

Institut für Experimentalphysik der Technischen Universität Graz

&

Institut für Physik der Universität Graz

# **LABORÜBUNGEN 2: ELEKTRIZITÄT, MAGNETISMUS, OPTIK**

Übungsnummer: 1

Übungstitel: Abbe-Theorie

Betreuer/in: Harald Ditlbacher

Gruppennummer: 13

Name: Sebastian Brötz

Name: Stefanie Brandstötter

Mat. Nr.: 12406478

Mat. Nr.: 12415127

Datum der Übung: 09.12.2025

WS 2025/2026

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Allgemeine Informationen</b>	<b>3</b>
<b>2 Auflösungsvermögen einer Linse in Abhängigkeit von der numerischen Apertur</b>	<b>3</b>
2.1 Auswertung – Bestimmung des Auflösungsvermögens . . . . .	3
2.2 Diskussion – Vergleich mit theoretischer Erwartung . . . . .	6
<b>3 Einfluss der transmittierten Beugungsordnungen auf die Objektauflösung</b>	<b>6</b>
3.1 Auswertung – Analyse der Beugungsbilder . . . . .	6
3.2 Diskussion – Einfluss der Ordnungen auf die Auflösung . . . . .	9
<b>4 Freies Experimentieren</b>	<b>9</b>
4.1 Beugungsbild horizontaler Strukturen . . . . .	9
4.1.1 Auswertung - Untersuchung des Linienmusters . . . . .	9
4.1.2 Diskussion – Interpretation des Beugungsverhaltens . . . . .	10
4.2 Einfluss des Linienabstands auf das Beugungsbild . . . . .	10
4.2.1 Auswertung – Analyse der Abstandsabhängigkeit . . . . .	10
4.2.2 Diskussion – Bewertung der beobachteten Effekte . . . . .	13
4.3 Intensitätsverteilung in der Beugungsebene . . . . .	13
4.3.1 Auswertung – Analyse der Intensitätsprofile . . . . .	13
4.3.2 Diskussion – Interpretation im Rahmen der Fourieroptik . . . . .	14
<b>A Python-Funktion</b>	<b>17</b>

# 1 Allgemeine Informationen

Zu Beginn des Laborberichts werden allgemeine Konventionen und Definitionen, die während der gesamten Auswertung verwendet werden angeführt. Auf diese Punkte wird im Text fortlaufend hingewiesen.

- **Software / Fits.** Alle numerischen Auswertungen, Kurvenanpassungen und Regressionsrechnungen werden mit Python durchgeführt. Für nichtlineare und lineare Fits wird die Software `scipy.optimize.curve_fit` [1] verwendet. Aus der gelieferten Kovarianzmatrix der Regressionsrechnung werden zudem die Unsicherheiten der jeweiligen Fitparameter entnommen.
- **Größtunsicherheitsmethode.** Für die Fehlerabschätzung von berechneten Größen wird die Größtunsicherheitsmethode verwendet. Sei dabei eine beliebige Zielgröße  $y$  als Funktion der Messgrößen  $x_i$  gegeben, so folgt die Unsicherheit von  $y$  aus der Größtunsicherheitsmethode mit:

$$\Delta y_{\max} = \sum_i \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i, \quad (1)$$

Hier ist  $\Delta x_i$  die Unsicherheit der jeweiligen Messgröße.

- **Fehlerfortpflanzung bei unabhängigen Größen.** Hängt eine berechnete Größe  $y$  von mehreren unabhängigen Messgrößen  $x_i$  ab, deren Unsicherheiten statistischer Natur sind (z.B. Standardabweichung), so werden die einzelnen Beiträge wie folgt kombiniert [4]:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}. \quad (2)$$

Dies gewährleistet eine korrekte statistische Fehlerabschätzung bei mehreren unabhängigen Unsicherheiten.

## 2 Auflösungsvermögen einer Linse in Abhängigkeit von der numerischen Apertur

### 2.1 Auswertung – Bestimmung des Auflösungsvermögens

In dem ersten Versuch wird das Auflösungsvermögen eines optischen Systems in Abhängigkeit von der Wellenlänge des verwendeten Lichts  $\lambda$  sowie der numerischen Apertur  $NA$  untersucht. Das Auflösungsvermögen  $\Delta x_{\min}$  beschreibt dabei die Fähigkeit eines optischen Systems, zwei benachbarte Punkte noch getrennt abbilden zu können.

Zur experimentellen Bestimmung diente als Testobjekt das „Testobjekt 1951 USAF Target“, welches aus mehreren Gruppen von horizontalen und vertikalen Strichen mit unterschiedlichen Abständen besteht. Zur Variation der Wellenlänge wurden eine blaue LED mit einer Wellenlänge von  $\lambda_{\text{blau}} = (470 \pm 5) \text{ nm}$ , sowie eine rote LED mit  $\lambda_{\text{rot}} = (635 \pm 5) \text{ nm}$  als Lichtquellen eingesetzt. Die numerische Apertur  $NA$  des optischen Systems wurde durch drei Blenden mit unterschiedlichen Durchmessern  $d_1 = (2,00 \pm 0,10) \text{ mm}$ ,  $d_2 = (3,00 \pm 0,10) \text{ mm}$  und  $d_3 = (6,00 \pm 0,10) \text{ mm}$  verändert. Aus dem Blendendurchmesser  $d$  und der Brennweite der verwendeten Linse  $f = 60 \text{ mm}$  ergibt sich die Numerische Apertur gemäß der Angabe [3] zu:

$$NA = \frac{d}{2f} \quad \Delta NA = \frac{\Delta d}{2f} \quad (3)$$

Für jede der insgesamt sechs möglichen Kombinationen aus Wellenlänge und Blendendurchmesser wurde ein Bild des Targets aufgezeichnet. Die entsprechenden Aufnahmen sind in Abbildung 1 dargestellt.

