Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS
Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS
Irkutsk State University
Mathematical center in Akademgorodok

Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2022)

Irkutsk, Russia, July 15–22, 2022

Irkutsk
ISDCT SB RAS
2022

UDC 517.9

Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2022). Irkutsk : ISDCT SB RAS, 2022, 160 p.
ISBN 978-5-6041814-2-3

This volume contains proceedings of the 7th International Conference “Nonlinear Analysis and Extremal Problems” (NLA-2022). The conference talks present recent developments in various fields of nonlinear analysis, partial differential equations, dynamical systems, calculus of variations, mathematical control theory, and optimization.

This volume is intended for researchers specializing in the corresponding fields of mathematics.

NLA-2022 is a satellite of the International Congress of Mathematicians 2022 (ICM 2022)

Scientific Editor: Prof. A. A. Tolstonogov

Editors: E. Yu. Baturina, O. N. Samsonyuk

Computer layout by E. A. Cherkashin

Preface

This volume contains proceedings of the 7th International Conference "Nonlinear Analysis and Extremal Problems" (NLA-2022) that takes place in Irkutsk, Russia. NLA-2022 is a satellite of the International Congress of Mathematicians 2022 (ICM 2022) and is held on 15-22 July 2022. NLA-2022 aims at sharing recent advances in various areas of modern nonlinear analysis and exposing young researchers to some fast-paced topics in the field.

The main topics of the conference are

- ❑ Nonlinear analysis and its applications,
- ❑ Partial differential equations,
- ❑ Dynamical systems,
- ❑ Calculus of variations,
- ❑ Mathematical control theory,
- ❑ Optimization

The conference featured six lecture courses devoted to various aspects of theoretical and applied nonlinear analysis and control theory:

- ❑ *"Geometry and topology of the spaces of measures"*
  by **Vladimir I. Bogachev** (Lomonosov Moscow State University, Russia),
- ❑ *"Variational analysis and optimization theory: selected topics"*
  by **Alexander Y. Kruger** (Federation University Australia, Australia),
- ❑ *"Introduction to sub-Riemannian and sub-Finsler geometries from the optimal control viewpoint"*
  by **Lev V. Lokutsievskiy** (Steklov Mathematical Institute of RAS, Russia),
- ❑ *"Controllability and optimality"*
  by **Georgii G. Magaril-Il'yaev** (Lomonosov Moscow State University, Russia),
- ❑ *"Optimal control of sweeping processes"*
  by **Boris Sh. Mordukhovich** (Wayne State University, USA),
- ❑ *"Nonlinear Fokker-Planck-Kolmogorov equations"*
  by **Stanislav V. Shaposhnikov** (Lomonosov Moscow State University, Russia).

Organization

NLA-2022 is organized by Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS in cooperation with Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS, Irkutsk State University, and Mathematical center in Akademgorodok (Novosibirsk).

Program Commitee

Chairs:

Alexander A. Tolstonogov	Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS (Russia)
Igor V. Bychkov	Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS (Russia)

Committee members:

Vladimir I. Bogachev	Lomonosov Moscow State University (Russia)
Alexander G. Chentsov	Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS (Russia)
Gennadii V. Demidenko	Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS (Russia)
Ivan A. Finogenko	Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS (Russia) (Russia)
Alexander L. Kazakov	Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS (Russia) (Russia)
Yuri S. Ledyaev	Western Michigan University (USA)
Nikolai Yu. Lukoyanov	Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS (Russia)
Georgii G. Magaril-Il'yaev	Lomonosov Moscow State University (Russia)
Manuel D.P. Monteiro Marques	University of Lisbon (Portugal)
Boris Sh. Mordukhovich	Wayne State University (USA)
Alla A. Shcheglova	Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS (Russia)
Vladimir N. Ushakov	Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS (Russia)

Organizing Committee

Chair: Vladimir A. Dykhta

Secretary: Nikolay I. Pogodaev

Committee members:

Anton S. Anikin	Elena V. Chistyakova	Alexey A. Kumachev
Anna A. Lempert	Taras I. Madzhara	Nadezhda S. Maltugueva
Pavel S. Petrenko	Olga N. Samsonyuk	Stepan P. Sorokin
Pavel S. Sorokovikov	Maxim V. Staritsyn	Tatiana S. Zarodnyuk

Contents

Estimation Problem for Discrete Systems with Information Delays*

Boris Ananyev, Polina Yurovskikh

IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia
abi@imm.uran.ru, polina2104@list.ru

We consider an estimation problem for a linear stationary discrete system under uncertainty with measurement delay. The problem is an approximation of the corresponding problem for a continuous system. Restrictions on disturbances are integral, on the initial state are geometric. The problem consists in constructing information sets based on measurement data containing the true state of the system, and is solved using cone programming methods. Convergence in the Hausdorff metric of the set of the discrete problem to the corresponding set of the continuous system is proved.

Keywords: discrete system, delay, guaranteed estimation, support function, conic optimization

Задача оценивания дискретных систем с запаздыванием в измерении

Б. И. Ананьев, П. А. Юровских

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
abi@imm.uran.ru, polina2104@list.ru

Рассматривается задача оценивания для линейной стационарной дискретной системы в условиях неопределенности с запаздыванием в измерении. Данная задача представляет собой аппроксимацию соответствующей проблемы для непрерывной системы. Ограничения на возмущения – интегральные, на начальное состояние – геометрические. Рассматриваемая задача состоит в построении информационных множеств по данным измерения, содержащих истинное состояние системы, и она решается с помощью методов конического программирования. Доказывается сходимость в метрике Хаусдорфа множеств дискретной задачи к соответствующему множеству непрерывной системы.

Ключевые слова: дискретная система, запаздывание, гарантированное оценивание, опорная функция, коническая оптимизация

* Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения № 075-02-2022-874).

Пусть задана дискретная система с наблюдением

$$\begin{aligned} x_k &= Ax_{k-1} + bv_k, \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad k \in 1:N, \\ y_k &= Gx_{k-1} + cv_k + G_1 x_{k-s}, \quad y_k \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \tag{1}$$

где $s \in \mathbb{N}$ — задержка в получении наблюдений, A, b, G, G_1 — матрицы соответствующих размерностей. Неизвестные возмущения v_k и начальное состояние x_0 подчинены ограничениям

$$\sum_{k=1}^{N} |v_k|^2 \leq 1, \quad x_0 \in X_0, \tag{2}$$

где $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_{(j)} - x^c_{(j)}| \leq \mu_{(j)}\}$ — бокс, $x^c_{(j)} > 0$, $\mu_{(j)} > 0$, $j = \{1, \dots, n\}$.

Определение 1. *Семейство* $\mathcal{X}^N(y) \subset \mathbb{R}^n$ *назовем* информационным множеством (сокращенно ИМ)*, если оно состоит из всех векторов* x_N*, для каждого из которых существует порождающая совместимая пара* $(x_0, v_\bullet)$ *при* $1 : N$*, удовлетворяющая ограничениям* (2)*.*

Из определения 1 вытекает, что $\mathcal{X}^N(y) = \{x_N \in \mathbb{R}^n | \min_v J^N(x_N, v_{1:N}) \leq 1 - \sum_{k=1}^N |y_k|^2_C\}$, где функционал представим в виде $J^N(x_N, v_{1:N}) = \sum_{k=1}^N |v_k|^2_{C_1} - |Gx_{k-1}|^2_C - |G_1 x_{k-s}|^2_C - 2(cv_k)' CGx_{k-1} - 2(cv_k)' CG_1 x_{k-s} - 2(G_1 x_{k-s})' CGx_{k-1} \leq p$. К виду функционала можно прийти, используя ортогональное разложение $v_k = c'Ccv_k + C_1 v_k$ в пространстве $\mathbb{R}^q$, где $C_1 = I_q - c'Cc$ — ортогональная проекция на подпространство $\ker c$.

Поскольку замкнутое выпуклое множество однозначно определяется своей опорной функцией, определим для информационного множества системы (1) с ограничениями (2) величину

$$\rho(l, \mathcal{X}^N(y)) = \max_{x_N} l' x_N, \quad x_N \in \mathcal{X}^N(y), \; l \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

При фиксированном l значение опорной функции можно найти как решение задачи конического программирования

$$||Qr|| \leq p, \quad Mr \leq w, \quad Hr = h, \tag{4}$$

где $r = (x_0, x_1, \dots, x_N, v_1, \dots, v_N)' \in \mathbb{R}^{n+(n+q)N}$. Суммарным ограничениям (2) соответствует первое неравенство из (4), геометрическим ограничениям — второе неравенство, а последнее равенство описывает динамику системы (1).

В докладе приводится связь параметров непрерывной и дискретной задач и рассматриваются примеры. Результаты работы продолжают исследования [1] и используют методы из [2].

Список литературы

[1] Ананьев Б.И., Юровских П.А. О задаче оценивания с раздельными ограничениями на начальные состояния и возмущения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 1. С. 27–39.

[2] Luenberger D.G, Ye Y. Conic Linear Programming. In: Linear and Nonlinear Programming // International Series in Operations Research and Management Science, 2016, vol 228. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18842-3 6

About one Modification of Broyden-family Quasi-Newton Methods

Anton Anikin

ISDCT SB RAS, Irkutsk, Russia
anikin@icc.ru

Keywords: unimodal optimization, BFGS-family methods, inexact line-search

Quasi-Newton-type algorithms are still one of the most popular and effective approaches to solving a wide range of applied finite-dimensional optimization problems. The most famous representative of this family is, perhaps, the BFGS algorithm, named after its creators – Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno, who published their work on this topic in 1970 [1], [2], [3], [4]. The most important stage in the development of Broyden-family methods, in our opinion, was the creation of its memory-limited version – L-BFGS method [5], which made it possible to radically increase the dimensions of the optimization problems being solved.

The paper considers an attempt to modify BFGS-type methods aimed at increasing their practical effectiveness on non-convex optimization problems. The basis of the proposed modifications is the use of "correctly-done" scaling of the descent direction, as well as specialized (extremely economical) variants of line-search algorithms. The main idea of the proposed approach is to simplify the iteration as much as possible in the sense of reducing the number of calls to the function oracle. The ideal situation from this point of view is one where each iteration of the method requires a single oracle call and at the same time relaxation of the minimized functional is provided.

To study the properties of the proposed methods modifications, various variants of the well-known atomic-molecular potentials - Morse, Keating, etc., as well as some variants of convolutional neural networks with different architectures and dimensions were used. The conducted numerical experiments have confirmed not only the operability of the proposed ideas, but also their high computational efficiency in solving some types of non-convex optimization problems. The results obtained inspire cautious optimism and hope for further improvement of the presented approaches, as well as adaptation of the experience of other finite-dimensional optimization specialists engaged in similar areas.

References

[1] Broyden C.G. The convergence of a class of double-rank minimization algorithms. Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications. 1970. Vol. 6. Pp. 76–90.

[2] Fletcher R. A New Approach to Variable Metric Algorithms. Computer Journal. 1970. Vol. 13, no. 3. Pp. 317–322.

[3] Goldfarb D. A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means. Mathematics of Computation. 1970. Vol. 24, no. 109. Pp. 23–26.

[4] Shanno D.F. Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization. Mathematics of Computation. 1970. Vol. 24, no. 111. Pp. 647–656.

[5] Liu D.C., Nocedal J. On the limited-memory BFGS method for large scale optimization. Mathematical Programming B. 1989. Vol. 45. Pp. 503–528.

Block Integral Methods for the Numerical Solution of the Volterra Equation of the First Kind*

E.D. Antipina[1,3], M. V. Bulatov[2], V. V. Biryukov[3]

[1] Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia
kate19961231@gmail.com
[2] Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia
mvbul@icc.ru
[3] Irkutsk State University, Irkutsk, Russia
stukov.biryuckov2017@yandex.ru

The paper considers an approximate solution of the Volterra integral equation of the first kind. This solution is built on the basis of block type methods. These methods were based on interpolation and extrapolation quadrature formulas. An example based on this method is considered.

Keywords: Volterra equation, numerical solution, block type methods

Блочные методы для численного решения интегрального уравнения Вольтерра I рода

Е. Д. Антипина[1,3], М. В. Булатов[2], В. В. Бирюков[3]

[1] ИСЭМ СО РАН, Иркутск, Россия
kate19961231@gmail.com
[2] ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия
mvbul@icc.ru
[3] ИГУ, Иркутск, Россия
stukov.biryuckov2017@yandex.ru

В работе рассмотрено приближенное решение интегрального уравнения Вольтерра I рода. Данные решение строится на основе методов блочного типа. В основу этих методов были заложены интерполяционные и экстраполяционные квадратурные формулы. Рассмотрен пример на основе данного метода.

Ключевые слова: уравнение Вольтерра, численное решение, методы блочного типа

1. Основные результаты

Рассматривается уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = y(t),\ t=[0,T] \tag{1}$$

* Работа выполнена при поддержке РНФ № 22-11-00173.

где $x(t)$ – искомая функция, $K(t,t) \neq 0$, $K(t,s) \in C_{[0,T]}$, $y(t) \in C_{[0,T]}$, $y(0) = 0$. Для решения уравнения (1) были построены численные схемы с применение различных методов. Например, методов правых [1] и средних [2] прямоугольников, а также применялись коллокационно-вариационные подходы [3].

Для построения решения (1) будем применять метод блочного типа по следующей схеме:

1. вводим равномерную сетку $t_i = ih$, где $h = \frac{T}{n}$ – шаг сетки, $i = \overline{1,n}$;
2. полагаем, что подынтегральная функция представима в виде интерполяционного многочлена Лагранжа L_k, где $k \geq 0$ (в зависимости от порядка точности выбираем степень многочлена);
3. интегрируем, полученный многочлен на промежутках от 0 до ih, где $i = \overline{1,n}$ (в случае, когда степень многочлена Лагранжа больше $i+1$, необходимо представить считаемый интеграл в виде суммы интегралов, длина промежутков которых больше $r \cdot k \cdot h$ но меньше $r \cdot i \cdot h$, где $r \in \mathbb{N}$),
4. строим численную схему.

Рассмотрим работу данного метода на примере.

Пусть (1) рассматривается на отрезке $[0, 3h]$, где $h = 1$. Также положим, что $k = 2$. Теперь мы можем найти $L_2(t, x_0, x_1, x_2)$, где $x_i = x(jh)$, $j = \overline{0,2}$. Таким образом

$$L_2(t, x_0, x_1, x_2) = \frac{t^2}{2h^2}(x_0 - 2x_1 + y_2) - \frac{t}{2h}(3x_0 - 4x_1 + x_2) + x_0. \tag{2}$$

Далее, проинтегрировав (2) на промежутках, получаем

$$\int\limits_0^h L_2 dt = \frac{5}{12}x_0 h + \frac{2}{3}x_1 h - \frac{1}{12}x_2 h, \int\limits_0^{2h} L_2 dt = \frac{1}{3}x_0 h + \frac{4}{3}x_1 h + \frac{1}{3}x_2 h, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^{3h} L_2 dt = \frac{3}{4}x_0 h + \frac{9}{4}x_2 h. \tag{4}$$

Теперь, используя, полученные коэффициенты, мы можем построить численную схему, представивв ее в операторном виде

$$h \cdot Ax = y,$$

где x – вектор искомых значений, y – вектор известных значений, A – матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 5/12 & 2/3 & -1/12 \\ 1/3 & 4/3 & 1/3 \\ 4/3 & 0 & 9/4 \end{pmatrix}.$$

Теперь, подставляя y, можно найти x.

Список литературы

[1] Каракеев Т.Т., Мустафаева Н.Т. Численное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2018. № 8. С. 56–62.

[2] Булатов, М. В. Численное решение систем интегральных уравнений первого рода // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6. № 4. С. 3–8.
[3] Булатов М.В.,Маркова Е.В. Коллокационно-вариационные подходы к решению интегральных уравнений Вольтерра I рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. С. 105–112.

Variational Optimality Condition in Control of Hyperbolic Systems with Boundary Delay Parameters

Alexander Arguchintsev, Vasilisa Poplevko

Institute of Mathematics and Information Technologies, Irkutsk State University, Irkutsk, Russia,
arguch@math.isu.ru

This paper deals with an optimal control of a first-order hyperbolic system, in which the boundary condition at one of the ends is determined from a controlled system of ordinary differential equations (ODEs) with a constant state delay. The system of ODEs on the boundary is linear in state, but the matrix of coefficients at phase variables depends on control functions. Therefore, the optimality condition of Pontryagin's maximum principle type in this problem is a necessary but not sufficient optimality condition. The main result of the work is in reduction of the original problem to the problem of optimal control of a system of ODEs. The proposed approach is based on the use of an exact (without remainder terms) increment formula of the objective functional. The corresponding statement is formulated as a variational optimality condition.

Keywords: hyperbolic systems, boundary delay, variational optimality condition, reduction of optimal control problems

1 Problem statement

We consider a system

$$x_t + B(s,t)x_s = F(s,t)x + f(s,t), \tag{1}$$
$$(s,t) \in \Pi, \ \ \Pi = S \times T, \ \ S = [s_0, s_1], \ \ T = [t_0, t_1].$$

Here $x = x(s,t)$ is $n-$ dimensional vector-function, $B = B(s,t)$ is a matrix of order $(n \times n)$, We suppose that system (1) is written in an invariant form, that is B is a diagonal matrix. Diagonal elements $b_i(s,t)$ of B are of constant sign in Π:

$$b_i(s,t) > 0, \ \ i = 1, 2, \dots, m_1;$$

$$b_i(s,t) = 0, \ \ i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2;$$

$$b_i(s,t) < 0, \ \ i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, n.$$

We consider two subvectors $x^+ = (x_1, x_2, \dots, x_{m_1})$, $x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \dots, x_n)$, which correspond to the positive and negative diagonal elements of matrix B.

The initial-boundary conditions for the system (1) are given in the form:

$$\frac{dx^+(s_0,t)}{dt} = A(u(t),t)x^+(s_0, t-\alpha) + d(u(t),t), \quad t \in T, \tag{2}$$

$$x(s,t_0) = x^0(s), \ \ s \in S, \quad x^-(s_1,t) = \nu(t), \ \ t \in T,$$

$$x^+(s_0, t) = q(t), \;\; t \in [-\alpha; t_0]; \;\; \alpha > 0,$$

where α is a constant, which is a state delay. Thus, the boundary conditions at $s = s_0$ are determined from the controlled system of ordinary differential equations with delay.

We consider bounded and measurable r - dimensional control vector functions $u(t)$ on T satisfying almost everywhere the inclusion-type restrictions

$$u(t) \in U \subset E^r, \quad t \in T, \tag{3}$$

U is a compact set.

The objective functional is given in the following form

$$J(u) = \int_s \langle c(s), x(s, t_1)\rangle ds \to \min, \quad u \in U. \tag{4}$$

2 Variational optimality condition

Under two arbitrary different admissible processes $\{u, x\}$ and $\{\tilde{u} = u + \triangle u, \tilde{x} = x + \triangle x\}$ we get exact increment formula (without remainder terms) which allows us to reduce the original problem of optimal control of a hyperbolic system to the optimal control problem for the system of ODEs

$$I(v) = -\int_T \langle p(t, u), A(v(t), t) - A(u((t), t))z(t-\alpha, v) +$$
$$d(v(t), t) - d(u(t), t)\rangle dt \to \min, \tag{5}$$
$$\dot{z} = A(v(t), t), z(t-\alpha) + d(v(t), t), \;\; t \in T; \tag{6}$$
$$z(t) = 0, \; t \in [t_0 - \alpha, t_0]; \;\; v(t) \in U.$$

Here $p(t, u)$ is a solution of the one adjoint problem.

This result enables us to formulate a new variational optimality condition.

Theorem 1. *A control $u^*(t)$ is optimal in the problem (1)–(4) if and only if the function $v^* = u^*(t)$ is optimal in problem (5)–(6) for any fixed admissible $u(t)$.*

The reduced problem can be solved using a wide range of efficient methods used for this class of optimal control problems in systems of ODEs (for example, see reviews [1,2,3]). This approach was proposed in [4] for classic optimal control problems with fixed boundary conditions and without delay. Two symmetric variational conditions were proved. Delay parameters lead to only one variational optimality condition.

Notes and Comments. The reported study was funded by RFBR and the Government of the Irkutsk Region, project number 20-41-385002, and by RFBR, project number 20-07-00407.

References

[1] Golfetto W.A., Silva Fernandes S. A Review of Gradient Algorithms for Numerical Ccomputation of Optimal Trajectories. J. Aerosp. Technol. Manag. 2012. Vol. 4. Pp. 131–143.

[2] Biral F., Bertolazzi E., Bosetti P. Notes on Nnumerical Methods for Solving Optimal Control Pproblems. IEEJ J. of Industry Appl. 2016. Vol. 5, no. 2. Pp. 154–166.

[3] Srochko V.A., Aksenyushkina E.V., Antonik V.G. Resolution of a Llinear-Quadratic Optimal Ccontrol Pproblem Based on Finite-dimensional Models. The Bulletin of Irkutsk State University. Ser. Mathematics. 2021. Vol. 37. Pp. 3–16.

[4] Arguchintsev A., Poplevko V. An Optimal Control Problem by a Hybrid System of Hyperbolic and Ordinary Differential Equations. Games 12, 23, 2021 https://doi.org/10.3390/g12010023

Exact Solutions of a Nonclassical Nonlinear Partial Equation*

Anatoly Aristov

[1] MSU, Moscow, Russia
[2] FRCCSC, Moscow, Russia
ai_aristov@mail.ru

A nonclassical nonlinear partial equation is studied. 15 sets of exact solutions of it are built. Their properties are analysed.

Keywords: nonlinear partial equations, exact solutions

Точные решения неклассического нелинейного уравнения в частных производных

А. И. Аристов

[1] МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
[2] ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
ai_aristov@mail.ru

В работе построено 15 классов точных решений одного нелинейного уравнения в частных производных. Проанализированы их качественные свойства.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, точные решения

Работа посвящена построению точных решений уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + D[u] = 0,$$

где

$$D[u] = \alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

u — действительнозначная функция трех координат и времени. Предполагается, что $\alpha + \beta + \gamma = 0$, причём эти коэффициенты не все равны нулю.

Нелинейные уравнения в частных производных, содержащие смешанные производные высоких порядков по времени и по пространственным переменным, редко встречаются в литературе о точных решениях (например, [1]), тогда как имеются обширные исследования их качественных свойств (например, [2]). Данное уравнение предложено в [1, гл. 3, §7]: оно может описывать спиновые волны в магнетиках при отсутствии внешнего магнитного поля.

Здесь построено 15 классов точных решений данного уравнения. Проанализированы их качественные свойства. При этом применялись методы обобщенного и функционального разделения переменных, поиск решений специального вида.

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00449.

Список литературы

[1] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Метода решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.

[2] Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

Blow up of Solutions and Local Solvability of an Abstract Cauchy Problem for Second-order Differential Equation with a Non-coercive Source

M. V. Artemeva[1], M. O. Korpusov[2]

[1] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
artemeva.mv14@physics.msu.ru
[2] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
korpusov@gmail.com

An abstract Cauchy problem for a second-order differential equation with nonlinear operator coefficients and a non-coercive source is considers. Local solvability is proved and sufficient conditions for the blow up of solutions in finite time are obtained. Estimates from above and below for the blow up time are found and sufficient conditions for global solvability in time are obtained.

Keywords: nonlinear Sobolev type equations, blow-up, local solvability, nonlinear capacity, blow up time estimates

Разрушение решений и локальная разрешимость абстрактной задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка с некоэрцитивным источником

М. В. Артемьева[1], М. О. Корпусов[2],

[1] МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия
artemeva.mv14@physics.msu.ru
[2] МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия
korpusov@gmail.com

В работе рассматривается одна абстрактная задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка с нелинейными операторными коэффициентами и некоэрцитивным источником. Доказана локальная разрешимость и получены достаточные условия разрушения решений за конечное время. Найдены оценки сверху и снизу на время разрушения и получены достаточные условия глобальной во времени разрешимости.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения

Математические модели реальных физических процессов в нелинейных электромагнитных средах сводятся к изучению абстрактных дифференциальных уравнений с нелинейными операторными коэффициентами и некоэрцитивными источниками [1,2]. Такие задачи стали активно исследоваться начиная с 1970-х годов [3,4,5]. При этом существенный интерес представляют вопросы разрушения указанных задач за конечное время. С точки зрения физики эффект разрушения есть процесс электрического пробоя в электромагнитной среде.

Рассмотрим абстрактную задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка следующего вида:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(A_0 u + \sum_{j=1}^{N} A_j(u)\right) + \frac{d}{dt}DP(u) + Lu = \frac{d}{dt}F(u), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \qquad (1)$$

где операторы A_0 и L линейные, а операторы $A_j(u)$, $DP(u)$ и $F(u)$ нелинейные. Нелинейное слагаемое

$$\frac{d}{dt}DP(u),$$

в приложениях имеет следующий, например, вид:

$$\frac{\partial^2 u^2(x,t)}{\partial t \partial x_1}.$$

В этой работе доказывается существование непродолжаемого во времени классического решения задачи Коши (1) при некоторых условиях на операторные коэффициенты. Для доказательства разрушения за конечное время используется модификация энергетического метода H. A. Levine, изложенная в работе [1]. Отметим, что уравнение (1) содержит некоэрцитивный источник

$$\frac{d}{dt}F(u),$$

что сильно усложняет получение достаточных условий разрушения задачи Коши (1) за конечное время.

Оценки снизу и сверху на время разрушения, а также получим достаточные условия существования глобального решения задачи для произвольных начальных данных (не обязательно малых).

Список литературы

[1] Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations. De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl. 2011. Vol. 15. Pp. 648.

[2] Рабинович М.И. Автоколебания распределенных систем // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 4. С. 477–510.

[3] Levine H.A. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$. Trans. Amer. Math. Soc. 1973. vol. 51. pp. 371–386.

[4] Straughan B. Further global nonexistence theorems for abstract nonlinear wave equations. Proc. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 48. Issue 2. Pp. 381–390.

[5] Калантаров В.К., Ладыженская О.А. О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 69. №10. стр. 77–102.

Necessary Optimality Condition for Deterministic Mean Field Type Control Problem[⋆]

Yurii Averboukh, Dmitry Khlopin

IMM UrB RAS, Yekaterinburg, Russia
ayv@imm.uran.ru

We consider the mean field type optimal control problem in the case where the evolution of each agent is driven by an ordinary differential equation. We consider this problem within Lagrangian, Kantarovich and Eulerian approach. The main results are the necessary optimality condition in the form of Pontryagin maximum principle for all aforementioned approaches and the link between the local minima.

Keywords: mean field type control, Pontryagin maximum principle, Lagrangian approach, Kantorovich approach, Eulerian approach

The talk is concerned with the optimal control problem for the system of infinitely many identical agents who are governed by the ordinary differential equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), m(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad x(t) \in \mathbb{R}^d, \quad m(t) \in \mathcal{P}^p(\mathbb{R}^d), \quad u(t) \in U.$$

Here $x(t)$ is the state, $u(t)$ is the control of the agent at time t, while $m(t)$ describes the distribution of all agents at time t. We fix the initial distribution of agents m_0. The purpose of control is to maximize the averaged individual cost. We assume that the individual cost is equal to

$$\sigma(x(T), m(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), m(t), u(t))dt.$$

We start with the Lagrangian approach. It presumes that a standard probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is given. Additionally, elements of Ω now serve as labels of agents. Thus, the control process within the Lagrangian formulation is a pair of processes (X, u_L), while the dynamics obeys the equations

$$\frac{d}{dt}X(t, \omega) = f(t, X(t, \omega), X(t)\sharp\mathbb{P}, u_L(t, \omega)).$$

Here $X(t)\sharp\mathbb{P}$ stands for the push-forward measure, i.e., for any Borel set $E \subset \mathbb{R}^d$, $(X(t)\sharp\mathbb{P})(E) \triangleq \mathbb{P}(\{\omega : X(t, \omega) \in E)\})$. The payoff within the Lagrangian approach is given by

$$J_L(X, u) \triangleq \mathbb{E}\left[\sigma(X(T), X(T)\sharp\mathbb{P}) + \int_0^T f_0(t, X(t), X(t)\sharp\mathbb{P}, u_L(t))dt\right].$$

The second approach is named after Kantorovich one. This formalization deals with the probabilities defined on the set of curves $\Gamma \triangleq C([0, T]; \mathbb{R}^d)$. A Kantorovich control process is

⋆ The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2022-874).

a pair (η, u_K), where η is a probability on Γ, whereas u_K is a function defined on $[0,T]\times\Gamma$ with values in U, such that η is concentrated on the curves satisfying

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = f(t, \gamma(t), e_t\sharp\eta, u_K(t, \gamma(\cdot))).$$

Here, $e_t\sharp\eta$ is a push-forward of the measure η through the evaluation operator e_t, i.e., for any measurable $E\subset\mathbb{R}^d$, $(e_t\sharp\eta)(E) = \eta(\{\gamma(\cdot) : \gamma(t)\in E\})$. The payoff within the Kantorovich approach is computed by

$$J_K(\eta, u_K) \triangleq \int_\Gamma \sigma(\gamma(T), e_T\sharp\eta)\eta(d\gamma) + \int_\Gamma\int_0^T f_0(\gamma(t), e_t\sharp\eta, u_K(t,\gamma))dt\,\eta(d\gamma).$$

Finally, the Eulerian approach implies that the control process is $(m(\cdot), u_E)$, where for each t, $m(t)$ is a probability on $\mathbb{R}^d$, $u(t,x)$ is a measurable feedback strategy, satisfying the continuity equation

$$\frac{\partial}{\partial t}m(t) + \operatorname{div}(v(t,x)m(t)) = 0$$

in the distributional sense for the velocity field $v(t,x)\triangleq f(t,x,m(t),u(t,x))$. The payoff in this case is equal to

$$J_E(\mu, u_E) \triangleq \int_{\mathbb{R}^d}\sigma(x, m(T))m(T,dx) + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} f_0(t,x,m(t),u_E(t,x))m(t,dx)dt.$$

The main results of the talk are the following.

- We show that, for any given local minimizer within the Kantorovich approach, there exists a least one corresponding local minimizer within the Lagrangian approach. Additionally, if f is affine w.r.t. u and f_0 is convex w.r.t. u, one can construct a local Lagrangian minimizer that corresponds to the given Eulerian local minimizer.
- We obtain the Pontryagin maximum principle for the Lagrangian approach. In this case the costate variable depends on ω and t, while the costate equation includes not only derivative w.r.t. x but also the term depending on intrinsic derivative w.r.t. measure (see for details of intrinsic derivatives [1]).
- Using the link between the local minimizers in various approaches we deduce the Pontryagin maximum principle in the Kantorovich and Eulerian processes. In the latter case, the costate equation is replaced by the joint continuity equation of state and costate variables. To illustrate the general theory, we consider the mean field type linear-quadratic regulator and prove that the optimal control in this case is given by a linear feedback. Additionally, we give a precise formula for this strategy via solutions of Riccati differential equations.

References

[1] Cardaliaguet P., Delarue F., Lasry J.-M., Lions P.-L. The Master Equation and the Convergence Problem in Mean Field Games. Princeton University Press, Princeton, 2019.

A Sequential Approach to a Minimum Norm Partial Pole Assignment Problem

Bazaragchaa Barsbold[1], Balkhuu Batbayasgalan[1], Dovdon Batsuuri[2], Dorjkhuu Enkhtaivan[3]

[1] School of Engineering and Applied Sciences
National University of Mongolia
Ulaanbaatar, Mongolia
barsbold@seas.num.edu.mn
[2] Bussiness School
University of the Humanities
batsuuri@humanities.mn
[3] Alfa Agula LLC
enkhtaivan@agula.mn

In this research we propose a numerical procedure for solving the partial eigenvalue assignment problem with minimum norm feedback force. Our approach is based on sequential combination of techniques related to matrix optimization, projection and deflation.

Keywords: pole assignment, matrix optimization, projection, deflation

References

[1] Datta B.N., Numerical Linear Algebra and Applications. Brook/Cole Publishing Co., Pacific Grove, California, 1998.

[2] Datta B.N. Numerical Methods for Linear Control Systems Design and Analysis. Elsevier Academic Press, 2003.

