# CHAPITRE III : ANALYSE POSTOPTIMALE EN PROGRAMMATION LINÉAIRE

## 1. INTRODUCTION

L'élaboration d'un modèle de programmation linéaire comprend des paramètres tels que des coûts, des taux, des quantités de ressources, … Ces paramètres sont souvent écrits dans le modèle avec une valeur déterminée mais en réalité, ils peuvent subir des variations en fonction de l'évolution économique. Il est dès lors judicieux d'analyser la sensibilité des solutions optimales aux changements que pourraient subir les paramètres $a_{ij}$, $c_j$ et $b_i$.

Nous pouvons ainsi définir l'analyse postoptimale ou paramétrique comme étant l'étude de l'évolution de l'optimum pour toutes les valeurs possibles des paramètres.
Cette analyse incite les décideurs à essayer d'estimer au mieux les paramètres les plus sensibles ou à mettre en place la surveillance des paramètres qui déclenchent des changements.

Deux possibilités existent :

- soit on oublie la solution optimale obtenue avec l'algorithme du simplexe appliqué avec le modèle original. On relance cet algorithme avec le modèle modifié (paramètres sous forme de variables (exemple : $c_j = 1 + 2*\lambda$)) ;
- soit on repart du tableau final obtenu avec le modèle original et on détermine une solution optimale du modèle modifié.

Dans ce chapitre, nous envisageons la deuxième piste. Celle-ci fournit en effet une meilleure vision du degré de stabilité de la solution optimale. De plus, nous ne modifierons que les coûts de la fonction économique ($c_j$) ou les coefficients indépendants des contraintes ($b_i$).

## 2. RAPPELS

Une compagnie fabrique deux produits qui passent successivement dans trois ateliers. Voici les données pertinentes pour la prochaine production mensuelle :

| Atelier | Durée du traitement (en h/tonne) | | Temps disponible (en h) |
|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | |
| $A_1$ | 4 | 6 | 250 |
| $A_2$ | 2 | 5 | 180 |
| $A_3$ | 3 | 3 | 180 |
| Profit (en euros/tonne) | 4000 | 6500 | |

Les deux inconnues du problème sont donc la quantité en tonnes de chacun des produits ; elles sont notées $x_1$ et $x_2$.

Le problème initial à résoudre s'écrit :

$$Max\ z = 4000\ x_1 + 6500\ x_2$$

Sous les contraintes :

$$4\ x_1 + 6\ x_2\ \leq 250$$

$$2\ x_1 + 5\ x_2\ \leq 180$$

$$3\ x_1 + 3\ x_2\ \leq 180$$

$$x_1, x_2\ \geq 0$$

Où $x_1\ = quantité\ de\ tonnes\ de\ P_1$ et $x_2\ = quantité\ de\ tonnes\ de\ P_2$

Transformons le modèle :

$$Min - 4000\ x_1 -\ 6500\ x_2$$

Sous les contraintes :

$$4\ x_1 + 6\ x_2\ + e_1 \qquad =\ 250$$

$$2\ x_1 + 5\ x_2 \qquad + e_2 \qquad = 180$$

$$3\ x_1 + 3\ x_2 \qquad\qquad + e_3 = 180$$

$$x_1, x_2\ , e_2\ e_1, e_3\ \geq 0$$

L'algorithme du simplexe fournit les tableaux suivants :

| | | | -4000 | -6500 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_B$ | $C_B$ | B | *$x_1$* | *$x_2$* | *$e_1$* | *$e_2$* | *$e_3$* |
| *$e_1$* | 0 | 250 | 4 | 6 | 1 | 0 | 0 |
| *$e_2$* | 0 | 180 | 2 | 5 | 0 | 1 | 0 |
| *$e_3$* | 0 | 180 | 3 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| | | FE=0 | 4000 | 6500 | 0 | 0 | 0 |

Pivot

| | | | -4000 | -6500 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_B$ | $C_B$ | B | *$x_1$* | *$x_2$* | *$e_1$* | *$e_2$* | *$e_3$* |
| *$e_1$* | 0 | 34 | 8/5 | 0 | 1 | -6/5 | 0 |
| *$x_2$* | -6500 | 36 | 2/5 | 1 | 0 | 1/5 | 0 |
| *$e_3$* | 0 | 72 | 9/5 | 0 | 0 | -3/5 | 1 |
| | | FE=-234000 | 1400 | 0 | 0 | -1300 | 0 |

