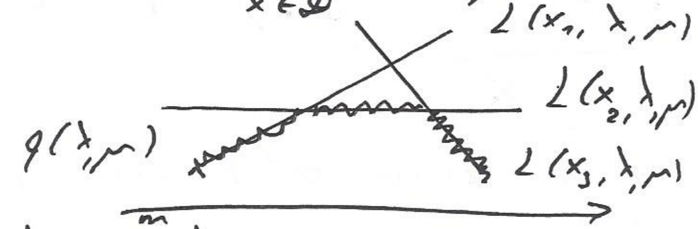
23.10.17 МОМО $\underline{\text{VIII}}$

$$\begin{cases} f(x) \to \min\limits_x, & x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \\ g_i(x) \le 0, & i = \overline{1,m} \\ h_j(x) = 0, & j = \overline{1,p} \end{cases} \qquad \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)$$

двойственная ф-ия Лагранжа: $\inf\limits_{x \in \mathcal{D}} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = q(\lambda,\mu)$

① $q(\lambda,\mu)$ – вогнутая

② $q(\lambda,\mu) \le f_{opt} \quad \forall \lambda \ge 0, \mu$



$$\inf_x \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) \le \{x \in F\} \le f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underset{0}{\underset{\vee}{g_i(x)}} + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \underset{0}{\underset{\parallel}{h_j(x)}} \le f(x) \quad \forall x \in F, \ \forall \underset{0}{\overset{\wedge}{\lambda}} \ge 0 \ \forall \mu$$

λ, μ

$$q(\lambda,\mu) \le \min_{x \in F} f(x) = f_{opt}$$

двойственная задача оптимизации

$$\begin{cases} q(\lambda,\mu) \to \max\limits_{\lambda,\mu} \\ \lambda \ge 0 \end{cases}$$ выпуклая всегда

$q_{opt} \le f_{opt}$ слабая двойственность

$$x_{opt} = \arg\inf_{x \in \mathcal{D}} \mathcal{L}(x, \lambda_{opt}, \mu_{opt})$$

методы оптимизации условной задачи

$$\begin{cases} f(x) \to \min\limits_x, & x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n, \ f \text{ - вып.}, \in C^2 \\ Ax = b, & A \in \mathbb{R}^{p \times n}, \ p < n, \ \operatorname{rank} A = n \end{cases}$$

Исключение неизвестных

$$Ax = b \Leftrightarrow x = x_{\text{частн.}} + Zu, \quad u \in \mathbb{R}^{n-p}, \ Z \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}, \ AZ = 0$$

$$f(x_{\text{частн.}} + Zu) \to \min_u$$

Метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

$$x_0 \in F \to x_1 \in F \to x_2 \in F \to \ldots$$

$$f(x_k + d) \simeq m_k(d) = \begin{cases} f_k + \nabla f_k^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f_k d \to \min\limits_d \\ Ad = 0 \end{cases}$$

$A(x_k + d) \Rightarrow$

$$L(d,\mu) = f_k + \nabla f_k^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f_k d + \mu^T A d$$

$$\nabla_d L(d,\mu) = \begin{cases} \nabla f_k + \nabla^2 f_k d + A^T \mu = 0 \\ Ad = 0 \end{cases}$$

СЛАУ

$$\underbrace{\begin{array}{c|cc} & n & p \\ \hline n & \nabla^2 f_k & A^T \\ p & A & 0 \end{array}}_{K} \begin{bmatrix} d \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

$inertia(K) = (n_+, n_-, n_0)$ числа $\lambda_i > 0,\ \lambda_i < 0,\ \lambda_i = 0$

<u>утв.</u> если $\nabla^2 f > 0$, $\operatorname{rank} A = p \Rightarrow inertia(K) = (n, p, 0)$

Необходимо: 1) $x_{k+1} \in F$, 2) $\nabla f_k^T d < 0$

① $A x_{k+1} = A(x_k + \alpha_k d_k) = A x_k + \alpha_k \underset{0}{\underset{\parallel}{A d_k}} = b \quad \forall \alpha_k$

$x_{k+1} \in D$?