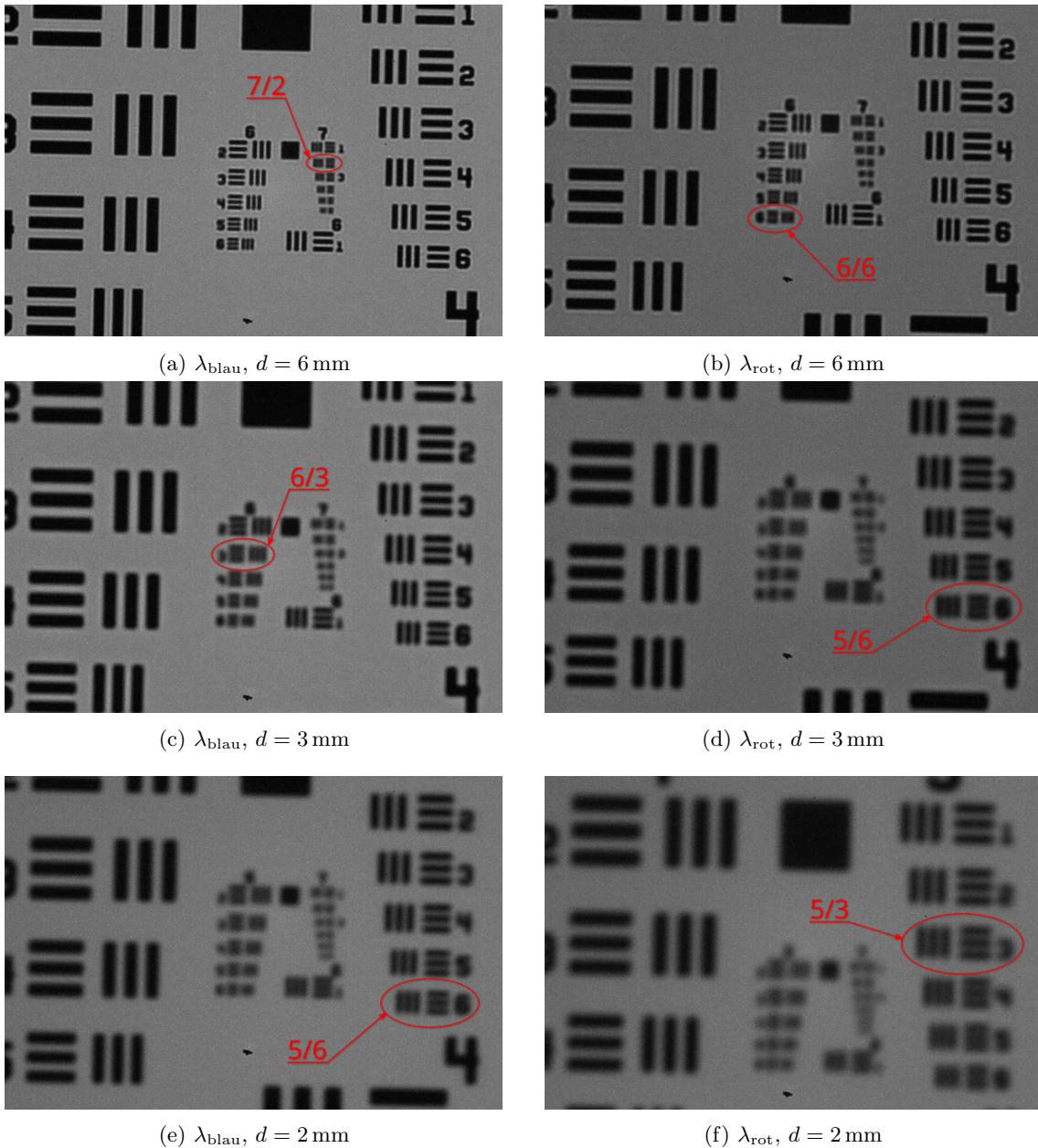


Abbildung 1: Aufnahmen des USAF-Testobjekts 1951 für verschiedene Kombinationen von Wellenlänge und Blendendurchmesser. Die linke Spalte zeigt die Messungen mit blauem Licht ( $\lambda_{\text{blau}} = 470 \text{ nm}$ ) und die rechte Spalte mit rotem Licht ( $\lambda_{\text{rot}} = 635 \text{ nm}$ ).

Als nächstes wurde in jedem Bild jenes Element ausgewählt, bei welchem weder die horizontalen noch die vertikalen Striche eindeutig unterscheidbar sind. Die zugehörige Element- und Gruppennummer sind in der jeweiligen Abbildung markiert und zusätzlich in Tabelle 1 zusammengefasst. Aus diesen Gruppen- und Elementnummern lässt sich mithilfe der gegebenen Abstände beziehungsweise Raumfrequenzen des Targets das minimale Auflösungsvermögen  $\Delta x_{\min}$  bestimmen. Die Unsicherheit der Messung wird entsprechend der Ablesegenauigkeit als  $\pm 1$  Element ange setzt. Die detaillierte Berechnung des Auflösungsvermögens  $\Delta x_{\min}$  und der Unsicherheit  $\Delta(\Delta x_{\min})$  erfolgt mithilfe der im Anhang A dokumentierten Python-Funktion.

Zusätzlich kann aus den bekannten Wellenlängen  $\lambda$  und Blendendurchmessern  $d$  der theoretische

Tabelle 1: Identifizierte Gruppennummern und Elementnummern des USAF-Targets für die verschiedenen Messungen. Angegeben ist jeweils das Element, bei dem die Striche nicht mehr aufgelöst werden konnten.

Farbe	Durchmesser / mm	Gruppe	Element
blau	$6,00 \pm 0,10$	7	2
blau	$3,00 \pm 0,10$	6	3
blau	$2,00 \pm 0,10$	5	6
rot	$6,00 \pm 0,10$	6	6
rot	$3,00 \pm 0,10$	5	6
rot	$2,00 \pm 0,10$	5	3

Wert für das Auflösungsvermögen mit dem Rayleigh-Kriterium [5] berechnet werden. Die Unsicherheit folgt entsprechend über die Größtunsicherheitsmethode (siehe Kapitel 1).

$$\Delta x_{\min}^{(\text{theo})} = \frac{1,22 \cdot f \cdot \lambda}{d} \quad \Delta(\Delta x_{\min}^{(\text{theo})}) = \Delta x_{\min}^{(\text{theo})} \cdot \left( \frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\Delta d}{d} \right) \quad (4)$$

Die gemessenen und die theoretischen Werte für das minimale Auflösungsvermögen sind in Tabelle 2 zusammengefasst und zeigen eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie.

Tabelle 2: Vergleich der gemessenen und theoretisch berechneten Werte für das minimale Auflösungsvermögen  $\Delta x_{\min}$ . Für jede Kombination aus Wellenlänge  $\lambda$  und Blendendurchmesser  $d$  sind die gemessenen und die berechneten Werte mit den zugehörigen Unsicherheiten angeführt.

Farbe	$d$ / mm	$\Delta x_{\min}^{(\text{mess})}$ / $\mu\text{m}$	$\Delta x_{\min}^{(\text{theo})}$ / $\mu\text{m}$
blau	$6,00 \pm 0,10$	$6,9 \pm 0,9$	$5,73 \pm 0,16$
blau	$3,00 \pm 0,10$	$12,4 \pm 1,6$	$11,5 \pm 0,5$
blau	$2,00 \pm 0,10$	$18 \pm 3$	$17,2 \pm 1,1$
rot	$6,00 \pm 0,10$	$8,8 \pm 1,0$	$7,8 \pm 0,2$
rot	$3,00 \pm 0,10$	$18 \pm 3$	$15,5 \pm 0,7$
rot	$2,00 \pm 0,10$	$25 \pm 3$	$23,2 \pm 1,4$

Zuletzt sind in Abbildung 2 noch die gemessenen und theoretischen Werte für das minimale Auflösungsvermögen in Abhängigkeit von der Numerischen Apertur in einem Diagramm zur anschaulichen Gegenüberstellung aufgetragen.

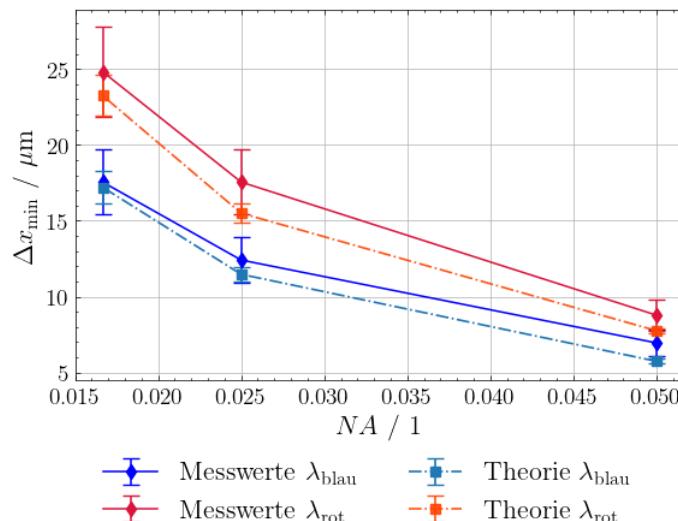


Abbildung 2: Minimales Auflösungsvermögen  $\Delta x_{\min}$  in Abhängigkeit von der numerischen Apertur  $NA$  für blaues ( $\lambda_{\text{blue}} = 470 \text{ nm}$ ) und rotes Licht ( $\lambda_{\text{red}} = 635 \text{ nm}$ ). Die durchgezogenen Linien entsprechen den gemessenen Werten und die strich-punktierten Linien den theoretischen Verläufen nach Gleichung 4. Blaue Symbole und Linien entsprechen dem blauen Licht, rote dem roten Licht.