[3] Chu E.K. and Datta B.N. Numerically Robust Pole Assignment for the Second-Order Systems. Int. J. Control 1996. Vol. 4. Pp. 1113—1127.

[4] Keel L.H., Fleming J.A. and Bhattacharyya S.P. Minimum norm pole assignment via Sylvester equation, Contemporary Mathematics 1985. Vol. 47. Pp. 265–272.

Optimal Object Trajectories under Unfriendly Observation*

V.I. Berdyshev, V.B. Kostousov, A.A. Popov

IMM UrB RAS, Ekaterinburg, Russia
bvi@imm.uran.ru, vkost@imm.uran.ru, aap@imm.uran.ru

In applied problems associated with the construction of trajectories of autonomous moving objects, sometimes there are requirements for the maximum distance of the trajectory from undesirable stationary objects-observers. Often observers have a means of observation that allows you to capture moving objects in a certain cone of observation, but outside the cone the observer does not see the object. Similar situations lead to statement of the problems of constructing optimal trajectories in a given corridor $Y \subset X$. The report considers the problem of forming of such trajectory that maximizes the minimum distance from the observers in their field of view. The problem is investigated in the space $X = \mathbb{R}^n, (n = 2, 3)$. For a point object, an optimal corridor $Y^* \subset Y$ is constructed. It is such a connected set that any continuous trajectory that passes in this corridor and connects the given start and end points is optimal. A similar problem is also solved on the plane for the case when the moving object is a solid, namely it is a circle [1]. For practical calculations, the report proposes algorithms for constructing an optimal corridor and the shortest optimal trajectory for a solid object on a plane. For these purposes the initial continuous conditions of the problem, such as the boundaries of the bounding corridor and observation cones, are projected onto a discrete regular grid. After that a discrete implementation of the optimal corridor is constructed, its boundaries is built on the grid, and the shortest optimal trajectory of the solid object is found using the Dijkstra algorithm.

Keywords: route planning in the presence of obstacles, optimal trajectory, observers, shortest path

Оптимальные траектории при недружественных наблюдателях

В. И. Бердышев, В. Б. Костоусов, А. А. Попов

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
bvi@imm.uran.ru, vkost@imm.uran.ru, aap@imm.uran.ru

В прикладных задачах, связанных с построением траекторий автономных движущихся объектов, иногда возникают требования максимальной удаленности траектории от нежелательных неподвижных объектов-наблюдателей.

* Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения № 075-02-2022-874).

Нередко такие объекты имеют средство наблюдения, позволяющее фиксировать движущиеся объекты в некотором конусе наблюдения, а за пределами этого конуса наблюдатель объекта не видит. Подобные ситуации приводят к постановкам задач построения оптимальных траекторий в заданном коридоре $Y \subset X$. В докладе рассматривается задача формирования траектории в пространстве $X = \mathbb{R}^n, (n = 2, 3)$, максимизирующей минимум расстояния от наблюдателей в их поле зрения. Для точечного объекта строится оптимальный коридор $Y^* \subset Y$ — это такое связное множество, что любая непрерывная траектория, проходящая в этом коридоре и соединяющая заданные начальную и конечную точки, является оптимальной. Аналогичная задача решается на плоскости и для случая, когда движущийся объект — телесный, а именно представляет собой круг [1]. В дискретной постановке для практических расчетов в докладе предлагаются алгоритмы построения оптимального коридора и кратчайшей оптимальной траектории для телесного объекта на плоскости. Исходные непрерывные условия задачи, такие как границы ограничивающего коридора и конусов наблюдения, проектируются на дискретную регулярную сетку, и на ней строятся дискретная реализация оптимального коридора, его границ, а также находится с помощью алгоритма Дейкстры кратчайшая оптимальная траектория телесного объекта.

Ключевые слова: планирование маршрута при наличии препятствий, оптимальная траектория, наблюдатели, кратчайший путь

Список литературы

[1] Berdyshev V. I., Kostousov V.B., Popov A.A. Optimal Trajectory in R^2 under Observation. Proc. Steklov Inst. Mathematics. 2019. Vol. 304, Suppl. 1. Pp. S31–S43.

On Solvability of the Cauchy Problem for one Pseudohyperbolic System

Lina Bondar[1], Sanzhar Mingnarov[2]

[1] IM SO RAN, Novosibirsk, Russia
b_lina@ngs.ru
[2] NSU, Novosibirsk, Russia
s.mingnarov@g.nsu.ru

The paper considers a system that occurs when modeling bending-torsional vibrations in a rod. We study the solvability of the Cauchy problem for such a system in the Sobolev space.

Keywords: equations unsolvable for the highest derivative, pseudohyperbolic system, the Cauchy problem, anisotropic Sobolev space

О разрешимости задачи Коши для одной псевдогиперболической системы

Л. Н. Бондарь[1], С. Б. Мингнаров[2],

[1] ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия
b_lina@ngs.ru
[2] НГУ, Новосибирск, Россия
s.mingnarov@g.nsu.ru

В работе рассматривается система, возникающая при моделировании изгибно-крутильных колебаний в стержне. Исследуется разрешимость задачи Коши для такой системы в соболевском пространстве.

Ключевые слова: уравнения, не разрешенные относительно старшей производной по времени, псевдогиперболическая система, задача Коши, анизотропное соболевское пространство

В докладе рассматривается задача Коши для одной системы дифференциальных уравнений, не разрешенной относительно старшей производной по времени:

$$\begin{pmatrix} (I-\alpha D_x^2) & \varepsilon D_x^2 \\ \varepsilon D_x^2 & (I-\beta D_x^2) \end{pmatrix} D_t^2 U + c^2 \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} D_x^4 U - \delta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D_x^2 U = F(t,x) \tag{1}$$

в полуплоскости $R_+^2 = \{t > 0,\, x \in R\}$, где $\alpha,\ \beta > 1,\ c > 0,\ 0 < \varepsilon < 1,\ \delta \in R$. Такие системы возникают при описании волновой динамики в стержне (см., например, [1, 2]).

Рассматриваемая система (1) относится к классу псевдогиперболических уравнений, введенных Г.В. Демиденко в [3].

В вырожденном случае, когда $\varepsilon = 0$, система (1) распадается на два псевдогиперболических уравнения:

$$(I-\alpha D_x^2)D_t^2 u + c^2 D_x^4 u - \delta^2 D_x^2 u = f_1(t,x), \tag{2}$$

$$(I-\beta D_x^2)D_t^2v+c^2D_x^4v=f_2(t,x).$$

Уравнение (2) в литературе называется уравнением Власова (см. [1, 2]), а также — уравнением Рэлея–Бишопа (см. [4, 5]). Теоремы о разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений см., например, [3, 6–8].

В работе доказывается однозначная разрешимость задачи Коши для псевдогиперболической системы (1) в анизотропных соболевских пространствах с весом.

Список литературы

[1] Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. Стройиздат, 1940.

[2] Герасимов С. И., Ерофеев В. И. Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2014.

[3] Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

[4] Bishop R.E.D. *Longitudinal waves in beams.* Aeronautical Quarterly. 1952. Vol. 3, Issue 4. Pp. 280–293.

[5] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration. John Wiley & Sons, 1992.

[6] Demidenko G. V. *On solvability of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations.* Sib. Adv. Math. 2001. Vol .11, No 4. Pp. 25–40.

[7] Fedotov I., Volevich L. R. *The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative.* Russ. J. Math. Phys. 2006. Vol. 13, No 3. Pp. 278–292.

[8] Демиденко Г. В. *Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений.* Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.

Solving a Heat Mass Transfer Problem Using Differential Algebraic Equations

Elena Chistyakova

ISDCT SB RAS, Irkutsk, Russia
elena.chistyakova@icc.ru

Keywords: differential algebraic equation, heat mass transfer, index

In this talk, we consider a mathematical model of boiling of subcooled liquid in an annular channel. The model is presented by a mixed system of ordinary differential equations, algebraic relations and a single partial differential equation, which, written together, can be viewed as an underdetermined differential algebraic equation with a partial differential equation attached. Using the tools of the differential algebraic equation theory, we reveal some important qualitative properties of this system, such as its existence domain, and propose a numerical method for its solution. The numerical experiments demonstrated that within the found existence domain the mathematical model adequately represents real-life boiling processes that occur in the experimental setup.

On the Reduction of a Singular Linear-quadratic Control Problem to the Problem of Calculus of Variations*

V.F. Chistyakov

ISDCT SB RAS, Irkutsk, Russia
chist@icc.ru

Keywords: optimal control, calculus of variations, differential algebraic equations

О сведении вырожденной линейно-квадратичной задачи управления к задачам вариационного исчисления

В. Ф. Чистяков

ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия
chist@icc.ru

В последние два десятилетия появилось большое число публикаций, в которых исследуются свойства так называемых "анормальных" задач оптимального управления (ОУ) и вариационного исчисления (ВИ). Под "анормальными" задачами часто понимаются задачи ОУ или ВИ, у которых система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), вытекающая из принципов максимума Понтрягина или Лагранжа имеет особенности.

Наиболее исследованным классом "анормальных" задач ОУ являются линейно-квадратичные задачи, когда функционал качества

$$\Phi(u) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [\langle A(t)u, u\rangle + 2\,\langle B(t)u, x\rangle + \langle C(t)x, x\rangle]dt, \tag{1}$$

а связи имеют вид линейной системы ОДУ

$$\Lambda_1 x = A_1(t)\dot{x} + A_0(t)x = H(t)u,\ t \in T = [\alpha,\ \beta], \tag{2}$$

$$x(\alpha) = a, \tag{3}$$

где $A(t) - (m \times m)$-матрица, $B(t) - (n \times m)$-матрица, $C(t) - (n \times n)$-матрица, $\langle .\ ,.\rangle$ —скалярное произведение в пространствах $\mathbf{R}^q,\ q = 1, 2,\ \dots\ , A_1(t),\ A_0(t) - (n \times n)$-матрицы, $H(t) - (n \times m)$-матрица, $x \equiv x(t) - n$-мерная вектор-функция состояния системы, гладкая на T, $\dot{x} \equiv dx/dt$, $u \equiv u(t) - m$-мерная вектор-функция управления, a—известный вектор из $\mathbf{R}^n$. Обычно предполагают, что нарушается усиленное условие Лежандра на дискретном множестве отрезка T [1] или множестве $T_1 \subseteq T$ с ненулевой мерой [2], [3].

* Результаты получены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту "Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями", №гос регистрации: 121041300060-4.

В докладе предполагается, что

$$1.\ \det A_1(t) = 0\ \forall t \in T,\ 2.\ \det A(t) = 0\ \forall t \in T, \tag{4}$$

и входные данные в формулах (1), (2) обладают гладкостью, необходимой при дальнейших рассуждениях. Системы ОДУ вида (2), удовлетворяющие условию 1 из формулы (4), называют в настоящее время дифференциально- алгебраическими уравнениями (ДАУ).

При выполнении условий (4) система ОДУ, вытекающая из принципов максимума Понтрягина или Лагранжа является ДАУ. Множество допустимых управлений в докладе имеет вид

$$u \equiv u(t) \in \mathbf{U} = \{u : \mathbf{C}^\infty(T),\ u^{(i)}(\alpha) = u^{(i)}(\beta) = 0,\ i = \overline{0, q}\}, \tag{5}$$

где q—некоторое целое число, $u^{(i)}(t) = (d/dt)^i u(t)$, $u^{(0)}(t) = u(t)$.

В ряде работ (см., например, [3]) предполагается выпуклость подынтегрального выражения в (1), что эквивалентно выполнению соотношения $\begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ B^\top(t) & C(t) \end{pmatrix} \geq 0\ \forall t \in T$. В докладе не предполагается выполнение этого условия и исследуется задача общего вида.

В докладе на основе теории ДАУ излагаются результаты, относительно свойств задачи (1)-(3), удовлетворяющей условиям (4), начатые в статьях [5], [6].

Основными задачами исследования являются:
1) *поиск условий, при выполнении которых* $\Phi(u) \geq 0\ \forall u \in \mathbf{U}$;
2) *поиск условий, при которых из неравенства* $\Phi(u) - \Phi(u^*) \leq \varepsilon$, *вытекают соотношения:*

$$\|u^*(t) - u(t)\|^2_{\mathbf{L}_2(T)} \leq \kappa_0 \varepsilon \ \text{или}\ \|x^*(t) - x(t)\|^2_{\mathbf{L}_2(T)} \leq \kappa_1 \varepsilon ,$$

где $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, ε_0*—некоторое положительное число,* $\kappa_0 = const > 0$, $\kappa_1 = const > 0$.

Иначе говоря ищутся условия, при выполнении которых малым изменениям функционала $\Phi(u)$ соответствуют малые изменения управления или траектории.

Список литературы

[1] Арутюнов А.В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.

[2] Дмитрук А.В., Мануйлович Н.А. *О минимизации вырожденных интегральных квадратичных функционалов.* Оптимальное управление и дифференциальные игры, Сборник статей., Труды МИАН. 2012. №315. С. 108–127.

[3] Kurina G.A., März R. *On linear-quadratic optimal control problems for time varying descriptor systems.* SIAM J. Control Optim. 2006. Vol. 42. No 6. Pp. 2062-2077.

[4] Чистяков В.Ф. *О связи свойств вырожденной задачи вариационного исчисления и уравнения Якоби.* Методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1992. С. 189-197.

[5] Чистяков В.Ф., Пешич М. *К вопросу о свойствах тождественно вырожденной задачи Лагранжа.* Автоматика и телемеханика. 2009. №1. С. 85–103.

[6] Chistyakov V.F., Chistyakova E.V., Fuong T.Z. *On the Relation between the Properties of a Degenerate Linear-Quadratic Control Problem and the Euler–Poisson Equation.* Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020. Vol. 60. No 3. Pp. 390-403.

On Multidimensional Oscillations of a Cold Plasma with Account for Electron-ion Collisions*

M. I. Delova, O. S. Rozanova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
mashadelova@yandex.ru

The influence of the intensity of electron-ion collisions on the centrally symmetric oscillations of a cold plasma in a multidimensional space is investigated. Taking into account electron-ion collisions leads to the appearance of a special term in the system of cold plasma hydrodynamic equations. This term corresponds to the friction force between particles arising from the movement of electrons in a cold plasma. For arbitrarily small constant non-negative value of the electron-ion collision intensity factor, it is proved that there exists a neighborhood of the zero stationary solution in the C^1 norm such that the solution of the Cauchy problem with initial data from this neighborhood remains globally smooth in time. This result contrasts with the situation of zero collision intensity factor, where any small deviation from the zero equilibrium position leads to a loss of smoothness.

Keywords: cold plasma hydrodynamic equations in multidimensional space, cold plasma, plasma oscillations, intensity of electron-ion collisions

О многомерных колебаниях холодной плазмы с учетом электрон-ионных соударений

М. И. Делова, О. С. Розанова

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
mashadelova@yandex.ru

Исследовано влияние интенсивности электрон-ионных соударений на центральносимметричные колебания холодной плазмы в многомерном пространстве. Учет электрон-ионных соударений приводит к появлению в системе уравнений гидродинамики холодной плазмы члена, который соответствует силе трения между частицами, возникающей при движении электронов в холодной плазме. Показано, что для любого сколь угодно малого постоянного неотрицательного значения коэффициента интенсивности электрон-ионных соударений существует такая окрестность нулевого стационарного решения в норме C^1, что решение задачи Коши с начальными данными, принадлежащими этой окрестности, остается глобально по времени гладким. Этот результат контрастирует с ситуацией нулевого коэффициента интенсивности соударений, когда любое малое отклонение от нулевого положения равновесия приводит к потере гладкости.

* Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект 21-8-2-16-1) и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках программы Московского центра Фундаментальной и прикладной математики по договору № 075-15-2019-1621.

Ключевые слова: уравнения гидродинамики холодной плазмы в многомерном пространстве, холодная плазма, плазменные колебания, эффект опрокидывания, интенсивность электрон-ионных соударений

1. Основные результаты

Рассмотрим плазму как холодную, идеальную, электронную жидкость, пренебрегая движением ионов. Тогда система уравнений гидродинамики холодной плазмы имеет вид (см. [1]):

$$\begin{gathered}\frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}\,(n\mathbf{v}) = 0\,, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{p} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right) - \nu_e\mathbf{p}\,, \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2c^2}} \\ \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma}\,, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}en\mathbf{v} + \mathrm{rot}\,\mathbf{B}\,, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\,, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0\,,\end{gathered} \tag{1}$$

где e, m – заряд и масса электрона ($e < 0$), c – скорость света; $n, \mathbf{p}, \mathbf{v}$ – концентрация, импульс и скорость электронов; γ – лоренцевский фактор; $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ – векторы электрического и магнитного полей; ν_e – интенсивность электрон-ионных соударений.

Для центральносимметричных решений исходная система (1) с помощью введения новых переменных может быть приведена к виду

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = -\mathbf{E} - \nu\mathbf{V}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \theta} + \mathbf{V}\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \mathbf{V}, \quad (\mathbf{V},\mathbf{E})|_{\theta=0} = (\mathbf{V}^0, \mathbf{E}^0) \in C^2(\mathbb{R}^d). \tag{2}$$

Функции $\mathbf{V} = F(\theta, r)\mathbf{r}$, $\mathbf{E} = G(\theta, r)\mathbf{r}$ имеют смысл векторов скорости электронов и напряженности электрического поля, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, $r = |\mathbf{r}|$, $\theta \in \mathbb{R}_+$ – время, ν – коэффициент интенсивности электрон-ионных соударений, d – размерность пространства.

В теории холодной плазмы важно найти условия на начальные данные, при которых решение будет являться глобально гладким по времени, так как в противном случае, после потери гладкости решения математическая модель холодной плзамы становится неприменимой. Основной результат работы сформулирован в следующей теореме:

Теорема 1. *Для сколь угодно малых значений $\nu > 0$ существует такое $\varepsilon(\nu) > 0$, что решение задачи Коши (2) с начальными данными такими, что $\|\mathbf{V}^0(r), \mathbf{E}^0(r)\|_{C^1(\Omega)} < \varepsilon$, $r \in \Omega$ – любой отрезок, принадлежащий $\overline{\mathbb{R}}_+$, сохраняет исходную C^1-гладкость при всех $\theta > 0$.*

Здесь в качестве нормы в пространстве $C^1(\Omega)$ рассматривается $\|f\|_{C^1(\Omega)} = \sum\limits_{i=0}^{1} \sup\limits_{r\in\Omega} |f^{(i)}(r)|$.

Полученный результат контрастирует с ситуацией нулевого коэффициента интенсивности электрон-ионных соударений [2], когда при любых нетривиальных малых начальных данных будет наблюдаться эффект опрокидования колебаний. Таким образом, учет в данной модели интенсивности электрон-ионных соударений оказывает влияние на гладкость решений. Помимо этого доказано, что при любом сколь угодно малом коэффициенте интенсивности электрон-ионных соударений всякое гладкое решение стабилизируется к нулевому стационарному состоянию в течение бесконечного времени.

Список литературы

[1] Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.
[2] Rozanova O.S. On the behavior of multidimensional axisymmetric solutions of repulsive Euler-Poisson equations // arXiv:2201.11099.

Existence of Periodic Solutions for One Class of Systems of Differential Equations*

Gennadii Demidenko

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
demidenk@math.nsc.ru

We consider systems of nonlinear ordinary differential equations, the linear part of which has periodic coefficients and is exponentially dichotomous. Estimates of the dichotomy parameters are obtained, an analog of the perturbation theorem for exponential dichotomy is proved, conditions for the existence of periodic solutions to nonlinear systems, as well as their stability, are established.

Keywords: periodic solutions, exponential dichotomy, projectors, Lyapunov differential equation

Существование периодических решений для одного класса систем дифференциальных уравнений

Г. В. Демиденко

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
demidenk@math.nsc.ru

В работе рассматриваются системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, линейная часть которых имеет периодические коэффициенты и экспоненциально дихотомична. Получены оценки параметров дихотомии, доказан аналог теорем о возмущении для экспоненциальной дихотомии, установлены условия существования периодических решений нелинейных систем, а также их устойчивость.

Ключевые слова: периодические решения, экспоненциальная дихотомия, проекторы, дифференциальное уравнение Ляпунова

В работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \quad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

где элементы матриц $A(t)$ размера $n \times n$ являются непрерывными T-периодическими функциями, а непрерывная вектор-функция $f(t,x)$ локально удовлетворяет условию Липшица по x

$$\|f(t,x^1) - f(t,x^2)\| \le L\|x^1 - x^2\|$$

* Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

и следующим условиям:

$$f(t+T,x) \equiv f(t,x), \quad \|f(t,x)\| \le q(1+\|x\|)^{\omega},$$

где $q>0$, $\omega \ge 0$ — константы. Будем предполагать, что однородная линейная система экспоненциально дихотомична (см., например, [1]).

В работе [2] был установлен критерий экспоненциальной дихотомии системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. А именно, если $Q(t) \in C[0,T]$ — эрмитова матрица, удовлетворяющая условию

$$\int_0^T Q(s)ds > 0,$$

и $X(T)$ — матрица монодромии (1), то экспоненциальная дихотомия системы (1) эквивалентна существованию эрмитовой матрицы $H(t)$ и матрицы P, являющихся решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -\left(X^{-1}(t)\right)^* P^*Q(t)PX^{-1}(t) \\ +(X^{-1}(t))^*(I-P)^*Q(t)(I-P)X^{-1}(t), \quad 0<t<T, \\ H(0) = H(T) > 0, \\ H(0) = P^*H(0)P + (I-P)^*H(0)(I-P), \\ P^2 = P, \quad PX(T) = X(T)P. \end{cases}$$

Отметим, что этот критерий является аналогом соответствующих утверждений о задаче дихотомии для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Используя этот критерий экспоненциальной дихотомии, мы получаем оценки параметров дихотомии, доказываем аналог теорем о возмущении [3] для экспоненциальной дихотомии, устанавливаем условия существования периодических решений нелинейных систем (1), а также их устойчивость [4].

Список литературы

[1] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

[2] Demidenko G.V. On conditions for exponential dichotomy of systems of linear differential equations with periodic coefficients. Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. 2016. Vol. 6, No. 1. Pp. 63–74.

[3] Демиденко Г.В. Системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 4. С. 38–46.

[4] Демиденко Г.В. Об одном классе систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 5. С. 995–1012.

Planar Flows with Minimal Ratio of the Extremal Values of the Pressure on the Free Boundary*

Alexandre Demidov

MSU, Moscow, Russia
demidov.alexandre@gmail.com

Necessary conditions are given, as well as sufficient conditions for the existence of a free boundary, under which the minimum ratio of extremal values for the modules of the gradient of a harmonic function of a given class is achieved. Calculation formulas are received.

Keywords: flat currents, minimum ratio, extreme values on free boundary

Плоские течения с минимальным отношением экстремальных значений давления на свободной границе

А. С. Демидов

Мехмат МГУ, Москва, Россия
demidov.alexandre@gmail.com

Даны необходимые, а также достаточные условия существования свободной границы, на которой достигается минимум отношения экстремальных значений модуля градиента гармонической функции заданного класса. Получены расчетные формулы.

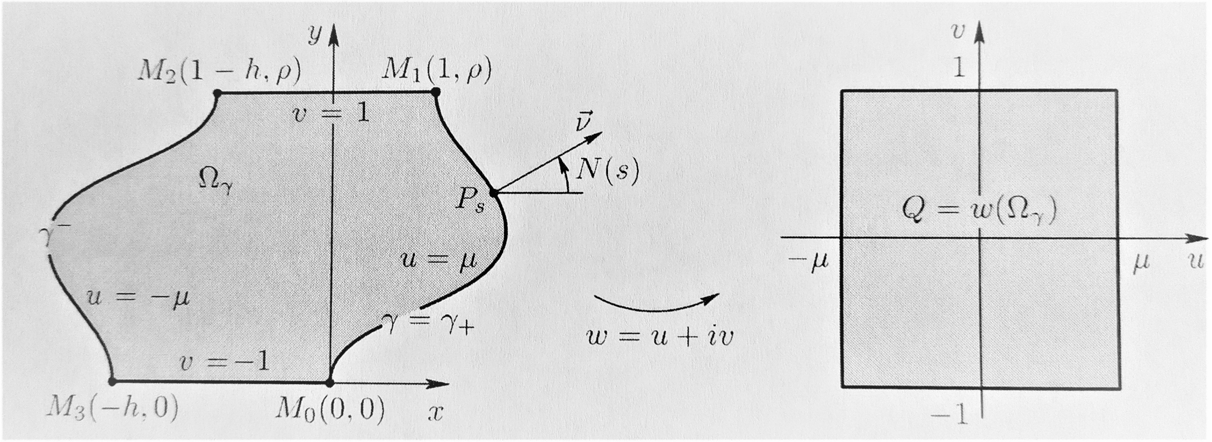
Ключевые слова: плоские течения, минимум отношения экстремальных значений на свободной границе

1. В области $\Omega = \Omega_\gamma \subset \mathbb{R}^2$ с искомой (свободной) границей γ класса $C^{k+1,\lambda}$ (целое $k \geq 0$ и $\lambda \in (0,1)$ фиксированы) рассматривается задача на минимум

$$\Phi(\gamma) = \max_{P\in\gamma} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}(P)\right| \Big/ \min_{P\in\gamma} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}(P)\right| \ \to\ \inf \tag{1}$$

отношения экстремальных значений на γ модуля градиента гармонической функции u.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-01-00469.



Функция $w=u+iv$ однолистно отображает односвязную центрально-симметричную область $\Omega=\Omega_\gamma\subset\mathbb{C}$ на прямоугольник $Q=\{|u|<\mu,\ |v|<1\}$ и при этом

$$u=\pm\mu \quad \text{на}\ \gamma_\pm, \qquad v=-1 \quad \text{на}\ M_3M_0 \quad \text{и} \quad v=1 \quad \text{на}\ M_1M_2\,.$$

Здесь μ — заданное число, область Ω_γ ограничена отрезками M_3M_0 , M_1M_2 и центрально-симметричными кривыми $\gamma=\gamma_+$ и γ_-, а функция $N(s)$ есть угол между осью x и нормалью к кривой γ в точке $P_s\in\gamma$, отстоящей вдоль γ на расстоянии s от точки M_0.

Пусть

$$\beta(v)=N(s(v)),\quad s:[-1,1]\ni v\mapsto s(v)=\int_{-1}^{v}e^{\alpha(\eta)}\,d\eta,\quad \alpha(v)=A(\mu,v),\tag{2}$$

где $A+iB$ аналитическая в Q, а функция B такова, что $\Delta B=0$ в Q, $B(u,\pm1)=0$, $B(\pm\mu,v)=\beta(\pm v)$. Рассмотрим кривую

$$z(\mu,\cdot):\ [-1,1]\ni v\mapsto z(\mu,v)=i\int_{-1}^{v}\exp\left[\alpha(\eta)+i\beta(\eta)\right]\,d\eta\,,\tag{3}$$

где $z:Q\ni w=u+iv\mapsto z(w)=\int_{\mu-i}^{w}\exp\left[A(u,v)+iB(u,v)\right]$.

Лемма 1. *Пусть* $F_1(\alpha,\beta)=\rho-\int\limits_{-1}^{1}e^{\alpha(v)}\cos\beta(v)\,dv$, $F_2(\alpha,\beta)=1+\int\limits_{-1}^{1}e^{\alpha(v)}\sin\beta(v)\,dv$, *а* ρ *есть ордината точки* $M_1(1,\rho)$ *(см. рисунок). Пусть* $z(w)=\int_{\mu-i}^{w}\exp\left[A(u,v)+iB(u,v)\right]$, *где* $w=u+iv\in Q$. *Тогда кривая*

$$z(\mu,\cdot):\ [-1,1]\ni v\mapsto z(\mu,v)=i\int_{-1}^{v}\exp\left[\alpha(\eta)+i\beta(\eta)\right]\,d\eta\,,\tag{4}$$

принадлежит классу допустимых кривых, если и только если $F_1(\alpha,\beta)=0$, $F_2(\alpha,\beta)=0$.

Обозначим через $\hat\alpha$ и $\hat\beta$ те функции α и β, определенные формулами (2), которым соответствуют кривая $\hat\gamma$, на которой достигается минимум функционала (1).

Теорема 1. *Функции* $\hat\alpha$ *и* $\hat\beta$ *дают решение задачи*

$$F_0(\alpha)\to\inf,\qquad F_1(\alpha,\beta)=0,\qquad F_2(\alpha,\beta)=0,\tag{5}$$

где $F_0(\alpha)=\alpha^+-\alpha^-$, $\alpha^+=\max_{|v|\le1}\alpha(v)$, $\alpha^-=\min_{|v|\le1}\alpha(v)$.

Теорема 2. *При любом целом $k \geq 0$ и любых числах $L > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ функционал* (1) *достигает минимум на множестве $\{\gamma \in G^{k,\lambda} \mid [N^{(k)}]_\lambda \leq L\}$, если $\max N - \min N \leq \pi$. Соответствующая кривая $\hat{\gamma}$ определяется формулой* (4) *по решению$(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ задачи* (5).

Некоторые открытые вопросы.

1. Пусть функция N имеет конечное число локальных экстремумов. Достигается ли в этом случае минимум функционала (1) на кривых класса $C^{1,\lambda}$?
2. Пусть кривая $\hat{\gamma}$ доставляет минимум функционалу (1) на кривых класса $C^{1,\lambda}$. При каких условиях на функцию N можно утверждать, что эта кривая принадлежит классу $C^{1,\sigma}$ с $\sigma \in (\lambda, 1)$?

Optimal Control of Manipulator*

Jury Dolgy, Ilya Chupin

Ural Federal university, Ekaterinburg, Russia
jury.dolgy@urfu.ru, mr.tchupin@yandex.ru

The development of effective methods and algorithms for manipulator control is associated with optimizing the execution time of a work operation. In [1], when solving performance problems for various models of manipulators, the Pontryagin maximum principle is used. The problem of finding the switching moments of relay controls for the flat movement of the load in [2] is solved under the condition of slow rotation of the manipulator arm. In this paper, we propose a method for solving the latter problem without additional restrictions.

Keywords: optimal control, Pontryagin maximum principle, manipulator

Оптимальное управление манипулятором

Ю. Ф. Долгий, И. А. Чупин

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
jury.dolgy@urfu.ru, mr.tchupin@yandex.ru

Разработка эффективных способов и алгоритмов управления манипуляторов связана с оптимизацией времени выполнения рабочей операции. В [1] при решении задач быстродействия для различных моделей манипуляторов используется принцип максимума Понтрягина. Задача нахождения моментов переключения релейных управлений для плоского движения груза в [2] решена при условии медленного вращения руки манипулятора. В настоящей работе предлагается метод решения последней задачи без дополнительных ограничений.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, манипулятор

1. Основные результаты

Плоское движение манипулятора описывается уравнениями [1]

$$\begin{gathered}\left(J_1 + J_2 + m_2 x^2\right)\ddot{\varphi} + 2m_2 x\dot{x}\dot{\varphi} = M(t),\\ m_2\left(\ddot{x} - x\dot{\varphi}^2\right) = F(t),\end{gathered} \tag{1}$$

где φ – угол поворота руки, x – координата центра масс руки, m_2 – масса руки, J_1 – суммарный момент вала и направляющей руки, J_2 – момент инерции руки.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, проект № 22-21-00714.

Управление манипулятором осуществляется при помощи момента сил M относительно оси вала и горизонтальной силы F приложенной к руке. Требуется найти программные управления, переводящие систему (1) из заданного начального состояния

$$\varphi(0)=0, \quad \dot\varphi(0)=0, \quad x(0)=x_0>0, \quad \dot x(0)=0$$

в заданное конечное состояние

$$\varphi(T_\varphi)=\varphi_T>0, \quad \dot\varphi(T_\varphi)=0, \quad x(T_x)=x_T>x_0, \quad \dot x(T_x)=0,$$

при условии, что для программных управлений выполняются ограничения

$$|M(t)|\le M_0, \quad t\in(O,T_\varphi], \quad M(t)=0, t>T_\varphi$$
$$|F(t)|\le F_0, \quad t\in(O,T_x], \quad F(t)=0, t>T_x, T_\varphi<T_x.$$

В предлагаемой постановке задачи времена перехода в заданное конечное состояние по координатам φ и x могут быть различными. После прихода в конечное состояние значения координат не меняются.

