本次介绍直接通过求解线性方程得到二维平板的稳态传热。当然，醉翁之意不在酒，拉普拉斯方程代表的一众物理问题都可以迎刃而解。

1 回顾

严格来说是前年，介绍了如何通过Gauss–Seidel迭代方法求解二维平板传热方程。以Gauss–Seidel、Jacobi等为代表的一种方法均通过迭代进行矩阵的求解。由于其收敛曲线平滑，因而对于满足此类方法的矩阵，复杂与否都可以得到期望的结果。但是缺点显而易见，在上一篇文章中，100X100的网格计算了90s，这显然是不可接受的。对于传热方程、或者对于形式上类似的方程， 我们有更好的方法进行求解。

2 矩阵运算快速求解

2.1 二维传热方程的矩阵运算

无内热源，稳态的二维传热方程为

$$\nabla^2\phi = 0$$

空间差分可以得到：

$$\frac{\phi_{i-1,j}-2\phi_{i,j}+\phi_{i+1,j}}{\Delta^2 x}+\frac{\phi_{i,j-1}-2\phi_{i,j}+\phi_{i,j+1}}{\Delta^2 y}=0$$

考虑均匀的网格划分$\Delta x = \Delta y$, 上述方程可以化简为:

$$\phi_{i-1,j}+\phi_{i+1,j}+\phi_{i,j-1}+\phi_{i,j+1}-4\phi_{i,j}=0$$

根据《传热学》，这一步就可以进行迭代表达式的拆分了。直观来看，似乎并没有什么好方法去求解这个复杂的线性方程组。

2.1.1 在一维情况下思考

如果我们退一步，考虑一维的传热方程

$$\phi_{i-1}-2\phi_i+\phi_{i+1}=0$$

我们遍历每一种可能情况：

$$\begin{aligned}\phi_1-2\phi_2+\phi_3&=0\\ \phi_2-2\phi_3+\phi_4&=0\\ \phi_3-2\phi_4+\phi_{45}&=0\end{aligned}$$

注意到可以写为一个系数矩阵$A_{N\times N}$与$T_{N\times 1}$的乘积，且系数矩阵只有三个对角！（不考虑周期边界条件）

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & -2 & 1\\ 1 & \cdots & 0 & 1 & -2\end{bmatrix}_{N\times N}\quad T=\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_N\end{bmatrix}\quad Z=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$$

也就是说，传热方程可以写成一个线性方程组$AT=Z$。求解矩阵的线性方程组，自然而然的就想到几个方法：

1. 求逆。$T=A^{-1}Z$。
2. 分解。$A=LU, LUT=Z, b=UT, Lb=Z$

也就是说，这个方程好不好解，除了与本身的规模大小有关外，还与系数矩阵A的性质有关。我们重新观察A，发现他是：

1. 稀疏的。只有几个对角。——> 稀疏矩阵的逆往往是稠密的，稠密矩阵进行运算复杂度是N^3
2. 对称的。$A=A^T$
3. 在有边界值的情况下，是非奇异的。

A的性质非常好，也就是说可以通过特殊的矩阵分解方法进行快速矩阵运算求解。举个例子，加入对于一维杆，两端温度已知，上述矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&-2&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\cdots&\vdots\\0&\cdots&1&-2&1\\0&\cdots&0&0&1\end{bmatrix}_{N\times N}\qquad T=\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\vdots\\\phi_N\end{bmatrix}\quad Z=\begin{bmatrix}T_0\\0\\\vdots\\T_N\end{bmatrix}$$

A构成了三对角矩阵，求解三对角矩阵的线性方程组可以使用**追赶法**：

对于方程组

$$\begin{pmatrix}b_1&c_1&&&\\a_2&b_2&c_2&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&a_{n-1}&b_{n-1}&c_{n-1}\\&&&a_n&b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_{n-1}\\f_n\end{pmatrix}$$

利用

1. 计算$\{\beta_i\}$的递推公式：

   $\beta_1=c_1/b_1$

   $\beta_i=c_i/(b_i-a_i\beta_{i-1}),i=2,3,\cdots,n-1$
2. 求解$\mathbf{Ly}=\mathbf{f}$

