08. 11. 19 ИО V

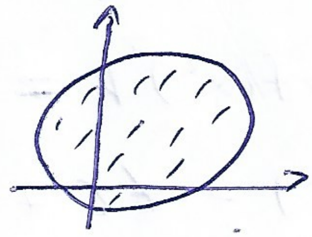
"Условная оптимизация"

$f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$g_i(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x) \to \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n}$

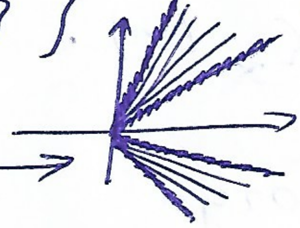
$g_i(x) \le 0, \ i = \overline{1,m}$



"Необходимые усл-я оптимальности."

Конус возможных направлений к мн-ву X в т. x $\{ X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \le 0\} \}$.

Конус: $\forall h \in K \Rightarrow \alpha h \in K \quad \forall \alpha \ge 0$ $\longrightarrow$

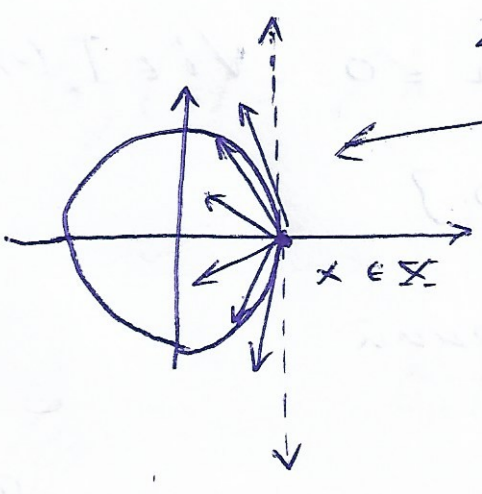


Вместе с $\forall$ вектором содержит луч ему коллинеарный

(отсюда также содержит ноль)

$K_X(x) = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \exists \hat{\alpha} > 0: \ \forall \alpha \in (0, \hat{\alpha}], \ x + \alpha h \in X\}$

конус возможных направлений



$K_X\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \{h \in \mathbb{R}^2 \mid h_1 < 0\}$

$$\boxed{x^* \text{ - лок. } \min \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in \underbrace{X \cap B_\varepsilon(x^*)}_{} \ f(x) \ge f(x^*)}$$

x^* - лок. min $\Rightarrow$ $\nabla f(x^*)^T h \geq 0 \quad \forall h \in K_X(x$

(ф-ия должна неубывать по $\forall$ из нап. h)

доказ-во: от $\overline{\Pi}$

$f(x^* + th) = f(x^*) + t\nabla f(x^*)^T h + \bar{o}(t) \ominus$

$\exists\ \bar{h} \quad \nabla f(x^*)^T h = -C < 0$

$\ominus\ f(x^*) \underbrace{- tC + \bar{o}(t)}_{<0,\ t\to 0} < f(x^*)$

противоречие с тем, что x^* лок. min ∎

Пусть X вып. мн-во, $x \in X$

$K_X(x) = \{ h \in \mathbb{R}^n \mid h = y - x,\ y \in X \}$

Тогда x^* лок. min $\Rightarrow$ $\nabla f(x^*)^T (y - x) \geq 0 \quad \forall y \in X$

Условие выпуклости:

$f(y) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*)^T (y - x) \geq 0 \quad \forall y \in X$

{глобально $\forall y$ (тк. для f вып)}

Если f выпуклая то $\Downarrow$ необх. усл. явл. дост.

