15.11.19 ИО VI

Применение экстремального принципа к выводу нер-в

Нер-ва:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = b: \quad \max_{x\in\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} x_i \iff \max \ln \prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$[\lambda_1 \dots \lambda_n] \quad x_i \ge 0$$

$$[\lambda_{n+1}] \sum_{i=1}^{n} x_i = b$$

$$\max_{\substack{x_i > 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = b}} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k g_k(x)$$

$$L(x,\lambda) = 0 \quad , \quad \lambda_k g_k(x) = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0, \ k = \overline{1,n}$$

$$\nabla f(x) + \lambda_{n+1} \nabla g_{n+1}(x) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i}, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x_i} + \lambda_{n+1} = 0$$

$$x_i = -\frac{1}{\lambda_{n+1}}, \quad x_i = x^*$$

Подставляя x^* в ограничения, получаем $x^* = \frac{b}{n}$

Максимум достигается при всех одинаковых иксах: $\prod_{i=1}^{n} x_i \le \left(\frac{b}{n}\right)^n$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \le \frac{b}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$\min f(x)$

$g_i(x) \le 0 \quad [\lambda_i] \in \mathbb{R}_+$

$h_k(x) = 0 \quad [\mu_k] \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)$$

Теорема Каруша - Куна - Таккера

x^* - лок. min $\Rightarrow$ $\nabla \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0$

$\exists \lambda \ge 0, \mu$

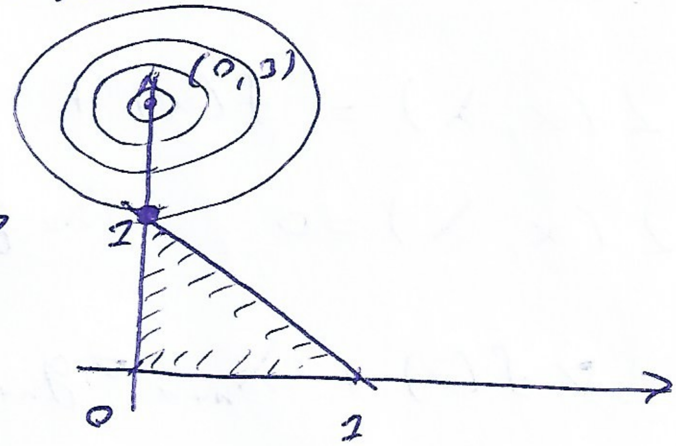
$\lambda^T g(x^*) = 0$ {доп. нежёсткость}.

$g(x^*) \le 0$

$h(x^*) = 0$

$\{\max f = -\min(-f)\}$

$\Downarrow$ $-\nabla f(x) + \sum \nabla g_i = 0$



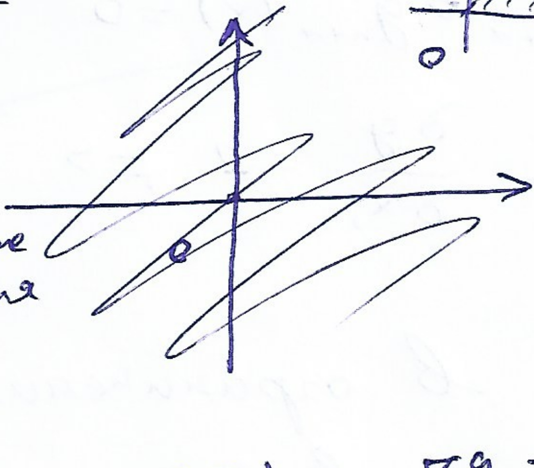
Пример:

$\min \{ \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 3)^2 \}$

$x_1 + x_2 - 1 \le 0$ ⊕

$-x_1 \le 0$ ⊕ ✓

$-x_2 \le 0$



активные ограничения

тогда $\lambda_2 = 0$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix}\Bigg|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

