10	
	Crossover	50	3/20 - 9/20	3, 5, 7, 10	Sub-investment grade reference entities
	High Volatility	30	3/20 – 9/20	3, 5, 7, 10	Top 30 highest spread names from iTraxx Europe
iTraxx Asia	Japan	50	3/20 - 9/20	3, 5, 10	
	Japan High Volatility	25	3/20 – 9/20	5	
	Asia ex-Japan IG	50	3/20 – 9/20	5	
	Australia	25	3/20 – 9/20	5, 10	
	Asia ex-Japan HY	20	3/20 - 9/20	5	
iTraxx LevX	LevX First Lien	75	3/20 – 9/20	5	European First Lien Syndicated Loans
	LevX Second/Third Lien	45	3/20 - 9/20	5	European Second and Third Lien Loans

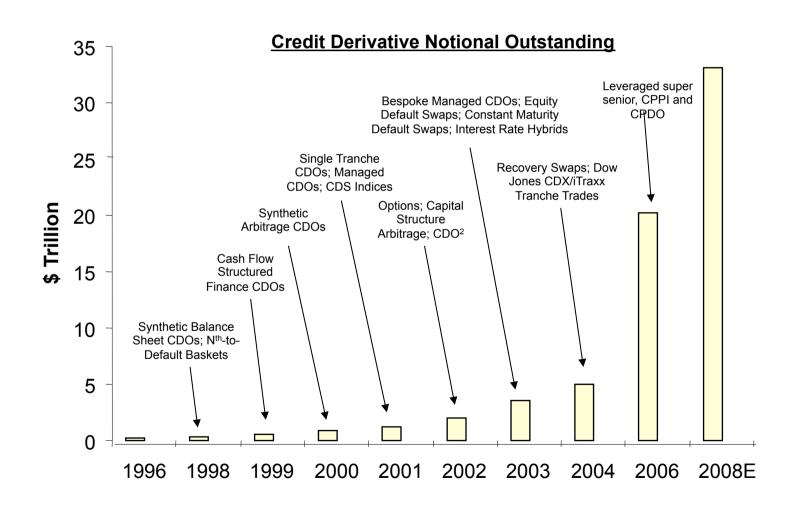


- Taille du marché des dérivés de crédit (CDS + produits multinoms)
 - Encours de dérivés de crédit (en Milliard de \$)
 - Source: BIS quarterly review March 2008



- BIS : mi 2006, 20 352 milliards de \$,
- BIS : fin 2006 : 28 650 milliards de \$
- BIS : mi 2008 : 57 325 milliards de \$
- encours crédits CA: 420 milliards euros
- encours dérivés taux (OTC) : 458 304 milliards de \$

Développement du marché des CDOs



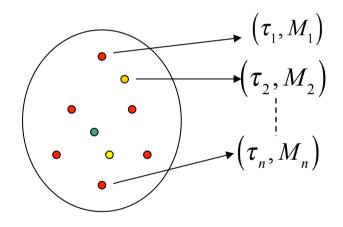
4

Description des cash-flows

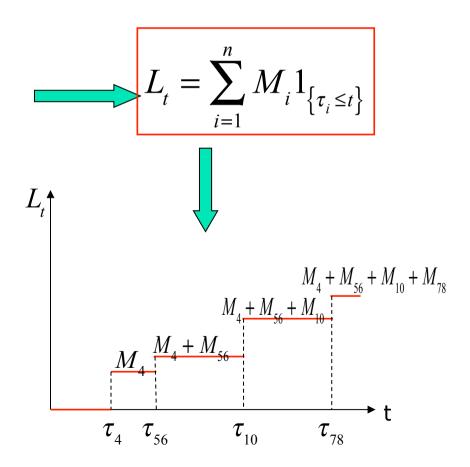
- n titres de crédit dans le portefeuille
- τ_1, \ldots, τ_n temps de défaut
- E_i nominal du titre i,
- R_i taux de recouvrement du titre i (entre 0 et 1)
 - $M_i = E_i (1 R_i)$ loss given default (du nom i)