В [2] рассматривалась ослабленная задача программного управления, в которой в конечном состоянии нет требования нулевых скоростей. Используя условие медленного вращения руки, во втором уравнении системы (1) отбрасывалось нелинейное слагаемое. В результате при нахождении релейных управлений использовались аналитические методы интегрирования дифференциальных уравнений.

В настоящей работе релейные управления определяются формулами

$$M(t)=\begin{cases} M_0, & 0<t\le t_\varphi \\ -M_0, & t_\varphi<t\le T_\varphi \end{cases}, \quad F(t)=\begin{cases} F_0, & 0<t\le t_x \\ -F_0, & t_x<t\le T_x \end{cases}.$$

Решается задача нахождения моментов переключения релейных управлений.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие*

$$x(T_\varphi,T_\varphi)+\frac{m_2\,\dot x^2(T_\varphi,T_\varphi)}{2\,F_0}\le x_T.$$

Тогда моменты переключения релейных управлений определяются системой уравнений

$$\int_0^{T_\varphi}\frac{M_0\,\alpha(s,T_\varphi)\,ds}{J_1+J_2+m_2\,x^2(s,T_\varphi)}=\varphi_T,$$

$$T_x=T_\varphi-\frac{m_2\,\dot x(T_\varphi,T_\varphi)}{F_0}+2\sqrt{\frac{m_2^2\,\dot x^2(T_\varphi,T_\varphi)}{2\,F_0^2}+\frac{m_2}{F_0}\left(x_T-x(T_\varphi,T_\varphi)\right)},$$

$$t_x=T_\varphi-\frac{m_2\,\dot x(T_\varphi,T_\varphi)}{F_0}+\sqrt{\frac{m_2^2\,\dot x^2(T_\varphi,T_\varphi)}{2\,F_0^2}+\frac{m_2}{F_0}\left(x_T-x(T_\varphi,T_\varphi)\right)}.$$

Здесь $x(t,T_\varphi)$, $0\le t\le T_\varphi$ *– решение дифференциального уравнения*

$$\ddot x-\frac{M_0^2\,\alpha^2(t,T_\varphi)\,x}{(J_1+J_2+m_2\,x^2)^2}=\frac{F_0}{m_2},$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0,T_\varphi)=0$, $\dot x(0,T_\varphi)=0$.

2. Заключение

Предложенный метод использовался при построении оптимальных по быстродействию программных управлений. Для нахождения моментов переключения релейных управлений применялись численные методы.

Список литературы

[1] Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989.

[2] Акуленко Д.Д., Болотник Н.Н., Каплунов А.А. Некоторые режимы управления промышленными роботами // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. 1985

On the Right Invertibility of the Differential for the Equality Constraint Operator and the Implicit Function Theorem in a General Optimal Control Problem*

Vladimir A. Dubovitskij

Institute of Problems of Chemical Physics, Chernogolovka, Russia
dubv@icp.ac.ru

The property of the right invertibility of the Frechet differential of the equality-type constraint operator in the general optimal control problem is proved. It follows from this that the linear subspace tangent to the constraint has a topological complement and the implicit function theorem applies to the description of the constraint

Keywords: optimal control problem, equality constraints, Frechet differential, right invertibility, topological direct sum of subspaces, implicit function

О правой обратимости дифференциала для оператора равенственных ограничений и теорема о неявной функции в общей задаче оптимального управления

В. А. Дубовицкий

ФГБУН Институт Проблем Химической Физики РАН, г.Черноголовка, Россия
dubv@icp.ac.ru

Доказано свойство правой обратимости дифференциала Фреше оператора ограничений типа равенства в общей задаче оптимального управления. Из этого следует, что касательное к ограничению линейное подпространство имеет топологическое дополнение и к описанию ограничения применима теорема о неявной функции.

Ключевые слова: задача оптимального управления, ограничения равенства, дифференциал Фреше, правая обратимость, топологическая прямая сумма подпространств, неявная функция

Важным элементом математического аппарата теории оптимального управления (ОУ) является анализ равенственного ограничения, которое для задачи с закреплённым интервалом времени $\Delta = [t_0, t_1]$ можно задать операторным уравнением $P(w) = 0$. Здесь $P(w) = (K(x), \dot{x} - f(x,u,t), g(x,u,t))$ есть составной нелинейный оператор равенственных ограничений, отображающий пространство всех траекторий $w = (x(\cdot), u(\cdot))$

* Работа выполнена по теме Государственного задания, номер гос. регистрации ЦИТИС -АААА-А19-119022690098-3.

$W = A^{d_x}(\Delta) \times L_\infty^{d_u}(\Delta)$ в пространство $Z = \mathbb{R}^{d_K} \times L_1^{d_x}(\Delta)\ times L_\infty^{d_g}(\Delta)$. Здесь символы d_x, d_u, d_g, d_K, обозначают целочисленные положительные размерности соответствующих векторных функций, $A^{d_x}(\Delta)$ — Банахово пространство абсолютно непрерывных фазовых компонент траектории w. Предполагается, что f, g непрерывно дифференцируемые по x, u функции, измеримые по t, оператор $K(x)$, отображающий $C^{d_x}(\Delta)$ в $\mathbb{R}^{d_K}$ непрерывно дифференцируем. Считаем, как обычно, что якобиан $\partial g(x,u,t)/\partial u$ смешанного ограничения $g(x,u,t) = 0$ имеет локально равномерно полный ранг. При сделанных предположениях оператор $P(w)$ непрерывно дифференцируем по Фреше. Краеугольным камнем теории ОУ [1] является то обстоятельство, что образ дифференциала Фреше оператора $P(w)$ замкнут, благодаря чему в соответствующей абстрактной задаче на условный экстремум с ограничением $P(w) = 0$ применима теорема Люстерника [2] и может быть доказано необходимое условие минимума в форме существования нетривиального набора сопряженных множителей Лагранжа. В работе установлено существенно более сильное свойство дифференциала оператора ограничения равенства в общей задаче ОУ.

Теорема 1. *Линейный оператор — дифференциал $P'(w)$ для любой допустимой траектории w имеет замкнутый образ $Im\,P'(w)$ конечной коразмерности, причём $P'(w)$ правообратим на $Im\,P'(w)$. То есть существует непрерывный оператор $B : Z \to W$ такой, что произведение $P'(w)B$ есть проектор пространства Z на подпространство $Im\,P'(w)$.*

Из этой теоремы вытекают важные следствия

Следствие 1. Нулевое подпространство дифференциала $Ker\,P'(w)$, согласно [3](Предложение 13), имеет линейное топологическое дополнение $Im\,B$ в пространстве W, т.е Банахово пространство траекторий разлагается в прямую сумму замкнутых подпространств $W = Ker\,P'(w) \oplus Im\,B$.

Следствие 2. Если для траектории w_0 дифференциал $P'(w_0)$ имеет полный образ, т.е. $Im\,P'(w_0) = Z$, то на основе разложения $W = Ker\,P'(w) \oplus Im\,B$ в окрестности траектории w_0 к уравнению $P(w) = P(w_0)$ применима классическая теорема о неявной функции, и поэтому множество уровня, заданное ограничением типа равенства, является гладким многообразием в W.

Теорема о неявной функции в приведённой форме существенно проясняет локальную геометрию равенственного ограничения в задачах ОУ и полезна для развития теории таких задач, в том числе для теории принципа максимума. Ранее доступная информация об ограничении типа равенства фактически сводилась к описанию касательных вариаций, как подпространства нулей дифференциала $P'(w_0)$.

Список литературы

[1] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 3. С. 395–453.

[2] Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П. Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т.35, 6:216. С 11–46.

[3] Бурбаки Н. Топологические векторные пространствaю Москва: ИЛ, 1959.

Method of Limiting Differential Inclusions for Discontinuous Systems*

Ivan A. Finogenko

Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia,
fin2709@mail.ru

Problems of asymptotic behavior of non-autonomous differential equations with discontinuous right-hand part are considered. Particular attention is paid to the system with a matrix with the matrix at the derivatives and the feedbacks of relay type. The main results are bound up with development of this method for discontinuous systems represented in the form of differential inclusions. In this case, specific methods of multivalued analysis and development of new methods for constructing limiting differential inclusions were required. The structure of the systems under scrutiny makes it possible, in particular, to study mechanical systems controlled by the E.S. Pyatnitsky decomposition principle, and systems with dry friction.

Keywords: limiting differential inclusion, Lyapunov function with semidefinite derivative, controlled mechanical systems, relay control, decomposition principle, dry friction

For the differential equation

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

with a function $f(t, x)$ measurable in the set of variables $(t, x) \in R^{1+n}$ Filippov's general extension of the function f has the form

$$F(t, x) = \cap_{\delta>0} \overline{co}\, f(t, x^{\delta} \backslash N_0(t)).$$

Here $N_0(t)$ is a set of zero measure on which the function $x \to f(t, x)$ is approximatively continuous. The solution of equation (1) as the solution of the differential inclusion

$$\dot{x} \in F(t, x) \tag{2}$$

is understood.

Let us introduce in consideration the following multivalued mapping

$$F^*(x) = \bigcap_{b\geq 0} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{a \geq b} F(t + a, x).$$

Note, the multivalued mapping F^* does not depend on the variable t. The differential inclusion

$$\dot{x} \in F^*(x) \tag{3}$$

is called the limiting for inclusion (2).

* The work was carried out within the framework of the state order of the Ministry of Education and Science of Russian Federation under the project "The theory and methods for studying evolutionary equations and control systems with their applications" (state registration number: 1210401300060-4).

Let us denote by

$$\dot{V}^*(x) = \sup\{\langle \nabla V(x), y\rangle : y \in F^*(x)\}$$

the upper derivative of the continuously differentiable function $V(x)$ due to the limiting inclusion (3).

Set D is called semi-ivariant if for any point $y_0 \in D$ there exists a solution $y(t)$ of inclusion (3) with the initial condition $y(0) = y_0$ such that $y(t) \in D$ for all $t \geq 0$.

Theorem 1. *Let $V(x)$ be a continuously differentiable function and for almost all t and any $x \notin N_0(t)$ the inequality*

$$\dot{V}(t,x) \triangleq \langle \nabla_x V, f(t,x)\rangle \leq 0$$

is satisfied. Then for any bounded solution $x(t)$ of the equation (1) the set of all its ω-limit points belongs to the largest semi-invariant subset of the set $E^* = \{x \in R^n : V^*(x) = 0\}$.

Consider a controlled system with relay-type feedbacks of the form

$$P(x)\dot{x} = R(t,x) + u, \tag{4}$$

where $P(x)$ is a continuous, symmetric, positive definite $n \times n$ matrix, $R(t,x) = (R_1, \dots, R_n)$ — continuous vector function, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $u_i(t,x) = -H_i(t,x)\operatorname{sign}\phi_i(t,x)$ under the condition $\phi_i(t,x) \neq 0$, $H_i(t,x) \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. While using well-known methods of the theory of differential equations with a discontinuous right-hand side, equation (4) may be represented in the form of a differential inclusion

$$P(x)\dot{x} \in R(t,x) + U(t,x), \tag{5}$$

and after the transformation Theorem 1 to the inclusion (5) may be apply.

Lagrange equations for the system under consideration write in the expanded vector form as follows

$$A(q)\ddot{q} = g(t,q,\dot{q}) + Q^A(t,q,\dot{q}) + u, \tag{6}$$

where generalized controls satisfying the following constrants $|u_i| \leq H_i(t,q,\dot{q})$.

The structure of the controls is determined by the problem synthesis of controls for mechanical systems based on the decomposition principle of Pyatnitskii E. S, which would ensure that motions of the system (6) would reach the target set

$$M = \{(t,q,\dot{q}) : \dot{q}_i = f_i(t,q),\ i = 1, \dots, k\}.$$

The controls are defined in the form $u_i = -H_i \operatorname{sign}(\dot{q}_i - f_i(t,q))$.

Theorem 1 can also be applied to systems with Coulomb's sliding friction

$$A(q)\ddot{q} = g(q,\dot{q}) + Q^A(q,\dot{q}) + Q^T(t,q,\dot{q}),$$

where the friction forces have the form $Q_i^T(t,q,\dot{q}) = -f_i(t,q,\dot{q})|N_i(q,\dot{q})|\operatorname{sign}\dot{q}^i$.

References

[1] Finogenko I.A. Limiting Differential Inclusions and the Principle of Invariance of Non-autonomous Systems. Siberian Math. J. 2014. Vol. 55, no 2. 372–386.

[2] Finogenko I.A. The Invariance Principle for Non-autonomous Differential Equations with Discontinuous Right-hand Side. Siberian Math. J. 2016. Vol. 57, no 4. 715–725.

[3] Finogenko I.A. Doklady Mathematics. 2021. Vol. 104, no. 5. 306–310.

Catastrophe Theory and Global Bifurcations of Limit Cycles

Valery Gaiko

United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
valery.gaiko@gmail.com

Applying Catastrophe Theory, we carry out a qualitative analysis of multi-parameter polynomial dynamical systems and study global bifurcations of limit cycles.

Keywords: Catastrophe Theory, Wintner–Perko termination principle, polynomial dynamical system, bifurcation, limit cycle, strange attractor

1 Introduction

Applying Catastrophe Theory, we carry out a global qualitative analysis of multi-parameter polynomial dynamical systems. To control all their limit cycle bifurcations, especially, bifurcations of multiple limit cycles, it is necessary to know the properties and combine the effects of all their rotation parameters. It can be done by means of the development of new bifurcation geometric methods based on Perko's planar termination principle [1]. This principle is a consequence of the principle of natural termination which was applied by A. Wintner for studying one-parameter families of periodic orbits of the restricted three-body problem to show that in the analytic case any one-parameter family of periodic orbits can be uniquely continued through any bifurcation except a period-doubling bifurcation. Such a bifurcation can happen, e. g., in a three-dimensional Lorenz system. But this cannot happen for planar systems. That is why the Wintner–Perko termination principle is applied for studying multiple limit cycle bifurcations of planar polynomial dynamical systems [1]. If we do not know the cyclicity of the termination points, then, applying canonical systems with field rotation parameters, we use geometric properties of the spirals filling the interior and exterior domains of limit cycles.

2 The main results

Using this approach, we have solved, e. g., *Hilbert's Sixteenth Problem* on the maximum number and distribution of limit cycles for the general Liénard polynomial system with an arbitrary number of singular points [2], the Kukles cubic-linear system [3], the Euler–Lagrange–Liénard polynomial mechanical system [4], Leslie–Gower systems which model the population dynamics in real ecological or biomedical systems [5] and a reduced planar quartic Topp system which models the dynamics of diabetes [6]. Finally, applying a similar approach, we have considered various applications of three-dimensional polynomial dynamical systems and, in particular, completed the strange attractor bifurcation scenario in Lorenz type systems globally connecting the homoclinic, period-doubling, Andronov–Shilnikov, and period-halving bifurcations of their limit cycles [7].

References

[1] Gaiko V. A. Global Bifurcation Theory and Hilbert's Sixteenth Problem. Boston, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[2] Gaiko V. A. Maximum number and distribution of limit cycles in the general Liénard polynomial system. Adv. Dyn. Syst. Appl. 2015. Vol. 10, no 2. Pp. 177–188.

[3] Gaiko V. A. Global bifurcation analysis of the Kukles cubic system. Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. 2018. Vol. 8, no 4. Pp. 326–336.

[4] Gaiko V. A. Limit cycles of multi-parameter polynomial dynamical systems. J. Math. Sci. 2022. Vol. 260, no. 5. Pp. 662–677.

[5] Gaiko V. A., Vuik C. Global dynamics in the Leslie–Gower model with the Allee effect. Int. J. Bifurcation Chaos. 2018. Vol. 28. Pp. 1850151.

[6] Gaiko V. A., Broer H. W., Sterk A. E. Global bifurcation analysis of Topp system. Cyber. Phys. 2019. Vol. 8, no. 4. Pp. 244–250.

[7] Gaiko V. A. Global bifurcation analysis of the Lorenz system. J. Nonlinear Sci. Appl. 2014. Vol. 7, no. 6. Pp. 429–434.

Separation of Convex Sets by Halfspaces with Applications to Convex Optimization Problems*

Valentin Gorokhovik

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
gorokh@im.bas-net.by

We introduce the class of step-affine functions defined on a real vector space and establish the duality between step-affine functions and half-spaces, i.e., convex sets whose complements are convex as well. Using this duality, we prove that two convex sets are disjoint if and only if they are separated by some step-affine function. This criterion is actually the analytic version of the Kakutani-Tukey criterion of the separation of disjoint convex sets by halfspaces. As applications of these results, we derive a minimality criterion for solutions of convex vector optimization problems considered in real vector spaces without topology and an optimality criterion for admissible points in classical convex programming problems not satisfying the Slater regularity condition.

Keywords: convex sets, separation, halfspaces, vector optimization, convex programming problem

1 The main results

The main tools that usually are used to derive optimality conditions for admissible solutions of convex optimization problems are the theorems on separation of convex subsets by hyperplanes. In most cases there is a gap between necessary optimality conditions and sufficient ones obtained in such a way. To overcome this gap some regularity conditions (like the Slater regularity condition in the convex programming problem) are additionally assumed. The main purpose of this talk is to present a characterization of optimal solutions of convex optimization problems which holds without any additional assumptions of regularity. To this end we use the theorem on separation of convex sets by halfspaces and its analytical versions.

A subset H of a real vector space X is called a halfspace if both H and its complement X H are convex. In the thirties of the last century S. Kakutani [1] and J.W. Tukey [2] proved independently the following general separation theorem: any two convex subsets of X, say A and B, are disjoint if and only if there exists a halfspace H in X such that $A \subset H$ and $B \subset X$ H. For the case when X is a finite-dimensional vector space J.-E. Martinez-Legaz and I. Singer [3] found an analytical version of this theorem. However their approach can not be extended directly to the infinite-dimensional case. In the talk we present such analytical version of the Kakutani—Tukey theorem that is suitable both for finite-dimensional and infinite-dimensional cases and then we apply it to the study of convex optimization problems. We begin with a study of geometric structure and classification of infinite-dimensional halfspaces. Then we introduce and study a new class of real-valued functions called step-affine and show that functions of this class are dual counterparts of

* The work is supported by the National Program for Scientific Research of the Republic of Belarus for 2021–2025 "Convergence–2025", project No. 1.3.01.

halfspaces. Using this duality we reformulate the Kakutani—Tukey theorem in an analytical form as a theorem on separation of convex sets by step-affine functions. As applications of this theorem we derive an analytical characterization of optimality for a convex vector optimization problem. Besides we prove a criterion of optimality for a convex programming problem which extends the well-known Kuhn–Tucker criterion to the problems not holding the Slater regularity condition.

More detailed presentation of above results can be found in [4,5].

References

[1] Kakutani S. Ein Beweis des Satzen von M. Eidelheit über konvexe Mengen. Proc. Imp. Acad. Tokio. 1938. Vol. 14. Pp. 93–94.

[2] Tukey J.W. Some notes on the separation of convex sets. Portugaliae Math. 1942 Vol. 3. Pp. 95–102.

[3] Martinez-Legaz J.-E., Singer I. The structure of hemispaces in $\mathbb{R}^n$. Linear Algebra Appl. 1988. Vol. 110. Pp. 117–179.

[4] Gorokhovik V.V., Shinkevich E.A. Geometric structure and classification of infinite-dimensional halfspaces. Algebraic Analysis and Related Topics. Banach Center Publications. Vol. 53. Warsaw: Institute of Mathematics PAN, 2000. Pp. 121–138.

[5] Gorokhovik V.V. Step-affine functions, halfspaces, and separation of convex sets with applications to convex optimization problems. Proc. Steklov Inst. Math. 2021. Vol. 313, Suppl. 1. Pp. S83–S99.

On an Analytical Solution of a Nonlinear Partial Differential Equation*

E.Yu. Grazhdantseva[1], S.V. Solodusha[2]

[1] Irkutsk State University, Institute of Mathematics and Information Technologies, Irkutsk, Russia; Melentiev Energy Systems Institute Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia
grelyur@mail.ru
[2] Melentiev Energy Systems Institute Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia
solodusha@isem.irk.ru

The self-similar solution written for a nonlinear differential equation in partial derivatives of the first order.

Keywords: partial derivative, self-similar solution

Об одном аналитическом решении нелинейного дифференциального уравнения в частных производных

Е. Ю. Гражданцева[1], С. В. Солодуша[2]

[1] ИГУ, Институт математики и информационных технологий, Иркутск, Россия;
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия
grelyur@mail.ru
[2] Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева, Иркутск, Россия;
ИГУ, Институт математики и информационных технологий, Иркутск, Россия
solodusha@isem.irk.ru

Для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка выписано автомодельное решение.

Ключевые слова: частная производная, автомодельное решение

1. Основные результаты

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma u^2=0, \tag{1}$$

где $u=u(x,t):D\to R$ - функция независимых переменных (x,t), $D=\{(x,t):x\in R,t\in R,t>0\}$, α,β,γ - действительные числа.

Уравнение (1) имеет автомодельное решение [1] типа $u(x,t)=\dfrac{1}{t}W(y)$, (здесь $y=\dfrac{x}{t}$, $W(y)$ - решение уравнения $(\beta-\alpha y)W'+\gamma W^2-\alpha W=0$,) которое имеет вид

$$u(x,t)=\frac{\alpha}{\gamma t-C(\beta t-\alpha x)}, \tag{2}$$

* Работа выполнена в рамках государственного задания (проект FWEU-2021-0006, тема № АААА-А21-121012090034-3) программы фундаментальных исследований РФ на 2021-2030 гг.

где C - произвольная постоянная.

Однако, при $\gamma = 0$ уравнение (1) представляет собой простейшее дифференциальное уравнение в частных производных, общее решение которого определяется формулой [2]

$$u(x,t) = \varphi(\beta t - \alpha x), \tag{3}$$

где $\varphi(z)$ является произвольной дифференцируемой функцией. А при $\gamma \neq 0$ уравнение (1) классифицируется как квазилинейное уравнение, которому сопоставляется система обыкновенных дифференциальных уравнений (характеристических уравнений)

$$\frac{dt}{\alpha} = \frac{dx}{\beta} = \frac{du}{\gamma u^2}, \tag{4}$$

решением которой являются первые интегралы $\beta t - \alpha x = C_1$ и $\gamma t + \dfrac{\alpha}{u} = C_2$, что позволяет выписать решение уравнения (1) в неявной форме (как общий интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4))

$$\Phi\left(\beta t - \alpha x, \gamma t + \frac{\alpha}{u}\right) = 0, \tag{5}$$

где $\Phi(\xi, \eta)$ - произвольная дифференцируемая функция. Очевидно, что (3) является следствием (5) при $\gamma = 0$.

Таким образом, полученное автомодельное решение (2) описывает подкласс точных решений типа (5) для уравнения (1) .

Список литературы

[1] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[2] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1992.

On Generalized Solutions of the Second Boundary Value Problem for Differential-difference Equations with Variable Coefficients*

Nikita O. Ivanov

RUDN University, Moscow, Russia
noivanov1@gmail.com

The second boundary value problem for a second order differential-difference equation with variable coefficients is considered. The question of the existence of a generalized solution is investigated. The conditions for the right-hand side of the equation that ensure smoothness of generalized solutions on the whole interval $(0, d)$, $d \notin \mathbb{N}$ are obtained.

Keywords: difference-differential equation, second boundary value problem, generalized solutions

1 The main results

We consider the second boundary value problem for the second order differential-difference equation with variable coefficients on the finite interval of non-integer length. We assume that the Hermitian part of the difference operator is a positive definite operator. We have proved that the corresponding differential-difference operator is Fredholm operator. It is shown that the smoothness of generalized solutions holds on subintervals. The specified subintervals obtained by deleting the orbits for the ends of the interval $(0, d)$, $d = N + \theta$, $0 < \theta < 1$, generated by a group of integer shifts. On the other hand, smoothness of generalized solutions of the boundary value problem can be violated at the points of the mentioned orbits. It is proved that the smoothness of generalized solutions on the whole interval $(0, d)$, $d \notin \mathbb{N}$, is preserved if the condition of orthogonality of the right-hand side of the differential-difference equation to a finite number of linearly independent functions is fulfilled.

For the first boundary value problem similar results were obtained in [1].

This is a joint work with Alexander L. Skubachevskii

This work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation: agreement no. 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

References

[1] *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997. 298 p.

* The research is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation: agreement no. 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018)

Grid Algorithm for Computing Reachability Sets with a Modified Reduction Procedure*

Igor' Izmest'ev

[1] N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russia
[2] Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
j748e8@gmail.com

The report considers the problem of constructing reachable sets of nonlinear control systems. To solve this problem, a grid algorithm is proposed in which the procedures for calculating the next reachable set and reduction are combined. The proposed algorithm allows more efficient use of computer resources.

Keywords: control, reachability set, algorithm

Сеточный алгоритм вычисления множеств достижимости с модифицированной процедурой прореживания

И. В. Изместьев

[1] ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
[2] ЧелГУ, Челябинск, Россия
j748e8@gmail.com

В докладе рассматривается задача о построении множеств достижимости нелинейных управляемых систем. Для решения этой задачи предлагается сеточный алгоритм, в котором совмещены процедуры вычисления следующего по времени множества достижимости и прореживания. Предложенный алгоритм позволяет более эффективно использовать ресурсы ЭВМ.

Ключевые слова: управление, множество достижимости, алгоритм

На промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ ($\vartheta < +\infty$) задана нелинейная управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь t — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное состояние, u — вектор управления, удовлетворяющий включению $u \in P$, где P — компакт в $\mathbb{R}^p$.

Предполагаются выполненными следующие условия:

Условие A. Вектор-функция $f(t, x, u)$ ограничена и непрерывна на $[t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times P$, и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ найдётся такая константа $L = L(D) \in (0, \infty)$, что

$$||f(t, x^{(1)}, u) - f(t, x^{(2)}, u)|| \le L||x^{(1)} - x^{(2)}||, \quad (t, x^{(i)}, u) \in D \times P, \quad i = 1, 2.$$

* Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда № 19-11-00105.

Здесь $||f||$ — норма вектора f в $\mathbb{R}^n$.

Условие B. Существует такая константа $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$||f(t, x, u)|| \leq \gamma(1 + ||x||), \quad (t, x, u) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times P.$$

Условие C. Множество $F(t, x) = f(t, x, P) = \{f(t, x, u) : u \in P\} \subset \mathbb{R}^n$ выпукло при любых $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Допустимым управлением является измеримая по Лебегу вектор-функция $u(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, со значениями в P. Обозначим через $X(t^*, t_*, x_*)$ $(t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta)$ множество достижимости системы (1), отвечающее моменту времени t^* и начальному условию $x(t_*) = x_* \in \mathbb{R}^n$. Рассматривается задача о построении множества $X(\vartheta, t_0, x_0)$.

Для решения данной задачи применяется модификация сеточного алгоритма с динамической сеткой [1,2,3]. Исходный алгоритм можно описать следующим образом. Дискретизируем отрезок $[t_0, \vartheta]$, выбрав разбиение $\Gamma : t_0 < t_1 < ... < t_n = \vartheta$ с постоянным шагом $t_{i+1} - t_i = \delta > 0$, $i = \overline{0, n-1}$. Тогда для каждого t_i множество достижимости из точки x_0 может быть найдено по рекуррентной формуле $X(t_i) = X(t_i, t_{i-1}, X(t_{i-1}))$. Поскольку множество $X(t^*, t_*, x_*)$ нельзя вычислить точно, то делаем это приближенно $X^{(\delta)}(t^*, t_*, x_*) = x_* + \delta F^{(\delta)}(t_*, x_*)$. Здесь $F^{(\delta)}(t_*, x_*) = f(t_*, x_*, P^{(\delta)})$, $P^{(\delta)}$ — заданное конечное подмножество P. Если количество точек в множестве $X^{(\delta)}(t_i)$ превысило заданное значение, то проводится процедура прореживания, суть которой состоит в следующем. Около множества $X^{(\delta)}(t_i)$ описывается оценочный n-мерный параллелепипед, внутри которого строится равномерная по каждой координате сетка. В множестве $X^{(\delta)}(t_i)$ остаются те точки, которые являются ближайшими к какому-то узлу сетки. Итак, чтобы проредить множество $X^{(\delta)}(t_i)$, оно должно быть вычислено и хранится в памяти ЭВМ.

В докладе предлагается модифицированная процедура прореживания. В ней строятся оценочные параллелепипеды для множеств $X^{(\delta)}(t_{i-1})$ и $F^{(\delta)}(t_{i-1}, X^{(\delta)}(t_{i-1}))$. Используя их, строятся параллелепипед, содержащий еще не построенное множество $X^{(\delta)}(t_i)$, и соответствующая сетка. Далее, вычисляя по очереди точки множества $X^{(\delta)}(t_i)$, определяем ближайшие к узлам сетки. Таким образом, новый подход позволяет прореживать множество $X^{(\delta)}(t_i)$, не записывая его полностью в память ЭВМ. На языке программирования C++ с использованием технологии параллельных вычислений OpenMP написана программа, реализующая предложенный алгоритм. Проведены модельные расчеты.

Список литературы

[1] Ушаков В.Н., Ухоботов В.И., Ушаков А.В., Паршиков Г.В. К решению задач о сближении управляемых систем // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 291, № 1. С. 276–291.

[2] Изместьев И.В., Анфалов Е.Д., Ушаков А.В. Параллельная реализация одного алгоритма построения множества достижимости нелинейной управляемой системы // Теория управления и математическое моделирование. Матер. Всерос. конф. с междунар. участием, посв. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова. Ижевск, 2020. С. 177–178.

[3] Изместьев И.В., Ушаков В.Н. Параллельная реализация одного алгоритма решения задачи быстродействия для нелинейной управляемой системы // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби. Матер. III Междунар. семинара, посв. 75-летию акад. А.И. Субботина. Екатеринбург, 2020. С. 171–174.

On the Issue of Normality in State-constrained Optimal Control Problems*

Dmitry Karamzin[1], Fernando Lobo Pereira[2]

[1] Federal Research Center Computer Science and Control RAS, Moscow, Russia
d.yu.karamzin@gmail.com
[2] Engineering Faculty of University of Porto, Portugal
flp@fe.up.pt

Normality condition in the maximum principle for state-constrained optimal control problems is investigated. The approach based on the controllability matrix is applied.

Keywords: Maximum principle, normality condition, controllability Gramian

1 The main results

In this presentation, the normality condition in state-constrained optimal control problems is investigated, that is, such a condition which ensures that $\lambda^0 > 0$ in the Pontryagin maximum principle, where λ^0 is the Lagrange multiplier for the minimising functional. For this purpose, a conventional approach is applied which is based on the notion of controllability matrix. The strict positiveness of such a matrix is the key condition for normality of the control process in question.

There exists a vast array of work and literature investigating normality in state-constrained control problems, see, for example, the sources [1,2,3]. In these sources, the issue of normality has been studied based on the Inward/Outward Pointing Conditions (IPC/OPC). The advantage of this approach is the simplicity and verifiability of normality for a given data. At the same time, a restriction on the endpoints is put forward, as one of them is generally supposed to be free. In the current work, we do not impose any a priori restriction on the endpoint constraints, and in particular, the control problem with fixed endpoints can be examined for normality.

Acknowledgements. The authors acknowledge the support of ARISE AL, Ref. LA/P/0112/2020, SYSTEC-Base, Ref. UIDB/00147/2020, and Programmatic, Ref. UIDP/00147/2020, and projects SNAP, Ref. NORTE-01-0145-FEDER-000085, and MAGIC, Ref. PTDC/EEI-AUT/32485/2017, COMPETE2020-POCI and FCT/MCTES (PIDDAC).

References

[1] Rampazzo F., Vinter R.B. A theorem on existence of neighbouring trajectories satisfying a state constraint, with applications to optimal control. IMA Journal of Mathematical Control and Information. 1999. Vol. 16, no. 4, 335–351.

[2] Frankowska H. Normality of the maximum principle for absolutely continuous solutions to Bolza problems under state constraints. Control and Cybernetics. 2009. Vol. 38, no. 4, 1327–1340.