## 2.2 Diskussion – Vergleich mit theoretischer Erwartung

Die experimentell ermittelten Werte zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den theoretischen Erwartungen. Wie in Tabelle 2 und in Abbildung 2 eindeutig erkennbar, sind nahezu alle gemessenen Werte in dem jeweiligen Unsicherheitsbereich konsistent mit den theoretisch berechneten Werten. In dem Diagramm ist außerdem den Zusammenhang zwischen numerischer Apertur  $NA$  und Auflösungsvermögen  $\Delta x_{\min}$  dargestellt. Mit steigender numerischer Apertur nimmt das minimale Auflösungsvermögen ab. Dies entspricht einer Verbesserung der räumlichen Auflösung, da kleinere Strukturen getrennt von einander abgebildet werden können.

Der Einfluss der Wellenlänge  $\lambda$  zeigt sich ebenfalls deutlich in den Messergebnissen. Für jede identische numerische Apertur liefert das blaue Licht ein kleineres Auflösungsvermögen als das rote Licht. Dieses Verhalten steht in vollständiger Übereinstimmung mit der theoretischen Erwartung aus Gleichung 4.

Die leichten Abweichungen zwischen den gemessenen und theoretischen Werten lassen sich auf mehrere Faktoren zurückführen. Eine wesentliche Unsicherheit entsteht bei der visuellen Bestimmung des minimalen Elements im Target. Die Entscheidung, ob zwei Linien getrennt wahrnehmbar sind oder nicht, ist subjektiv und hängt vom jeweiligen Beobachter ab. Zudem können Abbildungsfehler der verwendeten Linse, wie sphärische und chromatische Aberrationen, zu einer Verschlechterung der tatsächlichen Auflösung gegenüber dem Idealfall führen. Auch die endliche Dicke der Blende sowie leichte Ungenauigkeiten in deren Positionierung tragen zu geringfügigen Abweichungen bei.

Zur Verbesserung der Messgenauigkeit wäre eine automatisierte digitale Bildanalyse der aufgezeichneten Bilder sinnvoll. Durch objektive Kontrastmessungen mittels geeigneter Algorithmen könnte die subjektive Komponente der visuellen Beurteilung eliminiert werden. Ebenso würde die Verwendung von hochwertigeren achromatischen Linsen einige Aberrationen reduzieren. Eine präzise mechanische Justierung der Blenden sowie eine genauere Fertigung mit engeren Toleranzen würden ebenfalls zu besseren Ergebnissen führen. Insgesamt bestätigt der Versuch eindrucksvoll die fundamentalen Gesetzmäßigkeiten der Beugung und deren Einfluss auf das Auflösungsvermögen optischer Systeme.

## 3 Einfluss der transmittierten Beugungsordnungen auf die Objektauflösung

### 3.1 Auswertung – Analyse der Beugungsbilder

In diesem Versuchsteil gilt es den Einfluss einzelner Beugungsordnungen auf die Auflösung eines Objekts zu untersuchen. Dazu wurde eine Irisblende in der Beugungsebene positioniert, mit welcher gezielt einzelne Beugungsordnungen blockiert werden können. Für fünf verschiedene Blendeneinstellungen wurden jeweils das Objektbild sowie das zugehörige Beugungsbild aufgezeichnet. Die Beugungsbilder zeigen dabei, welche Ortsfrequenzen zur Bildentstehung beitragen und erlauben Rückschlüsse auf die im Objektbild sichtbaren Strukturen. Als Testobjekt wurde das vertikale Linienmuster der Gruppe 3 und Elementnummer 4 verwendet.

#### (1) Ohne Begrenzung der Beugungsordnungen

Bei vollständig geöffneter Blende zeigt das Objektbild in Abbildung 3 drei scharf getrennte vertikale Linien. Im zugehörigen Beugungsbild sind mehrere symmetrisch angeordnete Beugungsmaxima bis zur fünfzehnten Ordnung erkennbar. Die große Anzahl transmittierter Ortsfrequenzen ermöglicht eine nahezu vollständige Rekonstruktion der Objektstruktur und erklärt die hohe Auflösung des Objektbildes.



Abbildung 3: Objektbild (links) und Beugungsbild (rechts) ohne Begrenzung der Beugungsordnungen. Im Beugungsbild erscheinen Maxima bis zur fünfzehnten Ordnung und im Objektbild sind alle drei vertikalen Linien scharf getrennt sichtbar.

### (2) Ausschließlich nullte Beugungsordnung

Wird die Blende so weit geschlossen, dass nur noch die nullte Ordnung transmittiert wird, verschwindet die Struktur im Objektbild vollständig. Die drei Linien sind nicht mehr als getrennte Elemente wahrnehmbar, und das Beugungsbild zeigt ausschließlich das zentrale Maximum. Da keinerlei höhere Ortsfrequenzen zur Bildkonstruktion beitragen können, ist eine Auflösung der periodischen Struktur nicht möglich. Dieser Sachverhalt ist in Grafik 4 abgebildet.

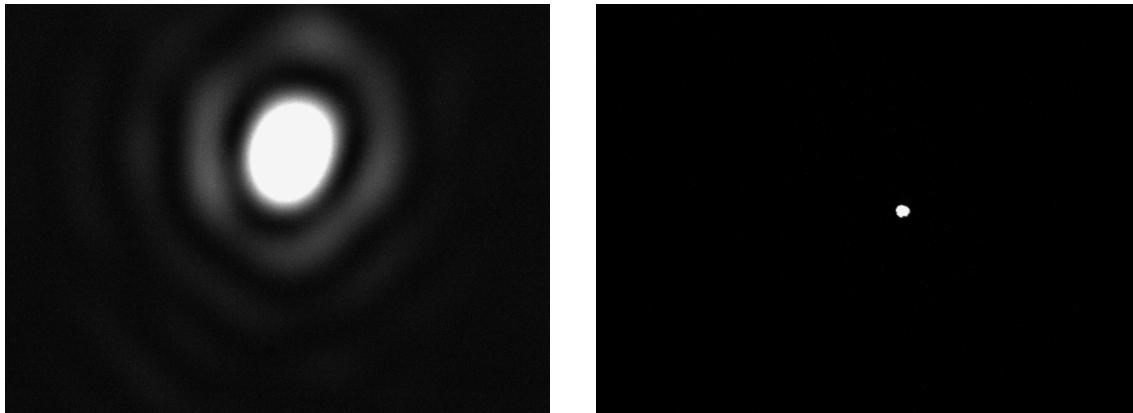


Abbildung 4: Objektbild (links) und Beugungsbild (rechts) bei Transmission ausschließlich der nullten Ordnung. Die Linienstruktur verschwindet vollständig, da nur das zentrale Beugungsmaximum übertragen wird.

### (3) Transmission der nullten und ersten Beugungsordnung

Durch Hinzufügen der ersten Beugungsordnung entstehen erstmals schwache Helligkeitsunterschiede im Objektbild. Die einzelnen Linien sind jedoch noch nicht klar voneinander getrennt, stattdessen zeigt sich lediglich eine grobe periodische Struktur. Das Beugungsbild zeigt deutlich die beiden symmetrischen Maxima der ersten Ordnung neben dem zentralen Maximum der nullten Ordnung. Die zugehörigen Objekt- und Beugungsbilder sind in Abbildung 5 erkennbar.