Description des cash-flows

Les cash-flows d'une tranche de CDO sont gouvernés par le processus de la perte agrégée :

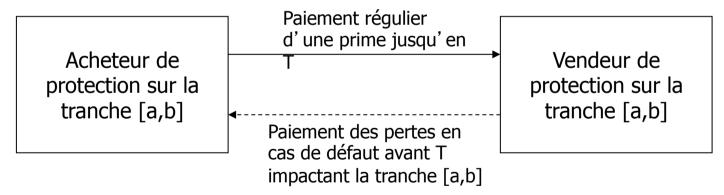


- Panier de n crédits
- Si le titre i fait défaut en τ_i , la perte engendrée correspond à la partie non recouvrée M_i de la dette en défaut





- Etude des cash-flows d'une tranche de CDO [a, b] de maturité T
 - a, b compris entre 0 et 1
- En simplifiant, une tranche de CDO [a,b] est un contrat entre
 - Un vendeur de protection
 - Un acheteur de protection

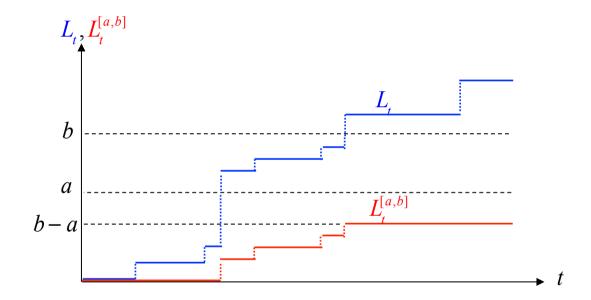


- Default Leg: Valeur actualisée des paiements futurs effectués par le vendeur de protection
- Premium Leg: Valeur actualisée des paiements futurs effectués par l'acheteur de protection



Description des cash-flows – Default Leg

Evolution de la perte agrégée et cumul des pertes sur la tranche [a,b]:



• Si un défaut survient en τ_i , le vendeur de protection doit payer à cet instant la quantité :

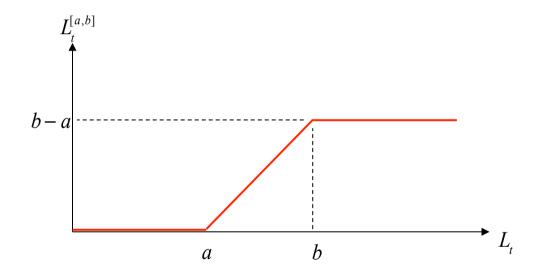
$$L_{\tau_i}^{[a,b]} - L_{\tau_i-}^{[a,b]}$$



Description des cash-flows – Default Leg

Processus des pertes cumulées sur la tranche [a,b]:

$$L_t^{[a,b]} = \left(L_t - a\right)^+ - \left(L_t - b\right)^+$$



 Pertes cumulées sur la tranche [a,b] ont une structure de call-spread par rapport à la perte agrégée



Description des cash-flows – Default Leg

- On suppose que le taux d'intérêt r_t est déterministe
- On note $B_t = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$ le facteur d'actualisation
- Montant cumulé des paiements futurs actualisés :

$$\int_{0}^{T} B_{t} dL_{t}^{[a,b]} = \sum_{i=1}^{n} B_{\tau_{i}} \left(L_{\tau_{i}}^{[a,b]} - L_{\tau_{i}-}^{[a,b]} \right) 1_{\left\{ \tau_{i} \leq T \right\}}$$