Пусть $D = \mathbb{R}^n_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0 \ \forall i\}$

$x_{k+1,i} = x_{k,i} + \alpha_k d_{k,i} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{если } d_{k,i} \geq 0, \text{ то } x_{k+1,i} > 0 \ \forall \alpha_k \\ \text{если } d_{k,i} < 0, \ \alpha_k < -\frac{x_{k,i}}{d_{k,i}} \end{array} \right.$

$\alpha_{max} = \min\limits_{i: d_{k,i} < 0} \left(-\frac{x_{k,i}}{d_{k,i}} \right)$, $\alpha_{start} = \min(1, 0.95 \alpha_{max})$

для $\forall D$ backtracking, дробление шага

② $\nabla f_k^T d = d_k^T(-\nabla^2 f_k d_k - A^T \mu_k) = -\underbrace{d_k^T \nabla^2 f_k d_k}_{\vee\, 0} - \mu_k^T \underset{0}{\underset{\parallel}{A d_k}} < 0$

условие останова:

$$\begin{cases} f(x) \to \min\limits_x \\ Ax = b \end{cases} \quad L(x,\mu) = f(x) + \mu^T(Ax - b)$$

$$\begin{cases} \nabla_x L(x,\mu) = \nabla f(x) + A^T \mu = 0 \\ Ax = b \end{cases} \quad \text{ККТ}$$

условие: $\|\nabla_x L(x_{k+1}, \mu_k)\|^2 \leq \varepsilon$

для сильно выпуклых гладких ф-ий это условие гарантирует: $\{L(x_*, \mu_*) = \min\limits_{x,\mu} L(x,\mu)\}$

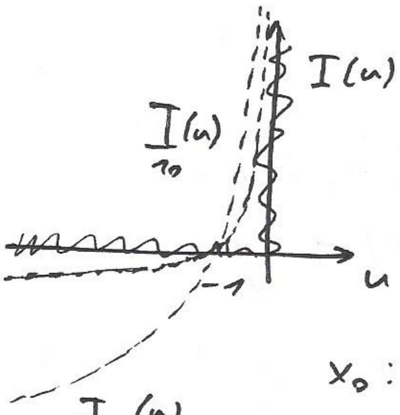
$$|L(x_k, \mu_k) - L(x_*, \mu_*)| \leq \|\nabla_x L(x_k, \mu_k)\|^2 \leq \varepsilon$$

$$\begin{cases} f(x) \to \min\limits_x, & x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f, g_i \text{ вып.} \in C^2 \\ g_i(x) \le 0, & i = \overline{1,m} \\ Ax = b, & A \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad p < n, \ \operatorname{rank} A = p \end{cases}$$

условие Слейтера: $\exists\, \tilde{x} : g_i(\tilde{x}) < 0 \ \forall i \quad A\tilde{x} = b$

$$I(u) = \begin{cases} 0, & u \le 0 \\ \infty & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) + \sum\limits_{i=1}^m I(g_i(x)) \to \min\limits_x \\ Ax = b \end{cases}$$

логарифмический барьер: $I_\tau(u) = -\frac{1}{\tau} \ln(-u), \ \tau > 0$



$I_\tau(u) \to I(u), \ \tau \to \infty \quad \forall u < 0$

вспомогательная задача:

$$\begin{cases} \tau f(x) - \sum\limits_{i=1}^m \ln(-g_i(x)) \to \min\limits_x \\ Ax = b \end{cases}$$

как связать τ и ε?