[3] Bettiol P., Khalil N., Vinter R.B. Normality of Generalized Euler-Lagrange Conditions for State Constrained Optimal Control Problems. Journal of Convex Analysis. 2016. Vol. 23. Pp. 291–311.

* The research is supported by FCT, Portugal.

On Analytical Solvability of the Problem with a Given Zero Front for the Nonlinear Parabolic Predator-Prey System*

A. L. Kazakov, P. A. Kuznetsov

ISDCT SB RAS, Irkutsk, Russia
kazakov@icc.ru, kuznetsov@icc.ru

We consider a boundary value problem for a non-linear degenerate parabolic system of predator-prey type. The formulation assumes solutions have a zero front, a curve where unknown functions vanish. The existence and uniqueness theorem for a nontrivial analytical solution is proved. The solution is constructed in the form of Taylor series with recurrent formulas for coefficients. The series convergence is proved by the majorant method using the Cauchy-Kovalevskaya theorem. We give a counterexample that shows the impossibility of specifying the initial conditions for the considered system in the general case. It is an analog of the well-known counterexample to the Cauchy-Kovalevskaya theorem.

Keywords: degenerate parabolic system, predator-prey model, zero front, existence theorem, Taylor series, majorant

Let us consider the problem

$$u_t = \alpha_1 u_x + \beta_1(uv_{xx} + v_x u_x) + f(u, v), \quad v_t = \alpha_2 v_x - \beta_2(vu_{xx} + u_x v_x) + g(v, u), \tag{1}$$

$$u(t, x)|_{x=a(t)} = v(t, x)|_{x=a(t)} = 0. \tag{2}$$

Here u and v are unknown functions, $a(t)$, f, g are specified sufficiently smooth functions, and $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

In mathematical biology, one-dimensional system (1) of two second-order quasilinear parabolic equations describes the population dynamics of two interacting species: predators and prey [1]. This system is a generalization of the well-known Lotka–Volterra model [2], which is a pair of first-order nonlinear ordinary differential equations.

System (1) consists of two one-dimensional second order quasilinear parabolic equations, which are a nonlinear generalization of Fisher's equation (also known as the Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov equation) [3]. The boundary conditions (2) lead to the appearance of a zero front as a curve $x = a(t)$, on which the parabolic type of the system (1) degenerates. Solutions with a zero front, in particular, are one part of the so-called heat or diffusion waves [4]. Such solutions have been considered mainly for single nonlinear heat (filtration, diffusion) equations. Previously, we studied the analytical solvability of the problem with a specified zero front for the reaction-diffusion system [5].

For problem (1), (2), the following theorem holds.

* The reported study was funded by RFBR (project No. 20-07-00407); RFBR and the Government of the Irkutsk Region (project No. 20-41-385002).

Theorem. *Let*

1. $a(t)$ *and* F, G *are analytical functions at points* $t = 0$ *and* $(0, 0)$, *respectively;*
2. $a'(0) + \alpha_i \neq 0$, $\beta_i \neq 0$; $i = 1, 2$; $F(0, 0) = G(0, 0) = 0$.

Then problem (1), (2) *has a unique nontrivial analytical solution in the neighborhood of the curve* $x = a(t)$.

The proof is carried out in two stages. At the first stage, we construct a solution in the form of formal Taylor series by powers of the variable $z = x - a(t)$:

$$u(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \frac{z^n}{n!}, \ u_n(t) = \frac{\partial^n u}{\partial z^n}\Big|_{z=0}; \ \ v(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \frac{z^n}{n!}, \ v_n(t) = \frac{\partial^n v}{\partial z^n}\Big|_{z=0}. \tag{3}$$

Differentiating the system with respect to z and assuming $z = 0$, we obtain recurrent coefficient formulas.

At the second stage, the convergence of the series (3) is proved using the majorant method. The constructed majorant problem is reduced to the Kovalevskaya-type one. Thus, we obtain solutions that can be useful to verify numerical calculations performed, for example, by the collocation method (see [5]).

The following counterexample shows the importance of boundary conditions specifying with respect to x. Consider the problem with initial conditions

$$u(t, x)|_{t=0} = -x^l, \quad v(t, x)|_{t=0} = x^l, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Proposition. *Let in system* (1) $\beta_1 = \beta_2 = \beta \neq 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad f, g \equiv 0$. *Then problem* (1), (4) *can either has a non-trivial analytical solution* (*for* $l = 1, 2$) *or doesn't have it* (*for* $l \geq 3$).

This counterexample demonstrates that the analytical solvability of the initial-boundary problem for system (1) depends on the choice of boundary conditions. Convergence of the series

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \frac{t^n}{n!}, \ u_n(x) = \frac{\partial^n u}{\partial t^n}\Big|_{t=0}; \ \ v(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \frac{t^n}{n!}, \ v_n(x) = \frac{\partial^n v}{\partial t^n}\Big|_{t=0} \tag{5}$$

depends on whether the growth of the coefficients u_n, v_n is higher than the factorial one. In other words, setting the initial conditions for the considered system is, generally speaking, impossible. The proposition is an analogue of the well-known counterexample to the Cauchy-Kovalevskaya theorem.

References

[1] Murray J.D. Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications. Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 18. Springer, New York, 2003.

[2] Arnold V.I. Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 1992.

[3] Kolmogorov A.N., Petrovskii I.G., Piskunov N.S. A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem. Bull. Moscow Univ. Math. Mech. 1937. Vol. 1, no 6. Pp. 1–26.

[4] Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations. Walter de Gruyte, Berlin, 1995.

[5] Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. Construction of solutions to a boundary value problem with a singularity for a nonlinear parabolic system. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2021. Vol. 15, no 4. Pp. 1–13.

On Necessary Conditions if Limits are Minimized

Dmitry Khlopin

IMM UrB RAS, Yekaterinburg, Russia
khlopin@imm.uran.ru

An infinite-horizon optimal control problem with asymptotic terminal constraints at infinity is considered. Under overtaking criteria the necessary boundary condition for co-state arcs at infinity is shown by the stability of normal cones with respect to lower/upper limits.

Keywords: Infinite-horizon control problem, necessary conditions, Pontryagin maximum principle, overtaking optimal control

О необходимых условиях при минимизации пределов

Д. В. Хлопин

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
khlopin@imm.uran.ru

Для задачи оптимального управления на бесконечном промежутке показано необходимое краевое условие на сопряженную переменную, не требующее каких-либо дополнительных предположений. Это условие основано на устойчивости нормальных конусов при переходе к верхнему/нижнему пределу.

Ключевые слова: управление на бесконечном промежутке, необходимые условия, принцип максимума Понтрягина, обгоняющее управление

Рассмотрим задачу управления на бесконечном промежутке:

$$\min \int_0^\infty f_0(\tau, y(\tau), u(\tau))\, d\tau,$$

$$\dot y(t) = f(t, y(t), u(t)), \quad y(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m, \qquad \mathrm{Limsup}_{\theta\uparrow\infty}\{l(y(\theta))\} \subset \mathcal{C}_\infty.$$

Будем полагать, что $\mathcal{C}_\infty$ и U замкнуты в $\mathbb{R}^m$ и некотором конечномерном евклидовом пространстве, функция $l : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ непрерывна, отображения $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times U \to \mathbb{R}^m$ и $f_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times U \to \mathbb{R}$ непрерывны по (x, u) и борелевские по t. Для простоты формулировки пусть также для каждого борелевского управления $u \in B(\mathbb{R}_+; U)$ найдется такая локально суммируемая функция $C_u \in B(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, что для любых $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$

$$\|f(t,x,u(t))\|^2 + |f_0(t,x,u(t))|^2 + \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,u(t))\right\|^2 + \left\|\frac{\partial f_0}{\partial x}(t,x,u(t))\right\|^2 \le C_u(t)(1 + ||x||).$$

Тогда каждое $u \in B(\mathbb{R}_+; U)$ при любом начальном условии $y(0) = \bar x$ задает на $\mathbb{R}_+$ единственное решение $\mathrm{y}(\bar x, u; \cdot)$, а значит и для всех $\theta > 0$ накопленный к моменту θ платеж

$$J(\bar x, u; \theta) = \int_0^\theta f_0(t, \mathrm{y}(\bar x, u; t), u(t))\, dt \qquad \forall \bar x \in \mathbb{R}^m, u \in B(\mathbb{R}_+; U), \theta \in \mathbb{R}_+.$$

Введем также гамильтониан $H(x,\psi,u,\lambda,t)=\psi f(t,x,u)-\lambda f_0(t,x,u)$.

Теорема 1. *Пусть допустимый процесс $(\hat{y},\hat{u})$ слабо обгоняюще оптимален, то есть*

$$\limsup_{\theta\uparrow\infty}\ \big[J(x_0,u;\theta)-J(x_0,\hat{u};\theta)\big]\geq 0 \qquad \forall u\in B(\mathbb{R}_+,U).$$

Тогда найдется ненулевая пара $(\psi,\lambda)\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^{m,*})\times\{0,1\}$, удовлетворяющая

$$\sup_{\upsilon\in U}H(\hat{y}(t),\psi(t),\upsilon,\lambda,t)=H(\hat{y}(t),\psi(t),\hat{u}(t),\lambda,t)\ \text{п.в.},\qquad \textit{(условие максимума)}$$

$$\dot{\psi}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}(\hat{y}(t),\psi(t),\hat{u}(t),\lambda,t)\ \text{п.в.},\qquad \textit{(сопряженная система)}$$

$$-\psi(0)\in\ \mathrm{co}\,N(x;\mathcal{C}_{\mathrm{as}})+\ \mathrm{co}\underset{\substack{x_n\to x_0,\ \lambda_n\downarrow\lambda,\ \theta_n\uparrow\infty\\ J(x_n,\hat{u};\theta_n)-J(x_0,\hat{u};\theta_n)\to 0}}{\mathrm{Limsup}}\Big\{\lambda_n\frac{\partial J}{\partial x}(x_n,\hat{u};\theta_n)\Big\},\qquad \textit{(краевое условие)}$$

где $\mathcal{C}_{\mathrm{as}}=\big\{x\in\mathbb{R}^m\,\big|\ \mathrm{Limsup}_{\theta\to\infty}\{l(\mathrm{y}(x,\hat{u};\theta))\}\subset\mathcal{C}_\infty\big\}$ — множество тех позиций, начинаясь с которых порождаемая $\hat{u}$ траектория, соблюдает терминальное условие.

Более того, если процесс $(\hat{y},\hat{u})$ также обгоняюще оптимален, то есть

$$\liminf_{\theta\uparrow\infty}\ \big[J(x_0,u;\theta)-J(\hat{y}(0),\hat{u};\theta)\big]\geq 0 \qquad \forall u\in B(\mathbb{R}_+,U),$$

то для $(\hat{y},\hat{u})$ можно считать выполненным и более сильное краевое условие

$$-\psi(0)\in N(x_0;\mathcal{C}_{\mathrm{as}})+\bigcap_{\{(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}\,|\,\theta_n\uparrow\infty\}}\ \underset{\substack{x_n\to x_0,\ \lambda_n\downarrow\lambda\\ J(x_n,\hat{u};\theta_n)-J(x_0,\hat{u};\theta_n)\to 0}}{\mathrm{Limsup}}\Big\{\lambda_n\frac{\partial J}{\partial x}(x_n,\hat{u};\theta_n)\Big\}.$$

Без условия трансверсальности необходимость принципа максимума Понтрягина хорошо известна; см. [1]. Основная особенность теоремы выше — краевые условия, необходимость которых не требует каких-либо асимптотических предположений.

Само доказательство теоремы 1 проводится также, как и [2, Theorem 4.1,Theorem 4.6], требуется лишь для оценок сверху предельных нормальных конусов верхних и нижних пределов множеств вместо [2, Lemma 6.1,6.7], [3, Theorem 6.2] применить

Теорема 2. *Пусть даны подмножества $\Omega_\theta\subset\mathbb{R}^m$ $(\theta>0)$ и точка $z\in\mathbb{R}^m$. Тогда,*

$$N\Big(z;\underset{\theta\uparrow\infty}{\mathrm{Liminf}}\,\Omega_\theta\Big)\subset\ \mathrm{co}\underset{z_n\to z,\theta_n\uparrow\infty}{\mathrm{Limsup}}N(z_n;\Omega_{\theta_n}).$$

Более того, если при всех $\theta>0$ точка z принадлежит замыканию Ω_θ, то

$$N\Big(z;\underset{\theta\uparrow\infty}{\mathrm{Limsup}}\,\Omega_\theta\Big)\subset\bigcap_{\{(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}\,|\,\theta_n\uparrow\infty\}}\underset{z_n\to z}{\mathrm{Limsup}}\,N(z_n;\Omega_{\theta_n}).$$

Список литературы

[1] Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons. Econometrica. 1974. Vol. 42. Pp. 267–272.

[2] Khlopin D.V. Necessary conditions in infinite-horizon control problem that need no asymptotic assumptions. arXiv preprint arXiv:1910.12092

[3] Ledyaev Y.S., Treiman J.S. Sub-and supergradients of envelopes, semicontinuous closures, and limits of sequences of functions. Russ. Math. Surv. 2012. Vol. 67. Pp. 345–373.

The First Initial-boundary Value Problem for Oskolkov System of Nonzero Order

A.O. Kondyukov

The Yaroslav-the-Wise Novgorod State University (NovSU), Veliky Novgorod, Russia
s181303@std.novsu.ru

The phase space of the first initial-boundary value problem for a system of partial differential equations modeling the flow of the incompressible viscoelastic Kelvin-Voigt fluid of nonzero order is described. The investigation is based in frames of semi-linear sobolev type equations on the concept of relatively spectral limited operator and quasi-stationary trajectory for the corresponding Oskolkov system modeling the plane–parallel flow of the above fluid.

Keywords: sobolev type equations, phase space, quasi-stationary trajectories, Oskolkov systems, incompressible viscoelastic Kelvin-Voigt fluid

Первая начально-краевая задача для системы Осколкова ненулевого порядка

А. О. Кондюков

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (НовГУ),
Великий Новгород, Российская Федерация
s181303@std.novsu.ru

Описано фазовое пространство первой начально-краевой задачи для системы уравнений в частных производных, моделирующей течение несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка. Исследование проводится в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа на основе понятий относительно спектрально ограниченного оператора и квазистационарной траектории для соответствующей системы Осколкова, моделирующей плоскопараллельное течение вышеуказанной жидкости.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, фазовое пространство, квазистационарные траектории, системы Осколкова, несжимаемая вязкоупругая жидкость Кельвина–Фойгта.

Система уравнений Осколкова

$$\begin{cases} (1-\lambda\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum\limits_{l=1}^{K}\beta_l\nabla^2 w_l - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla\cdot v, \\ \dfrac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l,\ \alpha_l\in\mathbb{R}_-,\ \beta_l\in\mathbb{R}_+,\ l=\overline{1,\ K} \end{cases} \tag{1}$$

моделирует динамику вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка K [1]. Здесь $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $v_k = v_k(x,t)$ — вектор скорости жидкости, $p = p(x,t)$ — функция давления, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_k = f_k(x)$ – вектор внешнего воздействия в точке $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей класса C^∞. Параметры λ, $\nu \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругие и вязкие свойства жидкости соответсвенно.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Коши-Дирихле

$$\begin{aligned} &\psi(x,y,0) = \psi_0(x,y), w_l(x,y,0) = w_{l0}(x,y) \ \forall (x,y) \in \Omega \\ &\psi(x,y,t) = \nabla^2\psi(x,y,t) = 0, w_l(x,y,t) = 0 \ \forall (x,y,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2}$$

для системы уравнений

$$\begin{cases} (1-\lambda\nabla^2)\nabla^2\psi_t = \nu\nabla^4\psi - \dfrac{\partial(\psi,\nabla^2\psi)}{\partial(x,y)} + \sum\limits_{l=1}^{K}\beta_l\nabla^2\left(\dfrac{\partial w_{l1}}{\partial y} - \dfrac{\partial w_{l2}}{\partial x}\right) + g, \\ \dfrac{\partial w_{l1}}{\partial t} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \alpha_l w_{l1}, \\ \dfrac{\partial w_{l2}}{\partial t} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha_l w_{l2}, \ \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \ l = \overline{1,\ K}, \end{cases} \tag{3}$$

которая получится из системы (1) при $n = 3$, если положить $v_3 \equiv 0$ и формулами $v_1 = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $v_2 = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ ввести функцию тока $\psi = \psi(x,y,t)$, определенную с точностью до аддитивной постоянной.Таким образом, система (3) моделирует плоскопараллельное течение вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина — Фойгта K–го порядка. Преимущество задачи (2), (3) по сравнению с задачей Коши-Дирихле для уравнения (1) заключается в том, что фазовое пространство [2] уравнения (3) может быть описано полностью при любых значениях параметра $\lambda \in \mathbb{R}$.

Для системы (3) при $K = 0$ задача Коши-Дирихле рассмотрена в [3]. При $K \neq 0$ существование квазистационарных траекторий в случае $\lambda^{-1} \in \sigma(\nabla^2)$ и описание структуры фазового пространства приводится в [4]. Результаты этого исследовния дополняют результаты [5].

Автор выражает благодарность профессору Т. Г. Сукачевой за внимание и конструктивную критику.

Список литературы

[1] Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и Олдройта// Тр. Мат. института им. В. А. Стеклова. 1988. Т. 179. С. 126-164.

[2] Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г. Задача Коши для одного класса полулиненых уравнений типа Соболева// Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31. № 5. С. 109-119.

[3] Свиридюк Г. А., Якупов М. М. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова// Диференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 11. С. 1538-1543.

[4] A.O. Kondyukov, T.G. Sukacheva, Phase space of the initial-boundary value problem for the Oskolkov system of nonzero order , published in Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki, 2015, Vol. 55, No. 5, pp. 823–829.

[5] Сукачева Т. Г. Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка// Диференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 552-557.

On the Weak Solution of the Electro-Hydrodynamical Boundary Value Problem for the Unit Cell of Cation-exchange Membrane*

Yulia O. Koroleva

Gubkin State University of Oil and Gas,
HSE, Moscow, Russia koroleva.y@gubkin.ru

We study a model problem on the filtration of a conducting fluid through a porous layer. A porous medium is presented as an assemblage of identical spherical cells. Each cell consists of a porous core and liquid shell. The common case of finite Debye radius in comparison to the cell radius is analyzed. We derive apriori estimates for flow characteristics which show the specific behavior of the fluid. The boundedness of velocity field and pressure defined in the weak sense is justified by the derived estimates.

Keywords: fluid flow, porous medium, weak solution, Debye radius

1 The main results

Based on the cell method developed by Happel and thermodynamics of irreversible processes (Onsager's approach), a new method is proposed for calculating the density of solvent – U, solute – J, and electric current – I fluxes through an ion-exchange membrane under the simultaneous action of external pressure gradients p, chemical μ (electrolyte concentration C), and electric potential φ [1]. In [1], the cell model of an ion-exchange membrane consisting of porous charged particles-balls of the same radius is constructed, the problem of finding the kinetic coefficients L_{ij} of the Onsager matrix is posed and solved in general, and an exact algebraic formula for the hydrodynamic permeability L_{11} of the membrane is obtained. In [2], the electroosmotic permeability L_{12} and the specific electrical conductivity L_{22} of the ion exchange membrane were calculated. In [3], new formulas are obtained for the integral diffusion permeability L_{33} and electrodiffusion coefficient L_{23} of a charged membrane in equilibrium with an aqueous solution of a binary electrolyte. The cell model was successfully verified using experimental data on the electrical conductivity and electroosmotic permeability of an aqueous solution of hydrochloric acid through the pristine cation-exchange membrane MF-4SC and that modified by halloysite nanotubes and platinum or iron nanoparticles [4]. It is shown that with an increase in the equilibrium concentration of the electrolyte, the total permeability of the membrane also increases due to both barofiltration and electroosmotic transfer of the solvent. Some related statements of problems were investigated in papers [5]–[6]. The described problem depends on the parameter which is called Debye radius which is the thickness of electric double layer. The results mentioned in [1]– [4] were obtained under the assumption of zero Debye length. In the current research the estimates are derived for the weak solution to the considered boundary-value problem for arbitrarily value of the Debye constant. The boundedness of the velocity filed, pressure and concentrations was established. The asymptotics of the solution depending on the Debye radius was investigated.

* The research is supported by RNF, project No. 20-19-00670.

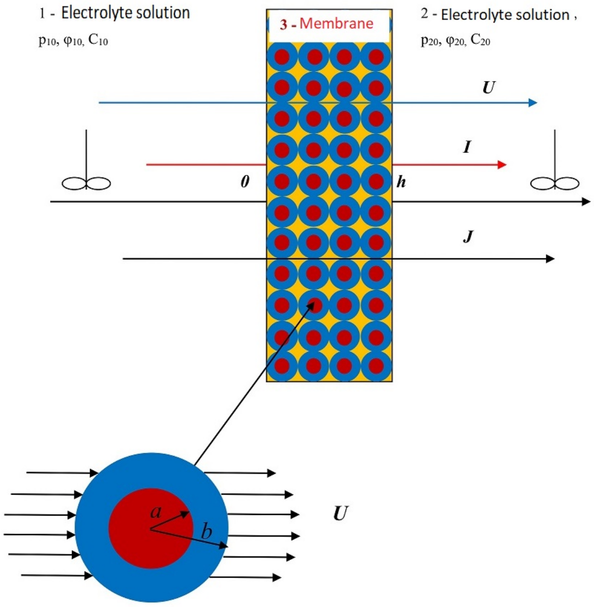


Figure 1. The structure of the membrane

The research is carried on with support of RNF, project No. 20-19-00670.

References

[1] Filippov A.N. A Cell Model of an Ion-Exchange Membrane. Hydrodynamic Permeability. Colloid J. 2018. Vol. 80. Pp. 716–727.

[2] Filippov A.N. A Cell Model of an Ion-Exchange Membrane. Electrical Conductivity and Electroosmotic Permeability. Colloid J. 2018. Vol. 80. Pp. 728–738.

[3] Filippov A.N. Cell Model of an Ion-Exchange Membrane. Electrodiffusion Coefficient and Diffusion Permeability. Colloid J. 2021. Vol. 83. Pp. 387–398.

[4] Filippov A.N., Shkirskaya S.A. Verification of the Cell (Heterogeneous) Model of an Ion-Exchange Membrane and Its Comparison with the Homogeneous Model. Colloid J. 2019. Vol. 81. Pp. 597–606.

[5] Constantin P., Ignatova M., Lee F.-N. Nernst–Planck–Navier–Stokes Systems far from Equilibriu. Arch. Rational Mech. Anal. 2021. Vol. 240. Pp. 1147–1168.

[6] Constantin P., Ignatova M., Lee F.-N. Interior Electroneutrality in Nernst–Planck–Navier–Stokes Systems. Arch. Rational Mech. Anal. 2021. Vol. 42. Pp. 1091–1118.

On Exact Solutions of Equations Used in Modeling the Motion of Distributed Formations*

Alexander Kosov, Edward Semenov

ISDCT SB RAS, Irkutsk, Russia
kosov_idstu@mail.ru, edwseiz@gmail.com

Partial differential equations are considered, which are used in modeling the motion of formations with distributed characteristics. A method of reduction to ordinary differential equations is developed in order to construct exact solutions.

Keywords: equations of parabolic type, exact solutions, formation modeling

О точных решениях уравнений, используемых при моделировании движения распределенных формаций

А. А. Косов, Э. И. Семенов

ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия
kosov_idstu@mail.ru, edwseiz@gmail.com

Рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных, используемые при моделировании движения формаций с распределенными характеристиками. Развивается метод редукции к обыкновенным дифференциальным уравнениям с целью построения точных решений.
Ключевые слова: уравнения параболического типа, точные решения, моделирование формаций

Дифференциальные уравнения в частных производных используются при моделировании движения формаций подвижных объектов с распределенными характеристиками. Так, в [1] для моделирования формации с управлением по принципу отклонения от движения лидера применялось уравнение параболического типа следующего вида

$$u_t = F(u, u_x, u_{xx}), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

В докладе будут представлены результаты по построению новых точных решений уравнения типа (1). Основное внимание уделим случаю, когда

$$F(u, u_x, u_{xx}) = u^\sigma u_{xx} + \sigma u^{\sigma-1} u_x^2,$$

где $u = u(x,t)$, $\sigma \neq 0$ — вещественный параметр нелинейности.

* Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 22-29-00819.

При учете времени на обмен информацией с лидером и формирование сигнала обратной связи возникает необходимость учитывать запаздывание в уравнениях [1], поэтому наряду с уравнением (1) рассматривают также уравнение

$$u_t(t,x) = F(u(t-\tau,x), u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x)), \quad t \geq 0, \quad \tau > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

В докладе будут представлены также результаты по построению точных решений для уравнений типа (2) с запаздыванием, а именно многомерного уравнения следующего вида.

$$u_t = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u) + \alpha \bar{u},$$

где $u = u(\mathbf{x}, t)$, $\bar{u} = u(\mathbf{x}, \bar{t})$, $\bar{t} = t - \tau$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\tau > 0$; ∇ — градиент; $\lambda \neq 0$ — вещественный параметр нелинейности среды; $\alpha \neq 0$ — произвольная постоянная, знак которой характеризует либо источник (процесс выделения тепла), либо сток (процесс поглощения тепла). Отличительной особенностью этого уравнения от классического уравнения нелинейной теплопроводности является зависимость линейного источника (стока) $\bar{u} = u(\mathbf{x}, \bar{t})$ от запаздывающего аргумента $\bar{t} = t - \tau$. При этом процесс тепловыделения или поглощения тепла проходит с некоторым запаздыванием от текущего момента времени t на заданную положительную величину τ. Примером такого процесса является теплообмен в ядерном реакторе [3,4].

Список литературы

[1] Wei J., Fridman E., Johansson K.H. A PDE approach to deployment of mobile agents under leader relative position measurements. Automatica. 2019. Vol. 106. Pp. 47–53.

[2] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с.

[3] Горяченко В. Д. Качественные методы в динамике ядерных реакторов. М.: Энергоатомиздат. 1983.

[4] Кириллов П.Л., Богословская Г.П. Тепломассообмен в ядерных энергетических установках. 2-е изд. М.: ИздАТ. 2008. 256 с.

On Controllability of a Highly Degenerate Four-level Quantum System with a "Chained" Coupling Hamiltonian*

Sergey Kuznetsov, Alexander Pechen

Department of Mathematical Methods for Quantum Technologies,
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
kuznetsov.sa@phystech.edu, apechen@gmail.com

The presented work is devoted to the quantum controllability problem for closed four-level systems with three excited states having the same energy and driven by a electromagnetic control field which allows transitions only between adjacent basis states. These systems are faced in up-to-date analysis of higher order traps in quantum control landscapes and, due to our main result, turn out to be completely controllable without physically relevant restrictions on matrix elements of the corresponding interaction Hamiltonian.

Keywords: quantum control, controllability, four-level quantum systems

1 The considered problem and the main results

Our work [1] investigates controllability [2,3,4] of a specific class of four-level quantum systems defined by the following Hamiltonian

$$H = H_0 + u(t)V \tag{1}$$

with

$$H_0 = \Omega \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & v_{12} & 0 & 0 \\ v_{12}^* & 0 & v_{23} & 0 \\ 0 & v_{23}^* & 0 & v_{34} \\ 0 & 0 & v_{34}^* & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

where H_0, V are time-invariant bare and coupling Hamiltonians respectively, while $u(t) \in L^2([0,T], \mathbb{R})$ is an arbitrary function of time which represents the coherent control. We consider that H describes dynamics of the quantum system under this control in terms of the corresponding unitary evolution operator U_t^u and the Schrödinger equation

$$\frac{d}{dt}U_t^u = -iHU_t^u, \qquad U_{t=0}^u = \mathbb{I}_N \tag{3}$$

The presented system belongs to a family of quantum systems which, inter alia, are faced when exploring the quantum control landscapes problem [5]. For this reason, it is necessary to obtain more information on its controllability.

The considered quantum system has been approached before in [6], but only for real-valued coefficients in V. This talk presents the results of [1], where, as our main contribution, we investigate properties of this system with regards to complete controllability for arbitrary

* This work was supported by the Russian Science Foundation under grant № 22-11-00330, https://rscf.ru/en/project/22-11-00330/

non-zero complex values of the coefficients v_{12}, v_{23}, v_{34}. We use the criteria by Polack, Thomas and Tannor to reveal that the system is irreducible [7], which is a necessary condition for a quantum system to be controllable. We also show that this property holds for the similar systems of higher dimensions. After that, we apply a special recurrent algorithm [8] to generate a basis of the system's dynamical Lie algebra and explore its structure. Defining the following commutators

$$
\begin{aligned}
&C_0^1 = -iH_0 \\
&C_0^2 = -iV \\
&C_1^1 = [C_0^1, C_0^2] \\
&C_k^n = \begin{cases} \left[C_0^1, C_{k-1}^n\right], \; 1 \leqslant n \leqslant 2^{k-2} \\ \left[C_0^2, C_{k-1}^{n-2^{k-2}}\right], \; 2^{k-2}+1 \leqslant n \leqslant 2^{k-1} \end{cases} \quad (k \geqslant 2)
\end{aligned} \tag{4}
$$

we prove that the set

$$
\begin{array}{l}
C_0^1,\ C_1^1,\ C_2^1,\ C_2^2,\ C_3^2 \\
C_3^4,\ C_4^2,\ C_4^4,\ C_4^6,\ C_5^4 \\
C_5^{14}, C_5^{16}, C_6^{20}, C_6^{26}, C_6^{30}
\end{array} \tag{5}
$$

constitutes a basis in the space of 4×4 skew-Hermitian traceless matrices. It allows us to conclude that the considered algebra is isomorphic to the Lie algebra $\mathfrak{su}(4)$ and, via a well-known theorem on complete controllability [2], that the corresponding system is controllable with no additional restrictions on the coefficients in H.

References

[1] Kuznetsov S.A., Pechen A.N., On controllability of a highly degenerate four-level quantum system with a "chained" coupling Hamiltonian. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. (in press).

[2] Albertini F., D'Alessandro D. Notions of controllability for bilinear multilevel quantum systems. IEEE Trans. Automat. Control. 2003. Vol. 48, no. 8. Pp. 1399–1403.

[3] Boscain U., Gauthier J-P., Rossi F., Sigalotti M. Approximate controllability, exact controllability, and conical eigenvalue intersections for quantum mechanical systems. Commun. Mat-h. Phys. 2015. Vol. 333. Pp. 1225–1239.

[4] Turinici G., Rabitz H. Quantum wavefunction controllability. Chem. Phys. 2001. Vol. 267. Pp. 1–9.

[5] Pechen A.N., Tannor D.J. Are there traps in quantum control landscapes?. Phys. Rev. Lett. 2011. Vol 106. P. 120402.

[6] Schirmer S.G., Fu H., Solomon A.I. Complete controllability of quantum systems. Phys. Rev. A. 2001. Vol. 63, no 6. P. 063410.

[7] Polack T., Thomas H., Tannor D.J. Uncontrollable quantum systems: A classification scheme based on Lie subalgebras. Phys. Rev. A. 2009. Vol. 79, no 5. P. 053403.

[8] D'Alessandro D. Introduction to Quantum Control and Dynamics, 2nd Edition. Boca Raton, Chapman and Hall/CRC. 2021.

Time-optimal Problem on a Three-dimensional Heisenberg Group

E. Ladeyshchikov[1], L. Lokutsievskiy[2]

[1] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
evgen310864@gmail.com
[2] Steklov Mathematical Institute RAS, Moscow, Russia
lion.lokut@gmail.com

In the present paper, we obtain explicit formulae for geodesics in a left-invariant Finsler problem on the Heisenberg group. As a unit ball, there will be an arbitrary convex set with 0 in its interior. The main assumption is that it allows parametrization with generalized spherical coordinates based on a convex trigonometry functions. However, the class under study is quite broad that includes, for example, all L_p norms. The paper fully describes all solutions of the Pontryagin's maximum principle, including both the solutions of the vertical subsystem and the projections of the extremals themselves onto the original group.