Pivot

| | | | -4000 | -6500 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_B$ | $C_B$ | B | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $x_1$ | -4000 | 21.25 | 1 | 0 | 5/8 | -3/4 | 0 |
| $x_2$ | -6500 | 27.5 | 0 | 1 | -1/4 | ½ | 0 |
| $e_3$ | 0 | 33.75 | 0 | 0 | -9/8 | 3/4 | 1 |
| | | FE=-263750 | 0 | 0 | -875 | -250 | 0 |

Interprétons la solution optimale.

Représentation graphique

Traçons les droites correspondant aux contraintes, à savoir :

$$4\,x_1 + 6\,x_2 \;= 250$$

$$2\,x_1 + 5\,x_2 \;= 180$$

$$3\,x_1 + 3\,x_2 \;= 180$$

Cf. feuille annexe.

## 3. VARIATION D'UN COEFFICIENT DE FE ($C_J$)

On songe à augmenter le prix de vente du produit $P_1$. Supposons que celui-ci passe à 4 200 euros/tonne. Cette modification a-t-elle un impact sur la solution optimale ?
Vu le nombre d'inconnues dans ce modèle, à savoir 2, nous pouvons mener une réflexion géométrique dans un premier temps.

### a. APPROCHE GEOMETRIQUE

On peut écrire la FE sous la forme suivante :

$$Max\ \ z = k\ x_1 + \ 6\,500\ x_2\ \ \text{où}\ k\ est\ une\ constante$$ *représentant le prix de vente*

Quelle est la pente de la droite ?

Quelle est la conséquence si la constante k augmente fortement ?

Si les valeurs de k diminuent ?

Considérons deux cas.

- Prenons celui qui nous intéresse k = 4200.

  Conclusion :

- Prenons une valeur de k plus élevée 6500.

  Conclusion :

### b. APPROCHE ALGEBRIQUE

Lorsque le nombre de variables est supérieur à deux, il est impossible d'utiliser une approche géométrique. Il est alors nécessaire de recourir à une approche algébrique.
Le principe est de repartir du tableau final obtenu au point 2 et de faire les modifications nécessaires sachant qu'à présent, la FE prend la forme suivante :

$$Max\ (4000 + \Delta)\ x_1 + 6500\ x_2 = \text{Max ancienne fonction économique} + \Delta\ x_1$$
$$\text{où } \Delta\ est\ une\ constante\ positive\ ou\ négative$$

On a donc

| | | | - (4000 + Δ) | -6500 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_B$ | $C_B$ | B | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $x_1$ | - (4000 + Δ) | 21.25 | 1 | 0 | 5/8 | -3/4 | 0 |
| $x_2$ | -6500 | 27.5 | 0 | 1 | -1/4 | ½ | 0 |
| $e_3$ | 0 | 33.75 | 0 | 0 | -9/8 | -3/4 | 1 |
| FE = -263 750 – 21.25 Δ | | | 0 | 0 | -875 | -250 | 0 |

Nous devons modifier deux valeurs dans la dernière ligne du tableau, à savoir -875 et -250.

Discussion

Si les deux nouvelles valeurs restent négatives, l'optimum reste identique. Déterminons l'intervalle.

Si $\Delta < -1400$ ou encore $4000 + \Delta < 2600$, ..............................................

Nous effectuons de nouveaux pivotages :

| | | | $-(4000 + \Delta)$ | $-6500$ | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_B$ | $C_B$ | B | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $x_1$ | $-(4000 + \Delta)$ | 21.25 | 1 | 0 | 5/8 | -3/4 | 0 |
| $x_2$ | -6500 | 27.5 | 0 | 1 | -1/4 | ½ | 0 |
| $e_3$ | 0 | 33.75 | 0 | 0 | -9/8 | 3/4 | 1 |
| | | | 0 | 0 | $-875 - 5/8\,\Delta$ | $-250 + 3/4\,\Delta$ | 0 |

| | | | $-(4000 + \Delta)$ | $-6500$ | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_B$ | $C_B$ | B | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $e_1$ | 0 | 34 | 8/5 | 0 | 1 | -6/5 | 0 |
| $x_2$ | -6500 | 36 | 2/5 | 1 | 0 | 1/5 | 0 |
| $e_3$ | 0 | 72 | 9/5 | 0 | 0 | -3/5 | 1 |
| | | | $1400 + \Delta$ | 0 | 0 | -1300 | 0 |

Constatons :

Si $\Delta > 1000/3$ ou $(4000 + \Delta) > 13000/3$, ...............................................