$x_0: Ax_0 = b, \ g_i(x_0) < 0 \ \forall i$

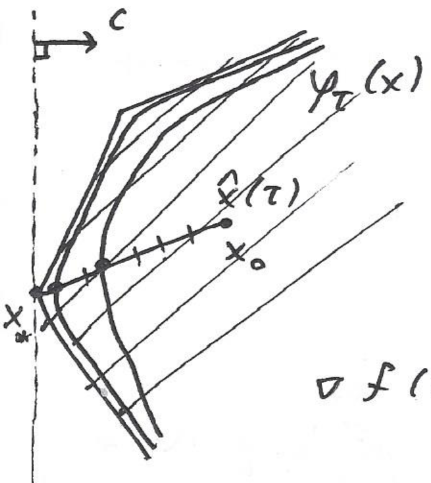
методы внутренней точки

$\{\hat{x}(\tau), \hat{\mu}(\tau) \mid \tau > 0\}$ центральный путь

Пример: ЛП

$$\begin{cases} c^T x \to \min\limits_x \\ Ax \le b \end{cases} : \quad F(x) = c^T x \underbrace{- \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^m \ln(-a_i^T x + b)}_{\varphi_\tau(x)} \to \min_x$$

$\nabla F(x) = 0 = c + \nabla \varphi_\tau(\hat{x}(\tau)) = 0 \Leftrightarrow \nabla \varphi_\tau(\hat{x}(\tau)) = -c$



для вспомогательной задачи

$$L_\tau(x, \mu) = \tau f(x) - \sum_i \ln(-g_i(x)) + \mu^T (Ax - b)$$

$$\nabla_x L_\tau(\hat{x}(\tau), \hat{\mu}(\tau)) = \tau \nabla f(x) + \sum_i \frac{1}{-g_i(x)} \nabla g_i(\hat{x}) + A^T \hat{\mu} = 0 \quad | : \tau$$

$$\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{-\tau g_i(\hat{x})} \nabla g_i(\hat{x}) + A^T \frac{\hat{\mu}}{\tau} = 0$$

для исходной задачи:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \mu^T (Ax - b)$$

$\tilde{x} = \hat{x}(\tau), \quad \tilde{\lambda}_i = -\frac{1}{\tau g_i(\hat{x})}, \quad \tilde{\mu}_i = \hat{\mu}_i / \tau : \nabla_x L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$

Для $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$:

1) $\nabla_x L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = 0$, 2) $\hat{x} \in F$, 3) $\hat{\lambda}_i > 0 \ \forall i$

4) $\hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}) = -\frac{1}{\tau} \ \forall i \to 0, \tau \to \infty$

следование центральному пути эквивалентно решению возмущённой задачи ККТ

$q(\lambda, \mu) = \inf\limits_{x \in D} L(x, \lambda, \mu)$

$q(\lambda, \mu) = f_{opt} \quad \forall \lambda \geq 0$

$q(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$

$$f(\hat{x}) - f_{opt} \leq f(\hat{x}) - q(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = f(\hat{x}) - L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) =$$

$$= f(\hat{x}) - f(\hat{x}) - \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\hat{\lambda}_i g_i(\hat{x})}_{-\frac{1}{\tau}} - \hat{\mu}^T \underbrace{(A\hat{x} - b)}_{=0} = \frac{m}{\tau} = \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} \tau \nabla^2 f_k & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \qquad \tau = \frac{m}{\varepsilon}$$

$\tau f(x) + \dots \quad \varkappa \uparrow$

метод логарифмических барьеров

$x_0 : Ax_0 = b, g_i(x_0) < 0 \ \forall i, \varepsilon, \tau_0, \nu > 1$

для $k = 0, 1, 2, \dots$

найти $\hat{x}(\tau_k)$ с помощью м. Ньютона из нач. прибл. x_k для

$$\begin{cases} \tau f(x) - \sum_i \log(-g_i(x)) \to \min\limits_x \\ Ax = b \end{cases}$$