### (4) Transmission der nullten, ersten und dritten Beugungsordnung

Mit der Transmission bis zur dritten Ordnung werden deutlich mehr Ortsfrequenzen übertragen. Das Objektbild in Abbildung 6 zeigt nun gut differenzierbare Linien, allerdings immer noch mit leichter Unschärfe an den Kanten. Im Beugungsbild treten zusätzlich die Maxima der dritten Ordnung auf. Man erkennt hier sehr gut, dass die zusätzlichen Frequenzanteile entscheidend für eine scharfe Darstellung des Objekts sind.

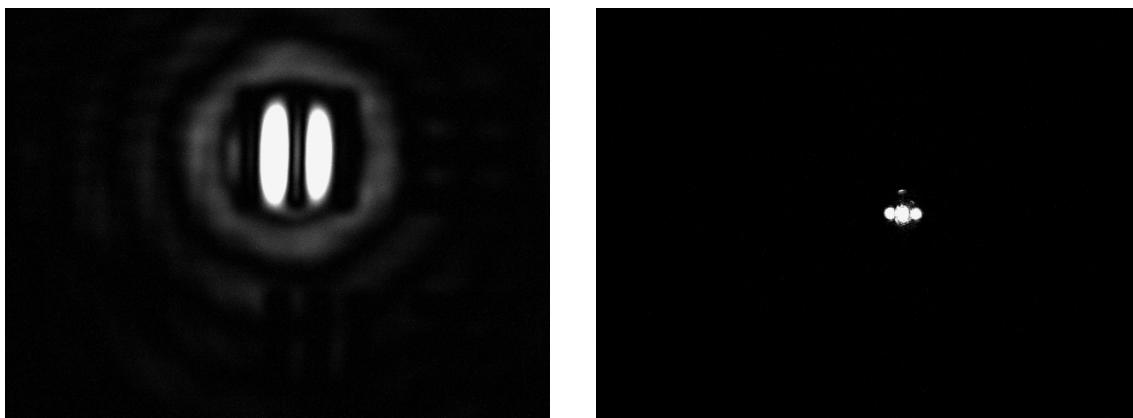


Abbildung 5: Objektbild (links) und Beugungsbild (rechts) bei Transmission der nullten und ersten Ordnung. Es zeigt sich eine schwache periodische Struktur, die Linien sind jedoch nicht scharf getrennt.

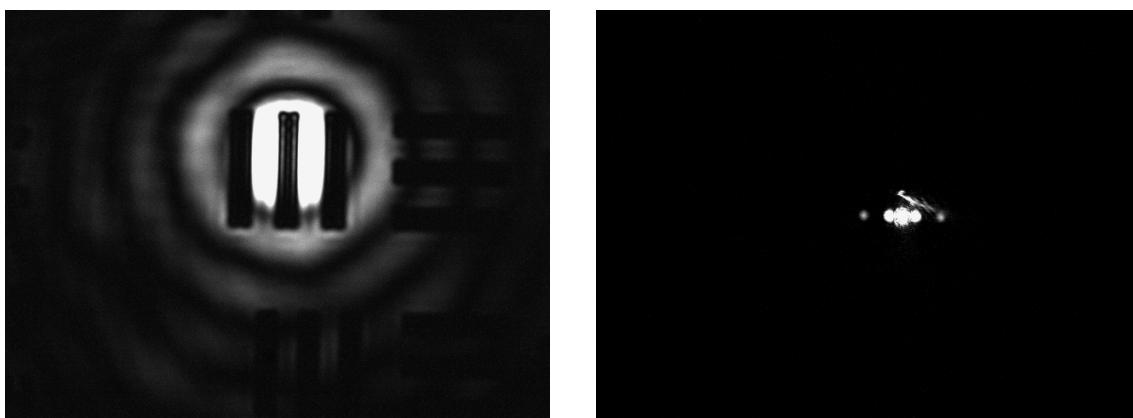


Abbildung 6: Objektbild (links) und Beugungsbild (rechts) bei Transmission bis zur dritten Ordnung. Die Linien sind nun deutlich differenzierbar, zeigen aber noch leichte Unschärfe.

#### (5) Transmission der nullten, ersten, dritten und fünften Beugungsordnung

Bei Transmission bis zur fünften Ordnung steht nahezu das komplette relevante Spektrum an Ortsfrequenzen zur Verfügung. Das Objektbild in Abbildung 7 entspricht in seiner Qualität nahezu dem Fall ohne Begrenzung. Die drei Linien des Objekts sind scharf voneinander getrennt und deutlich erkennbar. Im Beugungsbild erscheinen weitere Maxima bis zur fünften Ordnung, welche für die feinen Details der Linienstruktur verantwortlich sind.



Abbildung 7: Objektbild (links) und Beugungsbild (rechts) bei Transmission bis zur fünften Ordnung. Die Linien sind scharf getrennt und entsprechen nahezu dem unbegrenzten Fall.

### 3.2 Diskussion – Einfluss der Ordnungen auf die Auflösung

Die Messergebnisse zeigen deutlich den direkten Zusammenhang zwischen der Anzahl transmittierter Beugungsordnungen und der erreichbaren Auflösung. Wird ausschließlich die nullte Ordnung übertragen, so verschwindet jede periodische Struktur vollständig, da keinerlei Ortsfrequenzen des Testobjekts zur Bildrekonstruktion beitragen. Die nullte Ordnung enthält somit lediglich die mittlere Helligkeit des Objekts.

Durch Hinzufügen der ersten Beugungsordnung entsteht erstmals eine periodische Helligkeitsveränderung im Objektbild. Diese entspricht der fundamentalen Ortsfrequenz des Linienmusters, ist jedoch unzureichend für eine klare Trennung der einzelnen Linien. Erst durch Transmission der dritten Ordnung werden die Linien deutlich sichtbar, da nun höhere Frequenzanteile zur Rekonstruktion der Struktur beitragen.

Bei Transmission bis zur fünften Ordnung ist das Objektbild nahezu identisch mit dem unbegrenzten Fall. Das Linienmuster kann dementsprechend bereits durch die ersten fünf Ordnungen sehr gut approximiert werden. Höhere Ordnungen führen dann nur noch zu minimalen Verbesserungen der Auflösung. Die Beobachtungen stimmen vollständig mit der Abbe'schen Theorie überein, welche besagt, dass die Rekonstruktion periodischer Strukturen erst durch die Interferenz mehrerer Beugungsordnungen ermöglicht wird.

Abweichungen vom Fokus, insbesondere bei kleinen Blendendurchmessern, führen zu einer zusätzlichen Unschärfe der Linien. Ebenfalls besitzt die Einstellung der Beleuchtungsstärke einen Einfluss auf das Ergebnis. Fällt zu viel Licht auf den Kamerasensor, so kann es im Bereich der nullten Beugungsordnung zu einer Sättigung kommen. Dies führt dazu, dass höhere Ordnungen schwer bis gar nicht erkennbar sind. Eine nicht exakt zentrierte Irisblende kann außerdem dazu führen, dass einzelne Ordnungen asymmetrisch abgeschnitten oder ungleichmäßig geschwächt werden.

Zur Verbesserung der Messgenauigkeit wäre eine feinere Einstellung der Blende in der Beugungsebene sinnvoll. Eine systematische Kontrolle des Fokus durch Referenzbilder oder eine softwaregestützte Messung könnten die Bildqualität weiter stabilisieren. Insgesamt bestätigen die Ergebnisse jedoch eindrucksvoll die erwartete Zunahme der Auflösung mit steigender Anzahl an transmittierten Beugungsordnungen.

