22.11.19 ИО VII

Теория двойственности:

$f(x) \to \min$

$g_i(x) \le 0, \ i = \overline{1,m}; \ x \in S$

$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$

λ^*, x^* оптимальные

$d(\lambda) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} L(x,\lambda)$

X - допустимое мн-во, $x \in X$

$\forall \lambda \ge 0 \quad \forall x \in X: \ d(\lambda) \le f(x)$ (соотношение слабой двойственности)

$d(\lambda) = \min\limits_{x} L(x,\lambda) \le f(x) + \lambda^T g(x) \le f(x)$

$\{ g_i(x) \le 0, \ \lambda_i \ge 0 \ \forall i \}$

$d(\lambda^*) \le f(x^*)$
$= ?$

Седловая точка

$f(x,y), \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \ y \in Y \subset \mathbb{R}^m$

(x^0, y^0) - с.т.

$f(x^0, y) \overset{①}{\le} f(x^0, y^0) \overset{②}{\le} f(x, y^0)$

$\forall y \in Y \qquad \forall x \in X$

$\{ f(x,y) = x^2 - y^2, \ f(x,y) = xy \}$

(x^0, y^0) с.т. $\Leftrightarrow$

$$f(x^0, y^0) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x,y) = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x,y)$$

$$x(y) = \operatorname{argmin}_{x \in X} f(x,y)$$

$$\max_y f(x(y), y) \geq f(x(y^0), y^0) \overset{②}{\geq} f(x^0, y^0) \overset{①}{\geq} f(x^0, y) \geq \quad \forall y \in Y$$

$$\geq f(x(y), y)$$

$$\max_y f(x(y), y) \geq \ldots \geq f(x(y), y) \quad \underline{\forall y}$$

$\forall y \Rightarrow$ и $\max y$, $(\geq \Rightarrow =)$

Теорема

① (x^*, λ^*) с.т. $L(x, \lambda) \Rightarrow$

$x^* \in \mathbb{R}^n$, $\lambda^* \in \mathbb{R}^m_+$

$$x^* = \operatorname{argmin}_{x \in X} f(x)$$

Если нашлась с.т. (x^*, λ^*), то x^* — решение исходной ~~др~~ задачи

② f, g выпукл. и (x^*, λ^*) ККТ $\Rightarrow$

(x^*, λ^*) с.т. $L(x, \lambda)$ на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$

Решение ККТ (x^*, λ^*) будет с.т. $L(x, \lambda)$ на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$

Док-во

② $\mathcal{L}(x, \lambda^*) = f(x) + \lambda^{*T} g(x^*)$

$\nabla \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) \leq \mathcal{L}(x, \lambda^*) \; \forall x \in \mathbb{R}^n$

{из выпуклости $f(x), g(x)$ (и $\mathcal{L}(x, y)$ по x)}

$\mathcal{L}(x^*, \lambda) \overset{?}{\leq} \mathcal{L}(x^*, \lambda) \quad \forall \lambda \geq 0$

$\mathcal{L}(x^*, \lambda) = \cancel{f(x^*)} + \lambda^T g(x^*) \overset{?}{\leq} \cancel{f(x^*)} + \lambda^{*T} g(x^*)$

$(\lambda - \lambda^*)^T g(x^*) \leq 0 \quad \forall \lambda \geq 0$

$\sum_i (\lambda_i - \lambda_i^*) g_i(x^*) \leq 0 \quad \forall \lambda \geq 0 \quad ?$

] $g_i(x^*) = 0 \Rightarrow$ ок

$g_i(x^*) < 0$, то $\lambda_i^* = 0$ и $\lambda_i \geq 0$

и вся сумма неположительна ■

① $g_i(x^*) \overset{?}{\leq} 0 \qquad \sum_i (\lambda_i - \lambda_i^*) g_i(x^*) \leq 0$

$\boxed{П}$ $\exists j \; g_j(x^*) > 0$, $\qquad \underbrace{(\lambda_j - \lambda_j^*) g_j(x^*) \leq 0 \; \forall \lambda_j \geq 0}$

здесь противоречие ?!