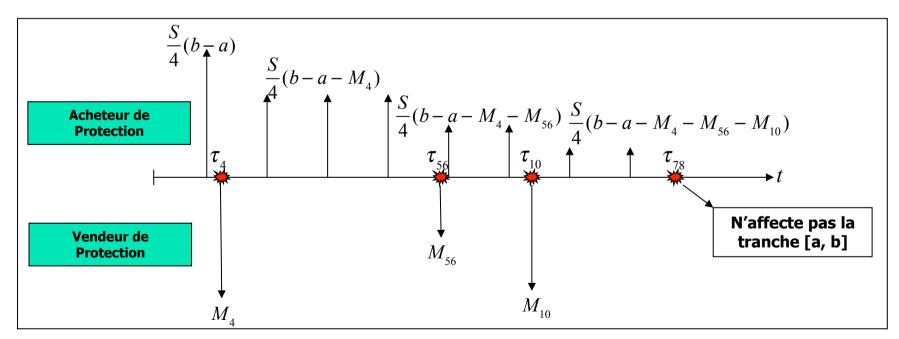
La PV (present value) de la jambe de défaut s'écrit alors (à détailler):

$$DL_0 = E\left[\int_0^T B_t dL_t^{[a,b]}\right] = B_T E\left[L_T^{[a,b]}\right] + \int_0^T r_t B_t E\left[L_t^{[a,b]}\right] dt$$



Description des cash-flows – Premium Leg

- **Premium Leg** d'une tranche [a,b]:
 - Paiements de coupon trimestriel indexés sur la partie non consommée de la tranche (outstanding nominal) : $b-a-L_{_t}^{[a,b]}$
 - Au taux annuel S





Description des cash-flows – Premium Leg

- Soit t_i , i = 1,...,q les instants de paiement de prime et Δ_i la durée de la période $\begin{bmatrix} t_{i-1}, t_i \end{bmatrix}$
- Le paiement de prime en t_i est égale à : $S\Delta_i \left(b a L_{t_i}^{[a,b]} \right)$
- Montant cumulé des paiements futurs actualisés :

$$\sum_{i=1}^{q} \left(B_{t_i} S \Delta_i \left(b - a - L_{t_i}^{[a,b]} \right) \right)$$

• Le prix de la premium leg s'écrit alors :

$$S\sum_{i=1}^{q} \left(B_{t_i} \Delta_i \left(b - a - E \left[L_{t_i}^{[a,b]} \right] \right) \right) = S \times PL_0$$



Description des cash-flows

Le prix de la default leg et de la premium leg ne fait intervenir que l'espérance des pertes sur la tranche [a,b] pour plusieurs horizons:

$$E\left[L_t^{[a,b]}\right], \quad 0 \le t \le T$$

$$E[L_t^{[a,b]}] = (b-a)Q(L_t > b) + \int_a^b (x-a) dF_{L_t}(x)$$

La distribution de la perte agrégée F_{L_t} (pour plusieurs horizons) est la quantité clé pour l'évaluation de tranches de CDO



Calcul du spread

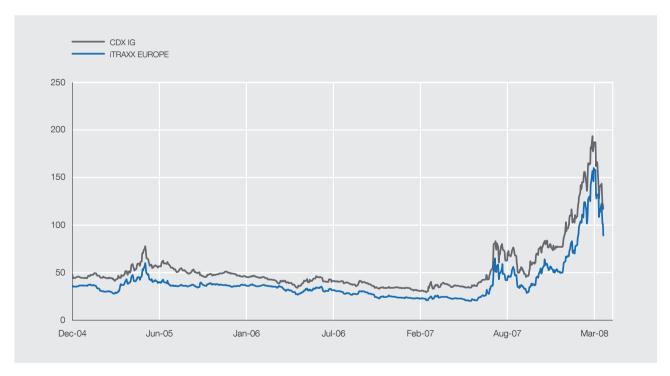
- La prime *S* du CDO [a,b] est choisie de tel sorte que le contrat soit équitable à la date initiale :
 - Default leg = Premium leg
 - Soit

$$S = \frac{DL_0}{PL_0} = \frac{B_T E \left[L_T^{[a,b]} \right] - \int_0^T r_t B_t E \left[L_t^{[a,b]} \right] dt}{\sum_{i=1}^{I} \left(B_{t_i} \Delta_i \left(b - a - E \left[L_{t_i}^{[a,b]} \right] \right) \right)}$$