   $y_1=f_1/b_1$

   $y_i=(f_i-a_iy_{i-1})/(b_i-a_i\beta_{i-1}),i=2,3,\cdots,n$
3. 求解$\mathbf{Ux}=\mathbf{y}$

   $x_n=y_n$

   $x_i=y_i-\beta_ix_{i+1},\ i=n-1,n-2,\cdots,2,1$

即可实现快速计算，即一种特殊LU分解。

2.1.2 在二维中

回到

$$\phi_{i-1,j}+\phi_{i+1,j}+\phi_{i,j-1}+\phi_{i,j+1}-4\phi_{i,j}=0$$

如果假设我们存在一个系数矩阵$A_{N\times N}$与描述平面温度分布的矩阵$T_{N\times N}$，这样的稠密矩阵相乘是非常繁琐的。自然的，类比一维空间差分的处理，自然的想到该方程对于了某个系数矩阵$A_{N\times N}$与电势矩阵$\phi_{N\times N}$的乘积，写为$A\phi=P_{N\times N}$。但是我们并没有很方便的工具去求解此问题（虽然可以考虑令$\phi=A^{-1}P$）。保持一维情况下求解稀疏矩阵的策略不变，可以将空间差分网格依据纵向拼接，构成$\Phi_{N^2\times1}$、$P_{N^2\times1}$以及系数矩阵$A_{N^2\times N^2}$， 即

$$\Phi=\begin{bmatrix}\phi_0\\\phi_1\\\vdots\\\phi_N\end{bmatrix},\quad\phi_j=\begin{bmatrix}\phi_{1,j}\\\phi_{2,j}\\\vdots\\\phi_{N,j}\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}P_0\\P_1\\\vdots\\P_N\end{bmatrix},\quad p_j=\begin{bmatrix}p_{1,j}\\p_{2,j}\\\vdots\\p_{N,j}\end{bmatrix},$$

系数矩阵A可以通过观察差分方程的格式得到：（暂时不考虑Δx）

$$A=\left[\begin{array}{ccccc:ccccc:ccccc:c:ccccc}
-4 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & -4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
1 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
\hdashline
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
\hdashline
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -4 & 1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & -4
\end{array}\right]$$

即系数矩阵A为分块矩阵，简化表示为

$$A=\begin{bmatrix}
T & E & Z & \cdots & E \\
E & T & E & \cdots & Z \\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\
Z & \cdots & E & T & E \\
E & \cdots & Z & T & E
\end{bmatrix}_{N^2\times N^2}$$

其中分块矩阵T,E,Z分别为

$$T=\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\
1 & -4 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & -4 & 1 \\
1 & \cdots & 0 & 1 & -4
\end{bmatrix}_{N\times N}
\quad
E=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}_{N\times N}
\quad
Z=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{N\times N}$$

显然的，二维问题又简化为求解线性方程组的问题，且对应的系数矩阵仍然是稀疏的。即对于$N^2\times N^2$规的矩阵，仅有九条对角线非0，$5N^2$个非0元素。

2.2 懒人求解工具

有很多种求解稀疏矩阵的工具，当然可以手搓，但是造轮子需要有一个非常扎实的数学基本功，至少我是不具备的。为此，介绍一种好用的稀疏矩阵线性方程组求解工具。

```
import scipy.sparse as sp
from scipy.sparse.linalg import spsolve
```

2.2.1 构建稀疏矩阵的方法

采用沿对角线构建稀疏矩阵，通过

```
diags = np.array([k1,k2,k3,...])
vals = np.vstack((e1,e2,e3,...))
mtx = sp.spdiags(vals,diags,N,N)
```

方式生成。其中，`diags`指定了对角线元素e所处的位置。k=0处于主对角线，k<0处于主对角线下方，k>0处于主对角线上方。对角线元素e是长度为N的向量，写入矩阵时，K<0时舍弃尾部元素，K>0时舍弃头部元素；`vals`将所有对角线向量组成多维向量；`sp.spdiags()`即根据上述规则生成规模为NXN的矩阵。