Keywords: Heisenberg group, Finsler geometry, Pontryagin's maximum principle

Задача быстродействия на трёхмерной группе Гейзенберга с управлением из выпуклого множества

Е. А. Ладейщиков[1], Л. В. Локуциевский[2],

[1] МГУ им. Ломоносова, Москва, Россия
evgen310864@gmail.com
[2] МИАН им.Стеклова, Москва, Россия
lion.lokut@gmail.com

В этой работе исследуется левоинвариантная финслерова задача на группе Гейзенберга. В качестве единичного шара случит произвольное выпуклое компактное трехмерное множество с 0 во внутренности, которое допускает введение обобщенных сферических координат на основе функций выпуклой тригонометрии. Вообще говоря, единичный шар некоторой нормы в трехмерном пространстве может не допускать введения таких координат. Однако, исследуемый класс является достаточно широким и включает в себя, например, все Lp нормы. В работе полностью описаны все решения принципа максимума Понтрягина, включая как решения вертикальной подсистемы, так и проекции самих экстремалей на исходную группу.

Ключевые слова: Группа Гейзенберга, финслерова геометрия, принцип максимума Понтрягина

1. Основные результаты

Пусть $\mathbb{H}_3$ - трёхмерная группа Гейзенберга - множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & q_1 & q_2 \\ 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

со стандартной операцией матричного умножения и e - единичная матрица. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - компактное выпуклое множество, содержащее 0 во внутренности, $m > 0, M > 0$, а $f : [-m, M] \to \mathbb{R}$ такова, что $(-f)$ - непрерывна, выпукла, $f(M) = f(-m) = 0$. Положим

$$U_e \subset T_e M,\ U_e = \{ \begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |(u, v) = f(w) \cdot \omega,\ \omega \in \Omega, w \in [-m, M]\}$$

Тогда получим, что U_e выпукло, компактно (топология наследуется из $\mathbb{R}^3$) и содержит во внутренности 0(например, под определение подходит эллипсоид с центром в нуле, октаэдр, шар нормы L_p), поэтому существует конечная $\mu_{U_e}(x)\ \forall x \in T_e\mathbb{H}_3$, где μ_A - функция Минковского для множества A. С помощью дифференциалов левых сдвигов $L_q(q_0) = q \cdot q_0$ определим: $U_q := dL|_q(U_e)$. Тогда для любого почти всюду дифференцируемого пути, у которого ограничен модуль скорости в евклидовой метрике $q : [0, t] \to M$ получим существование длины $\int_0^t \|\dot{q}\| dt < \infty$, где подразумевается $\|\dot{q}(t)\| = \mu_{U_{q(t)}}(\dot{q}(t))$. Потребуем, чтобы в почти каждый момент времени $\dot{q}(t) \in U_{q(t)}$. В таком случае, кривая $q(t)$ почти всюду удовлетворяет ОДУ:

$$\dot{q} = q \cdot U(t),\ U(t) \in U_e,$$

где $" \cdot "$ - умножение матриц. Ставится задача быстродействия

$$q(0) = e,\ q(t_0) = q_0,\ t_0 \mapsto \min$$

После параметризации $\omega \in \partial\Omega,\ \omega = (\cos_\Omega \theta, \sin_\Omega \theta)$ выпуклыми тригонометрическими функциями, построенными по множеству Ω, удалось записать принцип максимума Понтрягина в более удобной форме. А после замены координат $T^*\mathbb{H}_3 \leftrightarrow T^*_e\mathbb{H}_3 \times \mathbb{H}_3$ - найти явные решения:

$$q_1(t) = c_3(\sin_{\Omega^o} \theta^o(t) - \sin_{\Omega^o} \alpha_0)$$

$$q_2(t) = c_3(-\cos_{\Omega^o} \theta^o(t) + \cos_{\Omega^o} \alpha_0)$$

$$q_3(t) = wt + c_1 \sin_{\Omega^o} \theta^o + \frac{1}{2}\theta^o(t) - \frac{1}{2} \sin_{\Omega^o} \theta^o \cos_{\Omega^o} \theta^o + c_2,$$

где $w, c_1, c_2, _3, \alpha_0 -$ - некоторые константы, зависящие от начальных условий(определённым образом), а $\theta^o(t)$ - аффинная функция от t.

Таким образом, получается, что управление на экстремалях - это движение по поляре к слою множества U_e: $\{(u, v) = f(w_0) \cdot \omega,\ \omega \in \Omega, w_0 \in [-m, M]\}^o$. Проекции этих траекторий на плоскость (q_1, q_2) - растянутая в c_3 раз Ω^o, а координата q_3 - площадь, заметаемая этими проекциями на плоскость и двумя фиксированными лучами, в сумме с аффинным по t слагаемым.

Список литературы

[1] Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[2] Локуциевский Л.В. Выпуклая тригонометрия с приложениями к субфинслеровой геометрии. Матем. сб. 2019. Vol. 210, no. 8. Pp. 120–148.

Optimal Location of Rigid Inclusions in Contact Problems for Inhomogeneous Two-dimensional Bodies*

Nyurgun Lazarev

North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia
nyurgun@ngs.ru

The 2D-model of an elastic body with a finite set of rigid inclusions is considered. We assume that the body can come in frictionless contact on a part of its boundary with a rigid obstacle. On the remaining part of the body's boundary a homogeneous Dirichlet boundary condition is imposed. For a family of corresponding variational problems, we analyze the dependence of their solutions on locations of the rigid inclusions. Continuous dependency of the solutions on location parameters is established. The existence of a solution of the optimal control problem is proven. For this problem, a cost functional is defined by an arbitrary continuous functional on the solution space, while the control is given by location parameters of the rigid inclusions.

Keywords: variational inequality, optimal control problem non-linear boundary conditions, rigid inclusion, location

1 The main results

In the present study, we deal with an optimal problem for a nonlinear mathematical model describing contact of an elastic body with a finite set of volume rigid inclusions. For that problem the cost functional is an arbitrary continuous functional defined on the solution's space, while the location parameters of the rigid inclusions serve as a control. More precisely, we assume that inclusions can change their locations inside the domain of the body so that the distance between the inclusion's boundary and the boundary of the body or another inclusion is greater than or equal to a given value. We prove the continuous dependence of the solutions on the inclusion's location parameter [1]. The existence of the solution of the optimal control problem is proven [1]. The novelty of the obtained results compared to previous investigations related to an optimal location of a rigid inclusion consists in two generalizations. The first generalization consists in an arbitrary finite number of inclusions, since the previous works concern only one inclusion. The second generalization is that the coordinates of inclusions can vary in any strictly inner subdomain of the body's domain, whereas in the previous formulations of corresponding optimal problems the coordinate of an inclusion varied only along a given smooth curve. These mentioned differences lead to a significant generalization of the previous results, since minimizing sequences of coordinates do not have to satisfy the conditions for belonging to one smooth curve.

References

[1] Lazarev N., Rudoy E. Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies. J. Comput. Appl. Math. 2022. Vol. 403, Art no. 113710.

* The research is supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the base part of the state task, project No. FSRG-2020-0006.

On the Theory of Game Problems with Connected Variables

Akmal Mamatov

Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan
email akmm1964@rambler.ru

The paper presents the necessary and sufficient conditions for the nonemptiness of the solution set of a system of linear equations with parameters for any parameter from a given region, which arises in game problems with connected variables.

Keywords: game problem, players, first phase problem

К теории игровых задач со связанными переменными

А. Р. Маматов

СамГУ имени Ш. Рашидова, Самарканд, Узбекистан
akmm1964@rambler.ru

Приведены необходимые и достаточные условия непустоты множества решений системы линейных уравнения с параметрами для любого параметра из заданной области, возникающей в игровых задачах со связанными переменными.

Ключевые слова: Игровая задача, игроки, задача первой фазы

1. Основные результаты

Как известно [1], задачу о непустоте множества планов задачи линейного программирования, можно решить с помощью специальной задачи линейного программирования (задача первой фазы). В данной работе исследуется аналогичная задача, возникающая в игровых задачах со связанными переменными: задача определения непустоты множеств решений систем линейных уравнений с параметрами для любого параметра из заданной области [2,3,4,5].

Пусть имеется два игрока, которые выбирают векторы x и y соответственно из множеств

$$X = \{x \mid f_* \leq x \leq f^*\}, Y(x) = \{y \mid g_* \leq y \leq g^*, \quad Ax + By = b\},$$

поочередно, сначала первый игрок выбирает x, затем, зная x, второй игрок выбирает y. Здесь $x = x(J), \quad f_* = f_*(J), \quad f^* = f^*(J) \in \mathbb{R}^n, y = y(K), g_* = g_*(K), g^* = g^*(K) \in \mathbb{R}^l, b \in \mathbb{R}^m, A = A(I,J) \in \mathbb{R}^{mxn}, B = B(I,K) \in \mathbb{R}^{mxl}, rankB < l, I = \{1,2,...,m\}, J = \{1,2,...,n\}, K = \{1,2,...,l\}$.

Вектор $x \in X$ называется стратегией первого игрока, а вектор $y \in Y(x)$ —x-стратегией второго игрока.

Задача (1): требуется определить, для любой стратегии первого игрока $x \in X$, существует ли соответствующий x-стратегия второго игрока, т.е. $\forall x \in X, Y(x) \neq \emptyset$?

Наряду с задачей (1) рассмотрим максиминную задачу (2):

$$f(x) = \min_{g_* \leq y \leq g^*} \sum_{i \in I} |A(i,J)x(J) + B(i,K)y(K) - b(i)| \to \max_{x \in X}.$$

Теорема 1. *[5]. Оптимальные значения целевых функций задачи (2) и задачи (3):*

$$F(x) = \min_{(y,\xi,\eta) \in H(x)} (e'\xi + e'\eta) \to \max_{x \in X},$$

$H(x) = \{(y,\xi,\eta) \mid Ax + By - \xi + \eta = b, g_* \leq y \leq g^*, \xi \geq 0, \eta \geq 0\}, e' = (1,1,...,1)$, *совпадают.*

Задача (3) является линейной максиминной задачей со связанными переменными, в которой $\forall x \in X, H(x) \neq \emptyset$.

Лемма 1. *Для непустоты множество $Y(x), \forall x \in X$ необходимо и достаточно, чтобы в решении задачи (3) $(x^0, y^0, \xi^0, \eta^0)$ равнялись нулю компоненты ξ^0, η^0.*

Пусть $K_{op} = \{k_1, k_2, ..., k_m\} \subset K$, опора [6] задачи (3), т.е. $detB(I, K_{op}) \neq 0$.

Определим:

$$\gamma_k^* = \max_{f_* \leq x \leq f^*, g_*(K_n) \leq y(K_n) \leq g^*(K_n)} h_k(b(I) - A(I,J)x(J) - B(I,K_n)y(K_n)),$$

$$\gamma_{*k} = \min_{f_* \leq x \leq f^*, g_*(K_n) \leq y(K_n) \leq g^*(K_n)} h'_k(b(I) - A(I,J)x(J) - B(I,K_n)y(K_n)),$$

$k \in K_{op}$.

Здесь h_k, k-ая строка матрицы $[B(I, K_{op})]^{-1}, K_n = K \backslash K_{op}$.

Теорема 2. *Если*

$$g_{*k} \leq \gamma_{*k} \leq \gamma_k^* \leq g_k^*, k \in K_{op},$$

то $Y(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in X$.

Список литературы

[1] Габасов Р. и др. Методы оптимизации. - Мн.: Издательство “Четыре четверти”, 2011.

[2] Иванилов Ю.П. Двойственные полуигры //Известия АН СССР. Серия техническая кибернетика.1972. № 4. С. 3–9.

[3] Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами.–М.:Наука,1976.

[4] Falk J.E. Linear maxmin problem // J. Math. Program. 1973. Vol. 5.№ 2. Pp. 169–188.

[5] Маматов А.Р.Алгоритм решения одной игры двух лиц с передачей информации // ЖВМиМФ, 2006, Т.46, №10, С. 1784-1789.

[6] Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Ч.1. Линейные задачи.-Минск:Университетское.1984.

Algorithm for Solving one Maximin Problem with Connected Variables

Akmal Mamatov[1], Islom Ravshanov[2]

[1] Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan
akmm1964@rambler.ru
[2] Samarkand branch of TUIT, Samarkand, Uzbekistan
islomravshanov048@gmail.com

In the paper presents a simple algorithm for solving one maximin problem with connected variables.

Keywords: players, maximin problem, algorithm

Алгоритм решения одной максиминной задачи со связанными переменными

А. Р. Маматов[1], И. А. Равшанов[2]

[1] СамГУ имени Ш. Рашидова, Самарканд, Узбекистан
akmm1964@rambler.ru
[2] Самаркандский филиал ТУИТ, Самарканд, Узбекистан
islomravshanov048@gmail.com

Приведен простой алгоритм решения одной максиминной задачи со связанными переменными.

Ключевые слова: игроки, максиминная задача, алгоритм

1. Основные результаты

Пусть имеется два игрока, которые выбирают векторы x и y соответственно из множеств

$$X = \{x \mid fn \leq x \leq fv\}, Y(x) = \{y \mid gn \leq y \leq gv, \quad Ax + By = b\},$$

поочередно, сначала первый игрок выбирает x, затем, зная x, второй игрок выбирает y с целями : первого игрока - максимизировать функцию $\varphi(x) = \min_{y \in Y(x)} \Psi(x, y)$, второго игрока - минимизировать $\Psi(x, y) : \Psi(x, y) = c'x + d'y$, если $x \in X, y \in Y(x); \Psi(x, y) = +\infty$ если $x \in X, Y(x) = \emptyset$.

Здесь $c = c(J), x = x(J), \quad fn = fn(J), \quad fv = fv(J) \in \mathbb{R}^n, d = d(K), y = y(K), gn = gn(K), gv = gv(K) \in \mathbb{R}^l, b \in \mathbb{R}^m, A = A(I, J) \in \mathbb{R}^{mxn}, B = B(I, K) \in \mathbb{R}^{mxl}, rankB < l, I = \{1, 2, ..., m\}, J = \{1, 2, ..., n\}, K = \{1, 2, ..., l\}$.

Тогда имеем максиминную задачу со связанными переменными [1,2]:

$$\varphi(x) = \min_{y \in Y(x)} \Psi(x, y) \rightarrow \max_{x \in X} \qquad (1)$$

Вектор $x \in X$ называется стратегией первого игрока, а вектор $y \in Y(x)$ —x-стратегией второго игрока.

Предлагается простой алгоритм решения задачи (1), который могут быть эффективным (удобным) при $C_l^m = [l!]/[m!(l-m)!] \gg 2^n$.

Алгоритм. Пусть x^1 начальная вершина параллелепипеда

$$X = \{x \mid fn \leq x \leq fv\}.$$

Положим $z := 1, f := -\infty$..

Шаг 1. При $x = x^1$ решаем задачу

$$d'y \to \min_{y \in Y(x^1)} \tag{2}$$

двойственным опорным методом [3].

Если $Y(x^1)$ пусто, то положим $x^0 := x^1, f := +\infty$,и переходим к шагу 3. В противном случае, при оптимальном опорном коплане $\{\delta, K_{op}\}$ среди остальных вершин параллелепипеда $X = \{x \mid fn \leq x \leq fv\}$ выбираем те, для которых соответствующие псевдопланы $y(K_{op})$ являются планами (их количество обозначим через z_1 и положим $z := z + z_1$). При этих вершинах вмести с соответствующими планами задачи (2) подсчитываем значение целевой функции задачи (1), тоже самое вычисляем для вершины x^1, а также определяем вершину x^2 среди них (и соответствующей y^2) , при которой $\varphi(x)$, достигает максимального значения. Эти вершины в дальнейшим исключим из рассмотрения. Если $c'x^2 + d'y^2 \leq f$, то переходим к шагу 2. В противном случае положим $x^0 := x^2, y^0 := y^2, f := c'x^0 + d'y^0$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Положим $z := z + 1$.Если $z > 2^n$, то переходим к шагу 3. В противном случае перейдем к следующую вершину параллелепипеда $X = \{x \mid f_* \leq x \leq f^*\}$, обозначим ее x^1 и переходим к шагу 1.

Шаг 3. x^0, f— соответственно оптимальная стратегия первого игрока и значение целевой функции задачи (1) $\varphi(x^0)$.

Эффективность (удобство) алгоритма основан на следующих соображений:

1. В задачах (2) при различных вершинах параллелепипеда $X = \{x \mid fn \leq x \leq fv\}$ матрица основных ограничений постоянный B.

2. С помощью одного оптимального опорного коплана задачи (2) $\{\delta, K_{op}\}$ есть возможность построения оптимальных планов задачи (2) при различных вершинах параллелепипеда $X = \{x \mid fn \leq x \leq fv\}$, в связи с чем могуть уменьшится количеств решаемых задач при вершинах параллелепипеда $X = \{x \mid fn \leq x \leq fv\}$.

Алгоритм иллюстрируется в задаче (1) при следующих значениях параметров:

$c = -1, fn = -10, fv = 3, d' = (-2; 1; 0; 0; 0), gn = (0; 0; 0; 0; 0), gv = (6; 7; 100; 100; 100)$,
$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\,0\,0 \\ 1 & 1 & 0\,1\,0 \\ 1 & -1 & 0\,0\,1 \end{pmatrix}, b' = (4; 10; 5).$

Список литературы

[1] Иванилов Ю.П. Двойственные полуигры // Известия АН СССР. Серия техническая кибернетика.1972. № 4. С. 3–9.

[2] Маматов А.Р.лгоритм решения одной игры двух лиц с передачей информации // ЖВМиМФ, 2006, Т.46, №10, С. 1784-1789.

[3] Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Ч.1. Линейные задачи. Минск:Университетское, 1984.

Estimates for Solutions to Some Classes of Nonautonomous Nonlinear Time-Delay Systems*

Inessa Matveeva

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
matveeva@math.nsc.ru

Some classes of nonautonomous time-delay systems are considered, where a time-varying delay can be unbounded. Using Lyapunov – Krasovskii functionals of a special type, estimates for solutions to these systems are established on the right half-axis. The obtained estimates allow us to conclude whether the solutions are stable. In the case of asymptotic stability, we estimate the attraction domains and the stabilization rate of the solutions at infinity.

Keywords: delay differential equations, estimates for solutions, stability, attraction domains, Lyapunov–Krasovskii functionals

Оценки решений некоторых классов неавтономных нелинейных систем с запаздыванием

И. И. Матвеева

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
matveeva@math.nsc.ru

Рассматриваются некоторые классы систем неавтономных уравнений с запаздыванием, при этом запаздывание может быть неограниченным. Используя функционалы Ляпунова – Красовского специального вида, установлены оценки решений этих систем на правой полуоси. Полученные оценки позволяют сделать вывод об устойчивости решений. В случае асимптотической устойчивости указаны оценки на области притяжения и на скорость стабилизации решений на бесконечности.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, оценки решений, устойчивость, области притяжения, функционалы Ляпунова – Красовского

Рассматриваются некоторые классы систем неавтономных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\dot{y}(t-\tau(t))\\ +F(t, y(t), y(t-\tau(t)), \dot{y}(t-\tau(t))), \qquad t > 0,\end{aligned} \tag{1}$$

* Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$, запаздывание $\tau(t)$ может быть неограниченной функцией, вектор-функция $F(t, u_1, u_2, u_3)$ определяет нелинейные члены. Используя функционалы Ляпунова – Красовского специального вида, установлены оценки решений систем вида (1) на полуоси $\{t > 0\}$. Полученные оценки позволяют сделать вывод об устойчивости решений. В случае асимптотической устойчивости указаны оценки на области притяжения и на скорость стабилизации решений на бесконечности. Работа продолжает наши исследования устойчивости решений неавтономных уравнений с запаздыванием (см., например, [1–9]).

Список литературы

[1] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

[2] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.

[3] Матвеева И.И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.

[4] Матвеева И.И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 730–740.

[5] Демиденко Г.В., Матвеева И.И., Скворцова М.А. Оценки решений дифференциаль ных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079.

[6] Матвеева И.И. Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 96–103.

[7] Matveeva I.I. Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients // Electronic Journal of Differential Equations. 2020. Vol. 2020, No. 20. Pp. 1–12.

[8] Матвеева И.И. Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60, № 4. С. 612–620.

[9] Матвеева И.И. Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62, № 3. С. 583–598.

On Optimizing Coherent and Incoherent Controls in Some Open Quantum Systems*

Oleg V. Morzhin

[1] Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
Department of Mathematical Methods for Quantum Technologies, Moscow, Russia
[2] National University of Science and Technology "MISiS", Moscow, Russia
morzhin.oleg@yandex.ru

The talk is devoted to describing our various results for optimizing coherent and incoherent controls in some open quantum systems. Along the way, various important aspects of such optimization are noted.

Keywords: quantum control, coherent control, incoherent control, optimization, qubit, two-level quantum system

Quantum optimal control is an important interdisciplinary direction [1,2,3,4,5], where quantum-mechanical equations (Schrödinger, von Neumann equations, etc.) are considered with controls, which represent various external actions including laser light, for modelling such changes of a quantum object that some set of objective criteria is satisfied, e.g., time-minimal steering to a given target density matrix, $\rho_0 \to \rho_{\mathrm{target}}$.

A powerful method of *incoherent control* of open quantum systems, possibly with simultaneous coherent control, was proposed and studied for various quantum systems in [6,7]. As the main result, approximate controllability in the set of all density matrices for generic quantum systems was shown [7] as well as the ability to generate all-to-one Kraus maps previously studied for quantum control in [8]. Reachable sets for a qubit driven by coherent and incoherent controls are explicitly described using geometric control theory [9]. This method of incoherent control forms the base of this talk.

For the open-loop control type, this talk describes various results for optimizing coherent and incoherent controls in some open quantum systems. The talk discusses results of the works [10,11,12,13], etc., and describes using, e.g., the Pontryagin maximum principle, Gabasov second order necessary condition for optimality [11], various optimization methods. The following important aspects are noted: (a) importance to take into account the specific of a certain class of quantum optimal control problems for adaption or creation of such methods that allow to approximately solve these problems (e.g., the fundamental result proposed in the article [7] for approximate steering $\rho_0 \to \rho_{\mathrm{target}}$, approximate controllability for N-level open quantum systems driven by coherent and incoherent controls is based on analysis of the matrix specific including eigenvalues of ρ_{target}, while the work [13, Sec. 4] modifies this steering method for $N = 2$ by using a wider class of incoherent controls that complicates the method, but makes it possible to reduce the duration, at that one can choose between the original and modified methods taking into account his requirements); (b) such possible "underwater rocks" for optimization methods that the situation when some control satisfies the stationarity condition / Pontryagin maximum principle, but this control is not globally optimal (e.g., [12, Sec. 7], [13, Sec. 3]), unreachability of ρ_{target} for a given final

* The talk presents the results partially supported by the Russian Science Foundation under grant no. 22-11-00330 (https://rscf.ru/en/project/22-11-00330/), Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 075-15-2020-788).

time; (c) analyzing profiles of control processes numerically obtained that are claim to be approximately global solutions (e.g., see Fig. 4–6 in [10]).

References

[1] Moore K.W., Pechen A., Feng X.-J., Dominy J., Beltrani V.J., Rabitz H. Why is chemical synthesis and property optimization easier than expected? Physical Chemistry Chemical Physics. 2011. Vol. 13, no 21. Pp. 10048–10070.

[2] Koch C.P., Boscain U., Calarco T., Dirr G., Filipp S., Glaser S.J., Kosloff R., Montangero S., Schulte-Herbrüggen T., Sugny D., Wilhelm F.K. Quantum optimal control in quantum technologies. Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe. 2022. https://arxiv.org/abs/2205.12110

[3] D'Alessandro D. Introduction to Quantum Control and Dynamics. 2nd ed. Boca Raton, Chapman and Hall/CRC, 2021.

[4] Morzhin O.V., Pechen A.N. Krotov method for optimal control of closed quantum systems. Russian Math. Surveys. 2019. Vol. 74, no 5. Pp. 851–908.

[5] Pechen A.N., Morzhin O.V. Lecture course "Control of quantum systems", MIPT chair "Methods of Modern Mathematics" based at Steklov Mathematical Institute. http://www.mathnet.ru/conf1849 (2020), http://www.mathnet.ru/conf1989 (2021).

[6] Pechen A., Rabitz H. Teaching the environment to control quantum systems. Phys. Rev. A. 2006. Vol. 73, no 6. Art. no 062102.

[7] Pechen A. Engineering arbitrary pure and mixed quantum states. Phys. Rev. A. 2011. Vol. 84, no. 4. Art. no 042106.

[8] Wu R., Pechen A., Brif C., Rabitz H. Controllability of open quantum systems with Kraus-map dynamics. J. Phys. A: Math. Theor. 2007. Vol. 40, no 21. Pp. 5681–5693.

[9] Lokutsievskiy L., Pechen A. Reachable sets for two-level open quantum systems driven by coherent and incoherent controls. J. Phys. A: Math. Theor. 2021. Vol. 54, no 39. Art. no 395304.

[10] Morzhin O.V., Pechen A.N. Maximization of the overlap between density matrices for a two-level open quantum system driven by coherent and incoherent controls. Lobachevskii J. Math. 2019. Vol. 40, no 10. Pp. 1532–1548.

[11] Morzhin O.V., Pechen A.N. Maximization of the Uhlmann–Jozsa fidelity for an open two-level quantum system with coherent and incoherent controls. Phys. Part. Nucl. 2020. Vol. 51, no 4. Pp. 464–469.

[12] Morzhin O.V., Pechen A.N. On reachable and controllability sets for time-minimal control of an open two-level quantum system. Proc. Steklov Inst. Math. 2021. Vol. 313. Pp. 149–164.

[13] Morzhin O.V., Pechen A.N. On optimization of coherent and incoherent controls for two-level quantum systems. 2022. https://arxiv.org/abs/2205.02521

Spectral Analysis of the Stability of Fluid Flow in an Annular Channel*

A. A. Mukhutdinova[1], A. D. Nizamova[1], V. N. Kireev[2], S. F. Urmancheev[1]

[1] Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Investigation Center, RAS, Russia
adeshka@yandex.ru
[2] Bashkir state university, Ufa, Russia
kireev@anrb.ru

The work is a numerical study of the influence of the parameters of the dependence of viscosity on temperature on the spectral characteristics of the stability of a fluid flow in an annular channel with a non-uniform temperature field.

Keywords: spectrum of eigenvalues, eigenfunctions,flow stability, thermoviscous liquid, annular channel

Спектральный анализ устойчивости течения жидкости в кольцевом канале

А. А. Мухутдинова[1], А. Д. Низамова[1], В. Н. Киреев[2], С. Ф. Урманчеев[1]

[1] ИМех УФИЦ РАН, Уфа, Россия
adeshka@yandex.ru
[2] БашГУ, Уфа, Россия
kireev@anrb.ru

Работа является численным исследованием влияния параметров зависимости вязкости от температуры на спектральные характеристики устойчивости течения жидкости в кольцевом канале с неоднородным температурным полем.

Ключевые слова: спектр собственных значений, собственные функции, устойчивость течения, термовязкая жидкость, кольцевой канал

Экспериментальное, теоретическое и численное исследование задач, связанных с устойчивостью течения жидкости является одной из актуальных задач современной гидродинамики [1-3]. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости под действием постоянного перепада давления в кольцевом канале. Используя стандартное для линейной теории устойчивости представление малых возмущений гидродинамических параметров в виде бегущей волны

$$\nu = \varphi(r) \cdot e^{ik(z-ct)},$$

* Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 22-21-00915.

где $k > 0$ – волновое число, $c = c_r + ic_i$ – комплексная скорость распространения возмущений, подставляя возмущенные величины в уравнения Навье-Стокса и проводя процедуру линеаризации, получается уравнение для осесимметричного течения в кольцевом канале

$$\begin{aligned}
&\varphi^{IV} + \tfrac{2}{r}\varphi''' - \tfrac{3}{r^2}\left(\varphi'' - \tfrac{1}{r}\right) - 2k^2\left(\varphi'' + \tfrac{1}{r}\varphi'\right) - \\
&-ikRe\left(\nu_z^0 - c\right)\left(\varphi'' + \tfrac{1}{r}\varphi' - \left(k^2 + \tfrac{1}{r^2}\right)\varphi\right) + \\
&+\left(k^4 + \tfrac{2k^2}{r^2} - \tfrac{3}{r^4} + ikRe\left(\nu_z^{0\,\prime\prime} - \tfrac{\nu_z^{0\,\prime}}{r}\right)\right)\varphi_1 = 0.
\end{aligned}$$

где Re – число Рейнольдса.

Граничные условия для уравнения имеют вид

$$\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0.$$

Постановка задачи в настоящей работе отличается от классической постановки тем, что температуры внутреннего и внешнего цилиндров кольцевого канала предполагаются различными, что приводит к неоднородному распределению температуры внутри канала. Поскольку вязкость жидкости является тем параметром, который достаточно чувствителен к изменению температуры, то следует ожидать изменение режимов течения и, в частности, характеристик гидродинамической устойчивости.

Для изотермического случая и с учетом температурной зависимости вязкости были получены спектры собственных значений, собственные функции, возмущения скорости течения жидкости для различных значений параметра термовязкости.

В результате исследования показано, что крити-ческое число Рейнольдса уменьшается при увеличении параметра термовязкости.

Список литературы

[1] Hattori H., Wada A., Yamamoto M., Yokoo H., Yasunaga K., Kanda T., Hattori K. Experimental study of laminar-to-turbulent transition in pipe flow. Physics of Fluids. 2022. Vol. 34. 034115.

[2] Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmancheev S.F. Some features of hydrodynamic instability of a plane channel flow of a thermovis-cous fluid. Fluid Dynamics. 2019. Vol. 54, № 7. Pp. 978–982.

[3] Chang T.Y., Chen F., Chang M.H. Stability of plane Poiseuille–Couette flow in a fluid layer overlying a porous layer. Journal of Fluid Mechanics. 2017. Vol. 826. Pp. 376–395.

Qualitative Theory of Equations and Inequalities with KPZ-nonlinearities*

Andrey Muravnik

RUDN University, Moscow, Russia
amuravnik@mail.ru

For quasilinear partial differential equations and inequalities containing nonlinearities of the Kardar-Parisi-Zhang type (i.e., the scalar square of the gradient and its generalizations), a summary of (old and recent) results regarding qualitative properties of solutions is presented. Descriptive examples demonstrating the Bitsadze approach (the technique of monotone maps) applied in this research area are provided.

Keywords: KPZ-nonlinearities, quasilinear partial differential operators, qualitative properties of solutions

1 The main results

- ❑ the stabilization of solutions (for the parabolic and elliptic cases)
- ❑ the blow-up of solutions
- ❑ specific phenomena (such as the extinction of solutions, the compactification and anti-compactification of solutions, etc.)

* The research is supported by the State contract of the Russian Ministry of Education and Science (contract No 175-03-2020-233/3, FSSF-2020-018).

Analysis of the Controllability Criteria for Some Degenerate Four-level Quantum Systems*

Anastasia A. Myachkova, Alexander N. Pechen

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
miachkova.aa@phystech.edu, apechen@gmail.com

In this talk we present our recent results on the analysis of controllability criteria for a class of four-level quantum systems with twice degenerate higher excited energy level and with one forbidden transition. For this purpose, we construct dynamical Lie algebras generated by all commutators of the free Hamiltonians and the interaction Hamiltonians. We show that for two special cases the quantum system is irreducible and controllable, and for the third case the system is reducible and hence uncontrollable. Controllability is proved by constructing a dynamical Lie algebra and showing that it has maximal rank. The reducibility and uncontrollability are proved by constructing a conservative operator.

Keywords: quantum optimal control theory, controllability of quantum systems, dynamical Lie algebra, reducibility

1 The problem and the result

Quantum control attracts high attention due to existing and prospective applications in quantum technologies [3,2]. An important problem in quantum control is to establish, for a given quantum control system, whether the system is controllable or not [3,4,5,6]. Of special interest is controllability of systems that arise in the analysis of higher-order traps in quantum control landscapes [7]. In this talk we discuss the results of the work [8], which is devoted to study of controllability of special four-level degenerate quantum systems with twice degenerate one of the energy levels and with one forbidden transition. The free and interaction Hamiltonians are

$$H_0 = \mathrm{diag}(a,b,c,c), \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_{13} & v_{14} \\ 0 & 0 & v_{23} & v_{24} \\ v_{13}^* & v_{23}^* & 0 & v_{34} \\ v_{14}^* & v_{24}^* & v_{34}^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

where real numbers a, b and c are not equal one to another, and matrix elements satisfy the additional constraint (star denotes complex conjugate)

$$v_{13}v_{23}^* + v_{14}v_{24}^* = 0. \tag{2}$$

Here a, b, c are the energies of the levels, and v_{ij} is the coupling strength between the $|i\rangle$ and $|j\rangle$ levels.

