1. Demonstre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$, para $n \geq 1$.

… demonstração por indução

passo base: $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$

por hipótese: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

passo indutivo:
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)!$$
$$= [1 + (n+1)] \cdot (n+1)! - 1$$
$$= (n+2)(n+1)! - 1$$
$$= (n+2)! - 1$$

2. Para cada uma das listas de inteiros abaixo, dê uma fórmula simples ou regra que gere os termos de uma sequência de inteiros que comece com a lista dada. Assumindo que a sua fórmula esteja correta, dê os próximos três elementos da sequência.

a) 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, …

… a sequência que começa com o nº 3 e cada termo seguinte é o anterior mais o próximo nº ímpar, começando de 3.

Fórmula fechada para todo $k \geq 1$:

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2 + 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2 + 2\frac{(n+1)n}{2} - n = 2 + n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Fórmula recursiva:
$$a_1 = 3$$
$$a_n = a_{n-1} + (2n-1), \quad n \geqslant 2$$

lista: 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83, 102, ...

b) 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, …

… sequencia de inteiros positivos, em notação binária …

lista: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, ...

3. Num tabuleiro de xadrez de 8×8 , a torre pode mover para qualquer casa na horizontal ou vertical. Quantos caminhos diferentes a torre pode fazer para sair do canto inferior esquerdo e chegar no canto superior direito se todos os movimentos são para a direita ou para cima?

… a torre deve mover 7 casas para direita e 7 para cima ...então $N = \dfrac{14!}{7! \cdot 7!} = 3432$

4. Uma pessoa pode subir uma escada subindo um degrau ou dois degraus por vez.

a) Encontre uma relação de recorrência para o nº de maneiras de subir n degraus.

Considerando uma escada com n degraus, primeiro observamos que o nº total de maneiras de subir a escada de n degraus será a soma do nº de maneiras de subir a escada em que o último salto foi de 1 degrau, mais o nº de maneiras em que o último salto foi de 2 degraus.

Depois, considerando a escada com n-1 degraus também encontra-se uma soma das 2 formas de alcançar o último degrau, o n-1, com o último salto foi de 1 degrau e um último salto de 2 degraus. Repetindo esse raciocínio para n-2 degraus, e para n-3 degraus, até chegar a 2 degraus – com as duas maneira de alcançar o último (salto de 1 degrau ou salto de 2 degraus).

Dessa forma, supondo a_n ser o nº de maneiras para subir a escada com *n* degraus, chega-se a relação de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

b) Quais são as condições iniciais?

Tem-se zero formas de subir uma escada com zero degraus, e uma única forma de subir uma escada com 1 degrau, assim as condições iniciais são: $a_0 = 1$ ou $a_1 = 1$

c) De quantas maneiras essa pessoa pode subir uma escada com 8 degraus?

A partir das condições iniciais

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \; a_2 = 2, \; a_3 = 3, \; a_4 = 5,$$
$$a_5 = 8, \; a_6 = 13, \; a_7 = 21, \; a_8 = a_6 + a_7 = 34$$

5. Quantas funções existem do conjunto {1, 2, ..., n}, onde n é um inteiro positivo, para o conjunto {0, 1}, se:

a) a função é bijetiva?

Se: n = 1 há duas funções: { 1 → 0} ou {1 → 1}

n = 2 há duas funções: { 1 → 0, 2 → 1} ou {1 → 1, 2 → 0}

n ≥ 3 não há nenhuma função bijetiva possível, pois o tamanho do domínio é maior que o do contra - domínio.

b) a função associa o valor 0 aos valores 1 e n?

Se: n = 1 só há uma função possível: { 1 → 0}

n ≥ 2, com a função associando “0” aos valores “1” e “n”, fica-se livre para escolha dos outros n-2 valores para a função. Como há 2 possibilidades (0 ou 1) para cada valor, há 2^{n-2} funções possíveis.

6. Suponha que um departamento contenha 10 homens e 15 mulheres. De quantas maneiras pode-se formar um comitê de seis membros se o comitê tem que ter o mesmo número de homens e mulheres?

Se o comitê tem 6 membros e metade deve ser de cada gênero, pode-se formar um comitê dividindo em:

escolhe-se 3 homens dos 10 disponíveis: há C(10,3) = 120 maneiras,

escolhe-se 3 mulheres entre as 15 disponíveis: há C(15,3) = 455 maneiras;

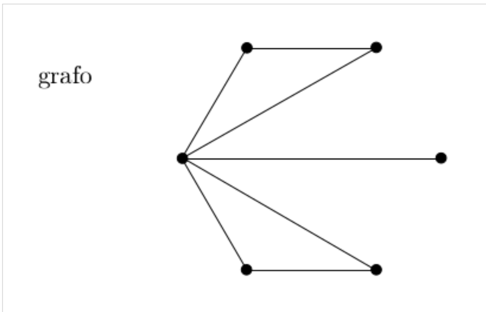
Pelo princípio da multiplicação, há 120 * 455-v54600 maneiras de se formar o comitê.