2.2.2 求解稀疏线性方程组

`scipy.sparse.linalg`提供了多种处理稀疏矩阵的工具。但是需要将矩阵的储存格式转换为按行/按列排列的形式。比如

```
mtx = sp.lil_matrix(mtx)
mtx = sp.csr_matrix(mtx)
```

之后，通过

```
T = spsolve(mtx, b)
```

即可快速的实现求解。

3 稳态传热数值解

无内热源，稳态的二维传热方程为

$$\nabla^2\phi = 0$$

在一个长为0.6m，宽为0.4m的矩形板，左右下三侧温度均为100度，上侧温度500度。横纵均分为128个网格，条件表示为

```
    Lx = 0.6
    Ly = 0.4
    Nx = 128
    Ny = 128

    dx = Lx/Nx
    dy = Ly/Ny

    "配置边界温度"
    T_right = 100
    T_left = 100
    T_up = 500
    T_down = 100
```

接下来，生成稀疏矩阵（考虑边界条件条件）

```
def Lmatrix_withBound(Nx,Ny,bound,dx,dy):
    '''
    Nx: Nx=Ny,差分网格横/纵方向上的节点数
```

```
    bound: nx2数组，给出了不同边界位置的坐标
    '''
    #对边界索引进行变换
    bou = (np.array([num[0]+Nx*num[1] for num in bound]))

    N_grid = Nx*Ny

    e00 = np.ones(N_grid)
    e00 /= dy**2
    e00[bou] = 0
    e00 = np.roll(e00, -(Nx ** 2 - Nx))

    e000 = np.ones(N_grid)
    e000 /= dy**2
    e000[bou] = 0
    e000 = np.roll(e000, (Nx ** 2 - Nx))

    e0 = np.ones(N_grid)
    e0 /= dy**2
    e0[bou] = 0
    e0 = np.roll(e0, -Nx)

    e6 = np.ones(N_grid)
    e6 /= dy ** 2
    e6[bou] = 0
    e6 = np.roll(e6, Nx)

    e1 = np.zeros(N_grid)
    e1[np.array(range(Nx-1,N_grid,Nx))] = 1
    e1 /= dx ** 2
    e1[bou] = 0
    e1 = np.roll(e1,-Nx+1)

    e5 = np.zeros(N_grid)
    e5[np.array(range(Nx - 1, N_grid, Nx))] = 1
    e5 /= dx ** 2
    e5[bou] = 0
    e5 = np.roll(e5, Nx )

    e2 = np.ones(N_grid)
    e2[np.array(range(Nx, N_grid, Nx))]=0
    e2 /= dx ** 2
    e2[bou] = 0
    e2 = np.roll(e2,-1)

    e4 = np.ones(N_grid)
    e4[np.array(range(Nx-1, N_grid, Nx))] = 0
    e4 /= dx ** 2
    e4[bou] = 0
    e4 = np.roll(e4, 1)

    e3 = (-2*np.ones(N_grid)/dx**2)+(-2*np.ones(N_grid)/dy**2)
    e3[bou] = 1

    diags = np.array([-(Nx ** 2 - Nx),-Nx,-Nx+1, -1 , 0 , 1 , Nx-1,Nx,(Nx ** 2 - Nx)])
    vals = np.vstack((e00 ,e0,  e1,  e2 , e3 ,e4, e5,  e6,e000))

    mtx = sp.spdiags(vals,diags,N_grid,N_grid)
    mtx = sp.lil_matrix(mtx)
    mtx = sp.csr_matrix(mtx)
```

```
    return mtx
```