The main characteristics considered when studying controllability of this quantum system are its connectivity and irreducibility. For degenerate quantum systems irreducibility is more

* This work was supported by the Russian Science Foundation under grant № 22-11-00330, https://rscf.ru/en/project/22-11-00330/

demanding than connectivity and provides a more accurate criterion to characterize uncontrollability. We investigate all three systems for irreducibility by looking for operators commuting with H_0 and V, and show that one of the systems is reducible and hence uncontrollability. For the controllable cases, we numerically construct a basis of 15 matrices generated by all independent commutators of iH_0 and iV forming the dynamical Lie algebra $\mathfrak{g}$. We show that $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(4)$ by decomposing standard generators of $\mathfrak{su}(4)$ in linear combinations of these obtained 15 commutators. This implies that the systems are controllable. Uncontrollability is proven by several different ways: (1) by showing that the system is reducible, (2) by numerically constructing basis of the dynamical Lie algebra which has 7 elements and hence the dynamical Lie algebra in this case has not maximal rank, and (3) by constructing a conserved nontrivial system observable.

References

[1] Moore K. W. , Pechen A.N., Feng X.-J., Dominy J., Beltrani V.J., Rabitz H.: Why is chemical synthesis and property optimization easier than expected? Physical Chemistry Chemical Physics. 2011. Vol. 13, no. 21. Pp. 10048-–10070.

[2] Koch C.P., Boscain U., Calarco T., Dirr G., Filipp S., Glaser S.J., Kosloff R., Montangero S., Schulte-Herbrüggen T., Sugny D., Wilhelm F.K.: Quantum optimal control in quantum technologies. Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe (preprint)

[3] Turinici G., Rabitz H.: Quantum wavefunction controllability Chem. Phys. 2001. Vol. 267. Pp. 1–9.

[4] Albertini F., D'Alessandro D.: Notions of controllability for bilinear multilevel quantum systems IEEE Trans. Automat. Control. 2003. Vol. 48, no. 8. Pp. 1399–1403.

[5] Boscain U., Gauthier J-P., Rossi F., Sigalotti M.: Approximate controllability, exact controllability, and conical eigenvalue intersections for quantum mechanical systems. Comm. Math. Phys. 2015. Vol. 333. Pp. 1225–1239.

[6] Pechen A.N.: Engineering arbitrary pure and mixed quantum states Phys. Rev. A. 2011. Vol. 84, no. 4, 042106

[7] Pechen A.N., Tannor D.J.: Are there traps in quantum control landscapes? Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106, 120402

[8] Myachkova, A.A., Pechen, A.N.: Some controllable and uncontrollable degenerate four-level quantum systems (submitted).

On the Solvability of a Nonlocal Boundary Value Problem for Fractional Differential Inclusions with Causal Multioperators*

V. Obukhovskii[1], G. Petrosyan[1,2], M. Soroka[1]

[1] Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
valerio-ob2000@mail.ru, marya.afanasowa@yandex.ru
[2] Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia
garikpetrosyan@yandex.ru

We consider the solvability of a nonlocal boundary value problem for fractional differential inclusions with causal multioperators based on the topological degree theory for multivalued condensing maps.

Keywords: fractional derivative, differential inclusion, boundary value problem, condensing multioperator, measure of noncompactness, causal multioperator

О разрешимости нелокальной краевой задачи для дифференциальных включений дробного порядка с каузальными мультиоператорами

В. В. Обуховский[1], Г. Г. Петросян[1,2], М. С. Сорока[1]

[1] Воронежский государственный педагогический университет (ВГПУ), Воронеж, Россия
valerio-ob2000@mail.ru, marya.afanasowa@yandex.ru
[2] Воронежский государственный университет инженерных технологий (ВГУИТ), Воронеж, Россия
garikpetrosyan@yandex.ru

Рассматривается разрешимость нелокальной краевой задачи для дифференциальных включений дробного порядка с каузальными мультиоператорами на основе теории топологической степени для многозначных уплотняющих отображений.

Ключевые слова: дробная производная, дифференциальное включение, краевая задача, уплотняющий мультиоператор, мера некомпактности, каузальный мультиоператор

1. Основные результаты

В сепарабельном банаховом пространстве E мы рассматриваем нелокальную краевую задачу для дифференциальных включений дробного порядка следующего вида:

$$^{C}D_0^q[x(t) - k(t, x_t)] \in Ax(t) + Q(x)(t),\ t \in [0, T],$$

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011 и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук, проект МК-338.2021.1.1.

$$x(s) + g(x)(s) = v(s),\ s \in (-\infty, 0],$$

где ${}^C D_0^q, 0 < q < 1,$ – дробная производная Капуто, $A : D(A) \subset E \to E$ – линейный замкнутый оператор, порождающий ограниченную C_0-полугруппу. Обозначим через $C = C([0,T]; E)$ пространство всех непрерывных функций на отрезке $[0,T]$, $\mathcal{B}$ – фазовое пространство бесконечных запаздываний Хейла–Като и будем считать $\mathcal{C} = \mathcal{C}((-\infty, T]; E)$ нормированным пространством функций, сужение которых на $(-\infty, 0]$ принадлежит $\mathcal{B}$, а сужение на $[0,T]$ принадлежит C. Мы полагаем, что $Q : \mathcal{C} \multimap L^p([0,T]; E)$ – многозначный мультиоператор, $k : [0,T] \times \mathcal{B} \to E$ и $g : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, $x_t \in \mathcal{B}$ – предыстория функции до момента t и $v \in \mathcal{B}$ – заданная функция.

Для разрешения задачи мы в пространстве $\mathcal{C}$ конструируем разрешающий многозначный интегральный оператор и сводим исходную задачу к задаче о существовании неподвижных точек построенного мультиоператора. Для доказательства существования неподвижных точек используется теория мер некомпактности и уплотняющих многозначных отображений.

Список литературы

[1] Афанасова М.С., Обуховский В.В., Петросян Г.Г. Об обобщенной краевой задаче для управляемой системы с обратной связью и бесконечным запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, № 2. С. 167–185.

[2] Ахмеров Р.Р., Каменский М.И. Ко второй теореме Н.Н. Боголюбова в принципе усреднения для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, № 3. С. 537–540.

[3] Каменский М.И., Макаренков О.Ю., Нистри П. Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром // Доклады Академии наук. 2003. Т. 388, № 4. С. 439–442.

[4] Каменский М.И., Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О полугруппе в задаче диффузии на пространственной сети // Доклады Академии наук. 1999. Т. 368, № 2. С. 157–159.

[5] Gurova I.N., Kamenskii M.I. On the method of semidiscretization in the problem on periodic solutions to quasilinear autonomous parabolic equations // Differential Equations. 1996. Vol. 32. Pp. 106–112.

[6] Johnson R., Nistri P., Kamenskii M. On periodic solutions of a damped wave equation in a thin domain using degree theoretic methods // Journal of Differential Equations. 1997. Vol. 140. Pp. 186–208.

[7] Kamenskii M., Makarenkov O., Nistri P. An alternative approach to study bifurcation from a limit cycle in periodically perturbed autonomous systems // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2011. Vol. 23. Pp. 425–435.

[8] Kamenskii M.I., Obukhovskii V.V. Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional-differential inclusions in Banach spaces // Nonlinear Analysis. 1993. Vol. 20. Pp. 781–792.

[9] Kamenskii M.I., Nistri P., Zecca P., Obukhovskii V.V. Optimal feedback control for a semilinear evolution equation // Journal of Optimization Theory and Applications. 1994. Vol. 82. Pp. 503–517.

On a Local Search Method for Bilevel Optimization Problems with an Equilibrium at the Lower Level*

Andrei V. Orlov

ISDCT SB RAS, Irkutsk, Russia
anor@icc.ru

This work addresses the developing Special Local Search Method for one of the classes of the bilevel optimization problems (BOPs) with equilibrium at the lower level.

Keywords: bilevel optimization, bilevel problems with equilibrium at the lower level, bimatrix game, d.c. constraint problem, local search method

1 The main results

Nowadays, bilevel optimization is a highly developing area of optimization [1]. Especially, the study of bilevel problems with many players at the lower (Single-Leader-Multi-Follower-Problem (SLMFP)) or at the upper level (Multi-Leader-Single-Follower-Problem (MLSFP)), or even Multi-Leader-Follower-Problems (MLFPs), where there are one or more Nash games at each level, is gaining popularity (see Chapter 3 in [1]).

In this connection, the work addresses one of the classes of the bilevel optimization problems (BOPs) with equilibrium at the lower level. We study quadratic BOPs with a bimatrix game at the lower level in their optimistic statement [2].

$$\left.\begin{array}{c}\langle x, Cx\rangle + \langle c, x\rangle + \langle y, D_1 y\rangle + \langle d_1, y\rangle + \langle z, D_2 z\rangle + \langle d_2, z\rangle \uparrow \max\limits_{x,y,z}, \\ x \in X,\ (y,z) \in NE(\Gamma B(x)),\end{array}\right\} \qquad (BP_{\Gamma B})$$

where $X = \{x \in I\!R^m \mid Ax \leq a,\ x \geq 0,\ \ \langle b_1, x\rangle + \langle b_2, x\rangle = 1\}$, $NE(\Gamma B(x))$ is a set of Nash equilibrium points of the game

$$\left.\begin{array}{ll}\langle y, B_1 z\rangle \uparrow \max\limits_{y}, & y \in Y(x) = \{y \mid y \geq 0,\ \ \langle e_{n_1}, y\rangle = \langle b_1, x\rangle\}, \\ \langle y, B_2 z\rangle \uparrow \max\limits_{z}, & z \in Z(x) = \{z \mid z \geq 0,\ \ \langle e_{n_2}, z\rangle = \langle b_2, x\rangle\};\end{array}\right\} \qquad (\Gamma B(x))$$

$c,\ b_1,\ b_2 \in I\!R^m$; $y,\ d_1 \in I\!R^{n_1}$; $z,\ d_2 \in I\!R^{n_2}$; $a \in I\!R^{m_1}$; $b_1 \geq 0,\ b_1 \neq 0$, $b_2 \geq 0,\ b_2 \neq 0$; A, B_1, B_2, C, D_1, D_2 are matrices of appropriate dimension. $C = C^T$, $D_1 = D_1^T$, $D_2 = D_2^T$ are positive semidefinite matrices, so, the objective function of the leader is convex.

First of all, we transform the problem $(BP_{\Gamma B})$ to the following single-level optimization problem which is equivalent to it from the global solutions point of view by special optimality conditions [2]:

$$\left.\begin{array}{c}-f_0(x,y,z) \stackrel{\triangle}{=} \langle x, Cx\rangle + \langle c, x\rangle + \langle y, D_1 y\rangle + \langle d_1, y\rangle + \\ +\langle z, D_2 z\rangle + \langle d_2, z\rangle \uparrow \max\limits_{x,y,z,\alpha,\beta}, \\ (x,y,z) \in S \stackrel{\triangle}{=} \{x,y,z \mid Ax \leq a,\ \ x \geq 0,\ \ \langle b_1, x\rangle + \langle b_2, x\rangle = 1, \\ y \geq 0,\ \ \langle e_{n_1}, y\rangle = \langle b_1, x\rangle, \quad z \geq 0,\ \ \langle e_{n_2}, z\rangle = \langle b_2, x\rangle\}, \\ \langle b_1, x\rangle(B_1 z) \leq \alpha e_{n_1}, \quad \langle b_2, x\rangle(yB_2) \leq \beta e_{n_2}, \\ \langle y, (B_1 + B_2)z\rangle = \alpha + \beta.\end{array}\right\} \qquad (PB)$$

* The research is funded by the fundamental research project no. 121041300065-9 (code FWEW-2021-0003).

It is easy to prove that all of nonconvex functions from the formulation (PB) can be represented as a difference of two convex functions [2]. So, we can formulate the problem (PB) as the minimization problem with a convex quadratic objective function and (n_1+n_2+1) d.c. constraints:

$$\left.\begin{array}{c} f_0(x,y,z)\downarrow \min\limits_{x,y,z,v}, \quad (x,y,z)\in S, \\ f_i(x,z,\alpha):=g_i(x,z,\alpha)-h_i(x,z)\le 0, \quad i\in\{1,\dots,n_1\}=:I, \\ f_j(x,y,\beta):=g_j(x,y,\beta)-h_j(x,y)\le 0, \quad j\in\{n_1+1,\dots,n_1+n_2\}=:J, \\ f_{n_1+n_2+1}(y,z,\alpha,\beta):=g_{n_1+n_2+1}(y,z,\alpha,\beta)-h_{n_1+n_2+1}(y,z)=0, \end{array}\right\} \qquad (DCC)$$

where the functions f_0; g_i, h_i $\forall i \in I=\{1,...,n_1\}$; g_j, h_j $\forall j\in J=\{n_1+1,...,n_1+n_2\}$; $g_{n_1+n_2+1}$, and $h_{n_1+n_2+1}$, are convex with respect to the aggregate of all their variables; and the set

$$S=\Big\{x,y,z\ge 0 \mid Ax\le a,\ \langle b_1,x\rangle+\langle b_2,x\rangle=1,\ \langle e_{n_1},y\rangle=\langle b_1,x\rangle,\ \langle e_{n_2},z\rangle=\langle b_2,x\rangle\Big\},$$

is, obviously, convex too.

Now we can apply the special Global Search Theory (GST) for general d.c. optimization problems to the problem (DCC) [3,4,5].

Following this theory, the algorithms for solving a nonconvex problem in question consists of two stages: local search which take into account the features of the problem under study and global searches procedures that help to jump out the points provided by the local search based on Global Optimality Conditions proved by A.S. Strekalovsky [3,4,5]. In this work we study the issue of developing Special Local Search Method.

In order to do it we propose the further transformation of the problem using the Exact Penalization Theory [5,6,7] and elaborate the Special Penalty Local Search Method based on the results from [8].

References

[1] Bilevel Optimization: Advances and Next Challenges / Ed. by S. Dempe, A. Zemkoho. Cham: Springer, 2020.

[2] Orlov A.V. On Solving Bilevel Optimization Problems with a Nonconvex Lower Level: The Case of a Bimatrix Game. Lecture Notes in Computer Science. MOTOR 2021 / Ed. by P. Pardalos, M. Khachay, A. Kazakov. Vol. 12755. Cham: Springer, 2021. P. 235–249.

[3] Strekalovsky A.S. Elements of nonconvex optimization. Nauka, Novosibirsk, 2003. [In Russian]

[4] Strekalovsky A.S. On Solving Optimization Problems with Hidden Nonconvex Structures. Optimization in Science and Engineering / Ed. by T.M. Rassias, C.A. Floudas, S. Butenko. N.Y.: Springer, 2014. P. 465–502.

[5] Strekalovsky A.S. On a Global Search in D.C. Optimization Problems. Optimization and Applications. OPTIMA 2019. Communications in Computer and Information Science / Ed. by M. Jacimovic et al. Vol. 1145. Cham: Springer, 2020. P. 222–236.

[6] Nocedal J. and Wright S.J. Numerical optimization. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 2000.

[7] Bonnans J.-F., Gilbert J.C., Lemarechal C., Sagastizabal C.A. Numerical optimization: theoretical and practical aspects. Springer, Berlin-Heidelberg, 2006.

[8] Strekalovsky A.S. Local search for nonsmooth DC optimization with DC equality and inequality constraints // Numerical Nonsmooth Optimization – State of the Art Algorithms / Ed. by A. Bagirov et al. Numerical Nonsmooth Optimization – State of the Art Algorithms. Cham: Springer, 2020. P. 229–261.

On an Inverse Spectral Problem for Band Operators and Nnonlinear Lattices*

Andrey Osipov

Federal State Institution
“Scientific-Research Institute for System Analysis
of the Russian Academy of Sciences”, Moscow, Russia
osipa68@yahoo.com

We study some links between an inverse spectral problem for certain classes of operators generated by (possibly infinite) band matrices and nonlinear dynamical systems such as e. g. Volterra and Toda lattices.

Keywords: Band operators, Inverse spectral problems, Nonlinear lattices.

1 The main results

As known, the inverse spectral problem method for differential and difference operators consists in reconstructing of a given operator from its spectral characteristics. Since the works of Kac, van Moerbeke and Moser the inverse spectral problems for operators generated by infinite band matrices (called band operators; in particular, the Jacobi operators belong to this class) have been widely applied to the integration via Lax pair formalism of certain nonlinear dynamical systems (nonlinear lattices). Here we consider a version of the inverse spectral problem method for band operators, where a key role is played by the moments of the Weyl matrix (or Weyl function) of a given band operator which are used for unique reconstruction of the latter, see [1]-[3] for details.

Out of the nonlinear lattices, the most well studied ones are the Toda lattice and the Volterra lattice (also known as Kac - van Moerbeke system, Langmuir chain or discrete KdV equation). In [1]-[2] we found that a discrete Miura transformation which relates these two systems to each other can be easily described in terms of the above mentioned moments (in particular, such description allows one to establish a bijection between the semi-infinite Volterra lattices and the semi-infinite Toda lattices characterized by positivity of Jacobi operators in their Lax representation). Also, in the finite lattice case, due to the special structure of the moments corresponding to a finite Jacobi operator, some non-trivial first integrals for both Volterra and Toda lattices were found.

Here we discuss similar issues for the Bogoyavlensky lattices BL1(p):

$$\dot{a}_i = a_i \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i+j} - \sum_{j=1}^{p} a_{i-j} \right);$$

and BL2(p):

$$\dot{b}_i = b_i \left(\prod_{j=1}^{p} b_{i+j} - \prod_{j=1}^{p} b_{i-j} \right);$$

for some fixed $p \geq 1$, [4] (for $p = 1$ both BL1(p) and BL2(p) coincide with the Volterra lattice).

* This work is done at SRISA according to the project No 0580-2021-007 (Reg. No 121031300051-3).

For the lattice BL3(p):

$$\dot{c}_i = c_i^2 \left(\sum_{j=1}^{p} c_{i+j} - \sum_{j=1}^{p} c_{i-j} \right);$$

the band operator which appears in its Lax representation has a structure which is different from the cases of BL1(p) and BL2(p), so our inverse problem method needs to be modified before it can be applied to the integration of BL3(p). This modification as well as the whole integration procedure of the finite lattices BL3(p) are considered for the case $p = 1$.

References

[1] Osipov A. S. Inverse Spectral Problems for Second-Order Difference Operators and Their Application to the Study of Volterra Type Systems. Rus. J. Nonlin. Dyn. 2020. Vol. 16. no 3. Pp. 397–419.

[2] A. Osipov. Inverse spectral problem for Jacobi operators and Miura transformation. Concr. Oper. 2021. Vol. 8. Pp. 77–89.

[3] A. S. Osipov. Inverse spectral problem for band operators and their sparsity criterion in terms of inverse problem data. Russ. J. Math. Phys. 2022. Vol. 29. no. 2.

[4] Yu.B. Suris. The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach. Progress in Mathematics, vol. 219. Birkhäuser, Basel, 2003.

On the Linearization Method in Small-time Control Synthesis*

Ivan Osipov

Department of Optimal Control, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg, Russia
i.o.osipov@imm.uran.ru

The paper investigates a control affine nonlinear system under integral quadratic control constraints. The problem under consideration is a local synthesis of a control leading the system to the origin in a small time interval. We obtained sufficient conditions under which the solution obtained for the linearized system in the neighborhood of the origin also leads the initial nonlinear system to zero.

Keywords: nonlinear system, controllability set, integral constraints, linearization, Bellman equation, local synthesis, small-time

1 Introduction

The paper deals with the local synthesis problem for a nonlinear system with an integral quadratic control constraint. The difference of the problem under consideration from the classical stabilization problem is that it is considered on a finite, moreover small time interval.

On the time interval $0 \le t \le T$ we consider the following system

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t), \qquad \int_0^T u^\top(\tau)u(\tau)d\tau \le \mu^2, \qquad \mu > 0. \tag{1}$$

Here $x \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $u \in \mathbb{R}^r$ is the control, T is some fixed positive number. Vector function $f(x)$ is twice continuously differentiable, $f(0) = 0$, B is $n \times r$ matrix. We denote the space of integrable scalar or vector functions on $[0, T]$ by $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2[0, T]$.

Definition 1. *The set of zero controllability $N(T, \mu)$ of the system* (1) *in the state space at time T is the set of all initial states $\tilde{x} = x(0) \in \mathbb{R}^n$ of the system* (1)*, from which the system can be brought to the origin by controls $u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu) = \left\{u : \|u(\cdot)\|^2_{\mathbb{L}_2} \le \mu^2\right\}$*

$$N(T, \mu) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu),\ x(T, \tilde{x}, u(\cdot)) = 0\}.$$

The synthesis problem consists in obtaining a control $u(t, x)$ that is able to move the system (1) to the origin of coordinates in a fixed small time T and satisfies the condition $u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu)$. Obviously, the synthesis problem is solvable only for initial states $x(0) \in N(T, \mu)$.

* The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2022-874).

2 Main result

On the state space of the system (1) and the time interval $0 \le t \le T$ we define the Bellman function $V(t,x)$ that describes the minimum control resource required to lead the system (1) from the initial state x to the origin $V(t,x) = \min\limits_{u} \int_0^t u^\top(t)u(t)dt,\ x(0) = x,\ x(t) = 0$. So, $N(T,\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(T,x) \le \mu^2\}$. If $V(t,x)$ is continuously differentiable, then

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = -\min_{u}\{u^\top u + \left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right)^\top (f(x) + Bu)\}. \tag{2}$$

The control delivering the minimum in the equation (2) has the form $u(t,x) = -\frac{1}{2}B^\top \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}$. This control ensures that the system is moved to the origin using a resource not exceeding μ^2.

One can avoid the difficulties with integrating the equation (2) by replacing the function $V(t,x)$ with the Bellman function $V_0(t,x) = x^\top Q(t)x$ for the system linearized in the neighborhood of the origin in the formula for $u(t,x)$: $\dot{x} = Ax + Bu$, $0 \le t \le T$, where $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$.

A symmetric positive definite matrix $Q(t)$ is the solution of the differential equation $\dot{Q} = QBB^\top Q - A^\top Q - QA$, and the corresponding feedback has the form $u(t,x) = -B^\top Q(t)x$. It can be shown that $Q(t) = W^{-1}(T-t)$, where $W(t)$ is the controllability gramian of the system $\dot{x} = -Ax - Bu$, that is the initial conditions $Q(0) = W^{-1}(T)$.

The control aim is to move the system to the origin in a predetermined time, the origin of coordinates being the equilibrium position of the system. In contrast to the stabilization problem [1], to apply the linearization method in the local synthesis problem, the controllability property of the linear system is insufficient and one has to use an additional constraint on the controllability gramian asymptotics in time. This constraint matches with a sufficient condition ensuring the asymptotic equivalence of the reachability sets (zero-controllabilty sets) of the nonlinear and linearized systems at small time intervals.

Conjecture 1. The pair (A,B) is completely controllable. There exists $k > 0$ and $\alpha > 0$ such that $k\nu_1(\tau) \ge \tau^{3-\alpha}$ for sufficiently small positive τ. Here $\nu_1(\tau)$ is the minimal eigenvalue of the matrix $\frac{1}{\tau}W(\tau)$.

Under the conjecture 1 on the time interval $[0;\tau]$, the reachability sets (null controllability sets) of the nonlinear and linearized systems are convex [2] and asymptotically equivalent [3,4]. Introduce a system (1) with linear feedback control $u(t,x) = -B^\top Q(t)x$:

$$\dot{z} = f(z) - BB^\top Q(t)z, \qquad 0 \le t \le T, \qquad z(0) = z_0 \tag{3}$$

Theorem 1. *Let conjecture 1 be satisfied. There exists $T_1 > 0$ such that for any $0 < T \le T_1$ and any vector z_0 satisfying the inequality $z_0 Q(0) z_0 = z_0 W^{-1}(T) z_0 \le \mu^2$, the solution $z(t)$ of the system* (3) *tends to zero at $t \to T$.*

The paper contains several examples of the application of the theorem to local control synthesis for nonlinear systems with integral constraints.

References

[1] Khalil K.H. Nonlinear Systems, Pub.: Pearson, 3rd edition 2001, 768 p.

[2] Gusev M.I. On Convexity of Reachable Sets of a Nonlinear System under Integral Constraints. IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol.51, iss. 32. P. 207–212. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.382

[3] Gusev M.I., Osipov I.O. Asymptotic Behavior of Reachable Sets on Small Time Intervals. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2020. Vol. 309, suppl.1. P. S52-S64

[4] Osipov I.O. On the convexity of the reachable set with respect to a part of coordinates at small time intervals, Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 210–225. https://doi.org/10.35634/vm210204 [in Russian]

A Note on Differential-algebraic Equations with Hysteresis Phenomena

Pavel Petrenko

IDSCT SB RAS, Irkusk, Russia
petrenko.pavels@gmail.com

In this note, we investigate some class of differential-algebraic equations (DAE) with hysteresis phenomena. We consider non-stationary DAE with non-linearity of hysteresis type (modeled by a sweeping process). For such a DAE, we design an equivalent structural form (in the sense of solutions), and prove a necessary and sufficient condition for the existence and uniqueness of a solution to an initial value problem.

Keywords: differential-algebraic equations, hysteresis, sweeping process

1 The main results

Consider the following system of ordinary differential equations (ODE) paired with a sweeping process [1,2] of a rate independent hysteresis type (modeled by the play operator [3,4]):

$$A(t)\dot{x}(t) = B(t)x(t) + C(t)y(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} -\ddot{y}(t) \in \mathcal{N}_{Q(t)}(\dot{y}(t)), \\ y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = y_1 \in Q(t_0). \end{gathered} \tag{2}$$

Here, $A(t), B(t), C(t) \in \mathbb{R}^{(n\times n)}$ are given matrices, wherein $\det A(t) \equiv 0$, $T = [t_0, t_1]$ is a given time interval, $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$ are unknown functions; $Q(t) = x(t) - Z$ is a "moving set", where Z is a given closed convex subset of $\mathbb{R}^n$, and $\mathcal{N}_Q(q)$ denotes the normal cone to a closed convex set Q at a point q.

By a solution of (1), (2) we mean a pair of absolutely continuous ($W^{1,1}$) functions (x, y) satisfying (1), (2) for almost all (a.e.) $t \in T$ with respect to (w.r.t.) the usual Lebesgue measure.

Let's consider time-varying ODE system not resolved with respect to the derivative

$$A(t)x'(t) = B(t)x(t) + U(t)f(t), \quad t \in T \subset \mathbb{R}, \tag{3}$$

where $A(t), B(t), U(t) \in \mathbb{R}^{(n\times n)}$ are given matrices, wherein $\det A(t) \equiv 0$, $f(t) \in \mathbb{R}^n$ is some continuous on T function; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is unknown function of a state. Such systems are called differential-algebraic equations (DAE).

Lemma 1. [5] *Let* $A(t), B(t), C(t) \in \mathbb{C}^r(T)$, $\mathrm{rank} D_{r,z}(t) = \rho = \mathrm{const}$, *there is a resolving minor in matrix* $D_{r,x}(t)$. *Then there exists linear differential operator*

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t)\frac{d}{dt} + \ldots + R_r(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^r$$

with continuous on T *coefficients* $R_j(t)$ $(j = \overline{0,r})$, *that reduces system (3) into the form*

$$\dot{x}_1(t) = J_1(t)x_1(t) + \mathcal{H}(t)\overline{u}(t),$$

$$x_2(t) = J_2(t)x_1(t) + \mathcal{G}(t)\overline{u}(t),$$

where $(x_1(t), x_2(t)) = Qx(t)$, $\overline{u}(t) = (u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(r)}(t))$, *r is unresolvability index for DAE (3). Matrices* $D_{r,x}, D_{r,z}$, $J_1(t), J_2(t)$, $\mathcal{H}(t), \mathcal{G}(t)$ *are determined by formulas cited in [5].*

The following proposition gives a necessary and sufficient condition for the existence of a unique solution to system (1), (2).

Theorem 1. *Let all the assumptions of Lemma 1 are satisfied. Then problem (1), (2) solvable on T iff*

$$z_2(t_0) = J_2(t_0)z_1(t_0) + \mathcal{G}(t_0)\overline{y}(t_0). \tag{4}$$

Moreover, if a solution to problem (1), (2) exists, then it is unique. Here $(z_1(t), z_2(t)) = Qx(t)$, $z_1(t) \in \mathbb{R}^k, z_2(t) \in \mathbb{R}^{n-k}$, $\overline{y}(t) = (y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(r)}(t))$.

References

[1] Kunze M., Marques M.D.M. An Introduction to Moreau's Sweeping Process. In Brogliato B. (eds) Impacts in Mechanical Systems. Lecture Notes in Physics. Vol. 551. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.

[2] Moreau, J.-J. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. J. Differential Eq. 1977. Vol. 26. Pp. 347–374.

[3] Brokate M., Sprekels J. Hysteresis and Phase Transitions. Ser. Appl. Math. Sci. Vol. 121. Springer-Verlag, New York, 1996.

[4] Krejčí P.. Vector hysteresis models. European J. Appl. Math. 1996. Vol. 2. Pp. 281–292.

[5] Scheglova A. Controllability of nonlinear algebraic differential systems. Automat. Telemekh. 2008. Vol. 10, Pp. 57–80.

GRAPE Method for Open Quantum Systems Driven by Coherent and Incoherent Controls

Vadim Petruhanov[1], Alexander Pechen[2]

[1] Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia;
vadim.petrukhanov@gmail.com

[2] Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;
National University of Science and Technology "MISIS', Moscow', Russia;
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia;
apechen@gmail.com

In this work, we discuss our results on adoptation of the GRAPE optimization method for open quantum systems driven by coherent and incoherent controls. Analytic expressions for gradient and Hessian of the objective functional for piece-wise constant controls and for functional controls (in the L^2-space) are obtained for general N-level quantum systems. The case of one qubit (i.e., $N = 2$) is solved in more details. For this case, we find eigenvalues and eigenvectors of the matrix determining controlled evolution of the system in order to diagonalize 3×3 matrix exponentials in the obtained expression for gradient. We find that for constant controls the control space is divided into two domains with different dynamical behavior. Performance of the adopted GRAPE algorithm is illustrated for steering the system from some initial state to some target state.

Keywords: quantum control, optimal control, coherent control, incoherent control

1 The main results

Quantum control studies methods for manipulation of quantum systems, and it is an important tool essential for developing quantum techonologies [1]. Controlled quantum systems generally cannot be isolated from the environment, thus they are open quantum systems. Sometimes interaction with the environment can be used as an active source of control, for example, via incoherent control [2,3]. In some cases the optimal shape of the control can have analytical solution, however more often it is not the case and various numerical optimization methods are required. Large class of methods are gradient-based numerical optimization algorithms, one of which is GRadient Ascent Pulse Engineering (GRAPE) developed originally for design of NMR pulse sequences [4] and later applied to various problems, e.g. [5,6].

In this talk, we consider adoption of GRAPE method to open quantum systems driven by coherent and incoherent controls [7]. We obtain analytic expression for gradient of Mayer-type objective functional with respect to piecewise constant controls for general N-level quantum systems. The one-qubit system is solved in more detail. The state of the system is represented by vector in the Bloch ball. Low dimension $N = 3$ allows the corresponding 3×3 matrix exponentials to be analytically diagonalized; for that we compute eigenvalues and eigenvectors of the right-hand side matrix of the system evolution equation. Moreover, we find that in the case of constant coherent and incoherent controls $u \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{R}_+$, the half-plane $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ni (u, n)$ can be divided into two domains with different dynamics, similar to phase diagram. In suitable coordinates, the dividing these two domains curve is a plane cubic curve with casp. We illustrate the performance of the algorithm for the problem of steering the system from a given initial state to a given final state in a fixed time for the system consisted of one and two qubits. Additionally, we compute gradient and Hessian (in the sense of Fréchet) of the objective functional with respect to controls in the functional space L^2, i.e., without piecewise constant assumption on the controls.

