

82.04 – Mecánica Racional

Notas de clase (1^{er} cuatrimestre de 2024)

Lucas Sambuco Salomone (*lsambuco@fi.uba.ar*)

1. Repaso de Newton

1.1 Las leyes de Newton

La mecánica clásica es una rama de la física que provee una descripción del universo basada en un conjunto de leyes, inicialmente propuestas por Issac Newton hacia finales del siglo XVII. Estas leyes permiten determinar la evolución futura (y pasada) del estado de un sistema físico cualquiera. Como veremos más adelante, el estado de un sistema está dado por el conjunto de posiciones y velocidades de las partículas que lo componen, mientras que su evolución en el tiempo vendrá dada por la *segunda ley de Newton*.

A partir del vector posición \vec{r} de una partícula, podemos definir su velocidad como la derivada temporal de la posición

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Luego, podemos derivar nuevamente y obtener la aceleración

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La *primera ley* de Newton (o *ley de inercia*) nos dice que si una partícula no interactúa con ninguna otra, permanecerá en reposo o moviéndose a velocidad constante.

La *segunda ley* de Newton enuncia que

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

que nos permite relacionar la aceleración de la partícula con un campo vectorial al que llamamos *fuerza* a través de una constante característica de cada cuerpo a la que llamamos *masa*. Alternativamente, escribiremos la segunda ley como

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

donde hemos definido $\vec{p} = m\vec{v}$ como el *momento lineal* de la partícula.

Teniendo en cuenta que el concepto de fuerza está directamente relacionado con el de interacción, vale la pena mencionar que la segunda ley incluye dentro de sí un postulado adicional, el de la superposición de las interacciones. Eso significa que si una partícula es sometida a más de una interacción, la fuerza que habrá que introducir en la ecuación será la suma de las fuerzas individuales.

Finalmente, la *tercera ley* de Newton (o *ley de acción y reacción*) nos dice que si una partícula aplica una fuerza sobre otra, ésta aplicará sobre aquella una fuerza de la misma magnitud y en la misma dirección, pero con sentido opuesto.

Enunciadas las tres leyes, vale la pena detenernos en una reflexión. Cuando decimos que un cuerpo en ausencia de fuerzas permanece en reposo o moviéndose a velocidad constante, es natural preguntarse ¿Con respecto a qué? Es claro que los conceptos de posición, velocidad y aceleración requieren de la presencia de un

observador, el cual mediante un sistema de referencia, les provee un significado operacional. Es un hecho experimental que las leyes antes enunciadas son válidas sólo para sistemas de referencia inerciales. Surge entonces la cuestión acerca de cómo definir si un sistema es o no inercial, o bien cómo distinguir un sistema inercial de otro que no lo es. Diremos solamente que la definición de los tiempos de Newton, *sistemas en reposo respecto a las estrellas fijas*, no ha envejecido del todo bien después de algunos siglos, aunque la alternativa *un sistema inercial es aquel en el que vale la ley de inercia*, parece demasiado circular como para tomarla en serio, aunque por ahora es lo mejor que tenemos.

Como señalamos al comienzo, la utilidad práctica de las leyes de Newton es que conocidas las fuerzas actuantes sobre un cuerpo, la segunda ley nos permite determinar su aceleración. Para poder encontrar la evolución de la posición del cuerpo $\vec{r}(t)$ habrá que resolver la ecuación diferencial, que al ser de segundo orden, tendrá solución única dadas las condiciones iniciales de posición $\vec{r}(0)$ y velocidad $\vec{v}(0)$.

1.2 Teorema de energía-trabajo

Una magnitud que resultará importante es la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m v^2$$

Veamos qué sucede con su derivada temporal

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = m \vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

La igualdad anterior nos está diciendo que la energía cinética variará de acuerdo a si la fuerza aplicada sobre el cuerpo tiene alguna componente en la dirección del vector velocidad. Podemos buscar la variación en la energía cinética luego de un tiempo finito

$$\Delta T = \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Con lo que llegamos a que la variación de la energía cinética es igual a la integral de línea de la fuerza a lo largo de la trayectoria que sigue el cuerpo, denominada *trabajo* de la fuerza. Diremos entonces que el trabajo de las fuerzas aplicadas es igual a la variación en la energía cinética.

Hay un conjunto de fuerzas que nos interesarán particularmente y son aquellas que poseen la propiedad de que el trabajo entre dos puntos cualesquiera es independiente de la trayectoria. Como consecuencia de ello, podemos ver fácilmente que el trabajo a lo largo de una curva cerrada será nulo. Además, por el teorema de Stokes, sabemos que la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada es igual al flujo del rotor de dicho campo a través de la superficie definida por la curva

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

por lo que si el trabajo a lo largo de una curva cerrada es nulo, resulta que la fuerza es irrotacional, lo que implica que ésta deriva de un campo escalar V , al que denominaremos *energía potencial*

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

En estos casos, decimos que la fuerza es *conservativa*. Para ver el porqué de esa denominación, definamos a la *energía mecánica* como

$$E = T + V$$

y calculemos ahora cómo varía en el tiempo

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + V) = \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla}V \cdot \vec{v} = (\vec{F} + \vec{\nabla}V) \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

En consecuencia, cuando las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden derivarse de un potencial diremos que éstas son conservativas y la magnitud conservada será la energía mecánica¹.

1.3 Momento angular

El momento angular de una partícula lo definimos como

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Si derivamos

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

donde el primer término se anula puesto que la velocidad es colineal con el momento lineal, mientras que en la segunda igualdad usamos la segunda ley de Newton $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$.

Vemos entonces que el momento angular varía en el tiempo como el producto vectorial entre la posición y la fuerza, que denominaremos *momento de la fuerza*. Es importante señalar que el momento angular depende del origen de nuestro sistema de coordenadas, de la misma manera en que depende el momento de la fuerza.

1.4 Sistemas de partículas

Si nuestro sistema físico en estudio está formado por más de una partícula, es de interés ver qué magnitudes físicas resultan representativas del conjunto. Empezaremos definiendo como momento lineal del sistema a la suma de los momentos lineales individuales de cada una de las partículas que lo forman

¹ Una pequeña sutileza tiene que ver con que al calcular la derivada temporal de la función potencial, asumimos que ésta no depende explícitamente del tiempo ($\frac{\partial V}{\partial t} = 0$). Más adelante volveremos sobre este asunto.

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$$

En analogía con el momento lineal de una partícula, buscamos una expresión para el momento lineal de un sistema de partículas dada por el producto entre una cierta masa y velocidad. Para ello, reemplazamos la expresión del momento lineal de cada partícula

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \left(\sum_i m_i \right) \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = M \vec{V}_{CM}$$

donde vemos que la masa característica de un sistema será la suma de las masas de todas las partículas que lo componen, mientras que su velocidad estará dada por

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \right)$$

de donde surge la definición de *centro de masas* de un sistema de partículas, que no es otra cosa más que aquel punto del sistema cuya derivada temporal representa la velocidad característica del sistema en su conjunto y que se calcula como un promedio de las posiciones de las partículas, ponderadas por sus masas.

La pregunta que surge en este momento es qué utilidad tiene haber definido el momento lineal de un sistema de partículas de la manera en que lo hemos hecho. Planteemos entonces su derivada temporal

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{p}_i \right) = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

La derivada temporal del momento lineal total resulta entonces igual a la suma de las fuerzas aplicadas sobre todas las partículas del sistema, lo que por ahora no nos sirve de mucho, ya que en un sistema suficientemente complejo, dichas fuerzas son imposibles de determinar, desde un punto de vista práctico. Sin embargo, podemos discriminar entre las fuerzas externas al sistema, ejercidas por un cuerpo ajeno al mismo, de aquellas que son internas y que se dan entre dos partículas que pertenecen ambas al sistema.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \left(\vec{F}_i^{ext} + \sum_j \vec{F}_i^j \right) = \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\vec{F}_i^j + \vec{F}_j^i)$$

Puesto que el segundo término se anula por la tercera ley de Newton, entonces

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

Ahora sí vemos la relevancia de haber definido el momento lineal de un sistema de partículas como la suma de los momentos individuales. Resulta que definido de esa forma, el momento lineal posee una dinámica dada por una ley equivalente a aquella

para una partícula individual. Es decir, la tasa de variación del momento lineal de un sistema es igual a la sumatoria de todas las fuerzas externas actuando sobre el mismo. Como un caso particular, surge entonces que el momento lineal de un sistema se conservará en el tiempo siempre y cuando sea nula la fuerza resultante que actúa sobre el mismo.

Nos preguntamos entonces si sucederá algo parecido con el momento angular, para lo cual planteamos el momento angular del sistema de partículas como

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$$

Nuevamente, nos preguntamos qué utilidad tiene haber definido el momento angular total de esta manera y para averiguarlo, planteamos su derivada temporal

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{l}_i \right) = \sum_i \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Al igual que sucedía con el caso del momento lineal, la expresión anterior, aunque cierta, no resulta demasiado útil puesto que el momento de las fuerzas aplicadas sobre cada partícula del sistema incluye a las fuerzas internas. Discriminemos nuevamente entre fuerzas externas e internas

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{ext} + \sum_j \vec{F}_i^j \right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^j + \vec{r}_j \times \vec{F}_j^i)$$

Ahora bien, por la tercera ley de Newton, podemos reescribir el segundo término

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i^{ext} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_i^j$$

y ver que éste es nulo, puesto que la fuerza de interacción entre dos partículas tiene la misma dirección que el vector posición de una partícula con respecto a la otra. En consecuencia

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i^{ext}$$

La derivada del momento angular de un sistema de partículas resulta entonces igual a la suma de los momentos de todas las fuerzas externas aplicadas sobre el sistema, lo que generaliza lo visto para una partícula. Adicionalmente, vemos que si el momento total aplicado es nulo, resultará entonces que el momento angular del sistema será una magnitud que se conserve en el tiempo.

Por último, abordaremos el caso de la energía mecánica de un sistema de partículas. Siguiendo con nuestra propuesta de magnitudes aditivas

$$E = T + V = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + V$$

donde V es la energía potencial total. Veamos qué sucede al derivar la energía mecánica

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + V \right) = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) + \frac{dV}{dt} = \sum_i (m_i \vec{a}_i + \vec{\nabla}_i V) \cdot \vec{v}_i$$

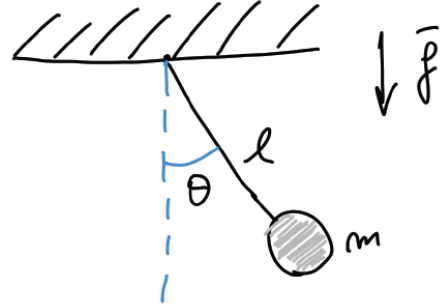
donde $\vec{\nabla}_i V = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}$. Continuamos,

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i (\vec{F}_i^{ext} + \vec{\nabla}_i V^{ext}) \cdot \vec{v}_i + \sum_{i,j} (\vec{F}_i^j + \vec{\nabla}_i V_{ij}) \cdot \vec{v}_i$$

De la última ecuación, vemos que para que la energía mecánica se conserve en el tiempo no sólo las fuerzas externas deben ser conservativas ($\vec{F}_i^{ext} = -\vec{\nabla}_i V^{ext}$), sino que también es necesario que las fuerzas internas lo sean ($\vec{F}_i^j = -\vec{\nabla}_i V_{ij}$).

1.5 Coordenadas no inerciales

Para dar un ejemplo del uso y las limitaciones de la segunda ley de Newton como herramienta práctica para resolver problemas físicos concretos, abordaremos ahora el caso del péndulo ideal, el cual está formado por un cuerpo de masa m , el cual se encuentra suspendido de una soga inextensible de largo l , cuyo otro extremo se encuentra fijo al techo.



Podemos escribir la posición de la partícula como

$$\vec{r} = r \sin \theta \hat{x} - r \cos \theta \hat{y} = r (\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y})$$

e identificando a lo que está entre paréntesis como el versor correspondiente a la dirección radial

$$\hat{r} = \sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y}$$

podemos reescribir el vector posición como

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

La velocidad la tendremos que calcular como

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (r \hat{r}) = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\hat{r}}$$

donde en la segunda igualdad usamos la regla de la derivada de un producto. Ahora bien, la derivada del versor radial resulta

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d}{dt} (\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y}) = \dot{\theta} (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

donde en la última igualdad introducimos el versor en la dirección tangencial. Reemplazando en la expresión para la velocidad, obtenemos

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Para encontrar la aceleración, derivamos otra vez con respecto al tiempo

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\theta}$$

La derivada temporal del versor tangencial será

$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{d}{dt}(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) = -\dot{\theta}(\sin\theta\hat{x} - \cos\theta\hat{y}) = -\dot{\theta}\hat{r}$$

Reemplazando, llegamos finalmente a

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

Ahora que tenemos expresada la aceleración de la partícula en coordenadas polares, estamos en condiciones de plantear la segunda ley de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$)

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = mg(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) + T\hat{r}$$

Separando las componentes en cada una de las direcciones

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + T$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -mg\sin\theta$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones, pero tres incógnitas: las dinámicas $r(t)$ y $\theta(t)$ y la magnitud T de la tensión en la soga. Sin embargo, aún no hemos impuesto la condición de que la soga es inextensible, la cual podemos expresar a través de la siguiente *función de restricción*

$$f(r, \theta) = r - l = 0$$

Reemplazando en las ecuaciones, obtenemos finalmente

$$T = -(mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2) \Rightarrow \vec{T} = -(mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2)\hat{r}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Habiendo obtenido la solución del problema, vale la pena volver a las ecuaciones diferenciales que surgen de aplicar la segunda ley de Newton (antes de aplicar el vínculo) e intentar interpretarlas de acuerdo al sistema de coordenadas elegido. En el caso de la ecuación para la coordenada radial, vemos que podemos reescribirla como

$$m\ddot{r} = mg\cos\theta + T + mr\dot{\theta}^2$$

Como vemos, hemos recuperado una expresión de la forma $F_r = ma_r$, con la particularidad de que las fuerzas en la dirección radial incluyen no sólo aquellas provenientes de interacciones físicas de la partícula con su entorno, sino también una fuerza adicional $mr\dot{\theta}^2$ a la que llamamos *fuerza centrífuga*, cuyo origen no proviene de ninguna interacción, sino que se debe a la dependencia temporal de los versores de las coordenadas polares. A este tipo de fuerzas que percibe un observador no inercial las denominamos *fuerzas inerciales* o *ficticias*. En cambio, para el caso de la coordenada angular, es más difícil hacer algo similar, lo mejor que podemos hacer es multiplicar ambos lados de la igualdad por r y darnos cuenta de que podemos reescribirla como

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -mgr\sin\theta$$

Notamos ahora que el lado izquierdo de la igualdad no es otra cosa más que la derivada temporal de la magnitud del momento angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r\hat{r} \times m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{z}$$

a la vez que el lado derecho coincide con la componente en la misma dirección del momento de la fuerza peso

$$\vec{M}_{\text{peso}} = \vec{r} \times m\vec{g} = r\hat{r} \times mg(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) = -mgr\sin\theta\hat{z}$$

En consecuencia, podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

donde L_z y M_z representan las componentes, en la dirección perpendicular al plano, del momento angular y del momento de la fuerza, respectivamente. De esta manera, parece que cuando se trata de una coordenada angular podemos reescribir la ecuación resultante en la forma de una especie de segunda ley de Newton, pero para la rotación, donde lo que se deriva ya no es el momento lineal, sino el angular y a lo que se iguala ya no es la fuerza, sino su momento.

Los razonamientos previos han sido algo heurísticos y su posible aplicación en un caso más general no está de ningún modo garantizada. Vemos entonces que es deseable poder encontrar una formulación de la mecánica que permita abstraernos de las coordenadas utilizadas (lineales o angulares) y de la inercialidad o no del sistema de referencia al cual están asociadas.

