03.03.17 гм III

$X \quad \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ p_1 \dots p_n \end{matrix}$ $\qquad I = -\log p_i \quad , \quad I = I(X = x_i)$

$$I(X = x_i) = -\log p_i$$

кол-во информации при реализации события $X = x_i$

энтропия: $-\mathbb{E}\log p = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log p(x_i)$

задача построения компактного кода

$q_1 \dots q_n \quad , \quad l(x_i) = \lceil -\log q_i \rceil$ код Хаффмана

длина описания символов

кросс-энтропия: $-\sum_n p(x_n)\log_2 q_n(x_n)$

$$-\sum_n p(x_n)\log_2 q_n(x_n) \geq -\sum_n p(x_n)\log_2 p_n(x_n)$$ ← среднее число ячеек кодового слова

$$\sum_n p(x_n)\log_2 \frac{p(x_n)}{q(x_n)} = KL(p\|q) \geq 0$$

$$-p\log_2 p - (1-p)\log_2 (1-p) = \mathcal{H}(p)$$

$X \quad \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ p(x_1) \dots p(x_n) \end{matrix} \qquad Y \quad \begin{matrix} y_1 \dots y_m \\ p(y_1) \dots p(y_m) \end{matrix}$

$$\mathcal{H}(X \mid Y = Y_j) = -\sum_n p(x_n \mid y_j)\log_2 p(x_n \mid y_j)$$

условная энтропия:

$$\mathcal{H}(X \mid Y) = -\sum_m p(y_m)\sum_n p(x_n \mid y_m)\log_2 p(x_n \mid y_m)$$

совместная энтропия:

$$\mathcal{H}(X, Y) = -\sum_{n,m} p(x_n, y_m)\log_2 p(x_n, y_m) =$$

$$= -\sum_{n,m} p(x_n \mid y_m)p(y_m)\log_2 p(x_n \mid y_m)p(y_m) =$$

$$= -\sum_{n,m} p(x_n|y_m)p(y_m)\log_2 p(x_n|y_m) -$$

$$- \sum_{n,m} p(x_n|y_m)p(y_m)\log_2 p(\cancel{x_n|}\, y_m) =$$

$$= -\sum_m p(y_m)\sum_n p(x_n|y_m)\log_2 p(x_n|y_m) -$$

$$- \sum_m p(y_m)\underbrace{\sum_n p(x_n|y_m)}_{1}\log_2 p(y_m) =$$

$$= \mathcal{H}(X|Y) + \mathcal{H}(Y)$$

$$\mathcal{H}(X,Y) = \mathcal{H}(X|Y) + \mathcal{H}(Y) = \mathcal{H}(Y|X) + \mathcal{H}(X)$$

$$\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X|Y) = -\sum_n p(x_n)\log_2 p(x_n) +$$

$$+ \sum_m p(x_m)\sum_n p(x_n|y_m)\log_2 p(x_n|y_m) \pm \mathcal{H}(Y) =$$

$$= -\sum_n \Big(\sum_m p(x_n,y_m)\Big)\log_2 p(x_n) - \sum_m \Big(\sum_n p(x_n,y_m)\Big)\log_2 p(y_m) +$$

$$+ \sum_m p(x_m)\sum_n p(x_n|y_m)\log_2 p(x_n|y_m) + \sum_m p(y_m)\log_2 p(y_m) =$$

$$= -\sum_n\sum_m p(x_n,y_m)\big(\log_2 p(x_n) + \log_2 p(y_m)\big) +$$

$$+ \sum_n\sum_m p(x_n,y_m)\log_2 p(x_n,y_m) = KL\big(p(x,y)\,\|\,p(x)p(y)\big) \geq 0$$

$$= \cancel{\mathcal{H}}M(X,Y)$$

$\mathcal{H}(X|Y) \leq \mathcal{H}(X)$ мера взаимной информации с.в. X и Y

кодирование помехоустойчивое

$x \in B^m$ избавление от избыточности

компрессирование данных

$x = (x_1 \dots x_m)$

$\frac{1}{2} \dots \frac{1}{2}$

$$x \in B^m \xrightarrow[\text{coding}]{} y \in B^n \xrightarrow[\text{channel}]{\text{noisy}} y' \in B^n \xrightarrow[\text{decoding}]{} d(y') \in B^m$$