$x_{k+1} = \hat{x}(\tau_k)$, если $\frac{m}{\tau_k} \leq \varepsilon$, то стоп

$\tau_{k+1} = \min\left(\frac{m}{\varepsilon}, \tau_k \nu\right)$

метод первой фазы поиска x_0:

$$\begin{cases} s \to \min\limits_{x, s}, \quad s \in \mathbb{R} \\ g_i(x) \leq s \quad \forall i \\ Ax = b \end{cases}$$

$x_0 : Ax_0 = b$

s_0 : т.ч. $\max(g_i(x))$

семинар

двойственность Лагранжа

$$\begin{cases} \min\limits_x f(x) \\ \text{s. t.} \quad g_1(x) \dots g_m(x) \leq 0 \quad (p) \\ \quad h_1(x) = \dots = h_k(x) = 0 \\ \quad x \in Q \ \text{ произвольное мн-во} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j(x)$$

$\mathcal{L} : Q \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$\sup_{\substack{\lambda\in\mathbb{R}^m_+\\ \mu\in\mathbb{R}^k}} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^m_+} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sup_{\mu\in\mathbb{R}^k} \sum_{i=1}^{k} \mu_i h_i(x) = f(x) \; !$$

// сепарабельность: $\inf\limits_{x,y} [f(x)+g(y)] = \inf\limits_x f(x) + \inf\limits_y g(y)$

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^m} \sum_i \lambda_i g_i(x) = \begin{cases} 0, & g_i \le 0, \ \lambda_i \ge 0 \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}^k} \sum_j \mu_j h_j(x) = \begin{cases} 0, & h_j = 0 \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\inf_{x\in F} f(x) = \inf_{x\in Q} \sup_{\substack{\lambda\in\mathbb{R}^m_+\\ \mu\in\mathbb{R}^k}} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) \ge$$

$$\ge \sup_{\substack{\lambda\in\mathbb{R}^m\\ \mu\in\mathbb{R}^k}} \inf_{x\in Q} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) \qquad // \ \inf_x \sup_y \varphi(x,y) \ge \sup_y \inf_x \varphi(x,y)$$

$q(\lambda,\mu) = \inf\limits_{x\in Q} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu)$ двойственная ф-ия

область определения:

$$\mathcal{D} = \{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^k : \inf_{x\in Q} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) > -\infty\}$$

$$\begin{cases} \max\limits_{\lambda,\mu} q(\lambda,\mu) \\ \text{s.t. } (\lambda,\mu) \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (D) \qquad P^* \ge D^* \Rightarrow \begin{matrix} x\in F \\ (\lambda,\mu)\in\mathcal{D} \end{matrix} \quad f(x) \ge q(\lambda,\mu)$$

$$f(x) - \underset{\ge q(\lambda,\mu)}{\underset{\sim}{f^*}} \le f(x) - q(\lambda,\mu) < \varepsilon$$

если вып. усл. рег. на выпуклость $\Rightarrow P^* = D^*$ сильная двойственность

ЛП (ΛП)

$$(\text{ЛП}) \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \langle c,x\rangle \\ \text{s.t. } Ax = b \\ \quad x \ge 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = \langle c,x\rangle - \langle\lambda,x\rangle + \langle\mu, Ax-b\rangle$$

$$\nabla_x \mathcal{L} = c - \lambda + A^T\mu$$

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = \inf_x \langle c-\lambda+A^T\mu, x\rangle - \mu^T b \ \cancel{+\text{const}}$$

$$\mathcal{D} = \{(\lambda,\mu) : \lambda\in\mathbb{R}^n_+, \mu\in\mathbb{R}^n \mid c-\lambda+A^T\mu = 0\} \Leftarrow \begin{cases} 0, & c-\lambda+A^T\mu = 0 \\ -\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q(\lambda, \mu) = -\mu^T b \to \max\limits_{\lambda, \mu} \\ c - \lambda + A^T\mu = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \qquad (D2P)$$

$$\begin{cases} \min\limits_{\mu} \langle \mu, b \rangle \\ \text{s.t. } c + A^T\mu \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \langle c, x\rangle + \langle \mu, Ax - b\rangle$$