2. Ecuaciones de Lagrange

2.1 Principio de los trabajos virtuales

El principio de los trabajos virtuales define una condición característica para todo sistema mecánico que se encuentre en equilibrio. Desde el formalismo newtoniano, un sistema estará en equilibrio cuando las fuerzas aplicadas sobre cada partícula son nulas. Lo que plantea entonces el principio de los trabajos virtuales es que para que un sistema esté en equilibrio, el *trabajo virtual* total de las fuerzas actuantes sobre cada una de las partículas que lo conforman deberá ser nulo

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

siendo $\delta \vec{r}_i$ los desplazamientos virtuales sobre cada partícula, definidos como aquellos desplazamientos compatibles con los vínculos y a tiempo fijo.

El siguiente paso es distinguir dentro de las fuerzas que actúan sobre cada partícula entre aquellas que son de vínculo (\vec{F}_i^v) y aquellas que no lo son y que denominaremos fuerzas aplicadas (\vec{F}_i^a).

$$\delta W = \sum_i (\vec{F}_i^v + \vec{F}_i^a) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i^v \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i$$

El primer término se anula como consecuencia de que las fuerzas de vínculo no realizan trabajo virtual, ya sea porque son perpendiculares a los desplazamientos virtuales, o bien porque aparecen de a pares y el trabajo total resulta nulo.

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i$$

Podemos considerar ahora que los desplazamientos virtuales de cada una de las partículas pueden expresarse a través de desplazamientos de las coordenadas generalizadas del sistema

$$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Reemplazando en la expresión para el trabajo virtual

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i^a \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j \left(\sum_i \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j$$

donde definimos como *fuerza generalizada*

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

llegamos a la conclusión de que un sistema se encontrará en equilibrio siempre y cuando se cumpla que $Q_j = 0$, para cada una de las coordenadas generalizadas del sistema.

Vale la pena señalar en este momento que así como las coordenadas generalizadas q_j no tienen por qué tener unidades de distancia, las fuerzas generalizadas Q_j no tienen por qué tener unidades de fuerza.

2.2 Principio de D'Alembert

D'Alembert generalizó el principio de trabajos virtuales extendiéndolo al caso de la dinámica, introduciendo para ello el concepto de fuerza de inercia.

$$\delta W = \sum_i (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Como vimos anteriormente, el primer término dará lugar a la aparición de las fuerzas generalizadas, por lo que nuestro interés será ver cómo tratar al segundo término

$$\sum_i m_i \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_j \left(\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

donde expresamos los desplazamientos virtuales en coordenadas generalizadas e intercambiamos el orden de las sumatorias. Trabajaremos ahora con la sumatoria sobre las partículas del sistema, aplicando la regla de la derivada del producto

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[m_i \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right]$$

Podemos ver ahora que también las velocidades pueden expresarse en términos de las velocidades generalizadas

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

lo que nos permite reescribir el último término dentro de la sumatoria

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

Reemplazando, obtenemos

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[m_i \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Donde usamos la propiedad $\vec{v}_i d\vec{v}_i = \frac{1}{2} d(v_i^2)$ e intercambiamos el orden de la sumatoria con las derivadas temporales. Volviendo a nuestra expresión original

$$\sum_j \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

vemos que, dado que los desplazamientos virtuales δq_j son independientes entre sí por tratarse de las coordenadas generalizadas, entonces cada término en la sumatoria deberá ser igual a cero independientemente de los demás

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

El último paso será considerar qué tipo de fuerzas están actuando sobre el sistema, distinguiendo entre conservativas y no conservativas

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left(-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \vec{F}_i^{nc} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \sum_i \vec{F}_i^{nc} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Reemplazamos en la ecuación para la coordenada q_j

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^{nc}$$

Definiendo $\mathcal{L} = T - V$ y aprovechando que los potenciales no dependen de las velocidades generalizadas $\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \right)$, llegamos finalmente a las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{nc}$$

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales del sistema nos dará la evolución temporal de la configuración del sistema $q_1(t), q_2(t), \dots, q_g(t)$.

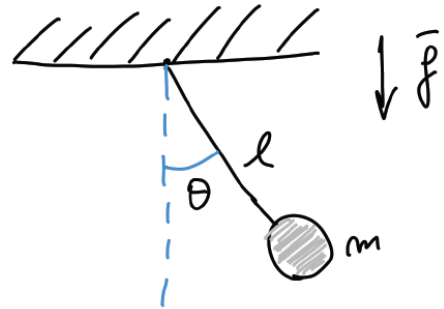
2.3 Ejemplo de aplicación

Para ilustrar cómo funciona el método de Lagrange, consideremos algunos ejemplos sencillos. En primer lugar, estudiemos el caso del péndulo ideal. Lo primero que debemos hacer es determinar el número de grados de libertad que tiene nuestro sistema y elegir las coordenadas generalizadas adecuadas.

El número de grados de libertad g estará dado por la expresión

$$g = 3n - v$$

donde n es la cantidad de cuerpo (en este caso $n = 1$), mientras que v es la cantidad de vínculos.



Un primer vínculo estará dado por la imposibilidad de la partícula para salir del plano, mientras que el segundo vínculo será una consecuencia de la soga inextensible, la cual impone la restricción de que la distancia entre la partícula y el punto de suspensión sea siempre igual al largo de la soga. Si consideramos coordenadas cilíndricas (polares r, θ en el plano más la coordenada z perpendicular a éste), los vínculos podemos expresarlos a través de las siguientes funciones de restricción

$$f_1(r, \theta, z) = z = 0$$

$$f_2(r, \theta, z) = r - l = 0$$

En consecuencia, habiendo dos vínculos, concluimos que el sistema tendrá un solo grado de libertad ($g = 1$), el cual podemos representar adecuadamente con la coordenada angular θ . El objetivo ahora será encontrar el lagrangiano del sistema. Tal como vimos la clase pasada, la velocidad de la partícula en coordenada polares puede escribirse como

$$\dot{\vec{r}} = l\dot{\theta}\hat{\theta}$$

donde ya hemos usado la condición de vínculo $r = l$. La energía cinética resultará entonces

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2$$

La energía potencial sólo incluirá un término debido a la interacción gravitatoria, de la forma

$$V = -mgl\cos\theta$$

con lo que el lagrangiano será

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

Como el lagrangiano depende de una sola coordenada, tendremos una sola ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

que puede simplificarse a la típica ecuación del péndulo

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Resolviendo la ecuación diferencial precedente obtendremos la solución de la dinámica del sistema $\theta(t)$. Si comparamos este resultado con aquel que obtuvimos aplicando la segunda ley de Newton, vemos que aquí nos falta una ecuación diferencial, la que corresponde con la dinámica en la dirección radial y que nos permitía, en el formalismo de Newton, encontrar el valor de la tensión en la soga. Está bien que dicha ecuación no aparezca porque el método de Lagrange sólo trata

con aquellas direcciones (y sus correspondientes coordenadas) en las que es posible el movimiento. La información de la tensión en la soga está implícita en la obtención del número de grados de libertad que tiene el sistema y la elección de las coordenadas generalizadas. En este aspecto, notamos la ventaja de la formulación de Lagrange, ya que nos permite obtener la evolución del sistema planteando el menor número posible de ecuaciones.

Otra de las ventajas del método de Lagrange en comparación con el de Newton tiene que ver con el carácter general de las coordenadas que se utilizan para resolver los problemas. Por un lado, la forma de las ecuaciones de Lagrange es independiente del tipo de coordenada con la que estemos tratando, sea esta una coordenada lineal o angular. De manera general, la invariancia de la forma de las ecuaciones de Lagrange para cualquier conjunto de coordenadas generalizadas implica que no debemos preocuparnos por términos tales como aquellos asociados a fuerzas ficticias, toda vez que la energía cinética tenga la forma correcta.

3. Teorema de Noether

Diremos que una magnitud física es *invariante* cuando su valor no cambia ante una determinada transformación, como una traslación o una rotación. En cambio, diremos que una magnitud física *se conserva* cuando su valor no varía en el tiempo. Por mencionar sólo un ejemplo, sabemos que en un experimento de choque de partículas, el momento lineal total se conserva para un mismo sistema de referencia, aun cuando éste no sea un invariante ante cambios en el sistema de referencia. Una vez que queda claro que invariancia y conservación son dos conceptos diferentes, veremos que, sin embargo, ambos están íntimamente relacionados a partir de lo que se conoce como teorema de Noether, el cual enuncia que dada una simetría continua existirá una magnitud física que se conserva. No haremos aquí una demostración general del teorema, sino que veremos sólo algunos ejemplos de interés.

3.1 Homogeneidad del espacio

Partimos de la hipótesis de que el espacio es homogéneo, lo cual significa que si trasladamos todo nuestro sistema una cierta distancia en alguna dirección particular y lo dejamos evolucionar libremente, el resultado será indistinguible de aquel que hubiésemos obtenido en la posición original. Para que eso suceda, necesitamos que el Lagrangiano sea invariante ante traslaciones. Planteamos entonces la variación del lagrangiano como una consecuencia de las variaciones en las posiciones y velocidades de las partículas que componen el sistema.

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}_i} \delta\vec{r}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}_i} \delta\dot{\vec{r}}_i$$

Si estamos considerando una traslación de todo el sistema, entonces las posiciones varían todas en la misma magnitud ($\delta\vec{r}_i = \delta\vec{R}$), mientras que las velocidades no varían ($\delta\dot{\vec{r}}_i = 0$).

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}_i} \delta\vec{R} = \delta\vec{R} \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}_i} \right) = \delta\vec{R} \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \delta\vec{R} \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \delta\vec{R} \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

donde hemos recurrido a las ecuaciones de Lagrange y utilizado la linealidad de la derivada. Finalmente, dada la arbitrariedad de $\delta\vec{R}$, vemos que la invariancia del lagrangiano ante traslaciones implica la conservación del momento lineal total del sistema \vec{P} .

Para profundizar en el significado físico de lo anterior, que el espacio sea homogéneo significa que todos los puntos son equivalentes mecánicamente. Ahora bien, si nos preguntamos qué propiedad mecánica puede asociarse a los puntos del espacio, la respuesta obvia es la energía potencial. En consecuencia, que el espacio sea homogéneo lo que nos está diciendo es que todos los puntos se encuentran al mismo potencial, lo que es equivalente a decir que no habrá fuerzas externas, mostrando la equivalencia entre las formulaciones newtoniana y lagrangiana.

3.2 Isotropía del espacio

Nuestra hipótesis ahora será considerar que el espacio es isótropo, lo que significa que no existe ninguna dirección preferencial, lo que implica que si rotamos nuestro sistema un cierto ángulo en una dirección particular, la evolución de éste no varía. Al igual que en el caso anterior, buscamos escribir la variación del lagrangiano como resultado de la variación, como consecuencia de la rotación del sistema, de las posiciones y velocidades de todas las partículas que lo componen.

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}_i} \delta\vec{r}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}_i} \delta\dot{\vec{r}}_i = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}_i} (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}_i} (\delta\vec{\varphi} \times \dot{\vec{r}}_i)$$

En la segunda igualdad hemos usado, siguiendo lo ilustrado en la figura, que la rotación de cualquier vector puede expresarse como el producto vectorial entre un vector que represente la variación angular y el vector que se rota. Luego, usando las ecuaciones de Lagrange en primer término y recurriendo luego a la propiedad cíclica del producto vectorial $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$,

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i) + \vec{p}_i (\delta\vec{\varphi} \times \dot{\vec{r}}_i) = \delta\vec{\varphi} \sum_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i)$$

Vemos entonces que

$$\delta\mathcal{L} = \delta\vec{\varphi} \sum_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \delta\vec{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_i \vec{l}_i = \delta\vec{\varphi} \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

que dada la arbitrariedad de $\delta\vec{\varphi}$, implica la conservación del momento angular del sistema \vec{L} .

3.3 Homogeneidad del tiempo

En este caso, la hipótesis es que si trasladamos temporalmente nuestro sistema, su evolución no variará, lo que significa que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo ($\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$). Físicamente, eso significa que, dado el conjunto de condiciones iniciales, la evolución del sistema será la misma en cualquier momento. Para ver las consecuencias de ello, planteemos la derivada temporal del lagrangiano

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

Utilizando las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j (\dot{p}_j \dot{q}_j + p_j \ddot{q}_j) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = \sum_j \frac{d}{dt} (p_j \dot{q}_j) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

Acomodando términos, llegamos a la expresión

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \right) = - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

donde definimos como *hamiltoniano* del sistema

$$\mathcal{H} = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}$$

y vemos entonces que si el tiempo es homogéneo, el hamiltoniano se conservará.

Lo que veremos a continuación es que esa magnitud que hemos definido como hamiltoniano coincide con la energía del sistema. Para ello, tendremos que probar que

$$\sum_j p_j \dot{q}_j = 2T$$

Para demostrar eso, necesitamos introducir el concepto de funciones homogéneas. Diremos que una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es homogénea de grado k , cuando se cumple la relación

$$f(ax_1, ax_2, \dots, ax_n) = a^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Veamos entonces que la energía cinética es una función homogénea de grado dos en las velocidades. Empezamos escribiendo su definición para un sistema de partículas

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

Si ahora escribimos las velocidades de las partículas que conforman el sistema en términos de las velocidades generalizadas

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

podemos reemplazar en la expresión original de la energía cinética, obteniendo

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

donde

$$a_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Vemos entonces que si escalamos las velocidades con un cierto factor, la energía cinética también se escala por dicho factor, pero elevado al cuadrado, con lo que llegamos a que la energía cinética es una función homogénea de grado dos en las velocidades. Adicionalmente, la última expresión nos permite ver que la característica de un sistema de coordenadas no inerciales, que era la dependencia de la energía cinética con las coordenadas, proviene de la dependencia con dichas coordenadas de las derivadas que aparecen en a_{jk} .

Para terminar de demostrar la equivalencia entre el hamiltoniano y la energía mecánica, necesitamos probar el teorema de Euler sobre funciones homogéneas. Si volvemos a la definición

$$f(ax_1, ax_2, \dots, ax_n) = a^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

y derivamos con respecto al parámetro a , obtenemos

$$\sum_j \frac{df}{d(ax_j)} x_j = k a^{k-1} f$$

que para el caso particular $a = 1$, nos dice que debe cumplirse la relación

$$\sum_j \frac{df}{dx_j} x_j = k f$$

En el caso particular de la energía cinética, resulta

$$\sum_j \frac{dT}{d\dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_j \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_j p_j \dot{q}_j = 2T$$

Finalmente,

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} = 2T - (T - V) = T + V = E$$

Con lo que demostramos que el hamiltoniano coincide con la energía mecánica siempre que la energía cinética resulte una función homogénea de grado dos en las velocidades. En consecuencia, la invariancia del lagrangiano ante traslaciones temporales ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$), implica la conservación de la energía mecánica.

Un ejemplo claro de un sistema en el cual el potencial depende explícitamente del tiempo sería un sistema de masas que interactúan gravitatoriamente, a las cuales se suma un cuerpo exterior que no forma parte del sistema. La forma de tratar la interacción gravitatoria de los cuerpos del sistema con el cuerpo externo es través de un potencial que, al depender de la posición de dicho cuerpo, será una función explícita del tiempo. En ese caso, dicha dependencia temporal explícita implicará que la energía mecánica de nuestro sistema no se conserve, lo cual es natural si pensamos que nuestro sistema no es cerrado, sino abierto, ya que interactúa con su entorno (el cuerpo externo, en este caso). Nos preguntamos entonces de qué manera podemos modificar la definición para que la energía se conserve. La respuesta obvia es que debemos incluir al cuerpo externo dentro de nuestro sistema, de tal manera que su posición pueda expresarse en términos de coordenadas generalizadas adicionales, lo que llevará a que la dependencia temporal del potencial desaparezca. Como consecuencia de ello, la energía mecánica ahora sí se conservará y eso será consistente con un sistema cerrado.