и $g_i(x^*) \leq 0 \quad \forall i$

Далее, $\boxed{П}$ $\lambda_j^* g_j(x^*) < 0 \Leftarrow \exists j$

и $(\lambda_j - \lambda_j^*) g_j(x^*) > 0$

$\lambda_j^* > 0$, $g_j(x^*) \overset{<}{\cancel{=}} 0$?!

Выбираем λ_j : $0 < \lambda_j < \lambda_j^*$ $\left\{ \begin{array}{l} (\lambda_j - \lambda_j^*) < 0 \\ g_j(x^*) > 0 \end{array} \right\}$ $\boxed{П}$

противоречие и $\lambda_i^* g_i^*(x^*) = 0 \; \forall i$

$$f(x^*) = f(x^*) + \lambda^{*T} g(x^*) = L(x^*, \lambda^*) \leq$$

$$\leq L(x, \lambda^*) = f(x) + \lambda^{*T} g(x) \leq f(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \forall x \in X$$

Тогда x^* явл-ся т. минимума $f(x)$ ■

Наличие седловой т. $L(x^*, \lambda^*)$ автоматически гарантирует $\exists$ минимума $f(\vec{x})$, даже без условия выпуклости $f(x)$

Пример

$$x^2 + (y-3)^2 \to \min_{x+y \leq 1}$$

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + (y-3)^2 + \lambda(x+y-1)$$

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_{(x,y)} L(x, y, \lambda)$$

$$\nabla L(x, y, \lambda) = 0$$

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2(y-3) + \lambda = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} + 3 \end{cases} \to L$$

$$\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda\left(-\frac{\lambda}{2} + \left(-\frac{\lambda}{2} + 3\right) - 1\right) = -\frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda = d(\lambda)$$

$$\max_{\lambda \geq 0} d(\lambda), \quad \lambda^* = 2$$

$$\begin{cases} x^* = -\frac{\lambda^*}{2} = -1 \\ y^* = -\frac{\lambda^*}{2} + 3 = 2 \end{cases}$$

Теория двойственности в ЛП!

$$\min c^T x$$
$$Ax \le b \quad [\lambda] \ge 0$$

$$L(x, \lambda) = c^T x + \lambda^T (Ax - b)$$

Из теорема выше:

$$\boxed{\min_{Ax \le b} c^T x} = \max_{\lambda \ge 0} \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) =$$

прямая задача

$$= \max_{\lambda \ge 0} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ c^T x + \lambda^T (Ax - b) \} =$$

$$= \max_{\lambda \ge 0} \{ \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ (c^T + \lambda^T A) x - b^T \lambda \} =$$

$$= \max_{\lambda \ge 0} \begin{cases} -b^T \lambda, & \boxed{c^T + \lambda^T A = 0} \\ -\infty, & c^T + \lambda^T A \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(не ищем $\max\limits_{\lambda \ge 0}$ на $\{\infty\}$)

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \max\limits_{\lambda \ge 0} (-b^T \lambda) \\ c^T + \lambda^T A = 0 \end{array}} = d(\lambda)$$

двойственная задача

Из слабой дв-ти:
$\forall \lambda \in \Lambda, \forall x \in X$
$-b^T \lambda \le c^T x$

Поиск с.т.
$-b^T \lambda = c^T \lambda$

и они совпадают!

$d(\lambda)$ всегда вогнута по λ

$$\nabla d(\lambda) = g(x(\lambda))$$

$$\min f(x) \qquad x^*(b)$$
$$g(x) \leq \boxed{b} \qquad \lambda(b)$$

$$\nabla_b f(x^*(b)) = -\underbrace{\lambda(b)}$$

теневые цены,
shadow prices

Пример

$$\min f(x) \quad > \quad \max_{\lambda \geq 0} d(\lambda)$$
$$g_i(x) \leq 0$$
$$x_i \in \{0, 1\}$$

разрыв двойственности
duality gap