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n_+} \{\langle c, x\rangle + \langle \mu, Ax - b\rangle\} = \inf_{x \in \mathbb{R}^n_+} \{\langle c + A^T\mu, x\rangle - \langle \mu, b\rangle\}$$

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n_+} \langle c + A^T\mu, x\rangle = \begin{cases} 0, & c + A^T\mu \geq 0 \\ -\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$q(\cancel{\lambda}, \mu) = -\langle \mu, b\rangle$$

$$\mathcal{D} = \{\cancel{\lambda}, \mu : c + A^T\mu \geq 0, \mu \in \mathbb{R}^n\}$$

$$(QP) \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\langle Px, x\rangle + \langle q, x\rangle & P \in S^n_{++}, q \in \mathbb{R}^n \\ \text{s.t. } Ax \leq b & A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \frac{1}{2}\langle Px, x\rangle + \langle q, x\rangle + \langle \lambda, Ax - b\rangle$$

$$\inf_x \mathcal{L}(x, \lambda)? \quad \nabla_x \mathcal{L} = Px + q + A^T\lambda = 0, \quad x_* = -P^{-1}(A^T\lambda + q)$$

$$\mathcal{L}(x_*, \lambda) = \frac{1}{2}\langle A^T\lambda + q, P^{-1}(A^T\lambda + q)\rangle - \langle q, P^{-1}(A^T\lambda + q)\rangle +$$
$$+ \langle \lambda, -AP^{-1}(A^T\lambda + q) - b\rangle = \frac{1}{2}\langle A^T\lambda + q, P^{-1}(A^T\lambda + q)\rangle -$$
$$- \langle \cancel{P^{-1}} q, \cancel{P^{-1}}(A^T\lambda + q)\rangle - \langle A^T\lambda, P^{-1}(A^T\lambda + q)\rangle - \langle \cancel{A^T}\lambda, b\rangle =$$
$$= -\frac{1}{2}\langle A^T\lambda + q, P^{-1}(A^T\lambda + q)\rangle - \langle \cancel{A^T}\lambda, b\rangle$$

$$\begin{cases} \mathcal{D} = \{\lambda : \lambda \geq 0\} \\ \frac{1}{2}\langle A^T\lambda + q, P^{-1}(A^T\lambda + q)\rangle + \langle \cancel{A^T}\lambda, b\rangle \to \min\limits_{\lambda} \end{cases}$$

$$x^* \in \operatorname{Argmin}_{x \in Q} \mathcal{L}(x, \lambda^*, \mu^*), \qquad Px^* = -(A^T\lambda^* + q)$$

можно явно выразить решение прямой задачи через двойственные переменные только в случае сильной двойственности $p^* = D^*$

Двойственность Фенхеля

(p) $\min\limits_x \{ f(x) + g(Ax) \}$ задача Рокафеллара

линейная регрессия

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\rho}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2, \quad f(x) = \frac{\rho}{2}\|x\|^2$$

$$g(y) = \frac{1}{2}\|y - b\|^2$$

SVM: $\frac{\rho}{2}\|x\|^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} \max\{0, 1 - \underbrace{\langle a_i, x\rangle}_{y_i}\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \min\limits_{x,y} \{ f(x) + g(y) \} \\ \text{s.t. } Ax = y \end{cases} \qquad \mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x) + g(y) - \langle \lambda, Ax - y\rangle$$

$$\inf_{x,y} \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \inf_x \{ f(x) - \langle A^T\lambda, x\rangle \} + \inf_y \{ g(y) + \langle \lambda, y\rangle \} \ominus$$