Reprenons le tableau de départ et pivotons.

| | | | $-(4000 + \Delta)$ | $-6500$ | $0$ | $0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_B$ | $C_B$ | $B$ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $x_1$ | $-(4000 + \Delta)$ | 21.25 | 1 | 0 | 5/8 | -3/4 | 0 |
| $x_2$ | -6500 | 27.5 | 0 | 1 | -1/4 | ½ | 0 |
| $e_3$ | 0 | 33.75 | 0 | 0 | -9/8 | 3/4 | 1 |
| | | | 0 | 0 | $-875 - 5/8\,\Delta$ | $-250 + 3/4\,\Delta$ | 0 |

| | | | $-(4000 + \Delta)$ | $-6500$ | $0$ | $0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_B$ | $C_B$ | $B$ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $x_1$ | $-(4000 + \Delta)$ | 55 | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 1 |
| $x_2$ | -6500 | 5 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | -2/3 |
| $e_2$ | 0 | 45 | 0 | 0 | -3/2 | 1 | 4/3 |
| | | | 0 | 0 | $-1250 + ½\,\Delta$ | 0 | $1000/3 - \Delta$ |

Constatons :

Si Δ > 2500 ou (4000 + Δ) > 6500, ..............................................

Reprenons le tableau et pivotons.

| | | | $-(4000+\Delta)$ | $-6500$ | $0$ | $0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_B$ | $C_B$ | B | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $x_1$ | $-(4000+\Delta)$ | 55 | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 1 |
| $x_2$ | $-6500$ | 5 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | -2/3 |
| $e_2$ | 0 | 45 | 0 | 0 | -3/2 | 1 | 4/3 |
| | | | 0 | 0 | $-1250 + \frac{1}{2}\Delta$ | 0 | $1000/3 - \Delta$ |

| | | | $-(4000+\Delta)$ | $-6500$ | $0$ | $0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_B$ | $C_B$ | B | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $x_1$ | $-(4000+\Delta)$ | 60 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1/3 |
| $e_1$ | 0 | 10 | 0 | 2 | 1 | 0 | -4/3 |
| $e_2$ | 0 | 60 | 0 | 3 | 0 | 1 | -2/3 |
| | | | 0 | $2500 - \Delta$ | 0 | 0 | $-(4000+\Delta) * 1/3$ |

<u>**Résumons sur une droite :**</u>

Imaginons que le bénéfice pour le produit 1 passe à 5000 euros. Que se passe-t-il ?

# 4. Variation d'un terme indépendant (bi)

Supposons que le deuxième atelier dispose de 20 heures supplémentaires.

La deuxième contrainte devient donc :

$$2\,x_1 + 5\,x_2 \leq 200$$

Ou

$$2\,x_1 + 5\,x_2 \leq 180 + \Delta$$

Où Δ représente l'écart entre les heures réellement disponibles et les 180 heures tenues pour acquises dans le modèle d'origine.

Le tableau initial se voit complété d'une colonne.

| | | | | -4000 | -6500 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_B$ | $C_B$ | B | Δ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $e_1$ | 0 | 250 | … | 4 | 6 | 1 | 0 | 0 |
| $e_2$ | 0 | 180 | … | 2 | 5 | 0 | 1 | 0 |
| $e_3$ | 0 | 180 | … | 3 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| | | FE=0 | … | 4000 | 6500 | 0 | 0 | 0 |

On constate que les colonnes associées au paramètre Δ et à la variable d'écart $e_2$ sont identiques et le resteront tout au long des itérations.