$p(y'|y)$

характеристика шумового канала

$\frac{m}{n} = R$ — скорость

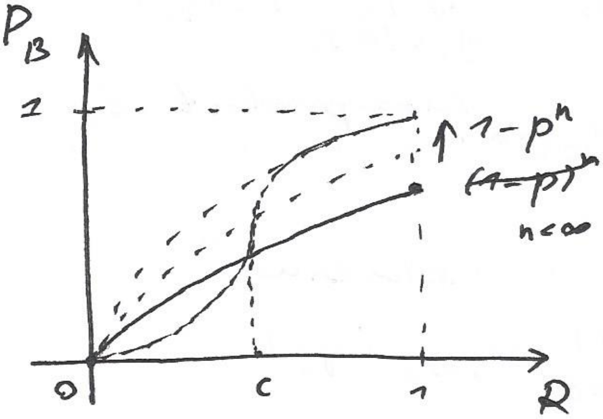
вероятность блоковой ошибки

$$P_B = \sum_x p(x) \sum_{y'} p(y'|c(x)) \mathbb{1}[d(y') \neq x] =$$

$$= \frac{1}{2^m} \sum_{y'} p(y'|c(x)) \mathbb{1}[d(y') \neq x]$$

$$d(y') = \underset{x \in B^m}{\operatorname{argmin}} (-\log_2 p(y|c(x)))$$

$p(y'|y) \to \max$ ~~прав~~ максимизация правдоподобия



<u>Т. Шеннона</u>

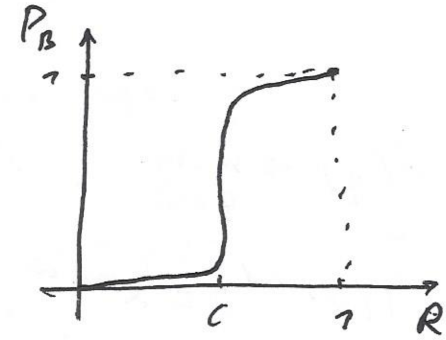
$n \to \infty$

1) $\forall R < C$ $\exists$ схема кодирования: $P_B \to 0$ при $n \to \infty$

2) $\forall R > C$ $\forall$ схемы кодирования $P_B \to \cancel{\infty}\ 1$ при $n \to \infty$

$C = \cancel{H} MI(Y, Y')$

$H(y') - H(y'|y) = MI(y, y')$



<u>LDPC</u>

коды проверки на чётность

$$Y \in \mathcal{Y} = \{Y \in B^n \mid CY = 0,\ C \in B^{m-n \times n},\ \operatorname{rg} C = m\}$$

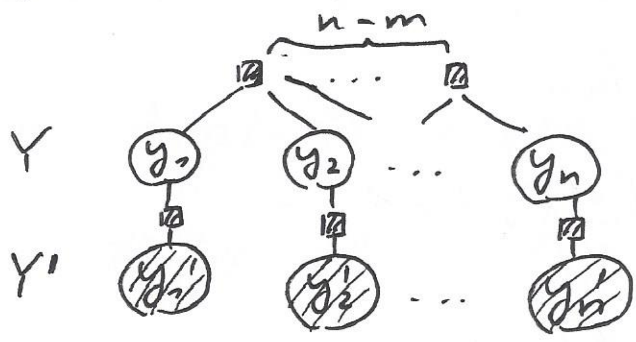
линейный код

низкоплотностный код # '1' ~ $O(n)$

$Y' = (y_1' \dots y_n')$, $Y = (y_1 \dots y_n)$

графическая модель: // f - сумма по факторам

$$p(Y', Y) = \frac{1}{Z} \prod_n \psi_n(y_n, y_n') \prod_f \psi_f(y_f) =$$



$$= \frac{1}{Z} \exp\Big(-\sum_n [y_n \neq y_n'] - \sum_f A[\sum_{n \in f} y_n \neq 0]\Big)$$