This talk presents the work partially funded by Russian Federation represented by the Ministry of Science and Higher Education under grant No.075-15-2020-788 and the Russian Science Foundation under grant No.22-11-00330, https://rscf.ru/en/project/22-11-00330/.

References

[1] Glaser S.J., Boscain U., Calarco T., Koch C.P., Köckenberger W., Kosloff R., Kuprov I., Luy B., Schirmer S., Schulte-Herbrüggen T., Sugny D., Wilhelm F.K. Training Schrödinger's cat: quantum optimal control. Eur. Phys. J. D. 2015. Vol. 69. Pp. 279.

[2] Pechen A., Rabitz H. Teaching the environment to control quantum systems. Phys. Rev. A. 2006. Vol. 73. Pp. 062102.

[3] Pechen A.N. Engineering arbitrary pure and mixed quantum states. Phys. Rev. A. 2011. Vol. 84. Pp. 042106.

[4] Khaneja N., Reiss T., Kehlet C., Schulte-Herbrüggen T., Glaser S.J. Optimal control of coupled spin dynamics: design of NMR pulse sequences by gradient ascent algorithms. Journal of Magnetic Resonance. 2005. Vol. 172. Pp. 296–305.

[5] De Fouquieres P., Schirmer S.G., Glaser S.J., Kuprov I. Second order gradient ascent pulse engineering. Journal of Magnetic Resonance. 2011. Vol. 212. Pp. 412–417.

[6] Pechen A.N., Tannor D.J. Quantum control landscape for a Lambda-atom in the vicinity of second-order traps. Israel Journal of Chemistry. 2012. Vol. 52. Pp. 467–472.

[7] Petruhanov V.N., Pechen A.N., Optimal control for state preparation in two-qubit open quantum systems driven by coherent and incoherent controls via GRAPE approach (submitted).

[8] Petruhanov V.N., Pechen A.N. Gradient ascent pulse engineering for open quantum systems driven by coherent and incoherent controls (in preparation).

Exact Cost Increment Formula for Linear Problems of Optimal Ensemble Control in the Space of Probability Measures

Nikolay Podogaev[1], Ilya Pravosudov[1,3], Maxim Staritsyn[1,2], Fernando Lobo Pereira[2]

[1] Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Russia
nickpogo@gmail.com
[2] Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, Portugal
flp@fe.up.pt, starmaxmath@gmail.com
[3] Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia
ilya.prav.mail@gmail.com

We promote an approach to optimal mean-field control, which is centered around an exact representation of the increment (variation) of the objective functional, based on formal duality arguments. We show that the derived exact increment formula provides a construction of the measure-feedback control of "potential decrease", which can be used for numerical treatment of optimization problems at hand. We demonstrate the application of our approach to numerical analysis of several ensemble control problems of practical interest, discuss the principal feature of derived formula, and draw parallels with the classical Weierstrass increment formula from Calculus of Variation.

Keywords: Optimal control, ensemble control, transport equation, Kolmogorov-Fokker-Plank equation, exact formula for the cost increment, feedback control

1 Problem statement

In the talk, we deal with problems of optimal simultaneous control of the continuum of non-interacting indistinguishable agents distributed over $\mathbb{R}^n$ and represented by the mean-field (statistical ensemble) $t \mapsto \mu_t$. Here, μ_t are probability measures on $\mathbb{R}^n$ ($\mu_t \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$). Given a compactly supported initial distribution $\mu_0 = \vartheta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, the measure μ_t is assumed to be transported by a given vector field $f_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, linearly depending on the control parameter u, in the presence of a linear source/sink term modulated by a given control-linear function $g_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, with or without diffusion.

Precisely, we study the problem of minimization of the μ-linear functional

$$\min \mathcal{J}[u] = \int \ell(x)\, d\mu_T(x) + \frac{1}{2}\int_0^T |u|^2\, dt$$

subject to the μ-linear dynamics

$$\partial_t \mu_t + \nabla_x \cdot \left(v_{u(t)}\, \mu_t\right) = g_{\bar{u}(t)}\mu_t + \alpha \nabla^2_{xx}\mu_t, \quad \alpha \in \{0, 1\},$$

and poitwise constraints on the control signal

$$u(t) \in U \quad \text{for a.e. } t \in I \doteq [0, T]; \quad U \subseteq \mathbb{R}^m \text{ is compact.}$$

Here, ∂_t, ∇_x and ∇^2_{xx} denote the partial derivative in time, gradient in x, and Laplacian operator, respectively (to be understood in the distributional sense), "$\cdot$" means the scalar product.

Given two control functions u and $\bar{u}$, consider the difference $\Delta_u \mathcal{I}[\bar{u}] \doteq \mathcal{I}[u] - \mathcal{I}[\bar{u}]$. Using simple formal arguments, we show that, under sufficient regularity of the input data, this difference can be represented as

$$\Delta_u \mathcal{I}[\bar{u}] = -\int_0^T \Big(H(\mu_t, \bar{p}_t, u(t)) - H(\mu_t, \bar{p}_t, \bar{u}(t)) \Big)\, dt, \tag{1}$$

where

$$H(\mu, \eta, u) \doteq \int (\nabla_x \eta \cdot f_u + \eta\, g_u)\, d\mu,$$

and $\bar{p}$ is a solution of the backward balance/Kolmogorov-Fokker-Plank equation

$$\partial_t p_t + \nabla_x p_t \cdot v_{\bar{u}(t)} = -g_{\bar{u}(t)}\, p_t - \alpha \nabla^2_{xx} p_t, \quad p_T = -\ell.$$

Expression (1) provides an *exact representation* for the increment of the cost, which is fundamentally different from the familiar first variation [1]. A right parallel, one can draw here, could be the classical Weierstrass formula from Calculus of Variations, which expresses the difference of the values of a functional between a curve from a geodesic family and an arbitrary curve via the integral of the co-called Weierstrass E-function, see, e.g., [2, § 12].

2 Outline of the talk

In the talk, we show that formula (1) suggests the structure of a μ-feedback control that can be used to organize a sequential descent in the value of $\mathcal{I}$. We discuss the main advantages and pitfalls of this approach and illustrate its "modus operandi" with several simple examples of a certain practical perspective.

References

[1] B. Bonnet and H. Frankowska. Necessary Optimality Conditions for Optimal Control Problems in Wasserstein Spaces. Applied Mathematics & Optimization. 2021. Vol. 84(S2). Pp. 1281–1330.

[2] L. Young. Lectures on the calculus of variations and optimal control theory, 1969.

Navier-Stokes Evolutionary System with Spatial Variable in a Network-like Domain

Vyacheslav Provotorov[1], Semen Podvalny[2]

[1] Voronezh State University, Voronezh, Russia
wwprov@mail.ru
[2] Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia
spodvalny@yandex.ru

The paper deals with the question of the existence of a weak solution of the Navier-Stokes n-dimensional system with distributed parameters in a coherent limited network-like domain, which is a geometric graph in the one-dimensional case ($n = 1$). A space of admissible solutions is introduced and, using the Faedo-Galerkin method, the existence of a solution from the class of functions summable on a network-like domain is established. Taking into account the specificity of the Faedo-Galerkin method, when constructing approximations of a solution in the form of cutoff function, it is shown that such solutions are elements of the space of functions with summable derivatives from a time variable; for the elements of such a space, the analogue of the energy balance equation correctly. The obtained results are the basis for the study of various types of problems of optimal control of differential systems with a spatial variable changing in a network-like domain.

Keywords: Navier-Stokes system, network-like domain

Эволюционная система Навье-Стокса с пространственной переменной в сетеподобной области

В. В. Провоторов[1], С. Л. Подвальный[2]

[1] Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
wwprov@mail.ru
[2] Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия
spodvalny@yandex.ru

В работе рассматривается вопрос существования слабого решения n-мерной системы Навье-Стокса с распределенными параметрами в связной ограниченной сетеподобной области, представляющей собой геометрический граф в одномерном случае ($n = 1$). Вводится пространство допустимых решений и, используя метод Фаэдо-Галеркина, устанавливается существование решения из класса суммируемых на сетеподобной области функций. Учитывая специфику метода Фаэдо-Галеркина при построении приближений решения в виде «срезок», показывается, что такие решения являются элементами пространства функций с суммируемыми производными по временной переменной; для элементов такого пространства справедлив аналог уравнения энергетического баланса. Полученные результаты лежат в основе исследования разного типа задач оптимального управления дифференциальными системами с пространственной переменной, изменяющейся в сетеподобной области.

Ключевые слова: система Навье-Стокса, сетеподобная область

Рассмотрим несколько упрощенное описание сетеподобной области изменения пространственных переменных системы Навье-Стокса. Обозначим через $\mathfrak{I}$ ограниченную область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, имеющую сетеподобную структуру, аналогичную структуре графа [1]: $\mathfrak{I} = \left(\bigcup\limits_{m=1}^{M} \mathfrak{I}_m \right) \cup \left(\bigcup\limits_{l=1}^{J} S_l \right)$, где S_l — поверхность, разделяющая смежные подобласти $\mathfrak{I}_m \subset \mathfrak{I}$ (для фиксированного l число смежных областей не менее двух), $\partial\mathfrak{I}$ — граница $\mathfrak{I}$ $(S_l \cap \partial\mathfrak{I} = \emptyset)$. Поверхность примыкания S_l смежных подобластей $\mathfrak{I}_m$ назовем узловым местом: $S_l = \bigcup\limits_{l'} S_{l,l'}$, $S_{l,l'} \subset \partial\mathfrak{I}_{l'}$; количество поверхностей $S_{l,l'}$ на единицу меньше числа примыкающих подобластей, при этом $S^-_{l,l'}$, $S^+_{l,l'}$ — поверхности, определяемые соответствующими нормалями n^-_l, n^+_l к $S_{l,l'}$.

Для вектор-функции $Y(x,t) = \{y_1(x,t), y_2(x,t), ..., y_n(x,t)\}$ $(x = \{x_1, x_2, ..., x_n\})$, определенной в области $\mathfrak{I}_T = \mathfrak{I} \times (0,T)$ $(T < \infty)$, рассмотрим систему

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \triangle Y + \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = f - grad\, p, \tag{1}$$

$$divY = 0 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0 \right). \tag{2}$$

В каждом узловом месте имеют место соотношения (условия примыкания [2])

$$Y|_{S^-_{l,l'}} = Y|_{S^+_{l,l'}}, \ \sum_l \frac{\partial Y}{\partial n^-_l}|_{S^-_{l,l'}} + \sum_l \frac{\partial Y}{\partial n^+_l}|_{S^+_{l,l'}} = 0, \tag{3}$$

начальное и граничное условия имеют вид

$$Y(x,0) = Y_0(x), \ x \in \mathfrak{I}, \ Y|_{\partial\mathfrak{I}} = 0. \tag{4}$$

В приложениях ([2], $n = 3$) начально-краевая задача (1)–(4) описывает динамику несжимаемой жидкости с вязкостью $\nu > 0$ в сетеподобной области $\mathfrak{I}$: (1), (2) — система Навье-Стокса, $Y(x,t)$, $x,t \in \overline{\mathfrak{I}}_T$ — вектор скоростей гидравлического потока, (3) — условия перетекания жидкости в узловых местах ξ_l. Используя классические пространства $L_2(\Omega)$ и $W^1_2(\Omega)$, вводятся необходимые пространства. Пусть $\mathcal{V} = \{v : \overline{\mathfrak{I}} \to \mathbb{R}^n, \ v|_{\overline{\mathfrak{I}}_m} \in C^\infty(\overline{\mathfrak{I}}_m), \ m = \overline{1,M}\}$, при этом $v \in \mathcal{V}$ удовлетворяет условию (3) и второму условию (4); замыкание $\mathcal{V}$ в пространстве $(W^1_2(\mathfrak{I}))^n$ обозначим через $H^1(\mathfrak{I})$.

Пусть далее $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}_T)$ — множество всех функций $u(x,t) \in W^{1,0}(\mathfrak{I}_T)$ $(W^{1,0}(\mathfrak{I}_T)$ — пространство функций $u(x,t) \in (L_2(\mathfrak{I}_T))^n$, для которых обобщенная производная $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in (L_2(\mathfrak{I}_T))^n)$, имеющих конечную норму $\|u\|_{\mathfrak{I}_T} = \max\limits_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot,t)\|_{(L_2(\mathfrak{I}))^n} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{(L_2(\mathfrak{I}_T))^n}$ и принадлежащие $H^1(\mathfrak{I})$ следы на сечениях $\mathfrak{I}_T$ плоскостью $t = t_0$, причем $u(x,t)$ непрерывны по t в норме $H^1(\mathfrak{I})$ на $[0,T]$. Пусть $V^{1,0}_0(\mathfrak{I}_T)$ — замыкание $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}_T)$ в норме $\|u\|_{\mathfrak{I}_T}$.

Определение. *Слабым решением задачи* (1)–(4) *называется пара* $\{Y,p\}$, *при этом функция* $Y(x,t) \in V^{1,0}_0(\mathfrak{I}_T)$ *удовлетворяет интегральному тождеству*

$$(Y(x,t), \eta(x,t)) - \int\limits_{\mathfrak{I}_t} Y(x,\tau) \frac{\partial \eta(x,\tau)}{\partial \tau} dx d\tau + \nu \int\limits_0^t \rho(Y,\eta) d\tau + \int\limits_0^t \varrho(Y,Y,\eta) d\tau =$$
$$= (Y_0(x), \eta(x,0)) + \int\limits_{\mathfrak{I}_t} f(x,\tau) \eta(x,\tau) dx d\tau$$

для любых $t \in [0, T]$ *и любых* $\eta(x,t) \in V_0^{1,0}(\Im_T)$, *а* $p(x,t)$ *принадлежит классу бесконечно дифференцируемых в* $\Im_T$ *функций с компактными носителями в* $\Im_T$.

1. Основной результат

Теорема. *Существует по меньшей мере одно слабое решение начально-краевой задачи* (1)–(4) *при произвольном (конечном)* $T > 0$.

Используя метод Фаэдо-Галеркина со специальным базисом в $H^1(\Im)$ — системой обобщенных собственных функций $\{U_i(x)\}_{i \geq 1}$, удовлетворяющей тождеству $\sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{\Im} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} dx = \lambda \int\limits_{\Im} U(x)\phi(x) dx \ \forall\, \phi(x) \in H^1(\Im)$, строятся приближения $Y_m(x,t)$ слабого решения системы (1)–(4): $Y_m(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{m} g_{i\,m}(t) U_i(x)$ (скалярные функции $g_{i\,m}(t)$ абсолютно непрерывны на $[0, T]$). Дальнейшее доказательство основано на выводе уравнения энергетического баланса, априорных оценках норм $Y_m(x,t)$, установлении слабой компактности последовательности $\{Y_m(x,t)\}$ и сходимости ее в $V_0^{1,0}(\Im_T)$.

Список литературы

[1] Podvalny S. L., Provotorov V. V., Podvalny E. S. *The controllability of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph.* Procedia Computer Sciense. 2017. Vol. 103. Pp. 324-330.

[2] Artemov M A, Baranovskii E S, Zhabko A P, Provotorov V V *On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network.* Journal of Physics. Conference Series. 2019. Vol. 1203. Article ID 012094.

Constructions of the Subdifferentials and Codifferentials

Igor Prudnikov

Scientific Center of Smolensk State Medical University, Smolensk, Russia
pim_10@hotmail.com

Keywords: positively homogeneous functions, quasidifferentiable functions, Generalized Gradients, codifferentiable functions, subdifferential of the first and second order, Clarke subdifferential, second codifferential, generalized matrices of second derivatives

1 The main results

The author studies the codifferentiable and twice codifferentiable functions introduced by Professor V.F. Demyanov, and how to calculate their subdifferentials and codifferentials. The first and second subdifferentials, introduced by the author, are used to compute the first and second codifferential at a point. One condition is given when a function is continuously codifferentiable. The proved theorems give the rules for calculation the subdifferentials and continuous codifferentials.

By definition, a function $f(\cdot):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is called quasidifferentiable at x if the decomposition

$$f(x+\Delta) = f(x) + \max_{v\in\underline{\partial} f(x)}(v,\Delta) + \min_{w\in\overline{\partial} f(x)}(w,\Delta) + o_x(\Delta) \tag{1}$$

is correct where the sets $\underline{\partial} f(x)$ and $\overline{\partial} f(x)$ are called *the subdifferential* and *the superdifferential* correspondingly [1]. The pair $[\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x)]$ is called the quasidifferential of $f(\cdot)$ at x.

We will call the function $f(\cdot)$ twice quasidifferentiable at x if the following decomposition

$$f(x+\Delta) = f(x) + \max_{[v,A]\in\underline{\partial}^2 f(x)}[(v,\Delta) + \frac{1}{2}(A\Delta,\Delta)]$$

$$+ \min_{[w,B]\in\overline{\partial}^2 f(x)}[(w,\Delta) + \frac{1}{2}(B\Delta,\Delta)] + o_x(\Delta^2), \tag{2}$$

is correct, where $\Delta^2 = \|\Delta\|^2$, $o_x(\Delta^2)\to 0$, $\frac{o_x(\alpha^2\Delta^2)}{\alpha^2} \to 0$ as $\Delta\to 0$ and $\alpha \to +0$.

We will call the sets $\underline{\partial}^2 f(x)$ and $\overline{\partial}^2 f(x)$ *the second subdifferential* and *the second superdifferential* of the function $f(\cdot)$ at the point x correspondingly, which are the convex compact sets. We will call the pair $[\underline{\partial}^2 f(x), \overline{\partial}^2 f(x)]$ the second quasidifferential of $f(\cdot)$ at x.

Demyanov V.F. and Rubinov A.M. have introduced [2] codifferentiable and twice codifferentiable functions. They called $f(\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *codifferentiable* at a point x if there exist convex compact sets $\underline{d}f(x), \overline{d}f(x)$ from $\mathbb{R}^{n+1}$, called the *hypodifferential* and *hyperdifferential* respectively, for which the decomposition

$$f(x+\Delta) = f(x) + \max_{[a,v]\in\underline{d}f(x)}[a+(v,\Delta)] + \min_{[b,w]\in\overline{d}f(x)}[b+(w,\Delta)] + o_x(\Delta), \tag{3}$$

is true and *twice codifferentiable* at a point x if there exist convex compacts $\underline{d}^2 f(x), \overline{d}^2 f(x)$ of $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$, called *the second hypodifferential* and *second hyperdifferential* respectively, for which the representation

$$f(x+\Delta) = f(x) + \max_{[a,v,A] \in \underline{d}^2 f(x)} [a + (v, \Delta) + \frac{1}{2}(A\Delta, \Delta)] +$$

$$+ \min_{[b,w,B] \in \overline{d}^2 f(x)} [b + (w, \Delta)) + \frac{1}{2}(B\Delta, \Delta)] + o_x(\Delta^2), \tag{4}$$

is true where $\Delta^2 = \|\Delta\|^2$, $o_x(\Delta) \to 0$, $o_x(\Delta^2) \to 0$ with $\Delta \to 0$, $\frac{o_x(\alpha\Delta)}{\alpha} \to 0$ and $\frac{o_x(\alpha^2\Delta^2)}{\alpha^2} \to 0$ with $\alpha \to +0$.

The pairs of sets $Df(x) = [\underline{d}f(x), \overline{d}f(x)]$ and $D^2 f(x) = [\underline{d}^2 f(x), \overline{d}^2 f(x)]$ according to the Demyanov's terminology are called *the first* and *the second codifferentials* of f at x. We suppose that the function $o_x(\Delta^2)$ in (4) is uniformly infinitesimal with respect to Δ^2 for small Δ.

The author's problem is to define and construct the continuous first and second codifferential of $f(\cdot)$ at x, using subdifferentials of the first and second orders, introduced by the author in [5]. Let us denote the author's subdifferential of the first order of $f(\cdot)$ at x by $Df(x)$.

Theorem 1. *Any quasidifferentiable Lipschitz function $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, the SVMs $\underline{\partial} f(\cdot)$, $\overline{\partial} f(\cdot)$ of which are upper semi-continuous at x and, consequently, the SVM $Df(\cdot)$ is upper semicontinuous at x, is continuously codifferentiable at x.*

Theorem 2. *Any twice quasidifferentiable Lipschitz function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, the second quasidifferential $[\underline{\partial}^2 f(\cdot), \overline{\partial}^2 f(\cdot)]$ of which is upper semicontinuous at x, is twice continuously codifferentiable at x.*

Let us give an example of a Lipschitz quasidifferentiable function $f(\cdot)$ for which $Df(\cdot)$ is not upper semicontinuous and the function $f(\cdot)$ is not continuously codifferentiable.

Example 1.. The graph of the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ consists of the segments, located between the curves $-x^2, +x^2$, with the slopes ± 1. The function $f(\cdot)$ is not representable as the difference of two convex functions in a neighborhood of the point zero, since $\vee_0^a f' = \infty$ for an arbitrary $a > 0$. It is easy to see that $\partial_{Cl} f(0) = [-1, +1]$, $Df(0) = \{0\}$. The SVM $Df(\cdot)$ is not upper semi-continuous at zero. The function $f(\cdot)$ is quasidifferentiable, but not continuously codifferentiable at zero.

References

[1] Demyanov V.F., Vasilyev L.V. Nondifferentiable optimization. Nauka, Moscow, 1981. 384 P.

[2] Demyanov V.F., Rubinov A.M. Foundation of nonsmooth analysis and quasidifferentiable calculus. M.: Nauka. 1990. 432 p.

[3] Proudnikov I.M. New constructions for local approximation of Lipschitz functions.I. Nonlinear analysis. 2003. Vol. 53, no. 3. Pp. 373–390.

[4] Proudnikov I.M. New constructions for local approximation of Lipschitz functions. II. Nonlinear Analysis 2007. V. 66, no. 7. Pp. 1443–1453.

[5] Proudnikov I.M. The Subdifferentials of the First and Second Orders for Lipschitz Functions. J. of Optimization Theory and Application. 2016. Vol. 171, no.3. Pp. 906–930.

[6] Demyanov V.F., Dixon L.C.W (Eds) Quasidifferential calculus. Mathematical Programming Study. Vol. 29. 221 p.
[7] Demyanov V.F., Pallaschke D. (Eds) Nondifferentiable optimization: Motivations and applications. Lecture Notes in Economics and mathematical systems. Berlin: Springer – Verlag. 1985. Vol. 255. 349 p.
[8] Shapiro A. Quasidifferential calculus and first-order optimality conditions in nonsmooth optimization. In [6]. Pp. 176–202.
[9] Shapiro A. On optimality conditions in quasidifferentiable optimization. SIAM J. Control Optimiz. 1984. Vol. 28. Pp. 61–617.

Numerical Estimation of the Boundaries of the Reachability Sets of Controlled Systems Based on Symbolic Formulas*

A.N. Rogalev

Institute of computing modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia
rogalyov@icm.krasn.ru

Controlled systems described by ordinary differential equations with initial or boundary conditions are considered. In the report the inclusion of the reachability domain of control systems using a guaranteed method of estimating the sets of solutions of systems of ordinary differential equations on the basis of symbolic formulas for approximating the shift operator along the trajectory are building.

Keywords: Uncertain dynamic systems, Reachability, Symbolic formulas

Численная оценка границ множеств достижимости управляемых систем на основе символьных формул

А. Н. Рогалев

ИВМ СО РАН, Красноярск, Россия
rogalyov@icm.krasn.ru

В докладе описывается алгоритм построения включения областей достижимости управляемой системы, использующий символьные формулы, а также характеристики множеств достижимости. Оцениваются вычислительные затраты предложенного алгоритма в сравнении с затратами некоторых известных алгоритмов оценки множеств достижимости. Приводятся примеры оценки множеств достижимости.

Ключевые слова: Динамические системы с возмущениями, области достижимости, символьные формулы, граничные и внутренние точки

1. Основные результаты

При решении многих задач движение управляемой системы описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, u), \tag{1}$$

с заданным классом допустимых управлений $u \in U$, с известными начальным и конечным состоянием управляемой системы, при выполнении условий, наложенных на правую часть системы дифференциальных уравнений. Множеством достижимости

* Работа была выполнена при поддержке ФИЦ КНЦ СО РАН, проект № 0287-2021-0002.

в момент времени t называется множество всех точек из фазового пространства, в которые можно перейти на отрезке времени $[t_0, T]$ из всех возможных точек начального множества фазовых состояний по решениям системы (1) с начальным условием и с допустимым управлением. Понятие области достижимости позволяет решать различные конкретные задачи теории управления. Это подтверждает большое число публикаций, посвященных вопросам оценивания множеств достижимости. В статье приводятся ссылки к нескольким статьям [1]- [4], сделать полный обзор всех работ, посвященных оцениванию множеств достижимости – это задача, требующая существенно больших ресурсов и выходящая за рамки данных тезисов.

В докладе описывается включение множеств достижимости с помощью гарантированного метода, основанного на символьной формуле оператора сдвига вдоль траектории и вычислении множеств значений этой формулы на области всех управляющих воздействий [5]- [10]. Символьная формула (аналитическое выражение) – это запись символьной формы включающей знаки операций, имена функций и констант, вычисление по которой позволяет получить значение решения. Для получения символьных формул использовалось последовательное исполнение метода хранения и переработки символьной информации при продвижении вдоль траектории решений на основе статичного хранения этой информации, работы с адресацией памяти с помощью функций поточной обработки.

Список литературы

[1] Куржанский А.Б., Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977 .

[2] Черноусько Ф.Л., Оценивание фазового состояния динамических систем, М.: Наука, 1988.

[3] Тятюшкин А. И., Моржин О. В. Численное исследование множеств достижимости нелинейных управляемых дифференциальных систем // Автомат. и телемеханика. 2011. №6. С.160–170.

[4] Филиппова Т.Ф. Оценки множеств достижимости управляемых систем с нелинейностью и параметричским возмущениями // Труды института математики и механики УрО РАН. 2014. Т.20. №4. С. 287–296.

[5] Рогалев А.Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8(5). С.102–116.

[6] Рогалев А.Н. Символьные вычисления в гарантированных методах, выполненные на нескольких процессорах // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2006. № 1 (4). С. 56–62

[7] Rogalev A.N., Rogalev A.A., Feodorova N.A. Numerical computations of the safe boundaries of complex technical systems and practical stability. J. Phys: Conf. Ser. 2019. Vol. 1399, 33112.

[8] Rogalev A.N., Rogalev A.A., Feodorova N.A. Malfunction analysis and safety of mathematical models of technical systems. J. Phys.: Conf. Ser. 2020. Vol. 1515, 022064

[9] Rogalev A.N. Set of Solutions of Ordinary Differential Equations in Stability Problems. Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy, Springer Nature Switzerland AG, 2020, 307-312

[10] Rogalev A.N., Rogalev A.A., Feodorova N.A. Mathematical modelling of risk and safe regions of technical systems and surviving trajectories, J. Phys: Conf Ser. 2021. Vol. 1889, 022108

Asymptotic Modelling of Interfaces in Kirchhoff-Love's Plates theory*

Evgeny Rudoy

[1] Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk, Russia
[2] Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of SB RAS, Novosibirsk, Russia
rem@hydro.nsc.ru

Within the framework of the Kirchhoff-Love theory, a thin homogeneous layer (called adhesive) of small width between two plates (called adherents) is considered. It is assumed that elastic properties of the adhesive layer depend on its width which is a small parameter of the problem. Our goal is to perform an asymptotic analysis as the parameter goes to zero. It is shown that depending on the softness or stiffness of the adhesive, there are seven distinct types of interface conditions. In all cases, we establish weak convergence of the solutions of the initial problem to the solutions of limiting ones in appropriate Sobolev spaces. The asymptotic analysis is based on variational properties of solutions of corresponding equilibrium problems.

Keywords: Bonded structure; Composite material; Interface conditions; Biharmonic equation; Asymptotic analysis

1 The main results

Within the framework of the Kirchhoff theory of plates, the problem of two homogeneous plates (called adherents) connected by an adhesive layer is investigated. It is assumed that the elastic properties of the adhesive layer depend on a small parameter ε characterizing width of the adhesive layer as ε^R, where R is a real number. The elastic properties of the adherents do not depend on ε and remain constant. The structure is in equilibrium under the action of applied forces while the plates are fixed on the parts of their external boundaries. The equilibrium problem is formulated in the form of a variational equality over a set of admissible deflections belonging to the Sobolev spaces H^2. It means that the deflections of the plates are described by biharmonic equations (which correspond to pure bending, see, e.g., [1,2]). The deflections and their normal derivatives are supposed to be equal at the interfaces between the adhesive and adherents.

The main objective of the work is to justify with mathematical rigor the passing to the limit as ε tends to zero. We show that there are seven distinct limit problems depending on R. For these problems it is shown that the influence of adhesive on adherents can be expressed by special boundary conditions also depending on the type of the interface: vacuous type ($R > 3$), spring type ($R = 3$), hinge type ($R \in (1, 3)$), torque type ($R = 1$), ideal contact type ($R \in (-1, 1)$), thin elastic inclusion type ($R = -1$), thin rigid inclusion type ($R < -1$).

A general scheme for finding limit problems and interface conditions is as follows. Firstly, the initial problem is decomposed into three problems for each plate. The solutions of these problems are connected via boundary conditions from the initial one. Then we apply

* The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under agreement No. 075-15-2022-281 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

one-to-one coordinate transformations, which represent rescaling for the adhesive layer and uniform translation for the adherents. Basing on analog of the Poincarè inequality and the prescribed Dirichlet boundary conditions on both adherents, we obtain the a priori estimates in H^2-spaces, that allow us to study weakly converging sequences of the solutions. After studying the properties of weak limits, we identify sets of admissible deflections for the limit problems. At last, we pass to the limit in the initial problem by constructing special test functions for the variational equality [4].

References

[1] Destuynder P., Salaun M. Mathematical analysis of thin plate models. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.

[2] Khludnev A.M., Sokolowski J. Modelling and control in solid mechanics. Birkhäuser Basel, 1997.

[3] Moreau J.-J. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. J. Differential Eq. 1977. Vol. 26. Pp. 347–374.

[4] Furtsev A., Rudoy E. Variational approach to modeling soft and stiff interfaces in the Kirchhoff-Love theory of plates. International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 202. Pp. 562–574.

Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential

Viktor Korzyuk[1,2], Jan Rudzko[1]

[1] Belarusian State University, Minsk, Belarus
korzyuk@bsu.by
[2] Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
janycz@yahoo.com

For the telegraph equation with a nonlinear potential given in the first quadrant, we consider a mixed problem in which the Cauchy conditions are specified on the spatial half-line and the Dirichlet condition is specified on the time half-line. The solution is constructed by the method of characteristics in an implicit analytical form as a solution of some integral equations. The solvability of these equations, as well as the dependence on the initial data and the smoothness of their solutions, is studied. For the problem in question, the uniqueness of the solution is proved and the conditions under which its classical solution exists are established.

Keywords: telegraph equation, nonlinear potential, nonlinear wave equation, classical solution, mixed problem, matching conditions, method of characteristics

1 The main results

In the domain $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ of two independent variables $(t, x) \in Q \subset \mathbb{R}^2$, consider the one-dimensional nonlinear equation

$$\Box u(t, x) - \lambda(t, x) f(t, x, u(t, x)) = F(t, x), \tag{1}$$

where $\Box = \partial_t^2 - a^2 \partial_x^2$ is the d'Alembert operator ($a > 0$ for definiteness), F and λ are functions given on the set $\overline{Q}$, and f is a function given on the set $[0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathbb{R}$ and satisfying the Lipschitz condition with constant L in the third variable; i.e. $|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$. Equation (1) is equipped with the initial condition

$$u(0, x) = \varphi(x), \partial_t u(0, x) = \psi(x), x \in [0, \infty), \tag{2}$$

and the boundary condition

$$u(t, 0) = \mu(t), t \in [0, \infty), \tag{3}$$

where φ, ψ and μ are functions given on the half-line $[0, \infty)$.

