DST 1 - Corrigé.

• Ex 1 :

(A) 1. On a $\Delta = 1^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$ donc l'équation $z^2+z+1=0$ admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

2. a. $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\times\frac{1}{2}\times i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

et $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\overline{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = \overline{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \overline{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. On pose $Z = z^2$, on a $z^4 + z^2 + 1 = 0 \iff Z^2 + Z + 1 = 0$.

$\iff Z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (question 1).

$\iff z_1^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\iff z_1^2 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ et $z_2^2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ (question 2.a).

$\iff z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'ensemble des solutions de $z^4 + z^2 + 1 = 0$ est $\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

(B) 1. $\forall u, v \in \mathbb{C}$, $(u-v)(u^2+uv+v^2) = u^3 + u^2v + uv^2 - vu^2 - uv^2 - v^3 = u^3 - v^3$.

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$P(z) = z^6 - 1 = (z^2)^3 - 1^3 = (z^2-1)\left((z^2)^2 + z^2\times1 + 1^2\right)$ (question précédente).

d'où $P(z) = (z^2-1)(z^4+z^2+1)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3. $P(z) = 0 \iff z^2 - 1 = 0$ ou $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

On a $z^2 - 1 = 0 \iff z^2 = 1 \iff z = \pm 1$ et $z^2 + z^2 + 1 = 0 \iff z \in \mathcal{S}_1$ (question 2b).

Les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont donc : ± 1 ; $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Ex 2 :

1.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3\times3+1\times(-2) & 3\times1+1\times0 \\ -2\times3-2\times0 & -2\times1+0\times0 \end{pmatrix} \end{array}$$

d'où $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$

2. $\det P = 1\times(-2) - (-1)\times1 = -2+1 = -1 \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

soit $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 & 2 \\ -3+2 & -1 \end{pmatrix}$$ donc $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 4-4 \\ -1+1 & -1+2 \end{pmatrix}$$

d'où $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D$ ainsi D est bien une matrice diagonale.

4. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

- <u>Initialisation :</u> On vérifie que la propriété est vraie pour $n = 0$:

  On a $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ d'où $A^0 = PD^0P^{-1}$.

- <u>Hérédité :</u> * hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $A^n = PD^nP^{-1}$.

  * <u>Au rang $n+1$:</u> On veut démontrer que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

  $A^{n+1} = A^n \times A$ par définition.

  $\quad = (PD^nP^{-1}) \times A$ par hypothèse de récurrence.

  Et $P^{-1}AP = D$ (question 3) donc $PP^{-1}AP = PD$ d'où $I_2APP^{-1} = PDP^{-1}$

  Ainsi $A = PDP^{-1}$.

  D'où $A^{n+1} = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n\underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_2}DP^{-1} = PD^n \times DP^{-1}$

  Ainsi $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

- La propriété est héréditaire, elle est vraie pour $n=0$, grâce au principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n-0 & 0+1 \\ -2^n-0 & 0-2 \end{pmatrix}$$ donc $PD^n = \begin{pmatrix} 2^n & 1 \\ -2^n & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2^n & 1 \\ -2^n & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 \end{pmatrix}$$ d'où $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}$.