$$y^* = \underset{y \in \mathcal{Y}}{\operatorname{argmax}}\, p(y|y') = \underset{y \in \mathbb{B}^n}{\operatorname{argmax}}\, p(y|y') =$$

$$= \underset{y \in \mathbb{B}^n}{\operatorname{argmax}}\, p(y, y')$$

min-sum loopy bp

$$y_i^* = \underset{y_i \in \{0,1\}}{\operatorname{argmax}}\, p_i(y_i)$$

sum-product bp

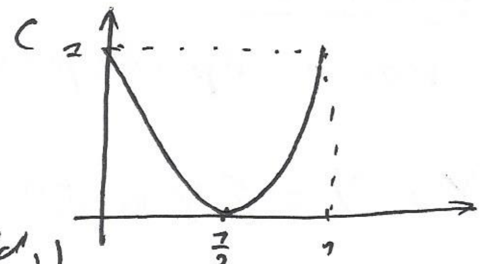
$$\mu_{i \to f}(y_i) \overset{\propto}{=} \prod_{g \neq f} \mu_{g \to i}(y_i)$$

сообщения

$$\mu_{f \to i}(y_i) \overset{\propto}{=} \sum_{y_f \setminus y_i} \psi_f(y_f) \prod_{j \neq i} \mu_{j \to f}(y_j)$$

belief $\quad b_i(y_i) = \dfrac{\prod \mu_{g \to i}(y_i)}{\sum_{y_i} \prod \mu_{g \to i}(y_i)} \approx p_i(y_i)$

$$F(q) \to \min_{q \in Q}, \quad F(\{b_i\}\{b_f\}) \to \min_b, \quad \sum_{x_f \setminus x_i} b_f(x_f) = b_i(x_i)$$



$$f(x^{old}) = x^{new}, \quad f(x^{old}) - x^{new} = 0$$

$$f(x^{old}) - \theta x^{old} - (1-\theta) x^{new} = 0$$

$$x^{new} = \frac{1}{1-\theta}\left(-\theta x^{old} + f(x^{old})\right)$$

03.03.17 2й сем

$$u \in \{0,1\}^k \xrightarrow{\text{кодирование}} v \in \{0,1\}^n \xrightarrow{\text{канал с шумом}} w \in \{0,1\}^n \longrightarrow$$

$n > k$

$$\xrightarrow{\text{декодирование}} \hat{v} \in \{0,1\}^n \xrightarrow{\text{декодирование 2}} \hat{u} \in \{0,1\}^k$$

Код $C = \{v_1 \dots v_{2^k}\}$; $\{0,1\}^n$ – л.п. над $\mathbb{F}_2$ наз-ся линейным, если C – линейное п/п в $\{0,1\}^n$ размерности k.

$\exists$ базис $g_0, g_1 \dots g_{k-1} \in \{0,1\}^n$ $\forall v \in C$ $v = \sum_{i=0}^{k-1} u_i g_i$, $u_i \in \{0,1\}$

$G = [g_0 | g_1 | \dots | g_{k-1}] \in \{0,1\}^{n \times k}$, $v = Gu$

порождающая матрица кода

$C^\perp = \{w \mid w^T v = 0 \ \forall v \in C\}$, $m = \dim C^\perp$

$\{0,1\}^n \neq C \sqcup C^\perp$? $w^T w = 0 \not\Rightarrow w = 0$

$$[1\ 1\ 0]\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = 0$$

dim: $n = k + m$

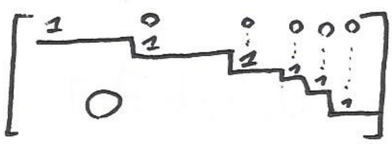
отсюда: $w^T v$ – псевдоскалярное пр-е

$\exists\, h_0 \dots h_{m-1}$ – базис $C^\perp$: $v \in C \Leftrightarrow v^T h_j = 0$ $\forall j = 0 \dots m-1$

$$H = \begin{bmatrix} h_0 \\ \hline h_1 \\ \hline \vdots \\ \hline h_{m-1} \end{bmatrix}$$

