Terminale XXXXXX Année 2025 – 2026

Nom : ....

Prénom : ....

DST de Mathématiques N$^{\text{o}}$ 3

Corrigé

La rédaction des raisonnements et des résultats comptera pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*La calculatrice est **autorisée**.*

Exercice 1 :

① $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-5x^2)e^x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3e^x-5x^2e^x+1\right)$

On a $x^3e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et $x^2e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ par croissances comparées.

D'où $-5x^2e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ par produit, ainsi par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-5x^2)e^x+1 = 1$.

② $\forall x \in \mathbb{R},\quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ d'où $2x-1 \leqslant 2x-\sin x \leqslant 2x+1$.

Pour $x>0$: $(x\to+\infty)$ $\quad \dfrac{1}{2x-1} > \dfrac{1}{2x-\sin x} > \dfrac{1}{2x+1}$ par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Et $\dfrac{x+2}{2x-1} > \dfrac{x+2}{2x-\sin x} > \dfrac{x+2}{2x+1}$ avec $x+2>0$.

$x \mapsto \dfrac{x+2}{2x-1}$ et $x \mapsto \dfrac{x+2}{2x+1}$ sont des fonctions rationnelles donc :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

Par théorème d'encadrement $\dfrac{x+2}{2x-\sin x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

③ Pour $x>0$: $\quad e^{-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}}$.

$\dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$

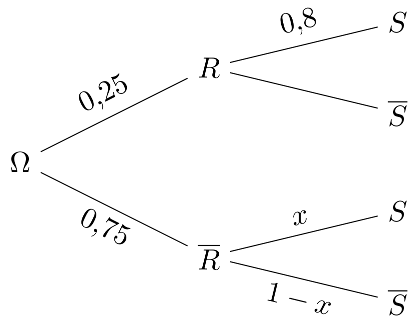
$xe^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.

Par composition $\dfrac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[\substack{x\to0\\x>0}]{} 0$.

Exercice 2 :

Partie A

1. Arbre de probabilités :



2. R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers Ω, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(R \cap S) + P(\overline{R} \cap S) \\ &= P(R) \times P_R(S) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(S) \\ &= 0{,}25 \times 0{,}8 + 0{,}75 \times x \end{aligned}$$

Or $P(S) = 0{,}92$ (énoncé) d'où :

$$\begin{aligned} 0{,}92 = 0{,}2 + 0{,}75x \quad &\iff \quad 0{,}75x = 0{,}72 \\ &\iff \quad x = \frac{0{,}72}{0{,}75} \\ &\iff \quad x = 0{,}96. \end{aligned}$$

On a bien démontré que $x = 0{,}96$.

3. On cherche $P_S(\overline{R}) = \dfrac{P(\overline{R} \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}75 \times 0{,}96}{0{,}92} \approx 0{,}783$ arrondi au millième près.

La probabilité qu'un client ait acheté un champagne Millésimé sachant qu'il est satisfait de son achat est d'environ 0,783.

Partie B

1.a. On répète 50 fois une épreuve de Bernoulli, de paramètre $p = 0{,}72$, de manière identique et indépendante.

Par définition X suit la loi $\mathcal{B}(50\,;\,0{,}72)$.

b. $P(X = 30) = \dbinom{50}{30} \times 0{,}72^{30} \times (1 - 0{,}72)^{50-30} \approx 0{,}022$ arrondi au millième près.

Donc la probabilité qu'il y ait exactement 30 clients satisfaits de leur achat est d'environ 0,022.

c. $P(X \geqslant 40) = 1 - P(X < 40) = 1 - P(X \leqslant 39) \approx 0{,}134$ arrondi au millième près.

La probabilité qu'il y ait au moins 40 clients satisfaits de leur achat est d'environ 0,134.

d. $E(X) = 50 \times 0{,}72 = 36$.

Interprétation : Sur un très grand nombre d'échantillons de 50 clients, on aura en moyenne 36 clients satisfaits de leur achat sur 50.

2. $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \dbinom{n}{0} \times 0{,}72^0 \times (1 - 0{,}72)^{n-0} = 1 - 0{,}28^n$.

On cherche n tel que $1 - 0{,}28^n \geqslant 0{,}999$.

À l'aide de la calculatrice : $1 - 0{,}28^5 \approx 0{,}9983$ et $1 - 0{,}28^6 \approx 0{,}9995$ à 10^{-4} près.

Donc $n \geqslant 6$ ce qui signifie qu'il faut au moins 6 clients pour avoir une probabilité, qu'au moins un client soit satisfait, supérieure à 99,9%.

Exercice 3 :

1. $\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = \dfrac{(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \dfrac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1}.$$

2. $1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ par somme.

$\sqrt{X} \xrightarrow[X \to 1]{} 1 \quad$ par composition $\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$.

Par somme $\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}} + 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 2 \quad$ et par quotient $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Interprétation : La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ en $+\infty$.