4. Fuerzas de vínculo en la formulación lagrangiana

La ecuación de Lagrange surge de la sumatoria

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - Q_j^{nc} \right] \delta q_j = 0$$

donde al ser las coordenadas generalizadas q_j independientes entre sí, cada término dentro de la sumatoria será igual a cero independientemente de los demás.

Si se agrega al sistema una nueva restricción, podemos expresarla por medio de una función igualada a cero

$$f(q_1, q_2, \dots, q_g) = 0$$

También podemos expresar la restricción de forma diferencial

$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

Tomando entonces desplazamientos virtuales, llegamos a la expresión que nos interesa para describir el vínculo

$$\delta f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

Dado que δf es nulo, podemos sumarlo o restarlo a la ecuación original, multiplicándolo además por un parámetro adicional λ y juntar todo en una sola sumatoria

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - Q_j^{nc} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

Sin embargo, las coordenadas generalizadas que teníamos originalmente han perdido su independencia y están vinculadas entre sí a través de la función de restricción. Esta función, al expresar (al menos implícitamente) a una coordenada como función de las demás, quita un grado de libertad al sistema, quedando nuestra representación con una coordenada adicional, lo que impide considerar que cada término dentro de la sumatoria es igual a cero independientemente de los demás.

Para ser más precisos, podemos suponer que los términos correspondientes a las coordenadas q_1, q_2, \dots, q_{g-1} siguen siendo independientes y que el término asociado a la coordenada q_g es dependiente de los anteriores. Para poder independizar nuevamente a cada término dentro de la sumatoria, hacemos uso del factor λ , o *multiplicador de Lagrange*, al cual le asignaremos el valor necesario para que el término correspondiente a la coordenada q_g se anule, con lo podemos nuevamente igualar a cero cada término dentro de la sumatoria. Todo esto, al precio de haber introducido un nuevo factor, desconocido por el momento.

Puesto que el multiplicador de Lagrange se agrega al problema como un nuevo valor a calcular, el sistema tiene entonces $g + 1$ incógnitas. Necesitamos entonces

una ecuación adicional, ya que con las g ecuaciones de Lagrange no es suficiente. La ecuación que se agrega no es otra más que la que surge debido a la restricción, es decir $f(q_1, q_2, \dots, q_g) = 0$.

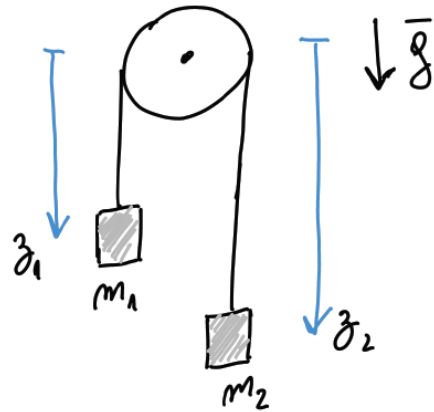
Finalmente, luego de haber obtenido las ecuaciones de las g coordenadas y el valor del factor λ , debemos intentar darles un significado físico a los resultados. En especial, es de interés entender qué representa este nuevo factor en el sistema físico que se está estudiando. A partir de considerar que nuestro sistema original, el cual poseía g grados de libertad, se ve sometido a una nueva restricción, es evidente que dicha restricción está asociada a una fuerza de vínculo. Si consideramos que nuestro sistema satisface el principio de los trabajos virtuales, dicha fuerza debe ser perpendicular al desplazamiento virtual. Ahora bien, la expresión de la restricción en términos de desplazamientos virtuales puede reescribirse como

$$\delta f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} \delta q_j = \vec{\nabla} f \cdot \delta \vec{q} = 0$$

donde $\vec{\nabla} f$ es el gradiente de la función de restricción, definido éste en el espacio de configuración del sistema, mientras que $\delta \vec{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_g]$ es el vector que representa los posibles desplazamientos virtuales del sistema. Como vemos, el gradiente de la función de restricción es perpendicular a los desplazamientos virtuales, con lo que éste nos da la dirección de la fuerza de vínculo. Conocida ya la dirección de la fuerza, podemos ver que el multiplicador de Lagrange λ resulta ser un factor que escala al gradiente de la función de restricción para que el producto de ambos coincida en magnitud, dirección y sentido con la fuerza de vínculo considerada. En resumidas cuentas, podemos expresar a la fuerza de vínculo como

$$\vec{F}_v = \lambda \vec{\nabla} f$$

A modo de ejemplo, consideremos la máquina de Atwood que se muestra en la figura. Este sistema está formado por dos cuerpos de masas m_1 y m_2 , los cuales tienen permitido desplazarse únicamente en la dirección vertical y están vinculados entre sí a través de una polea ideal por una cuerda de largo l . Es fácil ver que el sistema posee un único grado de libertad, ya que con conocer la altura de una de las masas, es posible obtener la altura de la otra. En consecuencia, si solo nos interesase conocer la dinámica del sistema, tendríamos que plantear el problema a través de un lagrangiano que dependiese de una única coordenada (y su velocidad), la cual podría ser z_1 . Sin embargo, si hacemos eso, estaremos perdiendo la información acerca de la fuerza de vínculo, en este caso la tensión en la cuerda, debido a que ésta estaría siendo incluida en el problema de forma implícita al restringir el número de coordenadas. Por lo tanto, para encontrar no sólo la dinámica del sistema, sino también la tensión en la cuerda, deberemos plantear el problema como si ésta no estuviese presente, es decir como si ambas masas pudiesen desplazarse verticalmente de forma independiente. Para ello, escribimos



primero la expresión de la función de restricción asociada al vínculo del cual queremos conocer su fuerza

$$f(z_1, z_2) = z_1 + z_2 + l - \pi R = 0$$

donde R representa al radio de la polea.

El lagrangiano resulta entonces

$$\mathcal{L}(z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{z}_2^2 + m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

Planteando las ecuaciones de Lagrange para ambas coordenadas, llegamos a

$$m_1 \ddot{z}_1 - m_1 g - \lambda = 0$$

$$m_2 \ddot{z}_2 - m_2 g - \lambda = 0$$

El sistema anterior posee dos ecuaciones y tres incógnitas, las dinámicas $z_1(t)$ y $z_2(t)$ y el valor del multiplicador λ . Para poder resolverlo, debemos ahora sí introducir como una ecuación adicional a aquella que define el vínculo ($f = 0$). A partir de ella y derivando dos veces con respecto al tiempo, podemos despejar la relación

$$\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1$$

y reemplazándola en las ecuaciones originales

$$m_1 \ddot{z}_1 - m_1 g - \lambda = 0$$

$$-m_2 \ddot{z}_1 - m_2 g - \lambda = 0$$

Ahora bien, si restamos las dos ecuaciones, llegamos a

$$(m_1 + m_2) \ddot{z}_1 - (m_1 - m_2)g = 0 \Rightarrow \ddot{z}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

que define la dinámica del sistema. En cambio, si multiplicamos la primera ecuación por m_2 y la segunda por m_1 y sumamos, podemos despejar

$$\lambda = -\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Finalmente, la tensión en la cuerda la podemos expresar, en el espacio de configuración del sistema, como

$$\vec{T} = \lambda \vec{\nabla} f = -\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (\hat{z}_1 + \hat{z}_2)$$

Resulta interesante ver cómo en el espacio de configuración, la dirección de la fuerza de vínculo resulta ortogonal a la recta que contiene a los desplazamientos virtuales, lo que permite ver que el trabajo virtual de la fuerza es nulo. Es importante contrastar este resultado con lo que uno obtendría en el espacio real, tridimensional, en el cual se desarrollan los fenómenos físicos. En ese espacio, no habrá una sola

fuerza, sino dos, una sobre cada cuerpo. Ambas realizarán trabajo real, puesto que sus direcciones son paralelas a los desplazamientos de los cuerpos, pero el trabajo total, resultado de la suma de ambos trabajos individuales, será nulo. Vemos entonces cómo el espacio de configuración resulta útil desde un punto de vista conceptual, permitiéndonos extender el concepto de ortogonalidad de las fuerzas de vínculo a aquellos casos particulares en los cuales lo que es nulo es la suma de los trabajos de las fuerzas y no los trabajos individuales de cada una de ellas.

5. Fuerzas centrales y movimiento planetario

5.1 Conservación del momento angular y elección de coordenadas

Abordaremos en esta clase el problema de un cuerpo que se encuentra sometido a una fuerza central y, en particular, el problema planetario, es decir la obtención de las órbitas de los planetas en su trayectoria alrededor del Sol como consecuencia de la atracción gravitatoria.

El movimiento de los planetas sigue tres leyes muy específicas, enunciadas por Kepler:

1. Los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos.
2. El radiovector que une al Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del tiempo de revolución de la trayectoria es proporcional al cubo de su semieje mayor y la constante de proporcionalidad es independiente del planeta.

Cuando un cuerpo es sometido por una fuerza conservativa, decir que ésta es una fuerza central equivale a pedir que el potencial que describe la interacción sea de la forma

$$V = V(r)$$

donde r es la distancia que separa al cuerpo del centro de atracción.

La consideración de un potencial que sólo depende de la distancia ya nos permite extraer información importante acerca de cómo será el movimiento. En primer lugar, como dicho potencial no posee una dependencia angular o, lo que es lo mismo, no existe una dirección preferencial, concluimos entonces que el lagrangiano del sistema tendrá una simetría de rotación. De acuerdo al teorema de Noether, la invariancia del lagrangiano ante rotaciones implica la conservación del momento angular, que en este caso corresponde con el momento angular del cuerpo $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. La conservación del momento angular no sólo implica que se conserva su magnitud, sino también su dirección y sentido, lo que dada la expresión de éste, implica que los vectores \vec{r} y \vec{p} estarán siempre contenidos en el mismo plano. Puesto que el estado de un sistema mecánico se encuentra completamente determinado por las posiciones y momentos (o, lo que es lo mismo, velocidades), concluimos entonces que el movimiento del cuerpo estará siempre contenido en un plano y definiremos las coordenadas generalizadas de acuerdo a ello, eligiendo coordenadas polares. Todo lo anterior nos lleva a que el lagrangiano del sistema será

$$\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V$$

Si planteamos la ecuación de Lagrange para la coordenada θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

y siendo que el lagrangiano no depende explícitamente de la coordenada ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$), su momento conjugado

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$$

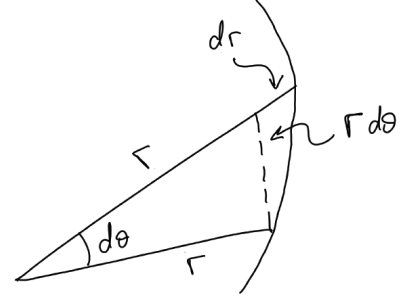
se conservará.

Como veremos a continuación, la conservación de p_θ nos permitirá deducir rápidamente la segunda de las leyes de Kepler. Para ello, escribamos a partir de la figura el diferencial de área barrida como

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta + \frac{1}{2} r dr d\theta$$

que en el límite retiene sólo el primer término, obteniendo para la velocidad areal

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$



Resulta inmediato que la velocidad areal será una constante dada su proporcionalidad con el momento angular ($\frac{dA}{dt} = \frac{p_\theta}{2m}$).

5.2 Análisis cualitativo

Intentemos ahora obtener las trayectorias, primero de forma cualitativa. Para ello, planteemos la energía del sistema

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V$$

La conservación del momento angular nos permite sacarnos de encima la velocidad angular usando la relación $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$, reescribiendo la energía mecánica como

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V$$

Expresada de esa manera, la energía mecánica parece depender sólo de r y su velocidad \dot{r} , lo que permite analizar al sistema como uno equivalente en el cual definimos una energía cinética efectiva

$$T_{ef} = \frac{m}{2} \dot{r}^2$$

y un potencial efectivo

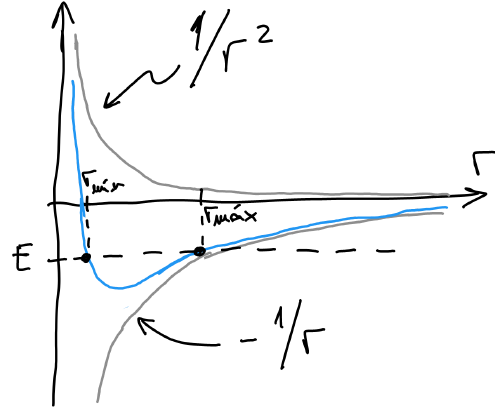
$$V_{ef} = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V$$

Para el caso gravitatorio, resulta

$$V_{ef} = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

donde G es la constante de gravitación universal y M es la masa del centro de atracción, en este caso el Sol.

En la figura vemos la forma del potencial efectivo, la cual nos permite llevar a cabo un análisis cualitativo del movimiento. En primer lugar, puede verse cómo el término adicional deforma el potencial haciendo que, para distancias pequeñas, éste deje de ser atractivo y se vuelva repulsivo. Dicho de otro modo, la conservación del momento angular introduce una barrera de potencial que impide que el cuerpo en movimiento se acerque lo suficiente al centro de atracción.



Dado que la energía mecánica se conserva y que la energía cinética efectiva no puede ser negativa entonces, para un dado valor de energía mecánica, el movimiento estará restringido a aquella región en la cual $V_{ef} < E$. Cualitativamente, podemos ver que para valores negativos de energía mecánica tendremos órbitas cerradas, limitadas por radios mínimo r_{min} y máximo r_{max} , los cuales corresponden a los puntos en los cuales se satisface la igualdad $E = V_{ef}$. Para puntos fuera de ese rango resulta $E < V_{ef}$, o lo que es lo mismo $T_{ef} < 0$, lo cual no tiene físico. Como veremos más adelante, estos casos corresponderán a las órbitas elípticas. Existe un valor mínimo de energía para el cual los radios mínimo y máximo coinciden, por lo que la trayectoria sólo será posible para un único valor de r , lo que significa que estamos en el caso de órbitas circulares. En cambio, para valores de energía nula o positiva, la trayectoria será abierta, puesto que aunque es posible encontrar un valor r_{min} , el comportamiento asintótico del potencial ($\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef} = 0$) garantiza la ausencia de un punto de retorno.

5.3 Obtención de las órbitas

Busquemos ahora sí las órbitas. Para ello, recordemos que el lagrangiano del sistema es

$$\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V$$

y planteemos la ecuación de Lagrange para la coordenada r .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

Nuevamente, la conservación del momento angular p_θ nos permite reescribir la ecuación

$$m\ddot{r} - \frac{p_\theta^2}{mr^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Tomando el caso gravitatorio

$$m\ddot{r} - \frac{p_\theta^2}{mr^3} = -\frac{GMm}{r^2}$$

La solución $r(t)$ de la ecuación diferencial anterior nos permite conocer la evolución temporal de la coordenada radial, pero no es eso lo que nos interesa conocer, sino la ecuación de la trayectoria $r(\theta)$. Para ello, consideraremos la dependencia de r con θ a la hora de calcular las derivadas temporales e introduzcamos un cambio de variable.

$$\dot{r} = -r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \right) \dot{\theta} = -\frac{p_\theta}{m} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Luego

$$\ddot{r} = -\frac{p_\theta}{m} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = -\frac{p_\theta}{m} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \dot{\theta} = -\frac{p_\theta^2}{m^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Reemplazando

$$-\frac{p_\theta^2}{m^2 r^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] = -\frac{GM}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{p_\theta^2}$$

que tiene por solución

$$\frac{1}{r} = A \cos \theta + \frac{GMm^2}{p_\theta^2}$$

Invirtiendo la expresión, llegamos a la expresión final de la trayectoria

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

donde definimos el parámetro de la elipse

$$p = \frac{p_\theta^2}{GMm^2}$$

y demostramos así la primera de las leyes de Kepler.