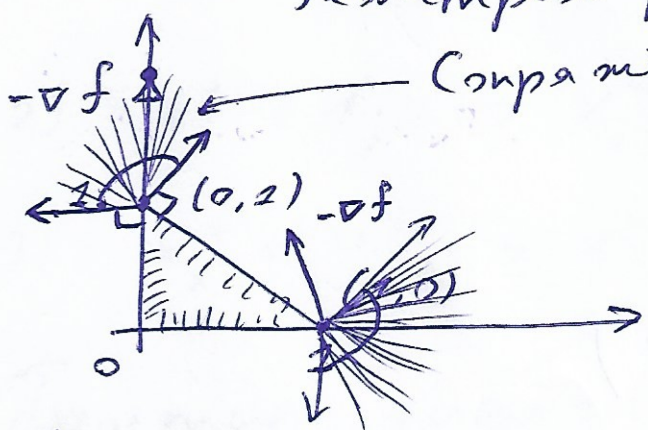
$\nabla f + \lambda_0 \nabla g_0 + \lambda_1 \nabla g_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} \lambda_0 - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_0 = 2 \end{cases}$$

$\underbrace{\lambda_0, \lambda_1 = 2}$

Тогда т. (0,1) удв-т ККТ

Геометрия решения



Сопряжённый конус касательных

Антиградиент лежит внутри конуса касательных направлений для т. $(0,1)$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix}\Bigg|_{\binom{1}{0}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 1 + \lambda_0 = 0 \\ -3 + \lambda_0 - \lambda_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda_0 = -2 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

для т. $(1,0)$ $\exists h: \ \nabla f^T h > 0$

Антиградиент <u>не</u> лежит внутри конуса. для т. $(1,0)$

<u>Пример</u>: $f(x) = \frac{1}{2} x^T B x + c^T x \to \min$

$B > 0 \quad [\mu] \ Ax = b, \ m \times n$

$\mu \in \mathbb{R}^m$

$\nabla f(x) = Bx + c$

$$\nabla L(x, \lambda) = 0 \iff \begin{cases} Bx + c + A^T\mu = 0 & n \text{ ур-й} \\ Ax = b & m \text{ ур-й} \end{cases}$$

$$\left\{ \underset{1\times m}{\mu^T} \underset{m \times 1}{A} = 1 \times n \right\} \qquad n+m \text{ ур-й и неизвестных}$$

$A^T\mu \quad n \times 1$

$$x = -B^{-1}(c + A^T\mu)$$

$$-AB^{-1}(c + A^T\mu) = b$$

$$-AB^{-1}c - b = AB^{-1}A^T\mu$$

$$\mu = -(ABA)^{-1}(AB^{-1}c - b)$$

или напрямую:

$$\begin{bmatrix} B & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix}$$

Задача проектирования на линейное многообразие:

$$\frac{1}{2}\|x - x^0\|^2 \to \min_{Ax=b}$$

$$\frac{1}{2}x^Tx - x^{0T}x + \frac{1}{2}x^{0T}x^0 \to \min_{Ax=b} \quad \{B \equiv I\}$$

<u>Пример</u>: проекция на параллелепипед

$$x^0: \quad \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2 \to \min_{l \le x \le u}$$

$$0 \le \pi_j^+ : \; x_j - u_j \le 0, \qquad \begin{cases} x_j - x_j^0 + \pi_j^+ - \pi_j^- = 0 \\ \pi_j^+(x_j - u_j) = 0 \\ \pi_j^-(l_j - x_j) = 0 \end{cases}$$

$$0 \le \pi_j^- : \; -x_j + l_j \le 0$$

1) $x_j^0 \in [l_j, u_j] \Rightarrow x_j^* = x_j^0$, $\pi_j^+ = 0$, $\pi_j^- = 0$

2) $x_j^0 \le l_j \Rightarrow x_j^* = l_j$, $\pi_j^+ = 0$, $\pi_j^- = l_j - x_j^0 \ge 0$

3) $x_j^0 \ge u_j \Rightarrow x_j^* = u_j$, $\pi_j^- = 0$, $\pi_j^+ = x_j^0 - u_j \ge 0$

Простые задачи решаются явно

$$\frac{1}{2} x^T B x + c^T x \to \min$$
$$l \le x \le u$$

уже только численно

"Отступление"

Проверка положительн~~ой~~й опр-ти матр. в методе Ньютона:

(1) разл-е Холецкого: $A = L^T L > 0$

выдаёт ошибку при $A < 0$

{ критерий ! }

(2) разл-е $A = L^T D L$ $\forall A$

$$D \quad \begin{pmatrix} \square & & & & \\ & \boxed{+} & & & \\ & & \square & & \\ & & & \square & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

1×1, 2×2 клетки ; $\square > 0$, $\boxed{+} > 0$

{ $\det \boxed{+} > 0$ }

каждая клетка должна быть положительна, если клетки отр-е,