проверочная матрица кода $v \in C \Leftrightarrow Hv = 0$

определена с точностью преобразований строк

$H \xrightarrow[\text{стр.}]{\text{экв. преобр.}}$  $H = [I_m \ P]$

канонический ступенчатый вид

$$\mathcal{H} = [\, I_m \;\; P \,] \quad , \quad G = \begin{bmatrix} P \\ I_k \end{bmatrix} \qquad \mathcal{H} G = P + P = 0$$

$$\mathcal{H} v = 0 \;, \; v = G u \;\Rightarrow\; \mathcal{H} G u = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{H} G = 0$$

$\underline{\text{II}}$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{(3) \leftarrow (3) + (1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\overset{(2) \leftrightarrow (3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{(1) \leftarrow (1) + (3) \\ (2) \leftarrow (2) + (3)}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \end{array}$$

$$G = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(w, v) = p(w \mid v) p(v) = \left[\prod_{i=1}^{n} p(w_i \mid v_i) \right] \frac{1}{2^k} \prod_{j=1}^{m} [h_j^T v = 0]$$

$s = \mathcal{H} w \in \{0, 1\}^m$

$s = 0 \Leftrightarrow w \in C \;, \; e \in \{0, 1\}^n, \; e_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-ом} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$s = \mathcal{H} w = \mathcal{H}(v + e) = \mathcal{H} e$

$$p(s, e) = p(e) p(s \mid e) \propto \prod_{i=1}^{n} q^{e_i} (1 - q)^{1 - e_i} \prod_{j=1}^{m} [h_j^T e = s_j]$$

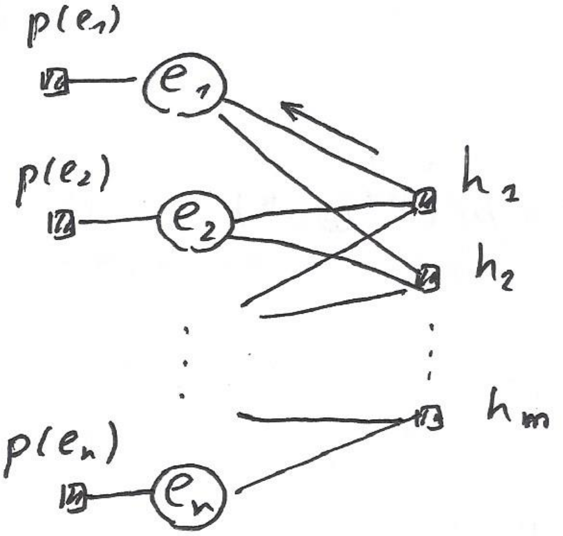
$p(e \mid s) \propto p(e, s)$, ф-ия потерь: $\mathbb{E}_{p(e|s)} \lambda(e, \hat{e}) \to \min_{\hat{e}}$

$\lambda(e, \hat{e}) = [e \neq \hat{e}]$, $\lambda(e, \hat{e}) = \sum_{i=1}^{n} [e_i \neq \hat{e}_i]$

$$\mathbb{E}_{p(e|s)} \sum_{i=1}^{n} [e_i \neq \hat{e}_i] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{e} p(e \mid s) [e_i \neq \hat{e}_i] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{e_i} [e_i \neq \hat{e}_i] p(e_i \mid s) = \sum_{i=1}^{n} (1 - p(\hat{e}_i \mid s)) \to \min_{\hat{e}}$$