El valor de la excentricidad ε de la órbita nos permite distinguir entre los diferentes tipos de órbitas discutidas anteriormente. Para $0 < \varepsilon < 1$, el término $\varepsilon \cos \theta$ será siempre menor a la unidad, con lo que el denominador será siempre positivo y así también lo será la distancia r al centro de atracción. Estamos entonces en el caso de las órbitas elípticas, cuyo caso límite, el de la órbita circular, se alcanza para el mínimo valor de excentricidad $\varepsilon = 0$. Si, en cambio, $\varepsilon > 1$, habrá algún valor de θ entre $\frac{\pi}{2}$ y π , donde $\cos \theta < 0$, para el cual el denominador se anula, tendiendo r a infinito. Esa dirección es entonces una asíntota de la curva que, en consecuencia, es abierta. Es éste el caso de las hipérbolas. El caso límite entre ambos tipos de órbitas es el correspondiente a las parábolas ($\varepsilon = 1$).

5.3 Las órbitas en coordenadas cartesianas

A partir de la ecuación de la órbita, reescribimos

$$r = p - \varepsilon r \cos \theta$$

donde

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$$

y

$$\cos \theta = \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}}$$

Reemplazando

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2} = p - \varepsilon(x - x_0)$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad

$$x^2 + x_0^2 - 2xx_0 + y^2 = p^2 + \varepsilon^2 x^2 + \varepsilon^2 x_0^2 - 2\varepsilon^2 xx_0 - 2p\varepsilon x + 2p\varepsilon x_0$$

Agrupando los términos

$$x^2(1 - \varepsilon^2) + x_0^2(1 - \varepsilon^2) + y^2 = p^2 + 2x[x_0(1 - \varepsilon^2) - p\varepsilon] + 2p\varepsilon x_0$$

El valor de x_0 se obtiene al plantear que el término lineal se anule, obteniendo

$$x_0 = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}$$

Reemplazando y agrupando

$$x^2(1 - \varepsilon^2) + y^2 = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}$$

que puede expresarse como

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

donde $a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$ es el semieje mayor de la elipse y $b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ es el semieje menor.

Como vemos, la constante $x_0 = a\varepsilon$ representa cuánto se aleja el foco del centro de la elipse, lo cual explica por qué al parámetro ε lo denominamos *excentricidad*.

La expresión anterior es válida siempre y cuando $0 \leq \varepsilon < 1$. Para el caso en que $\varepsilon > 1$, la ecuación de la trayectoria puede escribirse como

$$x^2 \frac{(\varepsilon^2 - 1)^2}{p^2} - y^2 \frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} = 1$$

que representa una hipérbola

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

con parámetros $a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}$, $b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$.

Para el caso en que $\varepsilon = 1$, volvemos a la ecuación de la trayectoria

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p - x$$

Elevamos al cuadrado

$$y^2 = p^2 - 2px$$

que no es más que la ecuación de una parábola

$$x = -\frac{y^2}{2p} + \frac{p}{2}$$

5.4 Tercera ley de Kepler

A partir de la constancia de la velocidad areolar

$$\dot{A} = \frac{p_\theta}{2m}$$

Para el caso de un período de revolución y recordando que el área de una elipse es πab

$$T = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{\pi ab 2m}{p_\theta}$$

Podemos ahora utilizar la relación $p = \frac{p_\theta^2}{GMm^2}$

$$T = \frac{\pi ab 2}{\sqrt{GMp}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \frac{a\sqrt{pa}}{\sqrt{p}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{\frac{3}{2}}$$

donde en la segunda igualdad usamos la relación $p = \frac{b^2}{a}$. Elevamos al cuadrado

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

demostrando así la tercera ley de Kepler, donde no sólo vemos que el cuadrado del período de revolución es proporcional al cubo del semieje mayor, sino que vemos también que la constante de proporcional sólo depende del centro de atracción.

La teoría de la gravitación de Newton representó la introducción de una fuerza de acción a distancia, radicalmente diferente al concepto de fuerza por contacto entre dos cuerpos. El mismo Newton consideraba como difícil de aceptar a una fuerza a distancia entre dos cuerpos sin ningún tipo de mediador, acuñando la expresión *hyphotheses non fingo*, en alusión a la dificultad de encontrar un mecanismo fundamental como origen de la gravitación.

6. El problema de dos cuerpos | Semejanza mecánica

6.1 El problema de dos cuerpos

Hasta aquí, hemos supuesto que podemos tratar a la interacción gravitatoria como una fuerza central, donde uno de los cuerpos involucrados permanece fijo en el centro de atracción y así hemos resuelto el problema de las trayectorias de los planetas alrededor del Sol. Por supuesto, eso no es más que una aproximación al problema real. La tercera ley de Newton (acción y reacción) nos dice que la fuerza que el Sol ejerce sobre alguno de los planetas debe estar acompañada de una fuerza igual y opuesta que el planeta ejerce sobre el Sol, lo que hará que éste no permanezca en reposo, aunque de acuerdo a la segunda ley de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$), como las fuerzas son iguales en magnitud, el hecho de que el Sol tenga una masa mucho mayor que cualquiera de los planetas que componen el sistema solar hacer que podamos suponer que su aceleración será mucho menor. Ahora bien ¿Qué ocurre cuando la relación de masas es cercana a la unidad? ¿Cómo son las trayectorias de ambos cuerpos en ese caso? De eso trata el llamado *problema de dos cuerpos*.

Consideremos entonces un sistema formado únicamente por dos cuerpos de masas m_1 y m_2 , que interactúan entre sí a través de una fuerza que sólo depende de la distancia entre ellos, como es el caso gravitatorio. Para abordar este problema, el primer paso es reconocer que existe una simetría de traslación. Dado que el potencial depende sólo de la distancia entre los cuerpos

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

sabemos, por el teorema de Noether, que el momento lineal del sistema de partículas \vec{P} se conserva. Vimos, además, que el momento lineal de un sistema de partículas está dado por el producto entre la masa total que resulta de sumar las masas de todos los cuerpos que lo componen y la velocidad de un punto particular del sistema, denominado centro de masas. La conservación del momento lineal del sistema implica entonces la constancia de la velocidad de su centro de masas, lo que nos permite asociar a ese punto con el origen de un sistema de referencia inercial. En ese caso, se cumple la relación

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$$

A su vez, definimos el vector \vec{r} como

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$$

A partir de las dos últimas ecuaciones, podemos reescribir los vectores posición de cada una de las masas con respecto al centro de masas

$$\vec{r}_1 = \frac{\mu}{m_1} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{\mu}{m_2} \vec{r}$$

donde definimos la *masa reducida*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Derivando con respecto al tiempo los vectores posición, obtenemos las velocidades

$$\vec{v}_1 = \frac{\mu}{m_1} \vec{v}$$

$$\vec{v}_2 = -\frac{\mu}{m_2} \vec{v}$$

Como vemos, es posible escribir las velocidades de ambos cuerpos en términos de una velocidad \vec{v} que corresponde a la derivada temporal del vector \vec{r} que resulta de la diferencia de los vectores posición de cada cuerpo. Eso nos permite reescribir la energía cinética del sistema como

$$T = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{\mu}{2} v^2$$

con lo que el lagrangiano del sistema será

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} v^2 - V(r)$$

donde hemos usado que el potencial puede escribirse directamente como función del módulo del vector \vec{r} . Teniendo en cuenta que al tratarse de una fuerza central, el momento angular del sistema se conservará y, por ende, el movimiento se desarrollará en un plano, es posible reescribir el lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

que es idéntico al lagrangiano que planteamos originalmente para un sistema formado por una única partícula sometida a una fuerza central. En el caso gravitatorio, será $V = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$.

Una vez encontrada la solución $r(\theta)$ de nuestro problema reducido, las soluciones para cada una de las masas se obtienen fácilmente a partir de las relaciones originales.

6.2 Semejanza mecánica

Abordaremos ahora el problema de la semejanza en mecánica, entendiendo por esto a la posibilidad de *escalar* un problema dado manteniendo su *forma*, lo que para nosotros significa que el nuevo lagrangiano resulta en el mismo tipo de dinámica. Dicho de otra forma, buscaremos que al modificar las dimensiones espaciales y temporales, la relación entre el nuevo lagrangiano y el original sea simplemente un factor de escala, lo que implica que la solución no varía.

Para ello, escalemos todas las distancias por un factor α y los tiempos por un factor β , de forma tal que

$$\vec{r}' = \alpha \vec{r}$$

$$t' = \beta t$$

Al hacerlo, las nuevas velocidades serán

$$\vec{v}' = \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}$$

Luego, el nuevo lagrangiano resulta

$$\mathcal{L}(\vec{r}', \vec{v}') = \mathcal{L}\left(\alpha \vec{r}, \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}\right) = T\left(\frac{\alpha}{\beta} \vec{v}\right) - V(\alpha \vec{r})$$

Ahora bien, por un lado sabemos que la energía cinética es una función homogénea de grado dos en las velocidades, es decir

$$T\left(\frac{\alpha}{\beta} \vec{v}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 T(\vec{v})$$

Por otro lado, supongamos que estamos tratando con un potencial homogéneo de grado k en las posiciones, con lo que

$$V(\alpha \vec{r}) = \alpha^k V(\vec{r})$$

Si reemplazamos ambas expresiones en el nuevo lagrangiano, obtenemos

$$\mathcal{L}(\vec{r}', \vec{v}') = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 T(\vec{v}) - \alpha^k V(\vec{r})$$

Podemos ver entonces que para que el nuevo lagrangiano sea igual al original multiplicado por un factor de escala, necesitamos que se cumpla la relación

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \alpha^k$$

o su expresión equivalente

$$\beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$$

Veamos qué significa este resultado con algunos casos particulares. Si, por ejemplo, consideramos el caso del potencial gravitatorio en cercanías de la superficie terrestre ($V = mgz$), el cual es homogéneo de grado $k = 1$, entonces debe cumplirse que

$$\beta = \sqrt{\alpha}$$

Lo que significa que los tiempos característicos resultan proporcionales a la raíz cuadrada de la distancia recorrida, consistente con el resultado conocido

$$\Delta z = \frac{g}{2} \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta z}{g}}$$

En cambio, si tomamos el caso de un potencial armónico ($V = \frac{k}{2}x^2$), el cual es homogéneo de grado $k = 2$, resulta que la relación a cumplirse es

$$\beta = 1$$

independiente de α , lo que significa que los tiempos característicos (el período en un movimiento armónico) resultan independientes de la amplitud del movimiento, lo cual no es otra cosa más que la ley de isocronía del péndulo de Galileo.

Por último, consideremos el caso del potencial gravitatorio newtoniano ($-\frac{GMm}{r}$), el cual es homogéneo de grado $k = -1$. Reemplazando, vemos que debe cumplirse la relación

$$\beta^2 = \alpha^3$$

que nos dice que la relación entre los tiempos característicos (períodos) elevados al cuadrado coincide con la relación entre las distancias características elevada al cubo, lo que coincide con la tercera ley de Kepler, que nos dice que el cuadrado del período de revolución de un planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo del semieje mayor de su trayectoria.

7. Ecuaciones de Hamilton

7.1 Ecuaciones canónicas

Como vimos al estudiar el teorema de Noether para la conservación de la energía, el hamiltoniano de un sistema mecánica se define como

$$\mathcal{H} = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}$$

Si tomamos un diferencial

$$d\mathcal{H} = \sum_j \left(dp_j \dot{q}_j + p_j d\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

vemos que los términos segundo y cuarto dentro del paréntesis se anulan al ser $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$, resultando

$$d\mathcal{H} = \sum_j (dp_j \dot{q}_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

donde también hemos usado la ecuación de Lagrange $\left(\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\right)$. A partir de la última expresión, podemos ver que se cumplen las siguientes dos relaciones

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}$$

que se conocen como las *ecuaciones canónicas* de Hamilton y que, al igual que las leyes de Newton o las ecuaciones de Lagrange, representan una formulación completa de la mecánica. En comparación con Newton o Lagrange, vemos que las ecuaciones canónicas involucran derivadas primeras con respecto al tiempo, pero al precio de duplicar el número de ecuaciones, ya que no sólo estamos tratando con la evolución temporal de las coordenadas q_j , sino también con la evolución temporal de los momentos conjugados p_j . De la misma forma, así como en el formalismo lagrangiano las soluciones de las ecuaciones corresponden con la evolución temporal del punto (q_1, q_2, \dots, q_g) en el espacio de configuración del sistema, formado éste por el conjunto de coordenadas generalizadas, las soluciones de las ecuaciones en el formalismo hamiltoniano corresponden con la evolución temporal del punto $(q_1, q_2, \dots, q_g, p_1, p_2, \dots, p_g)$ en el espacio de fases. Una diferencia importante entre ambos es que en el espacio de configuración, el estado de un sistema en un instante dado está determinado por el punto que representa a la configuración en ese instante y por su velocidad, mientras que en el espacio de fases, cada punto define completamente al estado de un sistema.

De la expresión original, también podemos deducir la relación

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

aunque lo cierto es que al demostrar la conservación de la energía, ya habíamos visto una relación aún más fuerte: $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$.

7.2 Corchetes de Poisson

Supongamos que tenemos una función $f(q, p, t)$. Su derivada temporal será

$$\frac{df}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Si utilizamos las ecuaciones canónicas, podemos reemplazar los factores \dot{q}_j y \dot{p}_j , obteniendo

$$\frac{df}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Definimos ahora el *corchete de Poisson* de dos funciones f y g como

$$\{f, g\} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right)$$

con lo que la derivada temporal de f podemos expresarla como

$$\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Resulta entonces que, dejando de lado la dependencia explícita de f con el tiempo, la evolución temporal del valor de la función f está *generada* por el corchete de Poisson con el hamiltoniano del sistema.

Analicemos ahora cuál es el resultado del corchete de Poisson de la función f con la coordenada q_k .

$$\{f, q_k\} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial q_k}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial q_k}{\partial q_j} \right) = \sum_j \left(-\delta_{jk} \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) = -\frac{\partial f}{\partial p_k}$$

De la misma manera, calculemos el resultado del corchete de Poisson de la función f con el momento p_k .

$$\{f, p_k\} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial p_k}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_k}{\partial q_j} \right) = \sum_j \delta_{jk} \frac{\partial f}{\partial q_j} = \frac{\partial f}{\partial q_k}$$

Como vemos, las coordenadas *operan* como una derivada con respecto al momento, a la vez que los momentos lo hacen como una derivada con respecto a la coordenada. Resulta ahora interesante ver qué sucede cuando la función en cuestión es el hamiltoniano \mathcal{H} y consideramos el corchete de Poisson con el momento p_k .

$$\frac{dp_k}{dt} = \{p_k, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}$$

Lo que vemos no es otra cosa más que una especie de teorema del Noether para el momento lineal, pero ya no en términos del lagrangiano, sino del hamiltoniano. Lo que nos dice la última expresión es que, si el hamiltoniano es invariante ante traslaciones espaciales en la dirección asociada con la coordenada q_k , entonces el momento conjugado p_k será una magnitud conservada.

Para cerrar, mencionemos la similitud entre el corchete de Poisson y los conmutadores de la mecánica cuántica. En efecto, se cumple la relación

$$[\hat{F}, \hat{G}] = i\hbar\{f, g\}$$

donde

$$[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}$$

siendo \hat{F} y \hat{G} los operadores que corresponden a las variables dinámicas f y g .