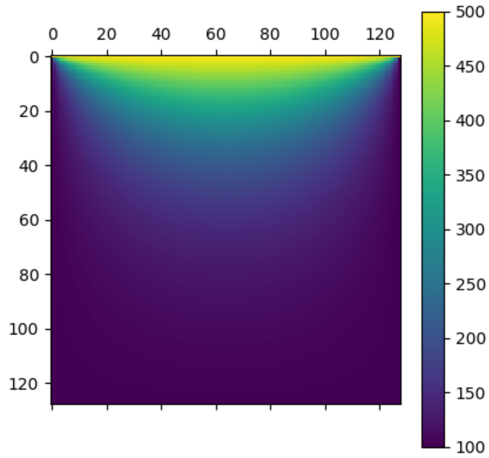
之后，依据边界温度条件构造稀疏矩阵与右端向量：

```
def bound_condition(T_left,T_right,T_up,T_down,Nx,Ny,dx,dy):
    T_right = T_right
    T_left = T_left
    T_up = T_up
    T_down = T_down
    RHS = np.zeros(Nx * Ny)
    "配置边界网格"
    bound_right = (Ny - 1) * np.ones((Nx, 2))
    bound_right[:][:, 0] = np.arange(0, Nx)
    bound_liner_right = np.array([num[0] + Nx * num[1] for num in bound_right]).astype(int)

    bound_left = np.zeros((Nx, 2))
    bound_left[:][:, 0] = np.arange(0, Nx)
    bound_liner_left = np.array([num[0] + Nx * num[1] for num in bound_left]).astype(int)

    bound_up = np.zeros((Ny, 2))
    bound_up[:][:, 1] = np.arange(0, Ny)
    bound_liner_up = np.array([num[0] + Nx * num[1] for num in bound_up]).astype(int)

    bound_down = (Nx - 1) * np.ones((Ny, 2))
    bound_down[:][:, 1] = np.arange(0, Ny)
    bound_liner_down = np.array([num[0] + Nx * num[1] for num in bound_down]).astype(int)

    bound = np.vstack((bound_left, bound_right, bound_up, bound_down)).astype(int)

    #添加边界上的解
    RHS[bound_liner_left] = T_left
    RHS[bound_liner_right] = T_right
    RHS[bound_liner_up] = T_up
    RHS[bound_liner_down] = T_down
    #生成稀疏矩阵
    Lmatx = Lmatrix_withBound(Nx,Ny, bound, dx,dy)
    return Lmatx,RHS
```

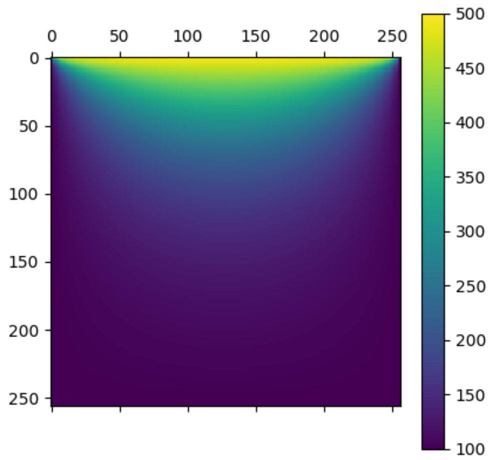
通过稀疏矩阵线性方程求解器得到温度的解，但是此温度是一个向量，需要重新转换为矩阵的形式。

```
T_grid = spsolve(Lmatx,RHS)
#转化为矩阵形式
T_martix = T_grid.reshape(Nx, Nx).T
#可以通过查看矩阵的值近似代替解的图像
plt.matshow(T_martix)
```

在计算0.12967610359191895s后，得到解的图像：



当网格为256x256时，在计算0.9013581275939941s后，得到解。



相比于迭代法，得到了将近700倍的加速，且误差仅存在于数据的储存上。

完整代码为：

```
def main():
    Lx = 0.6
    Ly = 0.4
    Nx = 256
    Ny = 256

    dx = Lx/Nx
    dy = Ly/Ny

    "配置边界温度"
    T_right = 100
    T_left = 100
    T_up = 500
    T_down = 100

    "配置系数矩阵A与向量b"
    Get_bound = bound_condition(T_left,T_right,T_up,T_down,Nx,Ny,dx,dy)
    Lmatx = Get_bound[0]
    RHS = Get_bound[1]
```

```python
    T_grid = spsolve(Lmatx,RHS)

    T_martix = T_grid.reshape(Nx, Nx).T  # 将矩阵

    return T_martix


if __name__ == "__main__":
    Lx = 0.6
    Ly = 0.4
    Nx = 256
    Ny = 256
    st = time.time()
    T_martix = main()
    end = time.time() - st
    print(end)

    fig = plt.figure(figsize=(5, 4), dpi=80)
    plt.cla()
    Tp = plt.matshow(T_martix)
    plt.colorbar(Tp)
    plt.show()
```