Rappel: La prime est fixée pour toute la durée du contrat

Historique des spreads d'indice

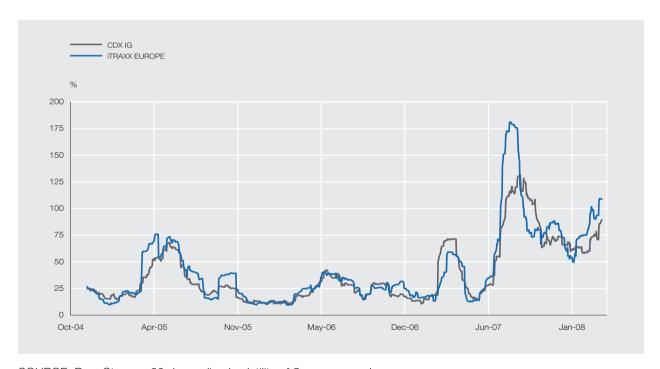
- Dynamique des spreads pour l'indice iTraxx Europe main et CDX.NA.IG, protection sur 5 ans (assimilables à des tranches [0,100%]) :
 - Les spreads S_t sont exprimés en point de base (1% de 1%=0.0001) par an



SOURCE: Bear Stearns. In basis points.

Historique des volatilités réalisées

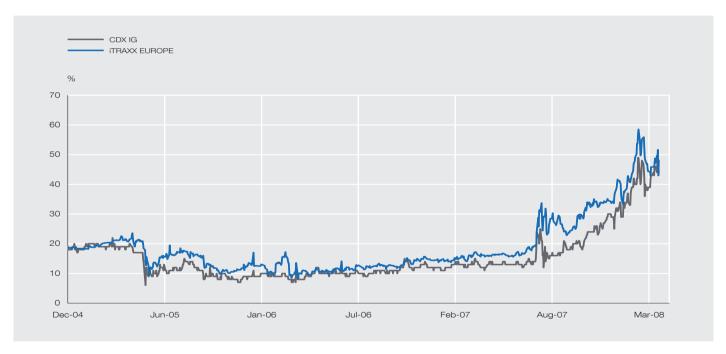
 Dynamique de la volatilité empirique des spreads d'indice (calculée sur une période flottante de 30 jours) :



SOURCE: Bear Stearns. 30 day realised volatility of 5 years spreads.

Historique des corrélations implicites

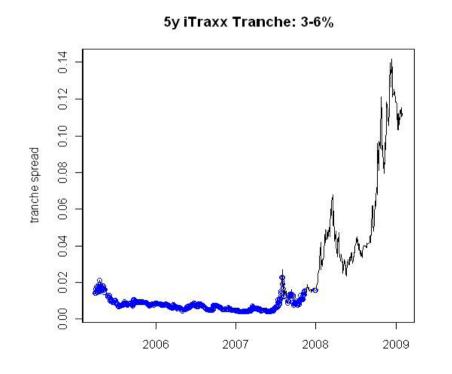
■ Dynamique des corrélations implicites (base correlation associée à la tranche equity [0,3%]

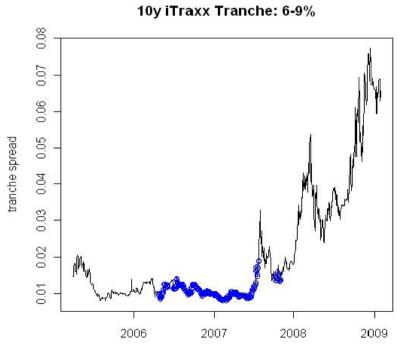


SOURCE: Bear Stearns. Historical 5 years 0-3% tranche correlation



- Dynamique des spreads : iTraxx tranches
 - *Tranches* [3%-6%] de l'indice iTraxx Europe main 5 ans
 - Tranches [6%-9%] de l'indice iTraxx Europe main 10 ans







- Dynamique des spreads : CDX tranches
 - Tranches [3%-7%] de l'indice CDX.NA.IG 5 ans
 - Tranches [7%-10%] de l'indice CDX.NA.IG 10 ans