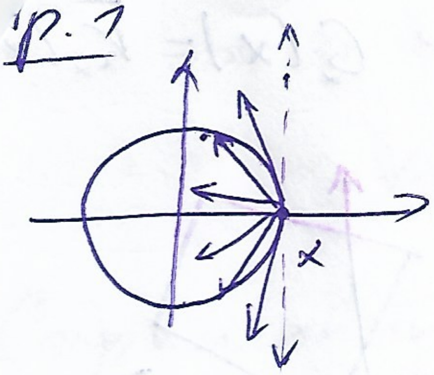
"Конус касательных"

$G_X(x) = \{ h \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(x)^T h \leq 0 \quad \forall i \in I_X(x) \}$

$I_X(x) = \{ i = \overline{1,m} \mid g_i(x) = 0 \}$

мн-во активных ограничений

Пр. 1



$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1, \quad x = \binom{1}{0}$

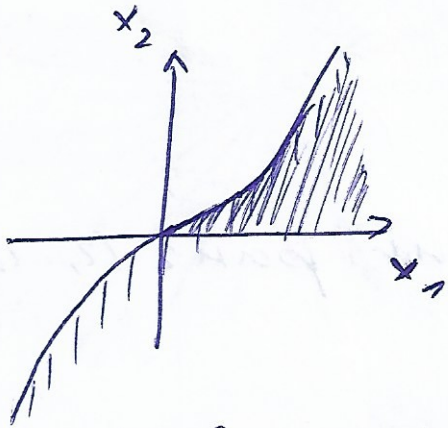
$$\nabla g_1 = \binom{2x_1}{2x_2}\Big|_{\binom{1}{0}} = \binom{2}{0}$$

$$G_X\binom{1}{0} = \{ h \in \mathbb{R}^2 \mid 2h_1 \le 0 \}$$

$(h_1 \le 0)$

Пр. 2 $\quad G_X(x) = \overline{K_x(x)}$

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} x_2 - x_1^3 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{array} \right\}$$



(куб. пар-ла)

$x = (0,0)$

конус возм. напр. ?

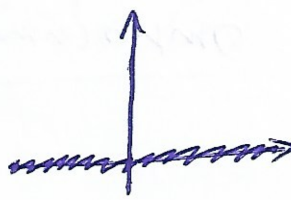
конус кас. ?

$$K_x\binom{0}{0} = \left\{ h \mid \begin{array}{l} h_2 = 0 \\ h_1 \ge 0 \end{array} \right\}$$

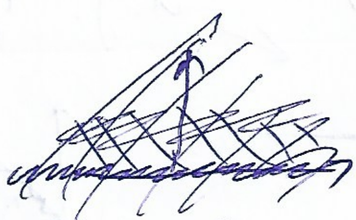
$$\binom{-3x_1^2}{1}\Big|_{\binom{0}{0}} = \binom{0}{1} \qquad \nabla g_1 = \binom{0}{1}$$

$$\nabla g_2 = \binom{0}{-1}$$

$$G_X\binom{0}{0} = \left\{ h \mid \begin{array}{l} h_2 \le 0 \\ -h_2 \le 0 \end{array} \right\} = \{ h \mid h_2 = 0 \}$$



$(h_2 = 0)$



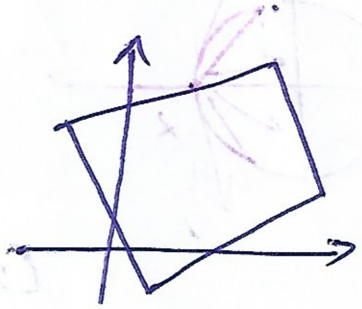
$G_x\binom{0}{0}$

$$G_x\binom{0}{0} \ne K_x\binom{0}{0}$$

$K_x\binom{0}{0}$

"Условия регулярности" $G_x(x) = \overline{K}_x(x)$

1. $g_i(x)$ линейные
$\forall i$



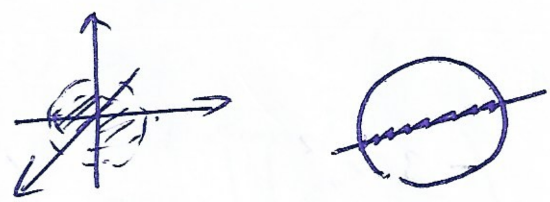
2. $g_i(x)$ выпуклые и
$\exists\, x^0 : g_i(x^0) < 0 \quad \forall i$ (непустота внутренности)