Se denomina *cuantización canónica* al procedimiento por el cual se construye una teoría cuántica a partir de ciertos operadores, los cuales satisfacen reglas de conmutación análogas a los corchetes de Poisson de las variables dinámicas de la correspondiente teoría clásica. Puede verificarse, por ejemplo, que las variables de posición y momento satisfacen, en la teoría clásica, los siguientes corchetes de Poisson

$$\{q_j, q_k\} = 0$$

$$\{p_j, p_k\} = 0$$

$$\{q_j, p_k\} = \delta_{jk}$$

que, en el contexto de la mecánica cuántica, señalan que los operadores de posición y momento no conmutan, lo que lleva, finalmente, al principio de incertidumbre de Heisenberg.

8. Cuerpo rígido

8.1 El cuerpo rígido como sistema de partículas

Un cuerpo rígido es un sistema de partículas que satisface la propiedad de que la distancia entre dos partículas cualesquiera es siempre la misma, es decir

$$\frac{d}{dt}|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = 0$$

donde \vec{r}_i y \vec{r}_j son las posiciones de dos partículas diferentes pertenecientes al sistema.

Para determinar el número de grados de libertad de un cuerpo rígido tomemos inicialmente una única partícula que pertenezca a éste, lo cual nos dice que para conocer su posición en el espacio necesitaremos tres coordenadas. Luego, para poder conocer la posición de una segunda partícula que también pertenezca al cuerpo rígido, dada la condición de que la distancia entre ambas es constante, serán necesaria dos coordenadas angulares que nos indiquen la orientación en el espacio de la recta que las une. Para determinar la posición de una tercera partícula, necesitaremos una coordenada angular adicional, luego de lo cual la posición de cualquier partícula adicional será conocida, con lo que llegamos a que el máximo número de grados de libertad de un cuerpo rígido es $g = 6$.

8.2 Velocidad angular de un cuerpo rígido

Una vez establecido el número de grados de libertad, sabemos entonces que el movimiento general de un cuerpo rígido estará dado por una traslación más una rotación. Ahora bien, nos preguntamos cómo será el vector velocidad angular que caracterice a la rotación y si éste es único o depende del punto de referencia que escojamos. Para ello, planteemos una variación infinitesimal en la posición de un punto cualquiera del cuerpo rígido

$$\vec{r}_i = \vec{R}' + \vec{r}_i'$$

como

$$d\vec{r}_i = d\vec{R}' + d\vec{r}_i' = d\vec{R}' + d\vec{\varphi}' \times \vec{r}_i'$$

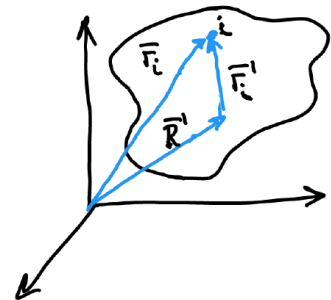
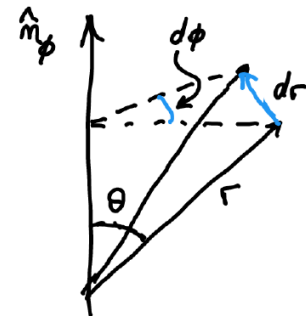
La velocidad resulta

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{R}'}{dt} + \vec{\omega}' \times \vec{r}_i'$$

donde definimos la velocidad angular $\vec{\omega}' = \frac{d\vec{\varphi}'}{dt}$. Si ahora tomamos un segundo punto de referencia

$$\vec{r}_i = \vec{R}'' + \vec{r}_i''$$

su velocidad será



$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{R}''}{dt} + \frac{d\vec{r}_i''}{dt} = \frac{d\vec{R}''}{dt} + \vec{\omega}'' \times \vec{r}_i''$$

Pero por otra parte, puesto que

$$\vec{R}'' = \vec{R}' + \vec{R}'' - \vec{R}'$$

podemos reescribir

$$\vec{v}_i = \frac{d}{dt}(\vec{R}' + \vec{R}'' - \vec{R}') + \frac{d\vec{r}_i''}{dt} = \frac{d\vec{R}'}{dt} + \vec{\omega}' \times (\vec{R}'' - \vec{R}') + \vec{\omega}' \times \vec{r}_i''$$

Finalmente, vemos que ambas expresiones coinciden sólo si $\vec{\omega}' = \vec{\omega}''$.

8.3 El tensor de inercia

Dado que la dinámica de rotación de un sistema de partículas se encuentra determinada por la evolución temporal del momento angular \vec{L} , resulta deseable ver qué expresión poder encontrar para dicha magnitud física en el caso de un cuerpo rígido para el cual hemos visto que su rotación en el espacio está dada por el vector velocidad angular $\vec{\omega}$. Nos concentraremos ahora sólo en el movimiento de rotación del cuerpo.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

donde en la última igualdad usamos la condición de rigidez.

A partir de la identidad $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]$$

Reescribimos la expresión anterior usando índices para las coordenadas y quedándonos con una de las componentes

$$L_j = \sum_i m_i \left[r_i^2 \omega_j - r_{ij} \left(\sum_k r_{ik} \omega_k \right) \right] = \sum_k \left[\sum_i m_i (\delta_{jk} r_i^2 - r_{ij} r_{ik}) \right] \omega_k$$

Definimos al *tensor de inercia* como la matriz \bar{I} con elemento

$$I_{jk} = \sum_i m_i (\delta_{jk} r_i^2 - r_{ij} r_{ik})$$

donde r_{ij} indica la componente j del vector posición \vec{r}_i , mientras que

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & , j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases}$$

es la delta de Kronecker.

Podemos escribir explícitamente el tensor de inercia como

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{bmatrix}$$

Para cuerpos con una distribución de masa continua

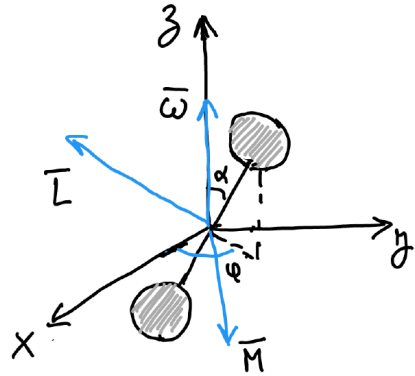
$$I_{jk} = \int \rho(\vec{r}) (\delta_{jk} r^2 - r_j r_k) d^3 r$$

donde la integral se lleva a cabo sobre el volumen del cuerpo rígido.

8.4 Cuerpo rígido elemental

Tenemos un cuerpo rígido formado por dos masas puntuales unidas entre sí por una barra de largo $2d$ y masa despreciable. En su centro, la barra se encuentra soldada a un eje vertical que rota con velocidad angular constante $\vec{\omega}$, formando la barra un ángulo α con la vertical. El momento angular expresado en una terna de ejes fijos cuyo origen se encuentra en el centro de masas será

$$\vec{L} = \bar{I} \vec{\omega}$$



Puesto que $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$, sólo nos interesará conocer la tercera columna del tensor de inercia. Para ello, escribamos la posición de las masas como

$$\vec{r}_{1,2} = \pm d(\text{sen}\alpha \cos\varphi \hat{x} + \text{sen}\alpha \text{sen}\varphi \hat{y} + \cos\alpha \hat{z})$$

resultando

$$\vec{L} = 2md^2 \omega \text{sen}\alpha (-\cos\varphi \cos\alpha \hat{x} - \text{sen}\varphi \cos\alpha \hat{y} + \text{sen}\alpha \hat{z})$$

El momento angular se proyecta sobre el plano x, y en la misma dirección en que proyecta la barra $\cos\varphi \hat{x} + \text{sen}\varphi \hat{y}$, con lo que éste se encuentra en el mismo plano que la barra y el eje z . Adicionalmente, podemos ver que el momento angular es perpendicular a la barra en todo momento y su movimiento describe un cono alrededor del eje z . Por último, la variación del momento angular implica la aplicación de un momento de fuerzas total

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 2md^2 \omega^2 \text{sen}\alpha (\text{sen}\varphi \cos\alpha \hat{x} - \cos\varphi \cos\alpha \hat{y})$$

El momento de fuerzas resultante es perpendicular tanto al momento angular como también a la dirección de la barra. El hecho de que no sea nulo no es más que la consecuencia de que el cuerpo no posee simetría alrededor del eje de rotación,

con lo que el momento angular no es colineal con la velocidad angular, dando lugar al momento de fuerzas como una *reacción dinámica*. Como ejemplo, podemos mencionar el caso del balanceo de las ruedas de un auto, cuando los plomos que se colocan buscan alinear \vec{L} con $\vec{\omega}$, evitando el temblor al andar y el desgaste de los bujes que sostienen el movimiento.

8.5 Ejes principales

Dado que el tensor de inercia está representado por una matriz simétrica, ésta posee varias propiedades: existe una matriz de transformación que lleva a la matriz original a una forma diagonal, siendo todos los autovalores reales, al igual que las componentes de los autovectores, cumpliéndose además que autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales entre sí.

Diremos que la terna elegida está formada por ejes principales cuando se cumpla que el tensor de inercia del cuerpo rígido sea diagonal o, lo que es lo mismo

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

Para que eso suceda

$$\vec{L} = \bar{I}\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

donde I es un número. Reescribiendo

$$(\bar{I} - I)\vec{\omega} = 0$$

lo que representa un problema de autovalores y autovectores. Expresado el tensor de inercia en ejes principales (autovectores), los elementos de la diagonal (autovalores) serán los momentos de inercia asociados a cada uno de esos ejes.

8.6 Cuerpo rígido elemental en ejes principales

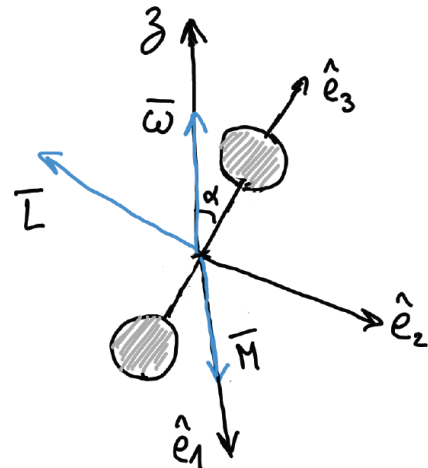
Definiendo los ejes de la terna rotante como en la figura, vemos que el tensor de inercia es diagonal, con elementos $I_{11} = I_{22} = 2md^2$, $I_{33} = 0$, mientras que la velocidad angular es

$$\vec{\omega} = -\omega \sin\alpha \hat{e}_2 + \omega \cos\alpha \hat{e}_3$$

de donde obtenemos el momento angular

$$\vec{L} = -I_{22}\omega \sin\alpha \hat{e}_2$$

Al igual que antes, el momento angular dio perpendicular a la barra. Por otra parte, para poder calcular el momento de fuerzas aplicado deberemos tener en cuenta que estamos tratando con una terna que está rotando, es decir



$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(-I_{22}\omega \sin\alpha \hat{e}_2) = -I_{22}\omega \sin\alpha (\vec{\omega} \times \hat{e}_2) = I_{22}\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \hat{e}_1$$

resultando, finalmente

$$\vec{M} = 2md^2\omega^2 \text{sen}\alpha \cos\alpha \hat{e}_1$$

que coincide con el resultado obtenido originalmente, lo que resulta explícito si escribiéramos el versor \hat{e}_1 en la terna fija x, y, z .

9. Mecánica en un referencial rotante

9.1 Ecuación de Euler

El resultado obtenido al final de la clase previa no es más que un caso particular de una expresión general, denominada ecuación de Euler, que nos dice que, dado un vector \vec{A} expresado en componentes de una terna $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ que rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$, su derivada temporal en un sistema de referencia inercial será

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{in} = \frac{dA_1}{dt} \vec{e}_1 + A_1 \frac{d\vec{e}_1}{dt} + \frac{dA_2}{dt} \vec{e}_2 + A_2 \frac{d\vec{e}_2}{dt} + \frac{dA_3}{dt} \vec{e}_3 + A_3 \frac{d\vec{e}_3}{dt}$$

Puesto que los versores no varían su longitud, sino que sólo rotan $\left(\frac{d\vec{e}_j}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_j \right)$, escribimos

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{in} = \frac{dA_1}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dA_2}{dt} \vec{e}_2 + \frac{dA_3}{dt} \vec{e}_3 + A_1(\vec{\Omega} \times \vec{e}_1) + A_2(\vec{\Omega} \times \vec{e}_2) + A_3(\vec{\Omega} \times \vec{e}_3)$$

Reordenando

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{in} = \frac{dA_1}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dA_2}{dt} \vec{e}_2 + \frac{dA_3}{dt} \vec{e}_3 + \vec{\Omega} \times A_1 \vec{e}_1 + \vec{\Omega} \times A_2 \vec{e}_2 + \vec{\Omega} \times A_3 \vec{e}_3$$

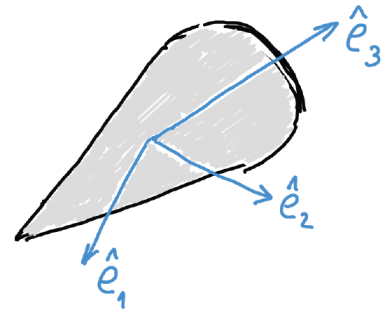
llegamos a

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{rot} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

que se denomina *ecuación de Euler*.

9.2 Cuerpo en ausencia de fuerzas y momentos

Veremos ahora algunos casos de aplicación de la ley de Euler. En primer lugar, abordaremos el problema de un cuerpo con simetría axial que se mueve en ausencia de fuerzas y momentos. Más allá de un posible movimiento de traslación con una velocidad uniforme de su centro de masas, el cuerpo podrá estar rotando con una velocidad angular que resultará de la aplicación de la ecuación de Euler para la derivada del momento angular,



$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{in} = \begin{bmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_1 \omega_1 & I_2 \omega_2 & I_3 \omega_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ahora bien, si suponemos que la simetría se produce alrededor del eje \hat{e}_3 , entonces resulta $I_2 = I_1$, con lo que podemos reescribir la ecuación anterior como

$$I_1 \dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3$$

$$I_1 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

La tercera ecuación nos dice que la componente ω_3 es constante. Asimismo, si definimos

$$\Gamma = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3$$

podemos reescribir las dos primeras ecuaciones,

$$\dot{\omega}_1 = \Gamma \omega_2$$

$$\dot{\omega}_2 = -\Gamma \omega_1$$

que pueden resolverse fácilmente. Por ejemplo, si derivamos la primera ecuación y reemplazamos en la segunda, obtenemos

$$\ddot{\omega}_1 + \Gamma^2 \omega_1 = 0$$

que tiene por solución

$$\omega_1(t) = \omega_{\perp} \cos(\Gamma t)$$

Si derivamos y reemplazamos en la primera ecuación, podemos encontrar para la otra componente de la velocidad angular

$$\omega_2(t) = \omega_{\perp} \sin(\Gamma t)$$

donde hemos definido $\omega_{\perp} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

Vemos entonces que la velocidad angular tendrá una componente que no varía en el tiempo, la cual corresponde a la dirección del eje de simetría, mientras que la componente perpendicular a dicho eje irá rotando alrededor del mismo con velocidad Γ .