On obtient donc le tableau final suivant :

| | | | | -4000 | -6500 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_B$ | $C_B$ | B | Δ | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $x_1$ | -4000 | 21.25 | … | 1 | 0 | 5/8 | -3/4 | 0 |
| $x_2$ | -6500 | 27.5 | … | 0 | 1 | -1/4 | ½ | 0 |
| $e_3$ | 0 | 33.75 | … | 0 | 0 | -9/8 | 3/4 | 1 |
| | | FE=-263750 | … | 0 | 0 | -875 | -250 | 0 |

<u>Interprétation des résultats en fonction de Δ</u>

Quel est l'intervalle de variation de Δ pour que les conditions de positivité des variables soient respectées ?

Dans notre cas où Δ vaut 20, que se passe-t-il ?

Imaginons que l'atelier 2 travaille 25 heures de moins. Que se passe-t-il ?

## 5. IMPLÉMENTATION

L'analyse optimale doit donc fournir la solution optimale initiale complétée pour chaque $c_j$ et pour chaque $b_i$, d'un intervalle de variation ou intervalle de sensibilité.

Tant que le paramètre appartient à cet intervalle, il est possible de déduire la nouvelle solution optimale de l'ancienne sans devoir poursuivre les pivotages.

Remarques :

- Si on modifie simultanément plusieurs $c_j$ (ou plusieurs $b_i$), il ne suffit pas de vérifier que les nouveaux coefficients appartiennent tous aux intervalles de variation correspondants. Il faut reprendre le chemin des pivotages ou faire une analyse optimale conjointe (non vue dans ce cours).
- Si on modifie simultanément un $c_j$ et un $b_i$, la solution finale s'obtient en traitant les deux changements séparément.

## 6. EXERCICES

1) Une usine produit des voitures de deux types, des berlines et des voitures sport. On y retrouve trois ateliers où la production des voitures des deux types s'effectue en parallèle.

   **Atelier 1 : montage des moteurs**
   Monter un moteur requiert 3.5 heures de main d'œuvre dans le cas d'une berline et 4 heures dans le cas d'une voiture sport. Cet atelier dispose chaque mois de 1500 heures de main-d'œuvre.

   **Atelier 2 : carrosserie**
   Une carrosserie de berline requiert 2 heures de main-d'œuvre ; pour la carrosserie d'une voiture sport, il faut prévoir une heure de plus. Cet atelier dispose de 2000 heures par mois.

   **Atelier 3 : assemblage**
   Pour assembler une berline, il faut compter 1.5 heure ; pour assembler une voiture sport il faut une demi-heure de plus. Cet atelier peut assembler tout ce que produisent les ateliers 1 et 2.

   Si l'on ne tient pas compte des coûts de main-d'œuvre, une berline rapporte 2345 euros et une voiture de sport 3456 euros. Les heures de main-d'œuvre reviennent chacune à 16 euros dans l'atelier 1, à 15 euros dans l'atelier 2 et à 12 euros dans l'atelier 3. Enfin, il est obligatoire de produire au moins 120 berlines par mois.

   Quelles sont les variables de décision ?

Description du modèle

Voici le tableau optimal de ce modèle :

| | | | -2241 | -3323 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_B$ | $C_B$ | B | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $X_2$ | -3323 | 270 | 0 | 1 | 0.25 | 0 | 0.875 |
| $e_2$ | 0 | 950 | 0 | 0 | -0.75 | 1 | -0.625 |
| $X_1$ | -2241 | 120 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| | | FE=-1166130 | 0 | 0 | -830.75 | 0 | -666.25 |

a. Décrire le plan de production optimal. Dans quelles proportions les heures disponibles dans les ateliers 1 et 2 sont-elles utilisées ?
b. Supposons que l'on veuille porter à 128 le nombre de berlines produites sans modifier les disponibilités de main-d'œuvre des ateliers 1 et 2. De combien d'unités doit-on diminuer la production de voitures de sport ?
c. La direction voudrait produire 50 voitures de sport supplémentaires sans modifier le nombre de berlines produites. Un analyste affirme qu'il suffirait d'augmenter de 200 heures le temps disponible dans l'atelier 1. Que faut-il en penser ?
d. Supposons qu'on dispose de 500 heures en plus du temps prévu à répartir entre les ateliers 1 et 2. Un complément d'heures serait accordé à l'atelier 3 pour assembler la production supplémentaire des 2 premiers ateliers. Indiquez comment répartir ces 500 heures. Que deviendrait le plan de production optimal et de combien augmenterait la fonction économique ?

