DST 3 - Corrigé.

Ex 1 :

① $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3-5x^2)e^x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3e^x-5x^2e^x+1)$

On a $x^3e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et $x^2e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ par croissances comparées.

D'où $-5x^2e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ par produit ainsi par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^x-5x^2e^x+1 = 1$.

② $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ d'où $2x-1 \leq 2x-\sin x \leq 2x+1$

Pour $x>0$ $(x\to+\infty)$: $\dfrac{1}{2x-1} \geqslant \dfrac{1}{2x-\sin x} \geqslant \dfrac{1}{2x+1}$ par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Et $\dfrac{x+2}{2x-1} \geqslant \dfrac{x+2}{2x-\sin x} \geqslant \dfrac{x+2}{2x+1}$ avec $x+2>0$.

$x \mapsto \dfrac{x+2}{2x-1}$ et $x \mapsto \dfrac{x+2}{2x+1}$ sont des fonctions rationnelles donc :

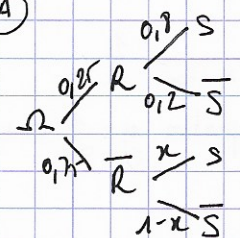
$$\left.\begin{array}{l} \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right\} \text{par théorème d'encadrement } \dfrac{x+2}{2x-\sin x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

③ Pour $x>0$: $\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[\substack{x\to0\\x>0}]{} +\infty \\ X e^{-X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0 \text{ par croissance comparée} \end{array}\right\} \text{par composition } \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[\substack{x\to0\\x>0}]{} 0.$$

Ex 2 :

Ⓐ

1. 

2. R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers Ω, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(R\cap S) + P(\overline{R}\cap S)$$
$$= P(R)\times P_R(S) + P(\overline{R})\times P_{\overline{R}}(S)$$
$$= 0,25\times 0,8 + 0,75\times x$$

or $P(S) = 0,92$ (énoncé) d'où $0,92 = 0,2 + 0,75x \iff 0,75x = 0,72$
$\iff x = \dfrac{0,72}{0,75}$
$\iff x = 0,96$.

On a bien démontré que $x = 0,96$.

3. On cherche $P_S(\overline{R}) = \dfrac{P(\overline{R}\cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(\overline{R})\times P_{\overline{R}}(S)}{P(S)} = \dfrac{0,75\times0,96}{0,92} \approx 0,783$ arrondi au millième près.

La probabilité qu'un client ait acheté un champagne Millésimé sachant qu'il est satisfait de son achat est d'environ 0,783.

Ⓑ 1. a. On répète 50 fois une épreuve de Bernoulli, de paramètre $p = 0,72$, de manière identique et indépendante.
Par définition X suit la loi $\mathcal{B}(50 ; 0,72)$.

b. $P(X=30) = \dbinom{50}{30} \times 0,72^{30} \times (1-0,72)^{50-30} \approx 0,022$ arrondi au millième près.

Donc la probabilité qu'il y ait exactement 30 clients satisfaits de leur achat est d'environ 0,022.

c. $\mathbb{P}(X \geqslant 40) = 1 - \mathbb{P}(X < 40)$
$= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 39)$
$\approx 0{,}134$ arrondi au millième près.

La probabilité qu'il y ait au moins 40 clients satisfaits de leur achat est d'environ 0,134.

d. $\mathbb{E}(X) = 50 \times 0{,}72 = 36$.

Interprétation:
Sur un très grand nombre d'échantillons de 50 clients on aura en moyenne 36 clients satisfaits de leur achat sur 50.

2. $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(Y < 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}72^0 \times (1 - 0{,}72)^{n-0} = 1 - 0{,}28^n$.

On cherche n tel que $1 - 0{,}28^n \geqslant 0{,}999$.

A l'aide de la calculatrice: $1 - 0{,}28^5 \approx 0{,}9983$ et $1 - 0{,}28^6 \approx 0{,}9995$ à 10^{-4} près.

Donc $n \geqslant 6$ ce qui signifie qu'il faut au moins 6 clients pour avoir une probabilité, qu'au moins un client soit satisfait, supérieure à 99,9 %.

• Ex 3:

1. $\forall x > 0$, $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}}$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x}} + 1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}} + 1} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1}$.

2. $\left.\begin{array}{l} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \text{ par somme} \\ \sqrt{X} \xrightarrow[X \to 1]{} \sqrt{1} = 1 \end{array}\right\}$ par composition $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$.

Par somme $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 2$ et par quotient $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Interprétation: La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ en $+\infty$.