Сопряжённая ф-ия Фенхеля: $f: E \to \mathbb{R}$

$$f^*(s) = \sup_{x\in E} \{ \langle s, x\rangle - f(x) \}, \quad \mathcal{D}(f^*) = \{ s : f^*(s) < \infty \}$$

$f^*: D \to \mathbb{R}$ выпуклая ф-ия

$$\ominus - \sup_x \{ \langle A^T\lambda, x\rangle - f(x) \} - \sup_y \{ -g(y) - \langle \lambda, y\rangle \} =$$

$$= - f^*(A^T\lambda) - g^*(-\lambda)$$

(D) $\min\limits_\lambda f^*(A^T\lambda) + g^*(-\lambda)$

сопряжённая норма

$$\|s\|_* = \max_{\|x\| = 1} \langle s, x\rangle$$

$$|\langle s, x\rangle| \le \|s\|_* \|x\|$$

Примеры

① $f(x) = \|x\|$ произвольная норма, $f: V \to \mathbb{R}$

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{ \langle s, x\rangle - \|x\| \} \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{ \|s\|_* \|x\| - \|x\| \} =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{ \|x\| (\|s\|_* - 1) \} = \begin{cases} 0, & \|s\|_* \le 1 \\ \infty, & \|s\|_* > 1 \end{cases}$$

Всегда можем выбрать $\|x\|$ на котором достигается равенство

(2) $f(x) = \frac{1}{2}\|x - b\|^2, \quad f^*(s) = \frac{1}{2}\|s + b\|_*^2$

$\|\ \|_p, \ p \geq 1 \Rightarrow$ сопряжённая $\|\ \|_q \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$(f^*)^* = f$ для выпуклых замкнутых ф-ий

$f(x) = \{\langle s, x\rangle - f^*(s)\}$ Epi f замкнуто

(3) $\left.\begin{array}{l} \min\limits_{\mu} \langle \mu, b\rangle \\ \text{s.t.} \quad c + A^T\mu \geq 0 \end{array}\right\} L(\mu, x) = \langle \mu, b\rangle - \langle x, c + A^T\mu\rangle =$

$= \langle b - Ax, \mu\rangle - \langle x, c\rangle$

$\inf\limits_{\mu} L(\mu, x) = \inf\limits_{\mu} \langle b - Ax, \mu\rangle - \langle x, c\rangle = \begin{cases} -\langle x, c\rangle, & b - Ax = 0 \\ -\infty, & \text{иначе} \end{cases}$

$\begin{cases} q(x) = -\langle x, c\rangle \to \max\limits_{x} \\ \text{s.t.} \ b - Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \min\limits_{x} \langle c, x\rangle \\ \text{s.t.} \ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \underline{P^{**} = P}$

(4) $\begin{cases} \min\limits_{\lambda} \{ \frac{1}{2}\langle A^T\lambda + 2, P^{-1}(A^T\lambda + 2)\rangle + \langle \lambda, b\rangle \\ \text{s.t.} \quad \lambda \geq 0 \end{cases}$

$L(\lambda, x) = \frac{1}{2}\langle A^T\lambda + 2, P^{-1}(A^T\lambda + 2)\rangle + \langle \lambda, b\rangle - \langle x, \lambda\rangle$

$\nabla_\lambda L = P^{-1}(A^T\lambda + 2) + b - x = 0, \quad A^T\lambda + 2 = P(x - b),$

$\lambda_* = A^{-T}(P(x - b) - 2), \quad x \geq 0$

$q(x) = \frac{1}{2}\langle P(x - b), x - b\rangle + \langle A^{-T}(P(x - b) - 2), b\rangle -$

$- \langle x, A^{-T}(P(x - b) - 2)\rangle = \frac{1}{2}\langle P(x - b), x - b\rangle - \langle A^{-T}(P(x-b) - 2),$

$x - b\rangle = \frac{1}{2}\langle P(x - b), x - b\rangle - \langle P(x - b), A(x - b)\rangle + \langle 2, A(x - b)\rangle$