01.11.19 ИО IV

Оценка убывания ф-ии на одном шаге метода Ньютона, (оценка сх-ти).

1) $f(x^+) - f(x) \le -\frac{1}{2}\hat{t}\lambda^2$, $\hat{t} = \frac{1}{1+\lambda}$

Оценка разности функции в оптимальной точке и на текущем шаге (оценка опт-ти).

2) $$\nabla f(x)^T h + (h^T \nabla^2 f(x) h)^{1/2} - \ln(1 + (h^T \nabla^2 f(x) h)^{1/2}) \le$$
$$\le f(h) - f(x)$$

$$\min_{h \in \mathbb{R}^n} [\nabla f(x)^T h + \underbrace{(h^T \nabla^2 f(x) h)}_{u(h)}^{1/2} - \ln(1 + (h^T \nabla^2 f(x) h)^{1/2}) \le$$
$$\le f^* - f(x)$$

при $\underbrace{\lambda \le c < 1}$ сх-ся

ф-ия ограничена снизу и $\exists$ минимум, далее:

$$\nabla f(x) + u^{-\frac{1}{2}}(h) \nabla^2 f(x) h - \frac{u^{-\frac{1}{2}}(h) \nabla^2 f(x) h}{(1 + u(h)^{1/2})} =$$

$$= \nabla f(x) + \underbrace{\left(u^{-\frac{1}{2}} - \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{1 + u^{1/2}} \right)} \nabla^2 f(x) h = 0$$

$$\frac{1}{1 + u^{1/2}} = k$$

$$\begin{cases} \nabla f(x) + k\, \nabla^2 f(x)\, h = 0 \\ k = \dfrac{1}{1+u^{1/2}} \end{cases} \qquad (*)$$

$$h = -\frac{1}{k} \left(\nabla^2 f(x)\right)^{-1} \nabla f(x) = \frac{1}{k} \Delta x_N$$

$$u(h) = h^T \nabla^2 f(x)\, h = \frac{1}{k^2} \Delta x_N^T \nabla^2 f(x) \Delta x_N = \frac{\lambda^2}{k^2}$$

$$k = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{k}}, \quad k = \frac{k}{\lambda + k}, \quad \lambda + k = 1, \quad k = 1-\lambda$$

Тогда с-ма (*) имеет ! реш-е, тогда ∃! точка экстремума, тогда эта точка необходимо явл-ся точкой минимума (ф-ция бесконечно растёт и ограничена снизу)

$$h = \frac{1}{k} \Delta x_N = \frac{\Delta x_N}{1-\lambda}, \quad \nabla f(x)^T \Delta x_N = -\lambda^2$$

$$\min_{h \in \mathbb{R}^n} \Big[\underbrace{\nabla f(x)^T h}_{-\frac{\lambda^2}{1-\lambda}} + \underbrace{\left(h^T \nabla^2 f(x) h\right)^{1/2}}_{\frac{\lambda}{1-\lambda}} - \ln\big(1 + \underbrace{\left(h^T \nabla^2 f(x) h\right)^{1/2}}_{\frac{\lambda}{1-\lambda}}\big) \Big]$$

$$\le f^* - f(x)$$

$$-\frac{\lambda^2}{1-\lambda}+\frac{\lambda}{1-\lambda}-\ln\left(1+\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)=\lambda+\ln(1-\lambda)\geq$$

$$\overset{?}{\geq}-\lambda^2,\quad\forall\lambda\leq\frac{1}{2}$$

$$-\lambda-\ln(1-\lambda)=\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda^4}{4}+\ldots=g(\lambda)$$

$$g'(\lambda)=\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots=\frac{\lambda}{1-\lambda}$$

$$\int_0^\lambda g'(\tau)\,d\tau=\int_0^\lambda\frac{\tau}{1-\tau}\,d\tau\leq\int_0^\lambda 2\tau\,d\tau=\tau^2\Big|_0^\lambda=\lambda^2$$

Отсюда $-\lambda-\ln(1-\lambda)\leq\lambda^2\quad\forall\lambda\in[0,1/2]$

И финальная оценка оптимальности:

$$\boxed{f^*-f(x)\geq-\lambda^2,\quad\lambda\in[0,1/2]}$$

Вместе с оценкой сх-ти: $\hat{t}=\frac{1}{1+\lambda}$

$$f(x^+)\underset{\pm f^*}{-}f(x)\leq-\frac{1}{2}\hat{t}\lambda^2\leq\frac{1}{2}\hat{t}(f^*-f(x))$$

$$f(x^+)-f^*\leq f(x)-f^*-\frac{1}{2}\hat{t}(f(x)-f^*)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\hat{t}\right)(f(x)-f^*)\leq\left(1-\frac{1}{3}\right)(f(x)-f^*)=$$

$$\lambda\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\hat{t}\geq\frac{2}{3}\qquad=\frac{2}{3}(f(x)-f^*)$$

Точность ε по ф-ии на итерациях

$$f(x^k)-f^*\leq\varepsilon,\quad\left(\frac{2}{3}\right)^k(f(x^0)-f^*)\leq\varepsilon$$

$$k \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(f(x^0) - f^*\right) \le \ln(\varepsilon)$$

$$k \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}, \quad \varepsilon = 10^{-8}$$

$$\ln\frac{3}{2} \approx \frac{1}{2} \qquad k \geq 2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$k \geq 16$ итераций

Дальше, для $\lambda \geq \frac{1}{2}$

$$f(x^+) - f(x) \le -\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{1+\lambda} \overset{?}{\le} -\text{const}, \quad \lambda \geq \frac{1}{2}$$

$$\left\{\begin{matrix} \lambda \to 0 \\ \frac{\lambda^2}{1+\lambda} \to 0 \end{matrix}\right\}$$

$\cancel{f^* \ f(x)}$

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \le -\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{1+\lambda} \le \text{const} \mid \Sigma$$

$$k \cdot \text{const} \le f(x^0) - f^*$$

$$k \le \frac{f(x^0) - f^*}{\text{const}} \sim \boxed{O(f(x^0) - f^*)} + O\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Можно показать квадратичную ск-ть сх-ти метода в малой окрестности оптимума.

Пример: $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$

$$\nabla f = Ax + b$$

$$x^+ = x - A^{-1}(Ax + b) = x - x - A^{-1}b$$

$$x^+ = -A^{-1}b$$

$$\nabla f = Ax + b = 0, \quad x^* = -A^{-1}b$$

$Ax = b$

$$\begin{cases} 0.0001\,x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Bigg| \otimes -10000$$

плохо обусл-я система

$$-9999\,y = -9998$$

{мантисса и степень}

после округления (3 значащие цифры)

$$\pm\ 0.\underbrace{\overbrace{\quad\quad}^{m}} \cdot 10^{\overset{n}{\square}}$$

$$-10000\,y = -10000$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 0 \quad ?!$$

гигантская ошибка!

Метод Гаусса

Пример!

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -2 \\ -2 & & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & -2^2 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ 0 & -2^3 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\dots \to \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2^{n-1} & 1 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & \boxed{2^n + 1} \end{matrix}$$

существенная потеря точности

MatLab, $Ax = b$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = LU$, $lu(A, 0.0)^T$

выбор ведущего эл-та максимальным по абсолютному значению

$$|a_{ij}| \geq \tau \max_i |a_{ij}|$$

$$\to \begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ 0.0001x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

$y \sim 1$

$x \sim 1$

погрешность минимальна