9.3 Mecánica en un referencial rotante

Plantearemos ahora cómo se ve la dinámica de un sistema cuando el observador se encuentra rotando con una velocidad angular Ω , tal como ocurre con nosotros por estar en la superficie terrestre. La forma más directa de plantear el problema es utilizando la segunda ley de Newton

$$m \vec{a}|_{in} = \vec{F}$$

y escribiendo la aceleración a partir de la aplicación de la ecuación de Euler. Empezando por la velocidad,

$$\vec{v}|_{in} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{in} = \vec{v}|_{rot} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

Donde $\vec{v}|_{rot} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{rot}$. Si derivamos una vez más para encontrar la aceleración,

$$\vec{a}|_{in} = \left. \frac{d\vec{v}|_{in}}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d}{dt} (\vec{v}|_{rot} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \right|_{rot} + \vec{\Omega} \times (\vec{v}|_{rot} + \vec{\Omega} \times \vec{r})$$

Asumiendo una velocidad de rotación $\vec{\Omega}$ constante, obtenemos

$$\vec{a}|_{in} = \vec{a}|_{rot} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}|_{rot} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

Finalmente, reemplazando en la segunda ley de Newton,

$$m\vec{a}|_{rot} = \vec{F} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}|_{rot} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

Vemos, finalmente, que un observador en el referencial rotante, si quisiese pensar el movimiento de acuerdo a las leyes de Newton, deberá concluir que sobre el cuerpo en movimiento no sólo actúa la fuerza real \vec{F} , sino también dos fuerzas adicionales, que denominamos *fuerza de Coriolis*

$$\vec{F}_{coriolis} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}|_{rot}$$

y *fuerza centrífuga*

$$\vec{F}_{centrifuga} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

9.4 Péndulo de Foucault

El péndulo de Foucault consiste en una masa grande (para que la inercia haga durar el movimiento a pesar del rozamiento presente) pendiendo de una cuerda larga, lo que permite que para ángulos pequeños pueda considerarse que el movimiento transcurre en el plano horizontal, despreciando así el movimiento en la dirección vertical.

Despreciando términos cuadráticos en la velocidad de rotación $\vec{\Omega}$, las ecuaciones de movimiento en el plano serán

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z \dot{y}$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z \dot{x}$$

que pueden reescribirse de forma compacta como

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$$

donde definimos $\xi = x + iy$.

Para el caso $\Omega_z \ll \omega$, la ecuación anterior tiene por solución,

$$\xi(t) = e^{-i\Omega_z t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

que puede reescribirse,

$$x(t) + iy(t) = [x_0(t) + iy_0(t)] e^{-i\Omega_z t}$$

donde $x_0(t) + iy_0(t)$ es la solución correspondiente al caso en que no hay rotación, con lo cual vemos que la solución completa estará dada por un movimiento tipo

péndulo en el cual el plano de oscilación va rotando alrededor de la vertical con una velocidad angular Ω_z .

10. Formulación lagrangiana del cuerpo rígido

10.1 Energía cinética

Tomando al cuerpo rígido como sistema de partículas, su energía cinética estará dada por la expresión

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{V}' + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{V}' + \vec{v}'_i)$$

donde \vec{V}' corresponde a la velocidad de un punto dado del cuerpo rígido.

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \cdot (\vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i)$$

Expandiendo los términos

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i V'^2 + \vec{V}' \cdot \left[\vec{\omega} \times \left(\sum_i m_i \vec{r}'_i \right) \right] + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)$$

Vemos que en el primer término, la velocidad \vec{V}' es independiente de la partícula, con lo que sale de la sumatoria resultando finalmente $\frac{1}{2} M V'^2$, donde M es la masa total. Asimismo, vemos que si el punto tomado como referencia coincide con el centro de masas del cuerpo ($\vec{R} = \vec{R}_{CM}$), entonces el segundo término se anula, puesto que éste no es más que la masa total por la velocidad del centro de masas, medida en el sistema de referencia que tiene su origen en el centro de masas. Finalmente, usando la identidad $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$, el último término puede escribirse de forma tal que obtenemos

$$T = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{\omega} \cdot [\vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)] = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i$$

Advertimos que en el último término aparece el momento angular calculado desde el centro de masas, con lo que la energía cinética puede escribirse finalmente como

$$T = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_{CM}$$

y diremos que el primer término representa la *energía cinética de traslación*, mientras que el segundo representa la *energía cinética de rotación*.

Es importante tener siempre presente que esta última expresión, como una suma de un término de traslación y otro de rotación sólo es válida cuando el punto escogido como referencia del cuerpo rígido corresponde con el centro de masas. De lo contrario, aparecerá lo que en la expresión original era el término del medio, que acopla traslación y rotación. Alternativamente, cuando existe un punto \vec{R}_O del cuerpo rígido que tiene velocidad nula ($\vec{V}_O = 0$), entonces es posible expresar la energía cinética como

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O$$

lo que se traduce como una energía cinética puramente de rotación.

Es un buen momento para señalar el por qué hablamos de tensor de inercia y no simplemente de matriz de inercia. Lo llamamos tensor porque tiene asociado un escalar, en este caso la energía cinética, que resulta invariante ante cambios de coordenadas. Significa eso que al pasar de un sistema de coordenadas a otro, tanto la velocidad angular como el tensor de inercia cambiarán sus componentes, pero lo harán de tal manera que el resultado de calcular la energía cinética sea invariante. Es un caso análogo al que diferencia a una terna de números reales de un vector, siendo el escalar asociado con este último el producto interno, el cual también es independiente del sistema de coordenadas elegido.

10.2 Energía potencial

Escribimos el diferencial de trabajo para el caso de una fuerza conservativa

$$dV = - \sum_i \vec{F}_i \cdot (d\vec{R} + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i) = - \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{R} - d\vec{\varphi} \cdot \left(\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right)$$

donde usamos nuevamente que $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$. Llevando a cabo las sumatorias,

$$dV = -\vec{F} \cdot d\vec{R} - \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$$

De la última ecuación, vemos que $F_j = -\frac{\partial V}{\partial R_j}$, mientras que $M_j = -\frac{\partial V}{\partial \varphi_j}$.

10.3 Ecuaciones de Lagrange

Al escribir el Lagrangiano como

$$\mathcal{L} = T - V$$

resulta, para las coordenadas asociadas a la traslación,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{R}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_j} = \frac{d}{dt} P_j - F_j = 0$$

mientras que para las coordenadas angulares,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_j} = \frac{d}{dt} L_j - M_j = 0$$

con lo que expresamos la dinámica de un cuerpo rígido usando el formalismo de Lagrange para cualquiera de los grados de libertad de éste, independientemente de si se trata de una traslación o una rotación.

10.4 Péndulo físico

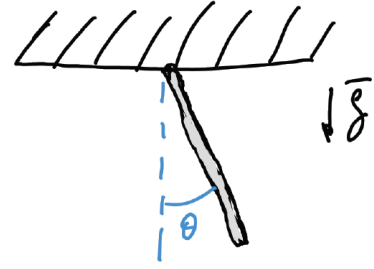
Consideremos el caso de una barra de masa m y longitud l , suspendida de un extremo. El lagrangiano del sistema será

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{mgl}{2}\cos\theta$$

con lo que la ecuación de Lagrange resulta

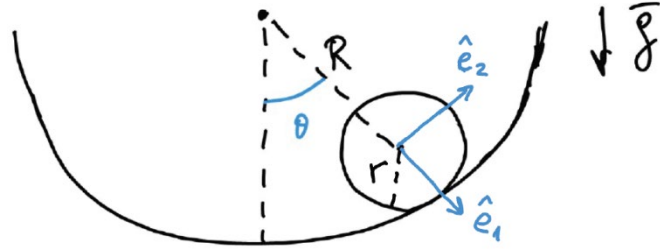
$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l}\sin\theta = 0$$

que resulta en la ecuación de un péndulo ideal, salvo porque la frecuencia resulta algo mayor.



10.5 Cilindro que rueda sin deslizar

A continuación, resolveremos el problema de un cilindro de masa m y radio r , que rueda sin deslizar sobre una superficie cilíndrica hueca de radio $R + r$, donde R es la distancia al centro de masas del cilindro pequeño.



En primer lugar, advertimos que el ángulo θ nos permite escribir la velocidad del centro de masas como $\vec{v}_{CM} = R\dot{\theta}\hat{e}_2$, mientras que podemos definir un ángulo φ que nos permita describir la rotación alrededor del centro de masas con velocidad $\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\hat{e}_3$. Asimismo, estos dos movimientos posibles para el cuerpo rígido no son independientes entre sí, ya que éste rueda sin deslizar, con lo que el punto de contacto P con la superficie cilíndrica tiene velocidad nula, lo que establece un vínculo el cual se sostiene gracias a la presencia de la fuerza de rozamiento. Para obtener la relación entre ambas velocidades angulares, usaremos la condición de rigidez, que nos permite relacionar la velocidad del centro de masas con la velocidad del punto de contacto,

$$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P)$$

Ahora bien, sabemos que $\vec{v}_P = 0$, a la vez que $\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P = -r\hat{e}_1$. Reemplazando,

$$R\dot{\theta}\hat{e}_2 = \dot{\varphi}\hat{e}_3 \times r\hat{e}_1 = r\dot{\varphi}\hat{e}_2$$

de donde surge la función de restricción

$$f = R\dot{\theta} - r\dot{\varphi} = 0$$

El lagrangiano puede escribirse

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{mr^2}{4}\dot{\varphi}^2 + mgR\cos\theta$$

y reemplazando la relación de vínculo,

$$\mathcal{L} = \frac{3mR^2}{4}\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta$$

con lo que la ecuación de Lagrange resulta

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3R}\sin\theta = 0$$

En cambio, si estuviésemos interesados en obtener también la fuerza de rozamiento que es necesaria para que el cuerpo ruede sin deslizar, podemos plantear el problema sin reemplazar explícitamente el vínculo desde el comienzo, es decir que usaremos el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{mr^2}{4}\dot{\phi}^2 + mgR\cos\theta$$

de donde se deducen las ecuaciones de Lagrange,

$$mR^2\ddot{\theta} + mgR\sin\theta - \lambda R = 0$$

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\phi} + \lambda r = 0$$

Si incorporamos la relación de vínculo $R\dot{\theta} = r\dot{\phi}$ como una ecuación adicional, podemos despejar, por un lado, la misma ecuación diferencial que habíamos obtenido para la dinámica $\theta(t)$ y, por el otro, el valor del multiplicador de Lagrange,

$$\lambda = \frac{mg\sin\theta}{3}$$

Finalmente, en el espacio de configuración,

$$\vec{F}_{roz} = \lambda \vec{\nabla} f = \frac{mg\sin\theta}{3} (R\hat{\theta} - r\hat{\phi})$$

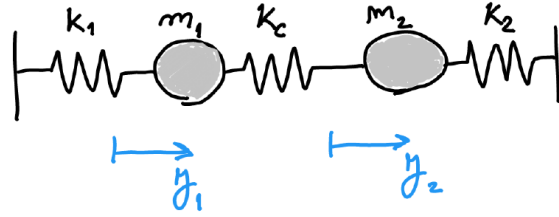
mientras que en el espacio real,

$$\vec{F}_{roz} = \frac{mg\sin\theta}{3} \hat{e}_2$$

11. Oscilaciones acopladas

11.1 El oscilador acoplado elemental

El sistema bajo estudio está formado por dos masas m_1 y m_2 , las cuales pueden desplazarse longitudinalmente a lo largo de la recta que las contiene a ambas. Entre la pared izquierda y m_1 se encuentra un resorte de constante elástica k_1 , mientras que entre m_2 y la pared derecha se encuentra un resorte de constante elástica k_2 . Si no hubiese nada más presente, ambas masas oscilarían en torno a sus respectivas posiciones de equilibrio, con frecuencias $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}$. Sin embargo, el sistema posee un tercer resorte, de constante elástica k_c que se encuentra entre ambas masas y cuyo efecto es acoplar ambos osciladores. Para simplificar el planteo, supongamos que los tres resortes poseen la misma longitud natural l_0 y que la distancia entre ambas paredes es $L = 3l_0$. En ese caso, es muy sencillo encontrar la posición de equilibrio del sistema en su conjunto y, definiendo coordenadas y_i como los apartamientos de cada una de las masas con respecto al equilibrio, podemos escribir el lagrangiano del sistema,



$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2} \dot{y}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{y}_2^2 - \frac{k_1}{2} y_1^2 - \frac{k_2}{2} y_2^2 - \frac{k_c}{2} (y_2 - y_1)^2$$

de donde surge el siguiente sistema de ecuaciones

$$m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_c) y_1 - k_c y_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + k_c) y_2 - k_c y_1 = 0$$

El acoplamiento del sistema se ve en que una coordenada aparece en la ecuación diferencial de la otra, por lo que resulta evidente que perturbar a una de las masas apartándola del equilibrio afecta al sistema en su conjunto, con lo que la solución de éste ya no puede pensarse como la de dos masas que oscilan armónicamente una independiente de la otra. Antes de continuar, haremos un cambio de variables que nos facilitará la solución. Para ello, definimos nuevas coordenadas $x_i = y_i \sqrt{m_i}$, obteniendo

$$\ddot{x}_1 + \frac{k_1 + k_c}{m_1} x_1 - \frac{k_c}{\sqrt{m_1 m_2}} x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{k_2 + k_c}{m_2} x_2 - \frac{k_c}{\sqrt{m_1 m_2}} x_1 = 0$$

Para simplificar la resolución, definimos $\omega_1^2 = \frac{k_1 + k_c}{m_1}$ y $\omega_2^2 = \frac{k_2 + k_c}{m_2}$ como las respectivas frecuencias naturales para cada masa cuando la otra se encuentra quieta y $c = \frac{k_c}{\sqrt{m_1 m_2}}$ como el factor de acople, con lo que el sistema anterior puede reescribirse como

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - c x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - c x_1 = 0$$

Nos preguntamos ahora si existirá algún tipo de solución oscilatoria para el sistema acoplado. Veremos que eso es así y que será posible encontrar una solución caracterizada porque todos los grados de libertad involucrados (en este caso, las dos masas) oscilarán con la misma frecuencia, aunque amplitudes diferentes. Proponemos, entonces, la siguiente solución

$$x_i = A_i e^{j\omega t}$$

Reemplazando en las ecuaciones diferenciales,

$$(\omega_1^2 - \omega^2)A_1 - cA_2 = 0$$

$$-cA_1 + (\omega_2^2 - \omega^2)A_2 = 0$$

que puede representarse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & -c \\ -c & \omega_2^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

y podemos identificar con un problema de autovalores y autovectores. Para encontrar el valor de las frecuencias, planteamos que el determinante de la matriz se anule,

$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - c^2 = 0$$

de donde pueden despejarse las dos soluciones

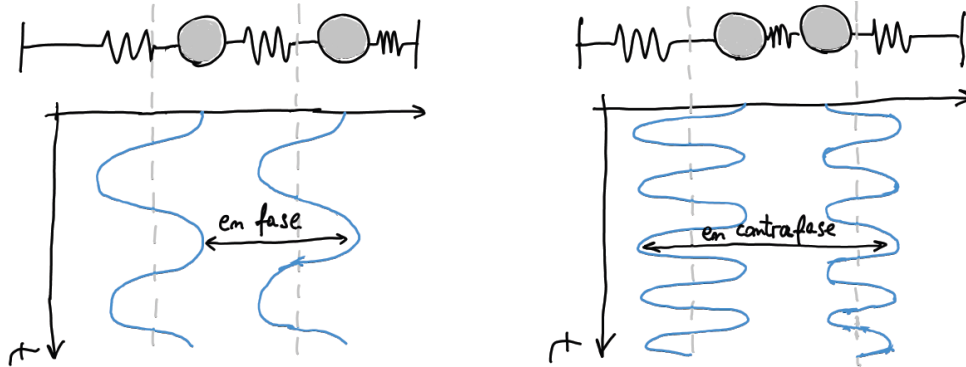
$$(\omega^2)'' = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2}\right)^2 + c^2}$$

De la última expresión, vemos que las frecuencias de los modos normales ω' y ω'' están por fuera del rango de frecuencias definido por ω_1 y ω_2 . Esto significa que si, por ejemplo, consideramos $\omega_1 < \omega_2$ y $\omega' < \omega''$, entonces resulta $\omega' < \omega_1$ y $\omega'' > \omega_2$. Luego, una vez encontrados los valores de las frecuencias, reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones, para encontrar el autovector. Por ejemplo, tomando la primera ecuación,

$$(\omega_1^2 - \omega^2)A_1 - cA_2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{A_2}{A_1}\right)'' = \frac{\omega_1^2 - (\omega^2)''}{c}$$

Resulta entonces que es posible encontrar modos, que llamaremos X' y X'' , en los cuales ambas masas oscilen con una única frecuencia, común a ambas, y manteniendo en todo momento una relación constante entre las amplitudes del movimiento de cada una de ellas. Adicionalmente, a partir de lo discutido anteriormente en relación a las frecuencias, podemos ver que las relaciones de amplitudes obtenidas serán una positiva y la otra negativa, lo que significa que uno

de los modos normales estará dado por oscilaciones en fase de ambas masas (figura de la izquierda), mientras que en el otro modo normal, las oscilaciones serán en contrafase (figura de la derecha).