## 4 Freies Experimentieren

### 4.1 Beugungsbild horizontaler Strukturen

#### 4.1.1 Auswertung - Untersuchung des Linienmusters

Im Rahmen des freien Experimentierens wurde zusätzlich ein Testobjekt mit horizontalen Linien untersucht, um den Zusammenhang zwischen der Orientierung der Objektstruktur und der Ausrichtung der Beugungsmaxima zu verifizieren. Das Objektbild in Abbildung 8 (links) zeigt drei klar getrennte horizontale Linien. Im zugehörige Beugungsbild in Abbildung 8 (rechts) ist eine vertikale Anordnung der Beugungsmaxima zu erkennen. Dies entspricht der erwarteten orthogonalen Beziehung zwischen Objektstruktur und Beugungsebene.

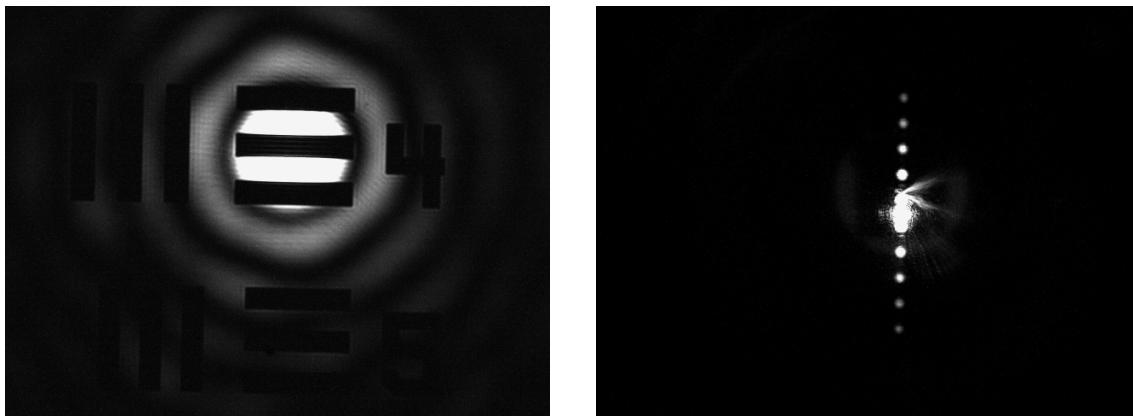


Abbildung 8: Objektbild mit horizontalen Linien (links) und zugehöriges Beugungsbild (rechts). Die horizontale Ausrichtung der Linien führt zu einer vertikalen Anordnung der Beugungsmaxima.

#### 4.1.2 Diskussion – Interpretation des Beugungsverhaltens

Das Beugungsbild der horizontalen Linien zeigt eine deutliche vertikale Anordnung der Beugungsmaxima, was mit den Vorhersagen der Abbe-Theorie übereinstimmt. Da das Objekt ausschließlich eine periodische Struktur in horizontaler Richtung besitzt, entsteht die Beugung senkrecht dazu, sodass die Intensitätsmaxima im Beugungsbild entlang der vertikalen Achse angeordnet sind.

Die Intensität höherer Ordnungen nimmt schneller ab als bei den zuvor untersuchten vertikalen Strukturen (vgl. Abbildung 7). Dies kann auf eine leicht ungleichmäßige Ausleuchtung oder eine Schiefstellung des Objekts zurückgeführt werden, die dazu führt, dass bestimmte Frequenzen abgeschwächt oder asymmetrisch dargestellt werden. Zusätzlich kann eine Fokus-Abweichung dazu beitragen, dass feine horizontale Strukturen weniger genau übertragen werden.

Für eine Verbesserung der Messgenauigkeit wäre eine präzisere Fixierung des Objektes hilfreich, um eine Verkippung auszuschließen und ein symmetrisches Beugungsbild sicherzustellen. Auch eine optimierte, vollständig zentrierte Beleuchtung würde die Darstellung höherer Ordnungen stabilisieren.

## 4.2 Einfluss des Linienabstands auf das Beugungsbild

#### 4.2.1 Auswertung – Analyse der Abstandsabhängigkeit

In dem folgenden Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen dem Linienabstand eines Objekts und dem Abstand der Beugungsmaxima in der Beugungsebene untersucht. Dazu wurden drei verschiedene Elemente des Testobjekts aus Versuch 2 mit bekannten Linienabständen ausgewählt. Die entsprechenden Gruppen- und Elementnummern sind (2,4) für Objekt eins, (3,4) für Objekt zwei und (4,4) für Objekt drei. Die zugehörigen Linienabstände  $a$  wurden mithilfe der im Anhang A dokumentierten Python-Funktion aus der Tabelle der Raumfrequenzen bestimmt und ergeben sich zu:

$$a_1 = (180 \pm 30) \mu\text{m} \quad a_2 = (89 \pm 11) \mu\text{m} \quad a_3 = (44 \pm 5) \mu\text{m}$$

Als kohärente Lichtquelle diente ein Festkörper-Laser mit einer bekannten Wellenlänge von  $\lambda = 531,9 \text{ nm}$ . Für jedes der drei Testobjekte wurde das Beugungsbild in der Brennebene einer Linse mit Brennweite  $f = 60 \text{ mm}$  aufgezeichnet<sup>1</sup>. Die entsprechenden Beugungsbilder sind in Abbildung 9 dargestellt. Um höhere Beugungsordnungen besser differenzieren zu können wurde eine spezielle *color map* verwendet.

<sup>1</sup>Für die Wellenlänge des Festkörper-Lasers und für die Brennweite der Linse ist in der Abgabe [3] keine Angabe der Unsicherheit vorhanden. Entsprechend einer einfacheren Berechnung wird auch hier keine Unsicherheit angesetzt.