7. Quantas arestas têm um grafo com vértices de graus 5, 2, 2, 2, 2, 1 ?

O grafo possui seis vértices e tem um grau total de 5+2+2+2+2+1 = 14.

Com isso deduz-se que há 7 arestas.

Desenhe um possível grafo.



8. O que representa a soma das entradas de uma coluna de uma matriz de adjacência de um grafo não dirigido?

Cada aresta incidente ao vértice v contribui com 1 na v-ésima coluna. Assim, a soma das entradas nessa coluna representa o nº de arestas incidentes a v. Como uma aresta incidente a um vértice v contribui com “1” para o grau do vértice (e “2” se for um laço), a soma dessa coluna representa o grau do vértice v, se não houver laços e mais um para cada laço existente.

E de um grafo dirigido?

Cada aresta incidente ao vértice v contribui com 1 na v-ésima coluna, isto é, v é o nó terminal da aresta dirigida. Assim, a soma das entradas nessa coluna representa o nº de arestas incidentes a v, representando o grau de entrada do vértice v.

9. Para que valores de m e n são K_n e $K_{m,n}$ Eulerianos?

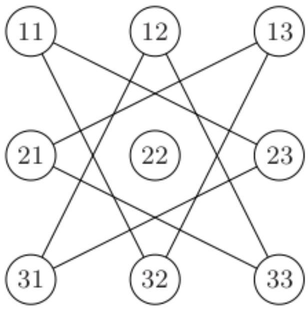
K_n é Euleriano quando *n* é ímpar, pois nesse caso, todos os vértices têm grau par. $K_{m,n}$ é Euleriano quando *m* e *n* são pares.

10. Seja o seguinte tabuleiro, em que ● representa um cavalo preto e ○ representa um cavalo branco:

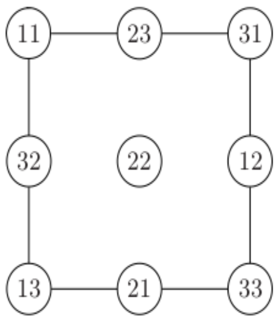
●		●
○		○

Lembrando que um cavalo (no jogo de xadrez) se move em L, modele o problema por meio de grafo e mostre como inverter as peças, isto é, colocar os cavalos pretos onde estão os brancos, e vice-versa.

Modelando-se cada casa (i, j), para $1 \leq i, j \leq 3$ como um vértice de nome ij, e cada movimento possível do cavalo como uma aresta, tem-se o seguinte grafo:



Ao "desenrolar" este grafo partindo-se de 11, caminhando-se no sentido horário e desenhando-se os vértices, mantendo-se a disposição de 3 em cada linha, tem-se a seguinte disposição dos vértices e arestas do mesmo grafo:



Veja que há várias soluções possíveis, tanto os cavalos se movendo no sentido horário no grafo acima, como no sentido anti-horário. Evidentemente, há a restrição de que para um cavalo se mover para a posição explicitada pelo vértice adjacente, é necessário que não haja cavalo na mesma; se houver, este deve ser movido antes. Na solução seguinte, pode-se ver os 4 cavalos como se movendo "ao mesmo tempo" girando em sentido horário, cada um se movendo 4 vezes. A solução é apresentada em 4 linhas, cada linha representando o movimento, ao mesmo tempo, dos 4 cavalos. Cada coluna mostra o trajeto de um dos cavalos. O movimento do cavalo em i_1j_1 para a posição i_2j_2 é representado por $i_1j_1 \rightarrow i_2j_2$.

Observe que os cavalos das posições 11 e 33 trocam de posição, assim como os cavalos das posições 13 e 31.

$11 \rightarrow 23$	$31 \rightarrow 12$	$33 \rightarrow 21$	$13 \rightarrow 32$
$23 \rightarrow 31$	$12 \rightarrow 33$	$21 \rightarrow 13$	$32 \rightarrow 11$
$31 \rightarrow 12$	$33 \rightarrow 21$	$13 \rightarrow 32$	$11 \rightarrow 23$
$12 \rightarrow 33$	$21 \rightarrow 13$	$13 \rightarrow 11$	$23 \rightarrow 31$