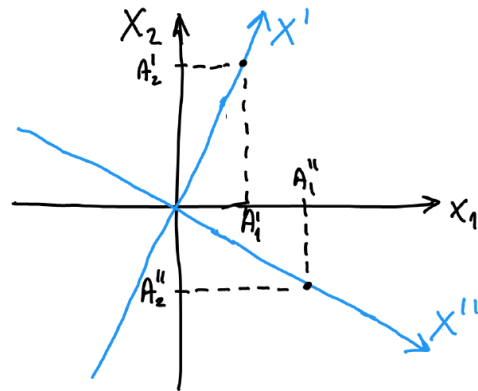


Habiendo dos soluciones posibles, cada una caracterizada por su frecuencia y su relación de amplitudes, la solución general estará dada por una superposición de ambas, es decir,

$$x_1(t) = a'_1 X'(t) + a''_1 X''(t)$$

$$x_2(t) = a'_2 X'(t) + a''_2 X''(t)$$

donde (a'_1, a'_2) y (a''_1, a''_2) son los versores correspondientes a las direcciones de los modos normales X' y X'' en el espacio de configuración del sistema, tal como se ilustra en la figura. En consecuencia, éstos satisfacen las siguientes relaciones



$$a'^2_1 + a'^2_2 = 1$$

$$a''^2_1 + a''^2_2 = 1$$

$$(a'_1, a'_2) \cdot (a''_1, a''_2) = 0$$

Tomando la forma explícita de las soluciones de las oscilaciones para los modos normales, la solución completa para las coordenadas originales será de la forma

$$x_1(t) = a'_1 [\alpha \cos(\omega' t) + \beta \sin(\omega' t)] + a''_1 [\delta \cos(\omega'' t) + \gamma \sin(\omega'' t)]$$

$$x_2(t) = a'_2 [\alpha \cos(\omega' t) + \beta \sin(\omega' t)] + a''_2 [\delta \cos(\omega'' t) + \gamma \sin(\omega'' t)]$$

donde $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ serán constantes que resulten de las condiciones iniciales del problema.

11.2 Desacople en coordenadas normales

A partir del potencial original

$$V(y_1, y_2) = \frac{k_1}{2} y_1^2 + \frac{k_2}{2} y_2^2 + \frac{k_c}{2} (y_2 - y_1)^2$$

aplicamos el cambio de variables y obtenemos

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \omega_1^2 x_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 x_2^2 - c x_1 x_2$$

donde vemos que el tercer término representa el acople entre los dos osciladores. Para representar el potencial, ya no en términos de las coordenadas acopladas, sino como función de las coordenadas de los modos normales, reemplazamos x_1 y x_2 en función de las nuevas coordenadas,

$$V(X', X'') = \frac{1}{2} \omega_1^2 (a'_1 X' + a''_1 X'')^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 (a'_2 X' + a''_2 X'')^2 - c(a'_1 X' + a''_1 X'')(a'_2 X' + a''_2 X'')$$

Reordenamos los términos,

$$V(X', X'') = \left(\frac{1}{2} \omega_1^2 a_1'^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 a_2'^2 - c a'_1 a'_2 \right) X'^2 + \left(\frac{1}{2} \omega_1^2 a_1''^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 a_2''^2 - c a''_1 a''_2 \right) X''^2 + [\omega_1^2 a'_1 a''_1 + \omega_2^2 a'_2 a''_2 - c(a'_1 a''_2 + a''_1 a'_2)] X' X''$$

Ahora bien, en el primer y tercer términos reemplazaremos las frecuencias naturales del sistema original en función de la frecuencia del modo normal X' , usando las siguientes dos relaciones

$$\omega_1^2 = \omega'^2 + c \frac{a'_2}{a'_1}$$

$$\omega_2^2 = \omega'^2 + c \frac{a'_1}{a'_2}$$

y, de manera similar, reemplazaremos en el segundo término usando las frecuencias del modo normal X'' de acuerdo a las siguientes dos relaciones

$$\omega_1^2 = \omega''^2 + c \frac{a''_2}{a''_1}$$

$$\omega_2^2 = \omega''^2 + c \frac{a''_1}{a''_2}$$

Al hacerlo, obtenemos

$$V(X', X'') = \frac{1}{2} (a_1'^2 + a_2'^2) \omega'^2 X'^2 + \frac{1}{2} (a_1''^2 + a_2''^2) \omega''^2 X''^2 + (a'_1 a''_1 + a'_2 a''_2) \omega'^2 X' X''$$

que, recordando las relaciones en términos de los a , puede simplificarse como

$$V(X', X'') = \frac{1}{2} \omega'^2 X'^2 + \frac{1}{2} \omega''^2 X''^2$$

que expresa la energía potencial de dos osciladores que se encuentran desacoplados (no interactúan entre sí).

De manera similar, la energía cinética original es

$$T(\dot{y}_1, \dot{y}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2$$

que al cambiar de variables, resulta

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2$$

Podemos reescribir la energía cinética expresando las velocidades \dot{x}_1 y \dot{x}_2 como función de aquellas correspondientes a las coordenadas de los modos normales,

$$T(\dot{X}', \dot{X}'') = \frac{1}{2}(a_1'\dot{X}' + a_1''\dot{X}'')^2 + \frac{1}{2}(a_2'\dot{X}' + a_2''\dot{X}'')^2$$

Abriendo los cuadrados y reordenando,

$$T(\dot{X}', \dot{X}'') = \frac{1}{2}(a_1'^2 + a_2'^2)\dot{X}'^2 + \frac{1}{2}(a_1''^2 + a_2''^2)\dot{X}''^2 + (a_1'a_1'' + a_2'a_2'')\dot{X}'\dot{X}''$$

Utilizando, nuevamente, las relaciones existentes entre los a , obtenemos finalmente

$$T(\dot{X}', \dot{X}'') = \frac{1}{2}\dot{X}'^2 + \frac{1}{2}\dot{X}''^2$$

Resulta entonces que el lagrangiano del sistema, escrito en función de las nuevas coordenadas, será

$$\mathcal{L}(X', X'', \dot{X}', \dot{X}'') = \frac{1}{2}\dot{X}'^2 + \frac{1}{2}\dot{X}''^2 - \frac{1}{2}\omega'^2 X'^2 - \frac{1}{2}\omega''^2 X''^2$$

de donde podemos deducir las correspondientes ecuaciones de Lagrange,

$$\ddot{X}' + \omega'^2 X' = 0$$

$$\ddot{X}'' + \omega''^2 X'' = 0$$

cada una de las cuales representa un oscilador armónico independiente de los demás.

11.3 Oscilaciones forzadas

Para completar nuestra formulación de los sistemas de osciladores acoplados, buscaremos ver de qué manera podemos introducir en el planteo aquellas fuerzas externas que llevan a oscilaciones forzadas. Para ello, calculamos las fuerzas generalizadas sobre las coordenadas de los modos normales, de la misma manera que lo hacíamos en el formalismo de Lagrange.

$$Q_{X'} = F_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X'} + F_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X'} = \frac{F_1}{\sqrt{m_1}} a'_1 + \frac{F_2}{\sqrt{m_2}} a'_2$$

$$Q_{X''} = F_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X''} + F_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X''} = \frac{F_1}{\sqrt{m_1}} a''_1 + \frac{F_2}{\sqrt{m_2}} a''_2$$

Finalmente, obtenemos entonces las ecuaciones correspondientes las oscilaciones forzadas

$$\ddot{X}' + \omega'^2 X' = Q_{X'}$$

$$\ddot{X}'' + \omega''^2 X'' = Q_{X''}$$

11.4 Relación entre ejes principales de inercia y modos normales de oscilación

Existe una relación entre los ejes principales de inercia de un cuerpo rígido y los modos normales de un sistema de osciladores acoplados. Matemáticamente, dicha relación se expresa en el hecho de que en ambos casos estamos resolviendo un problema de autovalores y autovectores que conlleva la diagonalización de una dada matriz. En el caso de los cuerpos rígidos, la matriz en cuestión es el tensor de inercia que, junto con la velocidad angular, nos define la energía cinética del sistema, los autovalores están dados por los momentos de inercia y los autovectores corresponden a las direcciones principales. En cambio, en el caso de los sistemas de osciladores acoplados, los autovalores serán las frecuencias de oscilación, mientras que los autovectores representarán aquellas direcciones en las cuales el sistema oscila en su conjunto con una de dichas frecuencias. Físicamente, la relación entre ambos problemas puede verse fácilmente en la ortogonalidad de los ejes principales por un lado y los modos normales por el otro. En el caso de los cuerpos rígidos, si uno de ellos es puesto a rotar con una velocidad angular $\vec{\omega}$ en una de las direcciones principales de inercia, el hecho de que el tensor de inercia resulta diagonal nos lleva a que el momento angular \vec{L} sea paralelo a $\vec{\omega}$, lo que hará que el cuerpo rígido siga rotando libremente sólo en esa dirección (las demás no se ven afectadas). En cambio, si la velocidad angular no se da a lo largo de una de las direcciones principales, entonces la rotación se contagiará a otras direcciones, a menos que uno fuerce al cuerpo a rotar siempre en la misma dirección mediante la aplicación de torques externos. En el caso de los osciladores acoplados, si el sistema es excitado inicialmente en la dirección de uno de los modos normales, todos los grados de libertad del sistema oscilarán, libremente, a la frecuencia de dicho modo normal, sin que ninguno de los otros modos normales se vea afectado. En cambio, si uno coloca inicialmente al sistema en una dirección arbitraria en el espacio de configuración, éste se apartará de ella como consecuencia de la superposición de oscilaciones correspondientes a los diferentes modos normales que se vean excitados.

12. Fundamentos

Hasta aquí, hemos visto que la mecánica se reduce a un conjunto de leyes físicas que, una vez aceptadas, dan lugar a diferentes formulaciones. Hemos partido inicialmente de lo que denominamos mecánica newtoniana, para luego ver que ésta no es más que una formulación posible, siendo la mecánica lagrangiana y la mecánica hamiltoniana, dos alternativas equivalentes para plantear los problemas físicos. Hemos visto cómo aplicar estas herramientas al estudio de los sistemas sometidos a fuerzas centrales (con el movimiento planetario como caso paradigmático), de los cuerpos rígidos y de los sistemas de osciladores acoplados. Luego de haber recorrido todo este camino, vale la pena volver al comienzo y preguntarnos acerca de la validez de las leyes que hemos asumido como ciertas. En este punto, hay dos alternativas posibles, que exploraremos a continuación.

12.1 Mach

La primera forma de abordar los fundamentos de la mecánica, debida a Ernst Mach (1838-1916) intenta deducir las leyes de la mecánica a partir sólo de hechos experimentales, eliminando aquellos supuestos que no estén debidamente justificados por la experiencia. Tal es el caso de la segunda ley de Newton, que nos dice que $\vec{F} = m\vec{a}$. Sin embargo, dicha ecuación cobra sentido en tanto sea capaz de relacionar magnitudes cuyo significado físico se encuentre determinado por fuera de la misma ley. Sin embargo, mientras que la aceleración tiene una definición clara, eso no es así para las otras dos magnitudes involucradas, fuerza y masa. Por ejemplo, si quisiéramos pensar a la segunda ley como una definición de fuerza, necesitamos entonces pensar a la masa como una magnitud independiente, a la cual suele definirse como la *cantidad de materia* que un cuerpo posee. Sin embargo, a la hora de estimar su valor nos vemos obligados a recurrir al peso que el cuerpo posee, es decir a la fuerza que siente éste cuando se ve sometido a la aceleración de la gravedad. Veamos, entonces, cómo resuelve Mach esta encrucijada.

En primer lugar, se parte de un hecho fundamental, que es que cuando dos cuerpos interactúan entre sí, ya sea mediante una fuerza elástica, o directamente a través de las interacciones electromagnética o gravitatoria, éstos experimentan aceleraciones a lo largo de la recta que los une, manteniendo siempre una relación constante que definiremos como

$$m_{21} = \frac{a_1}{a_2}$$

Si, ahora, colocamos al segundo cuerpo en interacción con un tercero, diremos que es posible definir una nueva constante

$$m_{32} = \frac{a_2}{a_3}$$

Sin embargo, veamos qué sucede si multiplicamos y dividimos la expresión anterior por la aceleración que experimenta el primero de los cuerpos

$$m_{32} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_1/a_3}{a_1/a_2} = \frac{m_{31}}{m_{21}}$$

lo que significa que si conocemos la relación de aceleraciones que experimentan los cuerpos cuando interactúan con el primero de ellos, entonces es posible conocer la relación de aceleraciones que experimentarán al interactuar entre ellos. Resulta entonces que si tomamos al primer cuerpo como una referencia, podemos entonces considerar que las magnitudes m_{x1} que aparecen resultan una propiedad específica del cuerpo x , a la que llamaremos *masa*. Dicho de otra forma, tomamos como masa de un cuerpo x a la relación que existe entre las aceleraciones del primer cuerpo y del cuerpo x cuando ambos interactúan entre sí, siendo entonces m_1 la unidad de masa.

Como consecuencia de lo anterior, vemos que podemos reescribir la última ecuación,

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{m_3}{m_2}$$

de donde vemos que cuando dos cuerpos interactúan entre sí, sus aceleraciones resultan inversamente proporcionales a sus masas. Sin mucha dificultad, podemos ver que surge la igualdad

$$m_2 a_2 = m_3 a_3$$

En esta última expresión, vemos que el producto entre masa de un cuerpo y su correspondiente aceleración es el mismo para ambos cuerpos y, por ello, resulta una característica propia de la interacción entre ellos, a la que definiremos como *fuerza*.

Finalmente, teniendo en cuenta el carácter vectorial de la aceleración, podemos escribir

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$$

que resulta en la segunda ley de Newton como una definición de fuerza.

Por último, teniendo en cuenta nuevamente que la aceleración es un vector y que las aceleraciones de dos cuerpos puestos en interacción son opuestas entre sí, entonces resulta que si $m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2$, entonces

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

que no es más que la tercera ley de Newton, o *principio de acción y reacción*.

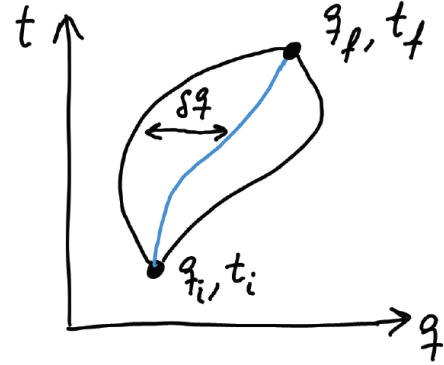
Por último, cabe agregar que no todos los observadores estarán de acuerdo de la validez de la hipótesis inicial de todo el planteo, que las aceleraciones de dos cuerpos en interacción entre ellos se dan en la recta que los une y mantienen una relación constante entre sí. Diremos que aquellos observadores para los cuales dicha hipótesis es cierta serán *observadores inerciales* y, entonces, resulta razonable que sólo para ellos sean válidas las leyes de la mecánica newtoniana.