$\to \quad g_i(x) \le 0, \; i = \overline{1,m}$
$h_j(x) = 0, \; j = \overline{1,k}$ + линейные

$J(x)$ якобиан имеет полный ранг $(h_1 \dots h_k)$

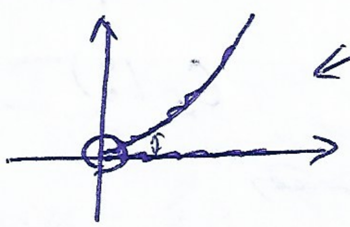
Пр. Единичная сфера 3D

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \le 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

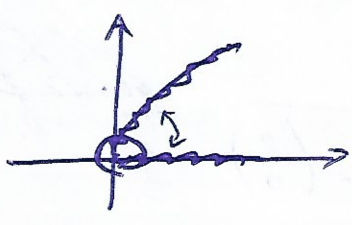


круг в 3D

относительная внутренность $\to$ ri (int)
relative interior



л.з. градиентов



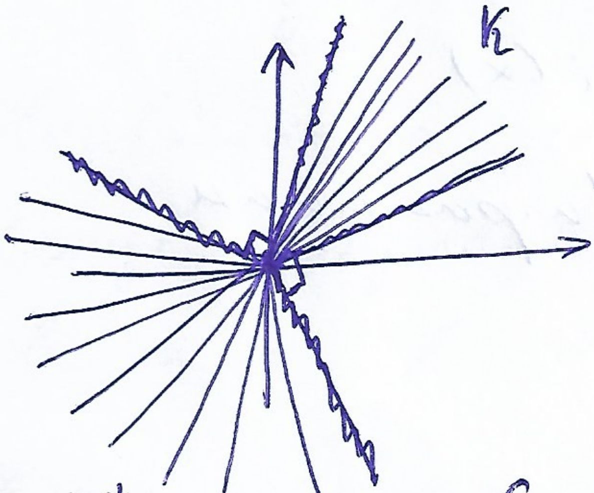
л.н.з. градиентов

x^* – лок. min $\Rightarrow \nabla f(x^*)^T h \geq 0$

$\forall h: \nabla g_i(x^*)^T h \leq 0 \quad \forall i \in I_x(x^*)$

"Сопряжённый конус"

$K, K^* = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v^T h \leq 0 \quad \forall h \in K \}$



Лемма

Дубовицкого–Милютина

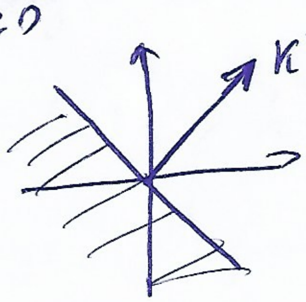
$$K = \bigcap_{i=1}^m K_i \Rightarrow K^* = \sum_{i=1}^m K_i^*$$

$G_i = \{ h \mid \nabla g_i(x^*)^T h \leq 0 \}$

и $G = \bigcap_{i \in I_x(x^*)} G_i$

$G^* = \{\lambda_i \nabla g_i(x^*)\}$

$\lambda_i \geq 0$



$$\boxed{G^* = \sum_{i \in I_x(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) \quad \lambda_i \geq 0}$$

тупой угол K^*

$v^T h \leq 0$

$\underline{\nabla f(x)^T h \geq 0 \quad \forall h} \Rightarrow \underline{-\nabla f(x^*) \in G^*}$

$$\left.\begin{array}{c} \nabla f(x^*) h \geq 0 \quad \forall h \in G_x(x^*) \\ \Updownarrow \\ -\nabla f(x^*) \in G_x^*(x^*) \end{array}\right\} \underline{(*)}$$

Тогда из (*) $\Rightarrow \exists\, \lambda_i^* \geq 0$

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i \in I_x(x^*)} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*)$$

Антиградиент принадлежит конической оболочке градиентов активных ~~а~~ ограничений

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

Лагранжиан

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$$