29. 11. 19 ИО VIII

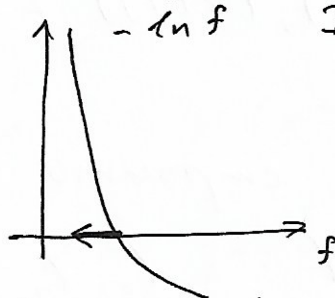
$f_0(x) \to \min$

$(*)$ $\quad f_i(x) \le 0, \ i=\overline{1,m}$

Все ф-ии выпуклые, самосогласованные

$$f_0(x) + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m}\left(-\ln(-f_i(x))\right) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Метод барьеров IPM



$t_0, t_1, \dots$

$x(t)$ решение задачи

central path (центральный путь)

$$t f_0(x) - \sum_{i=1}^{m} \ln(-f_i(x)) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Условие оптимальности 1-го порядка

$$\nabla \ln(-f_i(x)) = \frac{1}{f_i(x)} \nabla f_i(x)$$

$$\nabla f_0(x) - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{t f_i(x)} \nabla f_i(x) = 0, \quad \exists\ \lambda_i^{(x)} = -\frac{1}{t f_i(x)}$$

$$\nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(x^*)} f_i(x^*) = 0, \quad L(x^*, \lambda(x^*)) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda(x^*)) = d(\lambda(x^*))$$

$\Downarrow$

$$f_0(x^*) \ge f_0^* = \max_{\lambda} d(\lambda) \ge d(\lambda(x^*)) = f_0(x^*) - \frac{m}{t}$$

$\uparrow$ оптимальное решение исходной задачи $(*)$

$$L(x^*, \lambda(x^*)) = f_0(x^*) + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i(x^*)\, f_i(x^*) =$$

$$= f_0(x^*) - \sum_{i=2}^{m} \frac{f_i(x^*)}{t\, f_i(x^*)} = f_0(x^*) - \frac{m}{t}$$

$$\bar{f}_0 \geq f_0(x(t)) - \frac{m}{t}$$

Будем строить итерационный метод по t: $t_0, t_1 \ldots$

$$\varphi(x) = -\sum_{i=2}^{m} \ln(-f_i), \quad t \to x, \quad \mu t \to x^+$$

{решили задачу} {$\mu = 2$ напр.}

$$\mu t f_0(x) + \varphi(x) - \mu t f_0(x^+) - \varphi(x^+) = ?$$

$$= F(\mu t, x) - F(\mu t, x^+) \leq$$

необходимо получить следующую оценку

$$\varphi(x) - \varphi(x^+) = \sum_i -\ln(-f_i) + \sum_i \ln(-f_i^+) =$$

$$= \sum_i \ln \frac{f_i^+}{f_i} = \left\{ \lambda_i = -\frac{1}{t f_i} \right\} = \sum_i \ln(-t \lambda_i f_i^+) =$$

$$= \sum_i \left(\ln(-\mu t \lambda_i f_i^+) - \ln \mu \right) \leq \{ \ln a \leq a - 1 \} \leq$$

$$\leq -\mu t \sum_{i=2}^{m} \lambda_i f_i^+ - m - m \ln \mu$$

$$\leq \mu t f_0(x) - (\mu t (\underbrace{f_0^+ + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i f_i^+}_{L(x^+, \lambda) \geq \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda_i) \overset{\boxed{2}}{=} = L\left(x(t), -\frac{1}{t f_i}\right)})) - m - m \ln \mu \leq$$

след. стр.

$$\left\{ \lambda_i = -\frac{1}{t f_i} \right\}$$

$$\le \mu t f_0(x) - \mu t \underbrace{L\left(x, -\frac{1}{t f_i}\right)}_{f_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{f_i}{-t f_i} = f_0 - \frac{m}{t}} - m - m \ln \mu =$$

$$= \mu \cancel{t} f_0 - \mu \cancel{t} f_0 + \mu m - m - m \ln \mu$$

Тогда итоговая оценка

$$\mu t f_0(x) + \varphi(x) - \mu t f_0(x^*) - \varphi(x^*) \le$$

$$\le \boxed{\mu m - m - m \ln \mu} \le \{\text{не зав-т от } t\}$$

$$\le \boxed{\mu m}$$

Доказали полиномиальность !! (??)

{Кол-во ит-й Ньютона $F(x^0) - F(x^*)$,

а здесь $F(\mu t, x) - F(\mu t, x^*)$ }

Метод ε, $t_0 = 1$, $\mu = 5$,

$$t_k = \mu^k t_0, \quad \frac{m}{t_k} \le \varepsilon, \quad \frac{m}{\mu^k t_0} \le \varepsilon,$$

$$\frac{m}{\varepsilon t_0} \le \mu^k, \quad k \geq \frac{\ln \frac{m}{\varepsilon t_0}}{\ln \mu}$$

линейная сл-ть сх-ти (геом. прогр.-я)

Сложность вычислений:

$$\underbrace{n^3}_{\text{Ньютон}} \mu \cancel{m}^2 \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad n^3 \log \frac{m}{\varepsilon}$$

{можно доказать}

Ал Аникинов, Тихонов „Сборник задач"