12.2 Principio de mínima acción

En el extremo opuesto, se encuentra la propuesta de William Rowan Hamilton (1805-1865), según la cual las leyes de la mecánica se derivan de un principio

abstracto, denominado *principio de mínima acción*². Según éste, un cuerpo puesto a interactuar con su entorno, del cual sabemos su posición en dos instantes de tiempo que llamaremos inicial (t_i) y final (t_f), seguirá entre ellos una trayectoria tal que la siguiente integral, denominada *acción*, adquiere un valor extremo.

$$\mathcal{A} = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt$$



La acción es un funcional, que viene a ser algo así como una función de funciones. Así como una función depende de variables, como por ejemplo la trayectoria $q(t)$ depende de la variable tiempo, la acción es un funcional que depende de la trayectoria. En el caso de la búsqueda de extremos, sabemos que para el caso de una función, éste ocurre cuando la función no cambia de valor cuando nos movemos un diferencial sobre la variable independiente. Al ser un funcional de la trayectoria, diremos entonces que la acción alcanza un extremo para una trayectoria dada, cuando una variación de ésta no modifique, a primer orden, el valor de la acción. Como la acción depende de la trayectoria a través del lagrangiano del sistema, lo que deberemos buscar es cómo varía el lagrangiano cuando variamos la trayectoria.

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_i}^{t_f} \delta \mathcal{L} dt = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt$$

Para seguir adelante, notamos que la variación en la velocidad puede escribirse como la derivada temporal de la variación en la trayectoria

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}(q + \delta q) - \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(\delta q)$$

o, lo que es lo mismo, que la variación y la derivada temporal conmutan. Reemplazando,

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt}(\delta q) \right] dt = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt$$

donde reescribimos el segundo término de tal manera de llevar a cabo una integral por partes,

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_i}^{t_f}$$

² Dicho nombre se debe a cuestiones históricas, aunque lo correcto sería denominarlo *principio de acción estacionaria*.

El segundo término se anula debido a que $\delta q = 0$ en los extremos de la trayectoria, obteniendo

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt = 0$$

que dada la arbitrariedad de δq , para que la acción alcance un extremo, requiere que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

que no es más que la ecuación de Lagrange para la coordenada q .

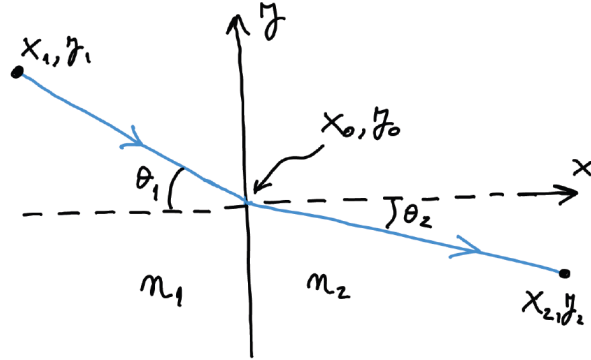
La demostración anterior puede generalizarse fácilmente para el caso de un problema con varios grados de libertad, en cuyo caso la variación de la acción resultará

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j \right\} dt$$

Pidiendo que ésta se anule para la trayectoria seguida por el sistema en el espacio de configuración, se cumplen las ecuaciones de Lagrange para cada una de las coordenadas q_j , como consecuencia de la independencia de los desplazamientos virtuales δq_j .

12.3 Principio de Fermat

Existe en la óptica geométrica un principio análogo al de mínima acción, enunciado en 1662 por Pierre de Fermat (1607-1665), que dice que la trayectoria seguida por un rayo de luz entre dos puntos es aquella que minimiza el tiempo transcurrido. Supongamos que tenemos un rayo de luz que parte de un punto (x_1, y_1) en un medio con índice de refracción n_1 y llega al punto (x_2, y_2) en un medio con índice de refracción n_2 , atravesando el plano x_0 en el cual se produce la transición entre ambos medios. Si la velocidad puede variar al pasar la luz de un medio a otro, entonces el tiempo que transcurre será



$$t = \frac{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_0 - y_2)^2}}{v_2}$$

La condición de tiempo mínimo resulta entonces de buscar el valor de y_0 que anula la derivada del tiempo con respecto a dicha coordenada. Recordando que la velocidad en un medio dado es $v_i = c/n_i$, obtenemos

$$n_1 \frac{y_0 - y_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}} + n_2 \frac{y_0 - y_2}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}} = 0$$

que no es más que la *ley de Snell*³ para la refracción de rayos luminosos

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Supongamos ahora que, en lugar de haber un cambio abrupto entre un medio y otro, el índice de refracción varía de manera continua con la distancia, como una función de x . En dicho caso, en lugar de un único valor y_0 correspondiente al cambio entre dos medios, deberemos encontrar la función $y(x)$ que minimiza el tiempo

$$t = \int \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int n(x) ds$$

Si expresamos el diferencial de camino en función de las coordenadas x, y como

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Encontrar la trayectoria $y(x)$ que recorre un rayo luminoso que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es equivalente a minimizar la integral

$$t = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} n(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

El caso más sencillo ocurre cuando el rayo recorre un único medio, con lo que el índice de refracción sale de la integral, resultando entonces que la trayectoria que minimiza el tiempo es aquella que, simultáneamente, minimiza la distancia recorrida, es decir la línea recta.

12.4 Mecánica ondulatoria

Si planteamos el principio de Fermat en términos ondulatorios, la condición de tiempo mínimo es equivalente al menor camino óptico (número de longitudes de onda) para el caso de una onda estacionaria. El mínimo camino óptico resulta de pedir minimizar

$$\int \frac{dx}{\lambda}$$

donde λ es la longitud de onda para una onda estacionaria, cuya fase puede escribirse $d\phi = 2\pi dx/\lambda$.

Si consideramos el caso más general de una onda no estacionaria, minimizar la fase implica minimizar la integral

³ Aunque toma su nombre de Willebrord Snel van Royen (1580-1626), quien la enunció en 1621, lo cierto es que ya había sido descubierta en el año 984 por Ibn Sahl (c. 940-1000) en su tratado de óptica.

$$\int 2\pi \left(\frac{dx}{\lambda} - \frac{dt}{\tau} \right)$$

donde τ es el período de oscilación, inversa de la frecuencia.

Para ver la analogía con el caso mecánico, reescribimos la acción en términos del hamiltoniano,

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L} dt = \int (p\dot{q} - \mathcal{H}) dt = \int (pdq - E dt)$$

Luego, representamos los dos términos dentro de la integral como una constante con unidades de acción que llamaremos h multiplicada por un diferencial adimensional, resultando

$$\mathcal{A} = h \int \left(\frac{dx}{\lambda} - \frac{dt}{\tau} \right) = \frac{h}{2\pi} \int 2\pi \left(\frac{dx}{\lambda} - \frac{dt}{\tau} \right)$$

Vemos entonces que la acción resulta ser la fase de una onda de longitud de onda λ y período τ , multiplicada por la constante $\hbar = h/2\pi$. Se aprecia entonces la equivalencia entre el principio de mínima acción para la mecánica y el principio de Fermat para la óptica. Por último, diremos que por analogía con la onda electromagnética, la onda asociada a una partícula tendrá la forma

$$\psi(x, t) \propto e^{i\phi} = e^{i \int (kdx - \omega dt)} = e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{A}}$$

donde hemos introducido $k = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi/\tau$. En efecto, la última expresión coincide con la función de onda para una partícula en la aproximación semiclásica, es decir para potenciales que varían poco a lo largo de una longitud de onda.

12.5 Ecuación de Hamilton-Jacobi

Volviendo a la siguiente expresión para la acción

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L} dt = \int (p\dot{q} - \mathcal{H}) dt = \int (pdq - E dt)$$

podemos ver que el momento y la energía pueden reescribirse como derivadas parciales de la acción

$$p = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q}$$

$$E = -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$$

En consecuencia, la energía mecánica

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

puede reescribirse en términos de la acción como

$$-\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q} \right)^2 + V(q)$$

que se denomina ecuación de Hamilton-Jacobi.

Por último, podemos notar la similitud entre la ecuación de Hamilton-Jacobi y la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + V\psi$$

En efecto, podemos ver que si la función de onda se escribe en términos de módulo y fase

$$\psi = R e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{A}}$$

y se reemplaza en la ecuación de Schrödinger, se obtendrán dos ecuaciones, una para la parte real y otra para la parte imaginaria. La primera de ellas resulta

$$-\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q} \right)^2 + V(q) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial q^2}$$

que para el caso $\hbar \rightarrow 0$ (límite clásico) resulta en una ecuación para la fase \mathcal{A} idéntica a la ecuación de Hamilton-Jacobi para la acción. Como curiosidad, la otra ecuación resulta

$$\frac{d}{dt} R^2 = -\frac{d}{dq} \left(\frac{R^2}{m} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q} \right)$$

que una vez que advertimos que $|\psi|^2 = R^2$, vemos que no es más que la ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad una vez definido el flujo de probabilidad como $j_\psi = \frac{|\psi|^2}{m} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q}$, con $\frac{1}{m} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q}$ jugando el papel de la velocidad.

13. ¿Y si el potencial es un vector?

Los sistemas mecánicos con que hemos tratado siempre han estado representados por interacciones que, de ser derivables de un potencial, dicho potencial es escalar. Por ejemplo, en el caso de la interacción gravitatoria, un cuerpo dado percibe que no todos los puntos del espacio son equivalentes desde un punto de vista mecánico, sino que a cada uno de ellos es posible asignarles un valor escalar, el potencial, que representa la intensidad de la interacción una vez calculadas sus variaciones ($\vec{F} = -\vec{\nabla}V$). Nos preguntamos entonces si es posible que exista algún tipo de interacción cuya representación en el espacio esté dada por un potencial de carácter vectorial, en lugar de escalar, y de ser así, qué forma toma la interacción. Para responder a esta pregunta, necesitamos plantear el lagrangiano de un sistema con estas características. Supongamos para ello el caso más sencillo de una partícula de masa m que se encuentra en un medio en el cual cada punto del espacio tiene asociado un potencial escalar ϕ , pero además un potencial vectorial \vec{A} . En ese caso,

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \phi + f(\vec{A})$$

donde escribimos el último término como una función del potencial vectorial \vec{A} y no directamente como el potencial vectorial, debido a que los términos en el lagrangiano deben ser escalares, con lo que es necesario hacer algo con el potencial vectorial para introducirlo en nuestra descripción del sistema. La manera más sencilla de introducir un escalar a partir del potencial vectorial es definiendo $f(\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$. El inconveniente con este tratamiento es que entonces el potencial es indistinguible de un potencial que simplemente es escalar. Es decir, lo que caracteriza al potencial es ahora la función escalar f cuyo valor dependerá del punto del espacio en el que estemos parados, perdiendo por completo el carácter vectorial que queríamos asignarle inicialmente. En consecuencia, debemos buscar otra forma de introducir el potencial vectorial. Una alternativa posible es acoplar la partícula al potencial, definiendo $f(\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{r}$, donde $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ es simplemente la posición de la partícula en el espacio. El problema en este caso es que el vector posición depende del sistema de referencia, con lo que rompemos una de las hipótesis fundamentales: la homogeneidad del espacio. La única alternativa que nos queda es acoplar el potencial a través de la velocidad, es decir, $f(\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{v}$. Los problemas antes mencionados desaparecen, ya que la velocidad de la partícula no depende del origen que hayamos elegido para nuestro sistema de referencia. Como consecuencia de lo anterior, el lagrangiano del sistema será, finalmente,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \phi + \vec{A} \cdot \vec{v}$$

que podemos reescribir como

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \phi + (A_x, A_y, A_z) \cdot (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Busquemos ahora las ecuaciones de Lagrange del sistema.

$$m\ddot{x} + \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z} = 0$$

$$m\ddot{y} + \frac{dA_y}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{x} - \frac{\partial A_y}{\partial y}\dot{y} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\dot{z} = 0$$

$$m\ddot{z} + \frac{dA_z}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{x} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\dot{y} - \frac{\partial A_z}{\partial z}\dot{z} = 0$$

Ahora bien, la derivada total de cada componente del potencial vectorial se puede escribir como

$$\frac{dA_j}{dt} = \frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{\partial A_j}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_j}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_j}{\partial z}\dot{z}$$

Reemplazando en las ecuaciones, obtenemos

$$m\ddot{x} + \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\dot{y} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\dot{z} = 0$$

$$m\ddot{y} + \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\dot{x} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\dot{z} = 0$$

$$m\ddot{z} + \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\dot{x} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\dot{y} = 0$$

Podemos ver ahora que los últimos dos términos en cada ecuación pueden expresarse de una manera mucho más compacta. Por ejemplo, en la ecuación de la coordenada x , vemos que

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) = -(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z$$

Y lo mismo puede hacerse con todos los paréntesis, resultando

$$m\ddot{x} + \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} - (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z \dot{y} + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y \dot{z} = 0$$

$$m\ddot{y} + \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z \dot{x} - (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x \dot{z} = 0$$

$$m\ddot{z} + \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} - (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y \dot{x} + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x \dot{y} = 0$$

Nuevamente, podemos ver en la ecuación para la coordenada x que

$$-(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z \dot{y} + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y \dot{z} = -[\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_x$$

y lo mismo sucede en las otras dos ecuaciones, con lo que podemos escribir

$$m\ddot{x} + \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} - [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_x = 0$$

$$m\ddot{y} + \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t} - [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_y = 0$$

$$m\ddot{z} + \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} - [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_z = 0$$

Si ahora despejamos los términos de $m\vec{a}$ y escribimos las tres ecuaciones en una sola con carácter vectorial, obtenemos

$$m\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

Llegados hasta aquí, podemos ver que si definimos

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

la ecuación anterior puede expresarse como

$$m\vec{a} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$

Vemos entonces que la fuerza que siente una partícula inmersa en un campo cuyo potencial es vectorial coincide con la fuerza de Lorentz del electromagnetismo, siendo \vec{E} el campo eléctrico y \vec{B} el campo magnético, salvo por la ausencia de la carga eléctrica. En efecto, dado que las partículas interactuarán con el campo de manera diferente, la manera de tener en cuenta ello, es decir cuánto se acopla una partícula al campo, es a través de la carga q asociada a dicha partícula. Si en el lagrangiano reemplazamos $-\phi + \vec{A} \cdot \vec{v}$ por $q(-\phi + \vec{A} \cdot \vec{v})$, obtendremos la expresión usual

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Vale la pena detenernos y ver lo que hemos logrado. Por un lado, la fuerza de Lorentz estudiada en los cursos de electricidad y magnetismo es el resultado de la presencia de campos eléctricos y magnéticos que satisfacen las ecuaciones de Maxwell, basadas éstas en un conjunto de leyes físicas de naturaleza empírica. En cambio, nuestro desarrollo ha sido completamente diferente. El origen de nuestro desarrollo fue preguntarnos qué sucedería si una partícula se ve inmersa en un campo cuyo potencial no tiene un carácter puramente escalar, sino que también está acompañado de una parte vectorial. Obviamente, la historia de la física se dio de manera tal que las leyes de Maxwell se identificaron primero y recién después pudo notarse que éstas podían derivarse de un campo vectorial. Sin embargo, bien pudo esto ser diferente. Dado que las ecuaciones de Lagrange y también el principio de mínima acción son anteriores al desarrollo del electromagnetismo, perfectamente pudo haber ocurrido que algún físico de principios del siglo XIX hubiese llegado a la expresión de la fuerza de Lorentz ¡antes de que el electromagnetismo fuese descubierto!