2) Une société de distribution d'aliments congelés transforme des pommes de terre en frites, en juliennes et en flocons à purée. La société se procure les pommes de terre auprès de deux fournisseurs. Chaque kilo de pommes de terre issu du premier fournisseur donne, après transformation, 200 g de frites, 200 g de juliennes, 300 g de flocons et 300 g de pertes irrécupérables. Ces poids sont respectivement de 300, 100, 270 et 330 pour le second fournisseur.
Les besoins de la clientèle limitent la production de frites à 18000 kg, celle de juliennes à 12000 kg et celle de flocons à 24000 kg.
Les fournisseurs ne pratiquent pas les mêmes prix, de sorte qu'un kg de pommes de terre acheté au premier producteur rapporte un profit égal à 6/5 du profit rapporté par un kg de pommes de terre du second fournisseur.

Quelles sont les variables de décision ?

Description du modèle

Voici le tableau optimal de ce modèle :

| | | | -6 | -5 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_B$ | $C_B$ | B | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $X_2$ | -5 | 30000 | 0 | 1 | 5 | -5 | 0 |
| $X_1$ | -6 | 45000 | 1 | 0 | -2.5 | 7.5 | 0 |
| $e_3$ | 0 | 2400 | 0 | 0 | -0.6 | -0.9 | 1 |
| | | FE=-420000 | 0 | 0 | -10 | -20 | 0 |

a. Interprétez le résultat.
b. Si la société retirait de chaque kilo de pommes de terre acheté du second fournisseur 6/5 des profits qu'elle retire de chaque kilo de pommes de terre acheté au premier, en quoi le plan optimal de production serait-il modifié ?
c. Que deviendrait le plan optimal si la demande de frites augmentait de 2000 kg ?
d. Quelle dépenses de publicité la société serait-elle prête à engager pour augmenter sa part de marché de 10% pour chacun des trois produits qu'elle commercialise ? Combien de kg de pommes de terre devrait-elle se procurer chez chacun de ses fournisseurs ?
e. L'acheteur de la société aimerait connaître quelles augmentations de la demande en frites, en juliennes et en flocons entraînerait à l'optimum l'achat de respectivement 45000 kg et 31000 kg de pommes de terre chez les deux fournisseurs.

3) Une usine assemble trois sortes de lampes dans trois ateliers. Le tableau ci-dessous résume les données pertinentes relatives à cette production.

| Atelier | Temps d'assemblage (en min/lampe) | | | Temps disponible (en min) |
|---|---|---|---|---|
| | $L_1$ | $L_2$ | $L_3$ | |
| $A_1$ | 1 | 2 | 1 | 500 |
| $A_2$ | 3 | 0 | 2 | 460 |
| $A_3$ | 2 | 8 | 0 | 840 |
| Profit (en euros/lampe) | 6 | 2 | 8 | |

<u>Quelles sont les variables de décision ?</u>

<u>Description du modèle</u>

Voici le tableau optimal de ce modèle :

| | | | -6 | -2 | -8 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$V_B$** | $C_B$ | B | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $e_1$ | 0 | 60 | -1 | 0 | 0 | 1 | -0.5 | -0.25 |
| $x_3$ | -8 | 230 | 1.5 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | 0 |
| $x_2$ | -2 | 105 | 0.25 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0.125 |
| | | FE=-2050 | -6.5 | 0 | 0 | 0 | -4 | -0.25 |

a. Interprétez le résultat.
b. Si le fabricant dispose d'une heure supplémentaire dans l'atelier $A_1$, que se passe-t-il ?
c. Comment devrait-on modifier le plan de production optimal si le temps disponible en $A_3$ chutait de 80 minutes ?

d. Comment seraient modifiés le plan de production optimal et la fonction économique si la marge bénéficiaire unitaire de la lampe $L_1$ était augmentée de 5 euros ?

e. S'il était possible de répartir les minutes inutilisées de l'atelier 1 entre les ateliers 2 et 3, comment devrait-on le faire ?

# TABLE DES MATIERES