Terminale Maths Expertes Année 2025 – 2026
Nom : ....
Prénom : ....

DST de Mathématiques N° 1

Corrigé

La rédaction des raisonnements et des résultats comptera pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*La calculatrice est **autorisée**.*

Exercice 1 :

Partie A

1. On a $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

2.a. $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

et $\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \overline{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \overline{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. On pose $Z = z^2$, on a $z^4 + z^2 + 1 = 0 \iff Z^2 + Z + 1 = 0$. $(*)$

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\iff \quad Z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(question 1)} \\
&\iff \quad z_1^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\iff \quad z_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad z_2^2 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad \text{(question 2.a)} \\
&\iff \quad z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $z^4 + z^2 + 1 = 0$ est $S = \left\{\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Partie B

1. $\forall u, v \in \mathbb{C}, \quad (u - v)(u^2 + uv + v^2) = u^3 + u^2v + uv^2 - vu^2 - uv^2 - v^3 = u^3 - v^3$.

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :
$P(z) = z^6 - 1 = (z^2)^3 - 1^3 = (z^2 - 1)\left((z^2)^2 + z^2 \times 1 + 1^2\right)$ (question précédente).
D'où $P(z) = (z^2 - 1)(z^4 + z^2 + 1)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3. $P(z) = 0 \iff z^2 - 1 = 0$ ou $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
On a $z^2 - 1 = 0 \iff z^2 = 1 \iff z = \pm 1$ et $z^4 + z^2 + 1 = 0 \iff z \in S$ (question 2b).
Les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont donc : ± 1 ; $\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $-\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 2 :

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 1 \times (-2) & 3 \times 1 + 1 \times 0 \\ -2 \times 3 + 0 \times (-2) & -2 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix}$

D'où $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $\det P = 1 \times (-2) - (-1) \times 1 = -2 + 1 = -1 \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 & 2 \\ -3+2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 4-4 \\ -1+1 & -1+2 \end{pmatrix}$

D'où $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D$ ainsi D est bien une matrice diagonale.

4. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

• Initialisation : On vérifie que la propriété est vraie pour $n = 0$:
On a $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ d'où $A^0 = PD^0P^{-1}$.

• Hérédité : Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $A^n = PD^nP^{-1}$.
Au rang $n+1$: On veut démontrer que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \quad \text{par définition} \\ &= (PD^nP^{-1}) \times A \quad \text{par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

Et $P^{-1}AP = D$ (question 3) donc $PP^{-1}AP = PD$ d'où $I_2APP^{-1} = PDP^{-1}$.
Ainsi $A = PDP^{-1}$.
D'où $A^{n+1} = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n \underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_2} DP^{-1} = PD^n \times DP^{-1}$

Ainsi $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

• La propriété est héréditaire, elle est vraie pour $n = 0$, grâce au principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - 0 & 0+1 \\ -2^n - 0 & 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 1 \\ -2^n & -2 \end{pmatrix}$

$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 1 \\ -2^n & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix}$

D'où $\quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n \end{pmatrix}.$