$$\hat{e}_i = \arg\max_{\hat{e}_i} p(\hat{e}_i | s)$$



$$\mu_{h_j \to e_i}(e_i) \overset{\propto}{=} \sum_{\substack{\{k : e_k \in h_j \\ k \neq j\}}} [h_j^T e_k = s_i] \cdot \prod_{\substack{k : e_k \in h_j \\ k \neq i}} \mu_{e_k \to h_j}(e_k)$$

$$\mu_{e_i \to h_j}(e_i) \overset{\propto}{=} \Big(\prod_{\substack{k : e_i \in h_k \\ k \neq j}} \mu_{h_k \to e_i}(e_i) \Big) p(e_i)$$

$$b_i(e_i) \propto p(e_i) \prod_{k : e_i \in h_k} \mu_{h_k \to e_i}(e_i)$$

$$\hat{e}_i = \arg\max_{e_i} b_i(e_i)$$

останов, если ① $H\hat{e} = s$

② Стабилизация b_i

③ Макс. число итераций

обозначим:

$$\{e_k : e_k \in h_j, \ k \neq j\} = \{e_{(1)}, e_{(2)} \dots e_{(n_j-1)}\}$$

$$p_{(k)}(e_{(k)}) = \mu_{e_{(k)} \to h_j}(e_{(k)})$$

$$\mu_{h_j \to e_i}(e_i) \propto \sum_{\{e_{(1)} \dots e_{(n_j-1)}\}} \Big[\sum_{k=1}^{n_j-1} e_{(k)} = s_j + e_i \Big] \prod_{k=1}^{n_j-1} p_{(k)}(e_{(k)})$$

$$\sum_{k=1}^{n_j-1} e_{(k)} + s_j + e_i + 1$$

$$\sum_{\{e_{(1)} \dots e_{(n_j-1)}\}} \Big(\sum_k e_{(k)} \Big) \prod_k p_{(k)}(e_{(k)}) + (s_j + e_j + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n_j-1} \Big(\sum_{e_{(k)}} e_{(k)} p_{(k)}(e_{(k)}) \Big)$$

$$e^1 \to e^2 \to \dots \to e^{n_j-1}$$

$$e^k = e_{(1)} + \dots + e_{(k)}$$

$$p(e^{k+1}) = \sum_{e^k} p(e^k)\, p(\underline{e^{k+1} \oplus e^k})$$

$$p(e^{k+1} | e^k) = p(e^{k+1} \oplus e^k)$$

$$\begin{cases} e^{k+1} = e^k, & p_{(k)}(0) \\ e^{k+1} \neq e^k, & p_{(k)}(1) \end{cases}$$

$$\delta p_{(k)} = p_{(k)}(0) - p_{(k)}(1)$$

$$\delta p_k = p_k(0) - p_k(1)$$

$$p_k(0) = \frac{1}{2}(1 + \delta p_k)$$

$$p_k(1) = \frac{1}{2}(1 - \delta p_k)$$

$$\delta p_{n_j-1} = \prod_{k=0}^{n_j-1} \delta p_{(k)}$$

свёртки

расписание пересчёта сообщений

демпфирование

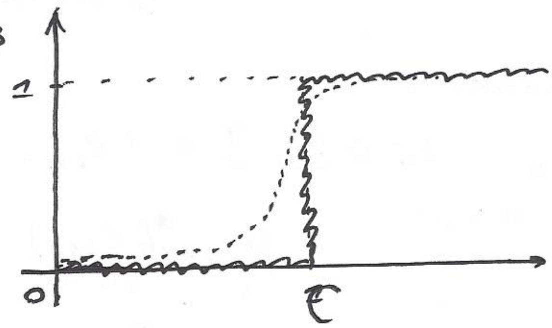
$$\mu^{t+1}_{n_j \to e_i}(e_i) = (1-\lambda)\, \mu^{new}_{n_j \to e_i}(e_i) + \lambda\, \mu^{t}_{n_j \to e_i}(e_i)$$

$\underline{\text{Т}}$ Шеннона

$r = \frac{k}{n}$, C

скорость кода

q фикс.
n фикс.
k изм.



q фикс.
r фикс.
n изм.