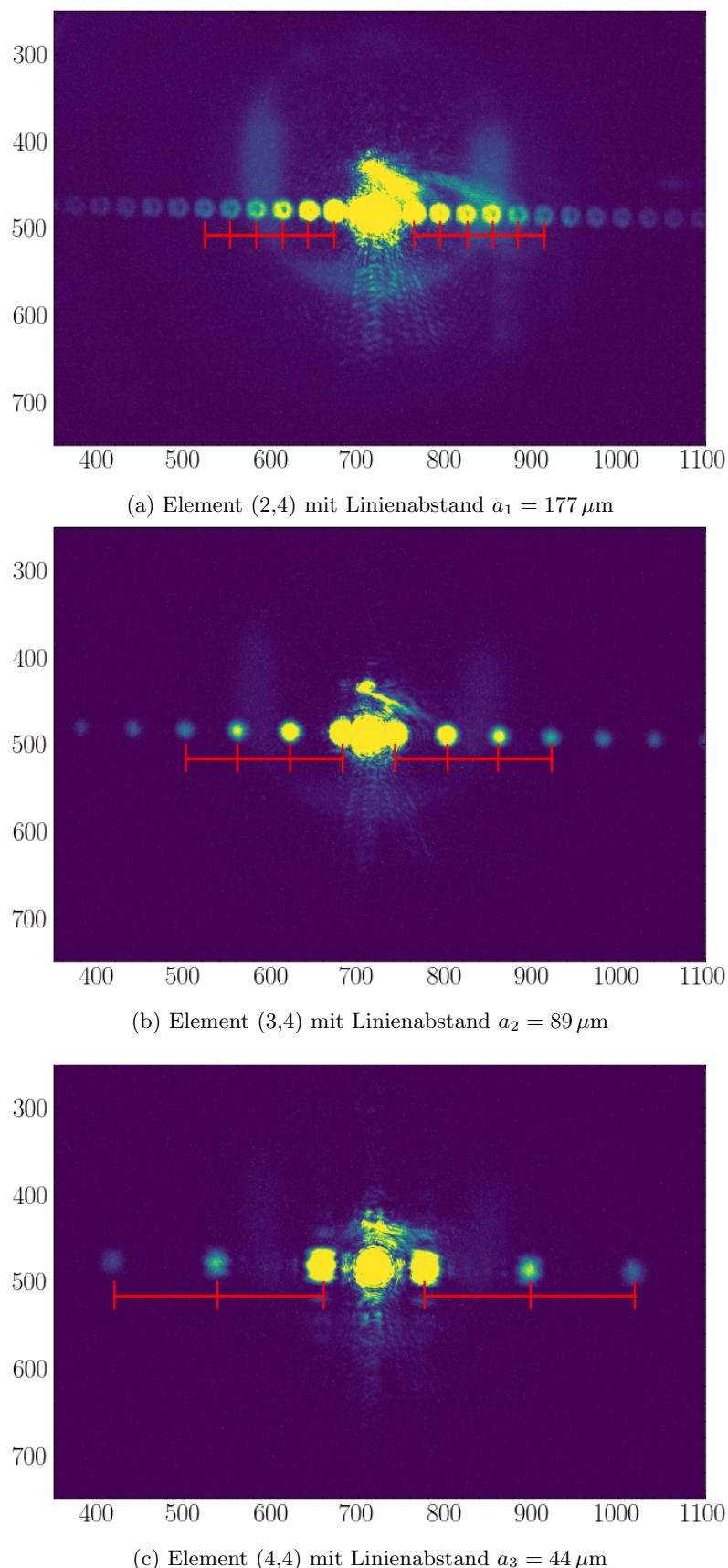


Abbildung 9: Beugungsbilder der drei untersuchten Testobjekte mit unterschiedlichen Linienabständen. Die roten Linien markieren die Positionen der detektierten Beugungsmaxima. Mit abnehmendem Linienabstand des Objekts vergrößert sich der Abstand der Beugungsmaxima.

Zur Auswertung wurden in jedem Beugungsbild die Positionen der Intensitätsmaxima manuell

in Pixelkoordinaten bestimmt. Die entsprechenden Positionen sind in Abbildung 9 durch vertikale rote Markierungen gekennzeichnet. Aus den Pixelpositionen benachbarter Maxima wurden die Abstände  $d$  berechnet und anschließend der Mittelwert sowie die Standardabweichung gebil-det. Die Gesamtunsicherheit  $\Delta d$  berücksichtigt sowohl die statistische Unsicherheit als auch eine Ablesegenauigkeit von  $\Delta d_{\text{Abl}} = \pm 1$  Pixel:

$$\Delta d = \sqrt{\left(\frac{\sigma_d}{\sqrt{N}}\right)^2 + \Delta d_{\text{Abl}}^2} \quad (5)$$

wobei  $\sigma_d$  die Standardabweichung der Einzelabstände und  $N$  die Anzahl der gemessenen Abstände bezeichnet.

Die gemessenen mittleren Abstände zwischen benachbarten Beugungsmaxima ergeben sich zu:

$$d_1 = (29,9 \pm 1,1) \text{ Pixel} \quad d_2 = (60,0 \pm 1,1) \text{ Pixel} \quad d_3 = (120,8 \pm 1,4) \text{ Pixel}$$

Bei einem Gitter mit Spaltabstand  $a$  entstehen Beugungsmaxima bei Winkeln  $\theta$ , welche der folgenden Bedingung entsprechen [2].

$$a \sin(\theta) = m\lambda \quad (6)$$

Für kleine Winkel gilt die Näherung  $\sin(\theta) \approx \tan(\theta) = y/f$ , wobei  $y$  die Position des Maximums in der Brennebene ist<sup>2</sup>. Der Abstand  $\Delta y$  zwischen zwei benachbarten Maxima ergibt sich damit zu:

$$\Delta y = \frac{f\lambda}{a} \quad (7)$$

Da die Abstände allerdings in Pixeln gemessen wurden, muss der Abstand zwischen zwei benachbarten Beugungsmaxima  $\Delta y$  über die Pixelgröße  $p$  auf die gemessenen Abstände  $d$  umgerechnet werden:

$$d = p \cdot \Delta y = \frac{p \cdot f \cdot \lambda}{a} \quad \Delta d = d \left( \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta a}{a} \right) \quad (8)$$

Mit der hergeleiteten Formel 8 kann aus dem ersten Beugungsbild mit bekanntem Linienabstand  $a_1$  die Pixelgröße  $p$  des Kamerensors bestimmt werden. Die Unsicherheit berechnet sich gemäß der Größtunsicherheitsmethode (siehe Kapitel 1). Aus den Messwerten ergibt sich:

$$p = (1,7 \pm 0,3) \frac{\text{Pixel}}{\mu\text{m}}$$

Mit der bekannten Pixelgröße können nun für die beiden anderen Beugungsbilder die erwarteten Abstände gemäß Gleichung 8 berechnet und mit den gemessenen Werten verglichen werden. Die entsprechenden Zahlenwerte sind in Tabelle 3 zusammengefasst.

Tabelle 3: Vergleich der gemessenen und berechneten Abstände zwischen Beugungsmaxima für die drei untersuchten Testobjekte. Angegeben sind der Linienabstand  $a$  des Objekts, der gemessene Abstand  $d_{\text{mess}}$  in Pixeln sowie der berechnete Abstand  $d_{\text{calc}}$ .

Element	$a / \mu\text{m}$	$d_{\text{mess}} / \text{Pixel}$	$d_{\text{calc}} / \text{Pixel}$
(2,4)	$180 \pm 30$	$29,9 \pm 1,1$	
(3,4)	$89 \pm 11$	$60,0 \pm 1,1$	$60 \pm 17$
(4,4)	$44 \pm 5$	$120,8 \pm 1,4$	$120 \pm 30$

<sup>2</sup>Die Formel  $\tan(\theta) = y/f$  wurde aus der Angabe [3] entnommen.

#### 4.2.2 Diskussion – Bewertung der beobachteten Effekte

Die Messergebnisse bestätigen eindrucksvoll den Zusammenhang zwischen der räumlichen Struktur eines Objekts und seinem Beugungsmuster. Der Abstand der Beugungsmaxima  $y$  bzw.  $p$  verhält sich, wie theoretisch mit Gleichung 7 erwartet, indirekt proportional zum Linienabstand  $a$  des Objekts. Mit abnehmendem Linienabstand vergrößert sich der Abstand der Beugungsmaxima, was in Abbildung 9 deutlich sichtbar ist. Die sehr gute Übereinstimmung zwischen den gemessenen und berechneten Werten in Tabelle 3 zeigt, dass die verwendete Näherung für kleine Beugungswinkel gültig und die Messmethode zuverlässig ist.

Die relativ großen Unsicherheiten der berechneten Werte resultieren hauptsächlich aus der Unsicherheit der Pixelgröße, welche sich aus der Unsicherheit des ersten Linienabstands  $a_1$  fortpflanzt. Da die Linienabstände des Targets nur mit einer Genauigkeit von  $\pm 1$  Element bestimmt werden konnten, trägt diese Unsicherheit signifikant zum Gesamtfehler bei. Die manuelle Bestimmung der Positionen der Beugungsmaxima führt zusätzlich zu einer Ablesegenauigkeit, welche jedoch durch die statistische Betrachtung über mehrere Maxima deutlich reduziert werden konnte.

Die Annahme kleiner Beugungswinkel sowie eine nicht exakt senkrechte Ausrichtung der Kamera können die gemessenen Abstände systematisch verfälschen. Die endliche Ausdehnung der Laserlichtquelle sowie mögliche Aberrationen der verwendeten Linse können ebenfalls die Schärfe und Position der Beugungsmaxima beeinflussen.

Zur Verbesserung der Messgenauigkeit wäre eine softwaregestützte Bildanalyse zur Detektion der Beugungsmaxima sinnvoll. Außerdem würde eine Referenzmessung der Pixelgröße mit einem Objekt bekannter Abmessungen die Unsicherheit deutlich reduzieren. Insgesamt demonstriert der Versuch jedoch sehr anschaulich den Zusammenhang zwischen Objektstruktur und Beugungsmuster.

