XMAC01 Matemática Discreta - 1ª avaliação parcial – 26/maio/22 - resolução

1. Matemáticos dizem que "a sentença P é mais forte que a sentença Q" se Q é verdadeira sempre que P for verdadeira, más não inversamente. (Em outras palavras, "P é mais forte que Q" significa que P → Q é sempre verdade, mas Q → P não é verdade, em geral.) Monte tabelas verdade para mostrar que:

a ∧ b é mais forte que a

a	b	a v b	a → a v b	a v b → a
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	v	V	V	F
F	F	F	V	V

2. Faça simplificação lógica da expressão usando apenas as leis da lógica:

$$(a \land (\neg(\neg a \lor b))) \lor (a \land b)$$

(a ∧ (¬(¬a v b))) ∨ (a ∧ b)	*De Morgan sobre ¬(¬a v b)*
(a ∧ (a ∧¬b)) ∨ (a ∧ b)	*associatividade sobre (a ∧ (a ∧¬b))*
(a ∧ a) ∧¬b) ∨ (a ∧ b)	*idempotencia sobre a ∧ a*
(a ∧¬b) ∨ (a ∧ b)	*distributividade sobre a expressão*
a ∧ (¬b ∨ b)	*(¬b ∨ b) = t é uma tautologia*
a	

3. Escreva uma sequência de prova para a asserção, jusificando cada etapa:

$$(a \to \neg b) \land (c \to (a \land b)) \to \neg c$$

1. a → ¬b	*hipótese*
2. c → (a ∧ b)	*hipótese*
3. ¬a ∨¬b	*1, condicional*
4. ¬(a ∧ b)	*3, De Morgan*
5. ¬c	2, 4, modus tollens

4. Sendo A = {1,2,3,4,5}, determine o valor lógico (V ou F) de cada uma das proposições:

[**F**] $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$

[**V**] $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$

[**V**] $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$

[**V**] $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 10)$

5. Se:

E(x) para "*x é elegante*"
H(x) para "*x é homem*"
G(x,y) para "*x gosta de y*"
M para "*Mario*"
P para "*Paula*"

Qual das sentenças corresponte à proposição: *(∀x)(H(x) → E(x)]?*

i) *Todos os homens são elegantes.*

ii) *Se são elegantes, são homens.*

iii) *Existe um homem elegante.*

Escreva também a proposição para as sentenças não correspondentes.

(∀x)(H(x) → E(x)] *corresponde a* (i) Todos os homens são elegantes.

(ii) Se são elegantes, são homens *corresponde a* E(x) → H(x)

(iii) Existe um homem elegante *corresponde a* (∃x)(H(x) → E(x)]

6. Determine e justifique a alternativa incorreta:

i) *Se* $A = \{x \mid x = 2n$ *para n inteiro positivo*$\}$*, então* $16 \in A$.

ii) *Se* $A = \{x \mid x = 2 + n(n-1)$ *para n inteiro positivo*$\}$*, então* $16 \notin A$.

iii) *Se* $A = \{x \mid x = 2^n$ *para n inteiro positivo*$\}$*, então* $16 \notin A$.

iv) $A = \{2,4,6,8, \dots\}$ *é um conjunto de números inteiros positivos.*

iii) *Se* $A = \{x \mid x = 2^n$ *para n inteiro positivo*$\}$*, então* $16 \notin A$.

… é a alternativa incorreta pois se $n = 4$, então $2^4 = 16$ e $16 \in A$

7. Uma pesquisa dentre 150 estudantes revelou que 83 são proprietários de carros, 97 possuem bicicletas, 28 têm motocicletas, 53 são donos de carros e bicicletas, 14 têm carros e motocicletas, 7 possuem bicicletas e motocicletas, e 2 têm todos os três. Quantos estudantes possuem apenas bicicletas e quantos não têm qualquer um dos três, respectivamente?

Partindo das informações:
... dos 97 que possuem bicicletas, temos:
97
– (53-2) que tem carros e bicicletas
– (7 - 2) que possuem motociletas e bicicletas)
– 2 (que possuem todos os três)
obtemos **39 que possuem apenas bicicletas**
... e dos 150 estudantes, verificamos que:
150
– [83 – (53-2) – (14-2) – 2 = 18] possuem somente carros
– [97 – (53-2) – (7-2) – 2 = 39] possuem soemnte bicicletas
– [28 – (14-2) – (7-2) =- 2 = 9] possuem somente motocicletas
– 2 possuem os três veículos: carro, bicicleta e moto
– [53-2 = 51] possuem dois tipos: carro e bicicleta
– [14-2 = 12] possuem dois tipos: carro e motocicleta
– (7-2 = 5) possuem dois tipos: bicicleta e moto

= **14 estudantes não possuem nenhum dos três**.

8. Através da demonstração:

$$P(1): 1(1+1)(1+2) = 6$$

$$\text{Assuma } P(k): k(k+1)(k+2) = 3m \qquad \text{para algum } m \text{ inteiro}$$

$$P(k+1): (k+1)(k+2)(k+3) = 3m \qquad \text{para algum } m \text{ inteiro}$$

$$(k+1)(k+2)(k+3) = k(k+1)(k+2) +3((k+1)(k+2))$$

$$= 3m + 3(k+1)(k+2)$$

$$= 3[m+(k+1)(k+2)]$$

O que podemos concluir? Justifique

i) O produto de três inteiros positivos consecutivos é divisível por 3.

ii) A soma de três inteiros positivos consecutivos é divisível por 3.

iii) O produto de três inteiros positivos é divisível por 3.

iv) O produto de três inteiros é divisível por 3.

→ *"O produto de três inteiros positivos consecutivos é divisível por 3", é a conclusão para a proposição* P(k): k(k+1)(k+2)=3m*, que define a igualdade do produto k(k+1)(k+2), de 3 inteiros consecutivos, ser divisível por 3.*

9. Verifique se as relações binárias nos conjuntos S dados a seguir são reflexivas, simétricas, antissimétricas ou transitivas.

i) $S = \mathbb{Q}$, $R = \{(x,y) \mid |x| \leq |y|\}$

R é reflexiva e transitiva

ii) $S = \mathbb{Z}$, $R = \{(x,y) \mid x - y$ *é um múltiplo inteiro de* $3\}$

R é reflexiva, simétrica e transitiva

iii) $S = N$, $R = \{(x,y) \mid x \cdot y$ *é par*$\}$

R é simétrica

10. Seja P o conjunto de todas as pessoas (mortas ou vivas).

Seja $m: P \to P$ *tal que* $m(x)$ *é a mãe biológica de* x.

Tem-se que fazer suposições biológicas razoáveis para considerar m uma função bem definida:

i) todo mundo tem uma mãe biológica (por exemplo, nenhum clone) e,

ii) nenhuma pessoa pode ter duas mães biológicas diferentes.

A função m é sobrejetora? Justifique. Ela é injetora? Justifique.

*A função **m não é injetora**, pois duas pessoas podem ter a mesma mãe.*

*A função **m não é sobrejetora**, pois nem todas as pessoas são mães.*