### 4.3 Intensitätsverteilung in der Beugungsebene

#### 4.3.1 Auswertung – Analyse der Intensitätsprofile

In dem abschließenden Versuchsteil wird der Zusammenhang zwischen den in Kapitel 3 aufgenommenen Beugungsbildern und der Fourier-Optik untersucht. Dazu wurden für die verschiedenen Blendeneinstellungen Intensitätsprofile der Beugungsbilder erstellt. Zur Bestimmung des Intensitätsprofils wird ein Bereich mit einer Höhe von 80 Pixeln in der Mitte des aufgezeichneten Objektbildes ausgewählt und jeweils entlang der Spalten der Mittelwert gebildet. Dadurch entsteht eine eindimensionale Verteilung entlang der horizontalen Richtung, welche abschließend noch im Bezug auf das maximale Element normiert wird. In Abbildung 10 sind die ermittelten Intensitätsprofile für die fünf verschiedenen Blendeneinstellungen dargestellt.

Das Testobjekt aus Kapitel 3 besteht aus vertikalen Balken mit hellen Zwischenräumen. Ein heller Bereich zwischen zwei Balken kann näherungsweise als Rechteckfunktion beschrieben werden. Nach der Fourier-Optik entspricht das Beugungsbild der Fourier-Transformation dieser Funktion [6]. Die Fourier-Transformation einer Rechteckfunktion ergibt eine Funktion der Form  $\sin(x)/x$ , auch genannt sinc-Funktion.

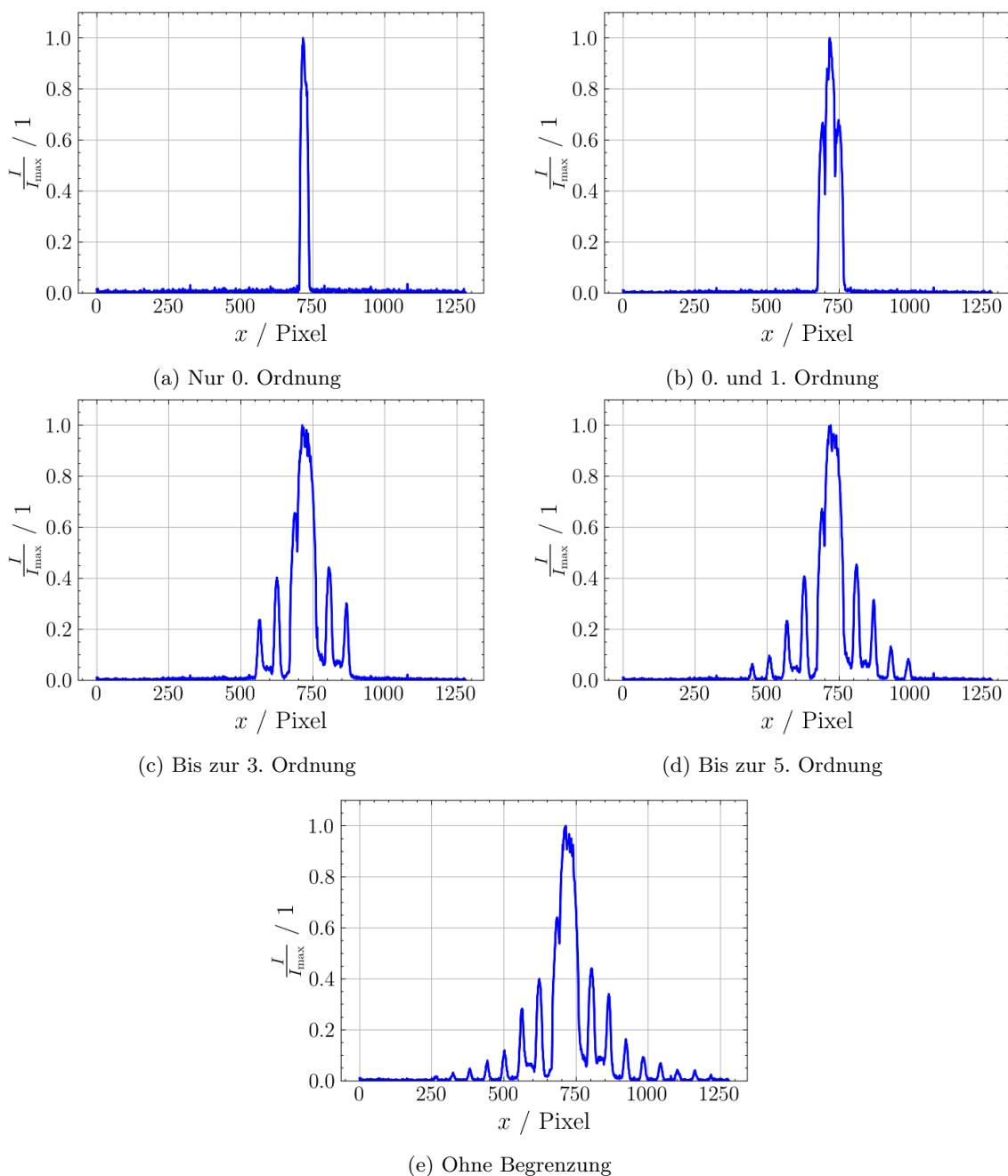


Abbildung 10: Normierte Intensitätsprofile der Beugungsbilder für verschiedene Blendeneinstellungen. Die Profile wurden durch Mittelwertbildung über einen kleinen vertikalen Bereich erstellt und auf ihr jeweiliges Maximum normiert. Mit zunehmender Anzahl transmittierter Beugungsordnungen werden zusätzliche Nebenmaxima sichtbar.

### 4.3.2 Diskussion – Interpretation im Rahmen der Fourieroptik

Die gemessenen Intensitätsprofile bestätigen die Konzepte der Fourier-Optik. Die erwartete Funktion der Form  $\text{sinc}^2(x)$  im Beugungsbild von einer Rechteckfunktion ist deutlich erkennbar. Jedes Beugungsmaximum entspricht dabei einer diskreten räumlichen Frequenzkomponente. Die nullte Ordnung enthält die mittlere Intensität, während die höheren Ordnungen die periodische Struktur beschreiben.

Der Vergleich zwischen verschiedenen Blendeneinstellungen zeigt, dass durch Hinzufügen höherer Ordnungen weitere Spitzten in dem Intensitätsprofil entstehen. Dies steht im direkten Zusammenhang mit der in Kapitel 2 beobachteten Verbesserung der Bildqualität. Je mehr Frequenzkomponenten zur Rekonstruktion zur Verfügung stehen, desto genauer können die steilen Kanten im

Objektraum abgebildet werden.

Die leichten Abweichungen in einigen Profilen lassen sich auf eine nicht perfekt zentrierte Ausrichtung des Objekts oder der Blende zurückführen. Auch eine ungleichmäßige Ausleuchtung kann zu asymmetrischen Intensitätsverteilungen führen. Insgesamt zeigen die Intensitätsprofile jedoch sehr überzeugend den fundamentalen Zusammenhang zwischen der räumlichen Struktur eines Objekts und seiner Fourier-Transformation in der Beugungsebene an.

## Literatur

- [1] S. community. `scipy.optimize.curve_fit`. [https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve\\_fit.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve_fit.html), 2025. zuletzt besucht: 29.10.2025.
- [2] W. Demtröder. *Experimentalphysik 2 - Elektrizität und Optik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 7 edition, 2018. ISBN 978-3-662-55790-7. zuletzt besucht: 08.11.2025.
- [3] Institut für Experimentalphysik, Technische Universität Graz and Institut für Physik, Universität Graz. Laborübung 2.05: Halbleiterdiode, 2025. Laborpraktikum Elektrizität, Magnetismus, Optik, WS 2025/26.
- [4] iso.org. Determining combined standard uncertainty. [https://www.iso.org/sites/JCGM/GUM/JCGM100/C045315e-html/C045315e\\_FILES/MAIN\\_C045315e/05\\_e.html](https://www.iso.org/sites/JCGM/GUM/JCGM100/C045315e-html/C045315e_FILES/MAIN_C045315e/05_e.html), 2025. zuletzt besucht: 16.11.2025.
- [5] Wikipedia. Rayleigh-kriterium. <https://de.wikipedia.org/wiki/Rayleigh-Kriterium>, 2025. zuletzt besucht: 06.12.2025.
- [6] Wikipedia. Fourieroptik. <https://de.wikipedia.org/wiki/Fourieroptik>, 2025. zuletzt besucht: 06.12.2025.

## Abbildungsverzeichnis

1	Aufnahmen des USAF-Testobjekts 1951 für verschiedene Kombinationen von Wellenlänge und Blendendurchmesser. Die linke Spalte zeigt die Messungen mit blauem Licht ( $\lambda_{\text{blau}} = 470 \text{ nm}$ ) und die rechte Spalte mit rotem Licht ( $\lambda_{\text{rot}} = 635 \text{ nm}$ ). . . . .	4
2	Minimales Auflösungsvermögen $\Delta x_{\min}$ in Abhängigkeit von der numerischen Apertur $NA$ für blaues ( $\lambda_{\text{blau}} = 470 \text{ nm}$ ) und rotes Licht ( $\lambda_{\text{rot}} = 635 \text{ nm}$ ). Die durchgezogenen Linien entsprechen den gemessenen Werten und die strich-punktierten Linien den theoretischen Verläufe nach Gleichung 4. Blaue Symbole und Linien entsprechen dem blauen Licht, rote dem roten Licht. . . . .	5
3	Objektbild (links) und Beugungsbild (rechts) ohne Begrenzung der Beugungsordnungen. Im Beugungsbild erscheinen Maxima bis zur fünfzehnten Ordnung und im Objektbild sind alle drei vertikalen Linien scharf getrennt sichtbar. . . . .	7
4	Objektbild (links) und Beugungsbild (rechts) bei Transmission ausschließlich der nullten Ordnung. Die Linienstruktur verschwindet vollständig, da nur das zentrale Beugungsmaximum übertragen wird. . . . .	7
5	Objektbild (links) und Beugungsbild (rechts) bei Transmission der nullten und ersten Ordnung. Es zeigt sich eine schwache periodische Struktur, die Linien sind jedoch nicht scharf getrennt. . . . .	8
6	Objektbild (links) und Beugungsbild (rechts) bei Transmission bis zur dritten Ordnung. Die Linien sind nun deutlich differenzierbar, zeigen aber noch leichte Unschärfe. . . . .	8

7	Objektbild (links) und Beugungsbild (rechts) bei Transmission bis zur fünften Ordnung. Die Linien sind scharf getrennt und entsprechen nahezu dem unbegrenzten Fall. . . . .	8
8	Objektbild mit horizontalen Linien (links) und zugehöriges Beugungsbild (rechts). Die horizontale Ausrichtung der Linien führt zu einer vertikalen Anordnung der Beugungsmaxima. . . . .	10
9	Beugungsbilder der drei untersuchten Testobjekte mit unterschiedlichen Linienabständen. Die roten Linien markieren die Positionen der detektierten Beugungsmaxima. Mit abnehmendem Linienabstand des Objekts vergrößert sich der Abstand der Beugungsmaxima. . . . .	11
10	Normierte Intensitätsprofile der Beugungsbilder für verschiedene Blendeneinstellungen. Die Profile wurden durch Mittelwertbildung über einen kleinen vertikalen Bereich erstellt und auf ihr jeweiliges Maximum normiert. Mit zunehmender Anzahl transmittierter Beugungsordnungen werden zusätzliche Nebenmaxima sichtbar. . . . .	14

## Tabellenverzeichnis

1	Identifizierte Gruppennummern und Elementnummern des USAF-Targets für die verschiedenen Messungen. Angegeben ist jeweils das Element, bei dem die Striche nicht mehr aufgelöst werden konnten. . . . .	5
2	Vergleich der gemessenen und theoretisch berechneten Werte für das minimale Auflösungsvermögen $\Delta x_{\min}$ . Für jede Kombination aus Wellenlänge $\lambda$ und Blendendurchmesser $d$ sind die gemessenen und die berechneten Werte mit den zugehörigen Unsicherheiten angeführt. . . . .	5
3	Vergleich der gemessenen und berechneten Abstände zwischen Beugungsmaxima für die drei untersuchten Testobjekte. Angegeben sind der Linienabstand $a$ des Objekts, der gemessene Abstand $d_{\text{mess}}$ in Pixeln sowie der berechnete Abstand $d_{\text{calc}}$ . . . . .	12

## A Python-Funktion

```

1  TABLE = [
2      [2.00, 4.00, 8.00, 16.00, 32.0, 64.0, 128.0],
3      [2.24, 4.49, 8.98, 17.95, 36.0, 71.8, 144.0],
4      [2.52, 5.04, 10.10, 20.16, 40.3, 80.6, 161.0],
5      [2.83, 5.66, 11.30, 22.62, 45.3, 90.5, 181.0],
6      [3.17, 6.35, 12.70, 25.39, 50.8, 102.0, 203.0],
7      [3.56, 7.13, 14.30, 28.50, 57.0, 114.0, 228.0]
8  ]
9  def get_xmin_from_table(group_num: int, element_num: int) -> tuple[float, float, float]:
10     """
11         Ermittelt das minimale Auflösungsvermögen ( $x_{\text{min}}$ ) für ein spezifisches Element
12         des „Testobjekt 1951 USAF Target“ anhand der angegebenen Gruppen- und Elementnummer.
13
14         Die Funktion durchsucht die tabellierten Raumfrequenzen des USAF-Targets, berechnet daraus das Auflösungs-
15         zurück, welche sich aus den benachbarten Elementen ( $\text{element\_num} \pm 1$ ) ableitet. Befindet sich das Element
16         für die Unsicherheit verwendet.
17
18     Parameter
19     -----
20     group_num : int
21         Gruppennummer des USAF-Targets (1{7}).
22     element_num : int
23         Elementnummer innerhalb der Gruppe (1{6}).
24
25     Rückgabe
26     -----
27     tuple[float, float, float]
28         Ein Tupel bestehend aus:
29             -  $x_{\text{mid}}$ : Dem berechneten Auflösungsvermögen des gewählten Elements.
30             - ( $x_{\text{pre}}$ ,  $x_{\text{post}}$ ): Untere und obere Unsicherheitsgrenze basierend auf den
31                 benachbarten Elementen.
32
33     if not (1 <= element_num <= 6):
34         raise ValueError("element_num must be 1-6")
35     if not (1 <= group_num <= 7):
36         raise ValueError("group_num must be 1-7")
37
38     arr = np.ravel(np.transpose(TABLE))
39     flat_index = (group_num - 1) * len(TABLE) + (element_num - 1)
40
41     x_mid = 1/arr[flat_index]
42     if flat_index <= 0:
43         x_pre = 1/1.78
44     else:
45         x_pre = 1/arr[flat_index-1]
46
47     if flat_index >= len(arr):
48         x_post = 1/250
49     else:
50         x_post = 1/arr[flat_index+1]
51
52     return x_mid, (x_pre, x_post)

```