Theorem. *Let the conditions $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, and $\mu \in C^2([0, \infty))$ be satisfied, and let the function f satisfy the Lipschitz condition with constant L with respect to the third variable. The first mixed problem (1) – (3) has a unique solution u, in the class $C^2(\overline{Q})$ if and only if conditions*

$$\mu(0) = \varphi(0), \tag{4}$$

$$\mu'(0) = \psi(0), \tag{5}$$

$$\mu''(0) = \frac{1}{2}\lambda(0, 0)(f(0, 0, \mu(0)) + f(0, 0, \varphi(0))) + F(0, 0) + a^2 \varphi''(0), \tag{6}$$

are satisfied.

If the given functions of problem (1) – (3) do not satisfy the homogeneous matching conditions (4), (5) and (6), then the solution of problem (1) – (3) is reduced to solving the corresponding matching problem in which the matching conditions are given on the characteristic $x - at = 0$.

The following conditions can be taken for the matching conditions:

$$
\begin{aligned}
&[(u)^+ - (u)^-](t, x = at) = \varphi(0) - \mu(0),\\
&[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, x = at) = \psi(0) - \mu'(0) +\\
&+ \frac{1}{4a}\int\limits_0^{2at} \lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\left[f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\right] dz,\\
&[(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-](t, x = at) = F(0,0) + \frac{\lambda(0,0)}{2}\left(f(0,0,(u)^+(0,0)) + f(0,0,(u)^-(0,0))\right) +\\
&+ \frac{\lambda(t, at)}{2}\left(f(t, at, (u)^+(t, at)) - f(t, at, (u)^-(t, at))\right) - \mu''(0) + a^2\varphi''(0) + \frac{1}{8a}\times\\
&\times \int\limits_0^{2at}\Bigg\{\left(a\partial_x\lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - \partial_t\lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\left(f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\right) +\\
&+ \lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \times \Bigg[\left((\partial_t u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - a(\partial_x u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\partial_y f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, y = (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) -\\
&\qquad - a\partial_x f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) + \partial_t f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\Bigg] -\\
&- \lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \times \Bigg[\left((\partial_t u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - a(\partial_x u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\partial_y f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, y = (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) -\\
&\qquad - a\partial_x f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) + \partial_t f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\Bigg]\Bigg\} dz. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Here by $()^\pm$ we have denoted the limit values of the function and its partial derivatives calculated on different sides of the characteristic $x - at = 0$; i.e., $(\partial_t^p u)^\pm(t, x = at) = \lim\limits_{\delta\to 0+} \partial_t^p u(t, at \pm \delta)$.

Now problem (1) – (3) can be stated using the matching conditions (7) as follows.

Problem (1) – (3) with matching conditions on characteristics. Find a classical solution of Eq. (1) with the Cauchy conditions (2), the boundary conditions (3), and the matching conditions (7).

References

[1] Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Sokolovich V. Yu. Classical solution of the mixed problem in the quarter of the plane for the wave equation. Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. 2018. Vol. 62, no. 6. Pp. 647–651. [In Russian]

[2] Korzyuk V. I., Equations of mathematical physics: textbook. 2nd ed. Lenand, Moscow, 2021. [In Russian]

[3] Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential. Differential Equations. 2022. Vol. 58, no. 2. Pp. 175–186.

[4] Stolyarchuk I. I. Classical solutions of mixed problems for the Klein–Gordon–Fock equation. Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation. Grodno, 2020. [In Russian]

Bright Solitons in a (2+1)-dimensional Oceanic Model: Dynamics, Interaction and Molecule Formation*

Sakkaravarthi Karuppaiya

Young Scientist Training Program, Asia-Pacific Center for Theoretical Physics (APCTP),
POSTECH Campus, Pohang – 37673, Republic of Korea
ksakkaravarthi@gmail.com

In this work, we consider the following integrable (2+1)-dimensional nonlinear model which arises in different perspectives to describe the dynamics of ion acoustic waves in a magnetized plasma, deep water oceanic rogue waves, optical wave propagation in Erbium-doped coherently excited waveguides, Bragg grating optical fiber, etc.:
$iq_t + aq_{xy} + 2ib(qq^*_x - q^*q_x)q = 0,$
where $q(x, y, t)$ is envelope of the wave, x and y are spatial variables while t denotes the temporal variable and the symbol $*$ represents the complex conjugate. Here the coefficients a and b correspond to the dispersion and nonlinearity. The above model can also be viewed as a (2+1)D extension of the standard (1+1)D focusing nonlinear Schrödinger equation which appear in diverse fields of physics and show promising characteristics. First, we construct bright soliton solutions by using the powerful bilinearization method and explore their propagation characteristics. Next, we investigate the interaction dynamics of bright solitons for different choices of parameters which show head-on and oblique type elastic interactions where the solitons reappear unaltered after interaction and exhibits only a phase-shift with explicit asymptotic analysis. Finally, we unravel the possibility of soliton molecule formation through velocity resonance mechanism which gives rise to the generation of breathers. Especially, we discuss the influence of dispersion and nonlinearities in the dynamics, interaction and molecules. The obtained results will add significant knowledge to the understanding of higher dimensional solitons.

Keywords: Nonlinear Waves, Higher-dimensional Nonlinear Model, Bright Solitons, Interaction Dynamics, Soliton Molecules

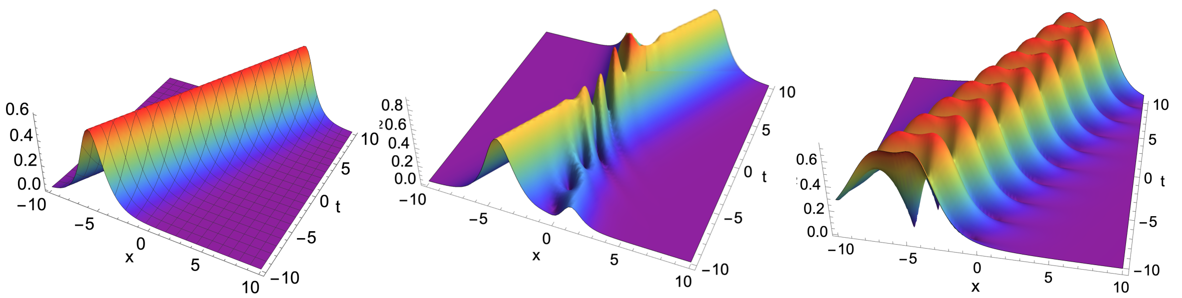


Figure 1. The dynamics of (a) single bright soliton, (b) two-soliton elastic interaction, (c) soliton molecule leading to breather formation.

* The research is supported through Young Scientist Training (YST) project by APCTP.

A Numerical Scheme for Solving of a Bilinear Optimal Impulsive Control Problem with Intermediate State Constraints*

Olga Samsonyuk

ISDCT SB RAS, Irkutsk, Russia
olga.samsonyuk@icc.ru

Keywords: impulsive control, trajectory of bounded variation, Lyapunov type function, optimality condition, numerical solution method

This talk is devoted to a numerical scheme for solving of a bilinear optimal impulsive control problem with intermediate phase constraints. This scheme is based on optimality conditions using compound monotone functions of the Lyapunov type [1,2].

References

[1] Samsonyuk O.N. Optimality conditions for optimal impulsive control problems with multipoint state constraints. Journal of Global Optimization. 2020. Vol. 76, no. 3. Pp. 625–644. DOI: 10.1007/s10898-019-00868-w

[2] Samsonyuk O.N., Sorokin S.P. Optimality Conditions for Impulsive Processes with Intermediate State Constraints. The 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB), Moscow, Russia, 3–5 June 2020. IEEE, 2020. DOI: 10.1109/STAB49150.2020.9140658

* This work is financially supported by the project of ISDCT SB RAS "Theory and methods for studying of evolutionary equations and control systems with applications," no. 121041300060-4.

On a property of continuous dependence of sets in the space of measures

Dmitrii Serkov, Alexander Chentsov

Krasovskii institute of mathematics and mechanics, Yekaterinburg, RF
serkov@imm.uran.ru, chentsov@imm.uran.ru

With the aim of applying to program constructions in the theory of differential games and other guarantee optimization problems, we study the dependence of the set of Borel measures on the product $X \times Y$ of metric compact sets on their marginals from some $*$-weak compact set of measures on X. The continuity of such a dependence in the Hausdorff metric generated by the $*$-weak metric on the union of the specified sets of Borel measures is shown to be continuous under varying marginals in the $*$-weak compact set.

Keywords: Borel measure, Hausdorff metric

Об одном свойстве непрерывной зависимости множеств в пространстве мер

Д. А. Серков, А. Г. Ченцов,

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, РФ
serkov@imm.uran.ru, chentsov@imm.uran.ru

С целью применения к программным конструкциям в теории дифференциальных игр и других задачах оптимизации гарантии, изучается зависимость множества борелевских мер на произведении $X \times Y$ метрических компактов от их маргиналов из некоторого $*$-слабого компакта мер на X. Показана непрерывности такой зависимости в метрике Хаусдорфа, порождённой $*$-слабой метрикой на объединении указанных множеств борелевских мер, при изменении маргиналов в $*$-слабом компакте.

Ключевые слова: борелевская мера, метрика Хаусдорфа

Рассматривается декартово произведение $X \times Y$ двух непустых метрических компактов X, Y с σ-алгебрами своих борелевских подмножеств. На компакте X задан непустой компакт M борелевских (неотрицательных) мер в относительной *-слабой топологии (в этом случае каждая борелевская мера регулярна (см., например, [1, гл. 1. §1])). Каждой мере μ из этого компакта сопоставляется множество $\mathfrak{N}_\mu$ всех борелевских мер на произведении компактов $X \times Y$ с общим маргинальным распределением в виде указанной меры μ; данное множество назовем программой, отвечающей данной мере μ на метрическом компакте X. Пространство знакопеременных борелевских мер на произведении $X \times Y$ оснащаем *-слабой топологией. Объединение всех программ оказывается *-слабо замкнутым и сильно ограниченным в силу (*-слабой) компактности множества мер M. Поскольку пространство непрерывных функций на произведении метрических компактов сепарабельно, то (*-слабо компактное) объединение программ, рассматриваемое как подпространство пространства (знакопеременных) борелевских мер на $X \times Y$, метризуемо [2, Теорема 1.3.12]. Фиксируя некоторую метрику ρ, порождающую указанную относительную $*$-слабую топологию на объединении программ, получаем метрический компакт, на непустых замкнутых подмножествах которого вводим метрику Хаусдорфа. В частности, оценивая в этой метрике различие программ $\mathfrak{N}_\mu$, $\mu \in M$, показываем, что зависимость упомянутых программ $\mathfrak{N}_\mu$ от порождающих эти программы маргинальных мер $\mu \in M$ непрерывна.

Данное утверждение существенно обобщает положение [3, Лемма П.2], использовавшееся в конструкциях решения регулярных дифференциальных игр [4, глава VII]; добавим к этому свойство непрерывной зависимости пучков обобщённых траекторий в дифференциальных играх при изменении порождающих эти пучки управлений мер одного из игроков [5]. Свойства такого рода существенны в конструкциях [4] решения нелинейных дифференциальных игр, использующих понятие программного максимина. Данные конструкции, в свою очередь, являются глубоким развитием понятия регулярности для линейных дифференциальных игр, предложенного в [6].

Список литературы

[1] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

[2] Варга Д. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

[3] Ченцов А. Г. Об одной игровой задаче управления на минимакс // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1975. № 1. С. 39–46.

[4] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974.

[5] Ченцов А. Г. Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения–уклонения // Уральский политехнический институт им. С.М.Кирова. Свердловск. Рукопись депонирована в ВИНИТИ 1933–79. 1979.

[6] Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.

On the Solution of the Hamilton-Jacobi Equation with State Constraints Given by Zeros of the Coefficients at the Exponential Terms of the Hamiltonian

Lyubov Shagalova

IMM UrB RAS, Yekaterinburg, Russia
shag@imm.uran.ru

The Cauchy problem for the Hamilton-Jacobi equation with a Hamiltonian depending on the state and momentum variables is considered. In this case, the dependence on the momentum is exponential. The state space is one-dimensional. The problem is considered in the strip determined by zeros of the monotone functions of the state variable which are the coefficients at the exponential terms of the Hamiltonian. The existence and uniqueness theorem for the viscosity solution of the problem under consideration is proved.

Keywords: Hamilton-Jacobi equation, viscosity solution, state constraints, method of characteristics

О решении уравнения Гамильтона – Якоби с фазовыми ограничениями, задаваемыми нулями коэффициентов при экспоненциальных слагаемых гамильтониана

Л. Г. Шагалова

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
shag@imm.uran.ru

Рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона – Якоби с гамильтонианом, зависящим от фазовой и импульсной переменной. При этом зависимость от импульсной переменной экспоненциальна. Фазовое пространство одномерно. Задача рассматривается в полосе, определяемой нулями монотонных функций фазовой переменной, которые являются коэффициентами при экспоненциальных слагаемых гамильтониана. Доказана теорема существования и единственности вязкостного решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона – Якоби, вязкостное решение, фазовые ограничения, метод характеристик

Рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона – Якоби с фазовыми ограничениями следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad t \in (0, T),\, x \in [x_*, x^*] \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in R. \tag{2}$$

Здесь $T > 0$ – заданный момент времени, $u_0(\cdot)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Заданы непрерывно дифференцируемые функции $h(\cdot) : R \to R, \quad f(\cdot) : R \to R$, $g(\cdot) : R \to R$. При этом $f(\cdot)$ является строго возрастающей, а $g(\cdot)$ — строго убывающей, и существуют точки x_* и $x^*, \quad x_* < x^*$ такие, что

$$f(x_*) = 0, \quad g(x^*) = 0.$$

Таким образом, отрезок $[x_*, x^*]$ в (1) определяется нулями функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$. Задача (1), (2) рассматривается в случае, когда гамильтониан имеет вид

$$H(x,p) = h(x) + f(x)e^p + g(x)e^{-p}. \tag{3}$$

Поскольку на отрезке $[x_*, x^*]$ функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ неотрицательны, гамильтониан (3) является выпуклым по импульсной переменной p.

Задачи с экспоненциальной зависимостью гамильтониана нетипичны для теории уравнений Гамильтона – Якоби. Вместе с тем, такие задачи возникают в прикладных исследованиях (см., например, [1]). При этом для таких задач не выполнены известные условия, для которых доказаны теоремы существования вязкостных [2] решений. Для ряда подобных задач вязкостных решений не существует, поэтому приходится вводить новые обобщенные решения [3].

Для задачи (1),(2),(3) доказана теорема существования и единственности вязкостного решения. Доказательство теоремы базируется на решении задач вариационного исчисления с подвижными границами [4], исследовании характеристической системы уравнения (1), (3) с начальным условием (2) и применении метода обобщенных характеристик [5].

Список литературы

[1] Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A. Dynamics of the Eigen and the Crow-Kimura models for molecular evolution. Physical Review E. 2008. Vol 78. 041908.

[2] Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.

[3] Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г. О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона - – Якоби с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 191–208.

[4] Clarke F.H. Tonelli's regurarity theory in the calculus of variations: Recent progress. Optimization and Related Fields. Lecture Notes in Mathematics. 1986. Vol. 1190. P. 163–179.

[5] Subbotina N.N. The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization. Modern Mathematics and its Applications. 2004. Vol. 20. P. 2955–3091.

Fluid Storage Control with a Proportional-integrally Differentiating Solver

E. R. Shaihiev[1], A. D. Nizamova[2]

[1] USATU, Ufa, Russia
erik08082002@mail.ru
[2] Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Investigation Center, RAS, Russia
adeshka@yandex.ru

For water and oil the PID-controller coefficients responsible for the operation of the outlet valve were found, an interface was created for controlling, automating and optimizing a given process in the open software tool "WinCC OA" by SIEMENS.

Keywords: proportional-integrally differentiating solver, proportional-integrally differentiating coefficient, fluid

Контроль хранилища жидкости при помощи ПИД-регулятора

Э. Р. Шайхиев[1], А. Д. Низамова[2],

[1] УГАТУ, Уфа, Россия
erik08082002@mail.ru
[2] ИМех УФИЦ РАН, Уфа, Россия
adeshka@yandex.ru

Для воды и нефти найдены коэффициенты ПИД-регулятора, отвечающие за работу выходного клапана, создан интерфейс для контролирования, автоматизации и оптимизации заданного процесса в открытом программном инструменте "WinCC OA" компании SIEMENS.

Ключевые слова: ПИД-регулятор, ПИД-коэффициент, жидкость

Рассматривается гидродинамическая система уравнений для модели вязкой жидкости, в которой определяются параметры установившегося прямолинейного потока несжимаемой жидкости.

Для регулирования выходного потока по мере приближения уровня жидкости к заданному уровню для формирования входного сигнала с точным и качественным переходным процессом в автоматических системах управления используют пропорционально-интегрально-дифференцирующий (ПИД) регулятор.

ПИД-регулятор в управляющем контуре использует обратную связь. ПИД-закон регулирования обеспечивает достаточно высокую точность поддержания уровня жидкости. Уровень оттока жидкости рассчитывается по формуле

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau - R_d \cdot \frac{de(t)}{dt},$$

где пропорциональный K_p, интегральный K_i, и дифференциальный K_d ПИД-коэффициенты регулирования.

Слагаемое $K_p \cdot e(t)$ прямо пропорционально ошибке $e(t)$ разности установки и измененного значения уровня. Использовние только пропорциональной части зачастую приводит к ошибке между установкой и фактическим значением.

Слагаемое $K_i \int_0^t e(\tau)d\tau$ учитывает прошлые значения ошибки и интегрирует их, то есть при помощи интегральной составляющей устраняет остаточную ошибку, возникающую при использовании одной пропорциональной составляющей.

Слагаемое $-R_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$ пропорционально скорости изменения уровня с обратным знаком и должно препятствовать резким скачкам уровня, а именно, упреждает ошибку и эффективно стремится уменьшить ее.

Для достижения хорошего качества регулирования необходимо правильно подобрать коэффициенты к установке. Настройка ПИД-регулятора зачастую осуществляется методом проб и ошибок.

Для создания программного интерфейса будем пользоваться программой SIMATIC WinCC Open Architecture от компании SIEMENS, находящуюся в открытом доступе. ПИД-регулирование выполняется с использованием глобального скрипта Model.ctl.

С помощью программы выполняется имитация поведения системы резервуаров, контроллеров и прочего.

Список литературы

[1] Sherman F.S. Viscous Flow. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill, 1990.

[2] Муртазина Р.Д., Кудашева Е.Г., Низамова А.Д., Сидельникова Н.А. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Устойчивость течения жидкостей в канале с линейным профилем температуры. М.: Русайнс, 2021.

[3] Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. № 9. Pp. 2211–2215.

Tensor Invariants of Dynamical Systems with Dissipation

Maxim V. Shamolin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

In this work, the complete set of tensor invariants of some classes of dynamic systems on the tangent bundles of a multidimensional manifold is demonstrated. In this case, force fields are characterized by so-called variable dissipation and generalize the earlier considered fields.

Keywords: dynamical system, tensor invariants, dissipation, integrability

In the problems of dynamics, mechanical systems with many degrees of freedom with dissipation (position space, multidimensional manifold) are studied. The tangent bundles of these manifolds become their phase spaces. Thus, for example, the study of an ndimensional generalized spherical pendulum in a nonconservative field of forces leads to a dynamic system on the tangent bundles of an $(n-1)$-dimensional sphere, and the metrics of special form on it are induced by an additional group of symmetry [1], [2]. In this case, the dynamic systems describing the motion of such a pendulum are characterized by alternating dissipation, and the complete list of the first integrals is composed of transcendental (in the sense of complex analysis) functions, which can be expressed through a finite combination of elementary functions.

Let us also define the class of problems about the motion of a point over a multidimensional surface, the metrics on which are induced by the Euclidian metrics of the overall space. In some cases, it is also possible to find the complete list of the first integrals composed of transcendental functions in systems with dissipation. The results obtained are especially important in the sense of the presence of just a nonconservative field of forces in a system.

In this work, the integrability of some classes of dynamic systems on the tangent bundles of a multidimensional manifold is demonstrated (for similar studies on the tangent bundles of two-, three, and fourdimensional manifolds, see [3], [4], [5]). In this case, the force fields are characterized by so-called alternating dissipation and generalize the fields considered earlier (see also [6], [7]).

References

[1] Shamolin M.V. New Case of Integrability in the Dynamics of a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field. Doklady Physics. 2013. Vol. 58, no 11. Pp. 496–499.

[2] Shamolin M.V. A New Case of Integrability in the Dynamics of a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field under the Assumption of Linear Damping. Doklady Physics. 2014. Vol. 59, no 8. Pp. 375–378.

[3] Shamolin M.V. New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Two-Dimensional Manifold. Doklady Physics. 2017. Vol. 62, no 8. Pp. 392–396.

[4] Shamolin M.V. New Cases of Integrable Systems with Dissipation on the Tangent Bundle of a Three-Dimensional Manifold. Doklady Physics. 2017. Vol. 62, no 11. Pp. 517–521.

[5] Shamolin M.V. New Cases of Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Four-Dimensional Manifolds. Doklady Physics. 2018. Vol. 63, no 3. Pp. 132–137.
[6] Kozlov V.V. Integrability and Nonintegrability in Hamiltonian Mechanics. Russian Mathematical Surveys. 1983. Vol. 38, no 1. Pp. 1–87.
[7] Kozlov V.V. Tensor invariants and integration of differential equations. Russian Mathematical Surveys. 2019. Vol. 74, no 1. Pp. 111–140.

Impulse Response Matrix for Time-Varying System of Differential-Algebraic Equations

Alla A. Shcheglova

ISDCT SB RAS, Irkutsk, Russia
shchegl@icc.ru

Keywords: differential-algebraic equations, impulse response matrix, minimal realization

A range of questions related to the impulse response matrix [1] for a system of linear differential-algebraic equations (DAE) [2] is considered. For systems with infinitely differentiable coefficients, it is shown that this matrix is represented as a sum of the impulse response matrices of the differential and algebraic subsystems. The form of non-degenerate change of variables has been found, which does not affect the view of impulse response matrix. Realizations of this matrix are proposed to construct in the class of index 1 DAE, which are separated into differential and algebraic parts. The necessary and sufficient conditions for the realisability of an impulse response matrix in the class of algebraic systems are obtained. The questions of the methods of construction and the dimension of the minimal realization of such a matrix are considered under various assumptions.

References

[1] D'Angelo H. Linear systems with variable parameters. Moscow: Mashinostroenie, 1974.

[2] Shcheglova A.A. The solvability of the initial problem for a degenerate linear hybrid system with variable coefficients. Russian Mathematics. 2010. No. 9. Pp. 49–61.

On the Spectrum of One Class of Integral-Functional Operators in Solving Nonlinear Volterra Loaded Equations

Nikolay Sidorov, Lev Sidorov

ISU, Irkutsk, Russia
sidorovisu@gmail.com, lev.ryan.lev@gmail.com

Keywords: Integral-functional operator, eigenfunctions, integer analytic functions, Volterra equations

The eigenvalues and eigenfunctions are constructed for the following operators:

$$Ax = \int_0^t K(x,s)x(s)dx + a(t)x_\alpha,$$

where $x_\alpha = x(\alpha(t))$ or $x_\alpha = \int_a^b x(t)d\alpha(t)$ is Stieltjes functional (load), $a(t)$ and $\alpha(t)$ are given functions.

Example 1. For operators $Ax = \int_0^t x(s)ds + x\left(\frac{t}{2}\right)$ eigenvalue $\lambda = 1$. Corresponding eigenfunction $\phi(t)$ for $t \in \mathbb{R}$ is constructed as following series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$$

$$a_0 = 1, a_n = \frac{2^n}{n(2^n - 1)} a_{n-1}, n = 1, 2, ...$$

The presented analytical method for constructing eigennumbers and eigenfunctions of the operator A is used in constructing branching solutions of the nonlinear Volterra integral equations considered in [1].

References

[1] Sidorov N.A., Sidorov D.N. *Nonlinear Volterra Equations with Loads and Bifurcation Parameters: Existence Theorems and Construction of Solutions.* Diff Equat. 2021. Vol. 57. 1640–1651.

О роли спектра одного класса интегрально-функциональных операторов в решении нелинейных уравнений Вольтерра с нагрузками

Н. А. Сидоров, Л. Д. Сидоров

Иркутский государственный университет (ИГУ), Иркутск, Россия
sidorovisu@gmail.com, lev.ryan.lev@gmail.com

Ключевые слова: Интегрально-функциональный оператор, собственные функции, целые аналитические функции, уравнения Вольтерра

Строятся собственные числа и собственные функции операторов вида:

$$Ax = \int_0^t K(x,s)x(s)dx + a(t)x_\alpha,$$

где $x_\alpha = x(\alpha(t))$ или $x_\alpha = \int_a^b x(t)d\alpha(t)$ – функционал Стилтьеса, называемый в приложениях нагрузкой, $a(t)$ и $\alpha(t)$ – заданные функции.

В ряде простых случаев собственные функции таких операторов легко построить в классе целых аналитических функций.

Пример 2. У оператора $Ax = \int_0^t x(s)ds + x\left(\frac{t}{2}\right)$ собственное число $\lambda = 1$, а соответствующая собственная функция $\phi(t)$ при $t \in \mathbb{R}$ строится в виде сходящегося ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$$

$$a_0 = 1, a_n = \frac{2^n}{n(2^n-1)}a_{n-1},\ n = 1, 2, ...$$

Излагаемый аналитический метод построения собственнных чисел и собственных функций оператора A используется при построении разветвляющихся решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра, рассмотренных в работе [1].

Список литературы

[1] Sidorov N.A., Sidorov D.N. Nonlinear Volterra Equations with Loads and Bifurcation Parameters: Existence Theorems and Construction of Solutions. Diff Equat. 2021. Vol. 57. Pp. 1640–1651.

On a Model of Population Dynamics with Several Delays ⋆

Maria Skvortsova

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
sm-18-nsu@yandex.ru

We consider a system of delay differential equations describing the interaction of n species of microorganisms. We study the asymptotic stability of stationary solutions to the system. We establish estimates of solutions characterizing the stabilization rate at infinity and found estimates of the attraction domains. Lyapunov–Krasovskii functionals are used to obtain the results.

Keywords: model of interaction of populations, delay differential equations, asymptotic stability, estimates of solutions, attraction domains, Lyapunov–Krasovskii functionals

Об одной модели динамики популяций с несколькими запаздываниями

М. А. Скворцова

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
sm-18-nsu@yandex.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая взаимодействие n видов микроорганизмов. Проведены исследования асимптотической устойчивости стационарных решений системы. Установлены оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, и найдены оценки на области притяжения. При получении результатов использовались функционалы Ляпунова – Красовского.

Ключевые слова: модель взаимодействия популяций, уравнения с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, оценки решений, области притяжения, функционалы Ляпунова – Красовского

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}S(t) = (S^0 - S(t))D - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i(S(t))N_i(t), \\ \dfrac{d}{dt}N_i(t) = -D_iN_i(t) + \alpha_i p_i(S(t-\tau_i))N_i(t-\tau_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \tag{1}$$

⋆ Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Система описывает взаимодействие n видов микроорганизмов [1], при этом $N_i(t)$ — численность популяции i-го вида, $S(t)$ — концентрация питательного вещества. Коэффициенты системы S^0, D, D_i, α_i и параметры запаздывания τ_i предполагаются положительными и постоянными. Также предполагается, что функции $p_i(S)$ локально липшицевы, монотонно возрастающие и $p_i(0) = 0$.

В работе проведены исследования асимптотической устойчивости стационарных решений системы (1). Установлены оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, и найдены оценки на области притяжения. При получении результатов использовались функционалы Ляпунова – Красовского [2].

Список литературы

[1] Wolkowicz G.S.K., Xia H. Global asymptotic behavior of a chemostat model with discrete delays. SIAM J. Appl. Math. 1997. Vol. 57, No. 4. Pp. 1019–1043.

[2] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

On Numerical Solution of the Second Order Differential-algebraic Equations

Liubov Solovarova[1], Ta Duy Phuong[2]

[1] ISDCT SB RAS, Irkutsk, Russia
soleilu@mail.ru
[2] Institute of Mathematics of the Vietnamese Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam
tdphuong@math.ac.vn

A multistep method and its version based on a reformulated notation of the original problem are investigated for numerical solution of the second order differential-algebraic equations.

Keywords: differential-algebraic equations, high order

О численном решении дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка

Л. С. Соловарова[1], Т. З. Фыонг[2]

[1] ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия
soleilu@mail.ru
[2] Институт математики Вьетнамской Академии Наук и Технологий, Ханой, Вьетнам
tdphuong@math.ac.vn

Для численного решения дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка исследуются многошаговый метод и его вариант, основанный на переформулированной записи исходной задачи.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, высокий порядок

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) различных порядков один из основных инструментов для моделирования важных прикладных задач. Если все уравнения одинакового порядка, то они образуют систему ОДУ. Если процесс или явление описываются взаимосвязанными ОДУ различных порядков и трансцендентными (конечномерными) уравнениями, то, объединяя их, получим систему ОДУ с тождественно вырожденной матрицей перед старшей производной. Такие системы принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Если порядок такой системы выше первого, то их называют ДАУ высокого порядка.

К настоящему времени бурно развиваются качественная теория и численные методы решения ДАУ первого порядка (как для начальной, так и для краевой задачи). Для ДАУ высокого порядка обычно применяют следующий стандартный подход [1]. Путем введения новой вектор-функции размерности nk (n – размерность исходной задачи, k –

порядок ДАУ) записывают эту задачу в виде ДАУ первого порядка. Такое преобразование имеет ряд недостатков: увеличивает размерность в k раз и значительно ухудшает свойства полученной задачи.

В докладе для ДАУ второго порядка вида

$$A(t)x^{''}(t) + B(t)x^{'}(t) + C(t)x(t) = f(t),\ t \in [0,1], \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, x^{'}(t)|_{t=0} = x^{'}_0, \tag{2}$$

где $A(t), B(t), C(t)$ – $(n \times n)$-матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ – заданная и искомая n-мерные вектор-функции, соответственно, $x_0, x^{'}_0 \in R^n$, $detA(t) \equiv 0$, предлагаются многошаговые методы, построение которых основано на идеях из [2].

Список литературы

[1] Mehrmann V., Shi C. Transformation of high order linear differential-algebraic systems to first order. Numerical Algorithms. 2006. № 42. Pp. 281–307.

[2] Булатов М.В., Ли Минг Гонг, Соловарова Л.С. О разностных схемах первого и второго порядков для дифференциально-алгебраических уравнений индекса не выше двух //Журнал вычисл. математики и матем. физики. 2010. Т. 50, № 11. С. 1909–1918.

Combined Algorithms Based on Bioinspired and Local Search Methods for Solving Multiextremal Optimization Problems

Pavel Sorokovikov

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Russia
pavel@sorokovikov.ru

We offer an approach to the numerical study of the problems of finding the absolute optimum of multiextremal function, based on the use of globalized nature-inspired and local descent methods. Six hybrid non-convex optimization algorithms are developed and implemented. Modifications of differential evolution, genetic search, particle swarm, harmony search, biogeography, and firefly algorithms are used as nature-inspired methods. We have performed the numerical study of the properties of the proposed algorithms using a representative collection of multiextremal problems. The reached research results confirm the performance of the suggested algorithms.

Keywords: non-convex optimization, multiextremal function, global optimum, bioinspired algorithms

Комбинированные алгоритмы на основе биоинспирированных методов и методов локального поиска для решения многоэкстремальных задач оптимизации

П. С. Сороковиков

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия
pavel@sorokovikov.ru

Предложен подход к численному исследованию задач поиска абсолютного оптимума многоэкстремальной функции, основанный на применении глобализованных биоинспирированных методов и методов локального спуска. Разработаны и реализованы шесть гибридных алгоритмов невыпуклой оптимизации. Модификации алгоритмов дифференциальной эволюции, генетического поиска, роя частиц, гармонического поиска, биогеографии и роя светлячков используются в качестве методов, инспирированных природой. Выполнено численное исследование свойств предложенных алгоритмов с использованием репрезентативной коллекции многоэкстремальных задач. Полученные результаты исследований подтверждают работоспособность разработанных алгоритмов.

Ключевые слова: невыпуклая оптимизация, многоэкстремальная функция, глобальный оптимум, биоинспирированные алгоритмы

Задача поиска абсолютного оптимума многоэкстремального целевого функционала остается одной из самых сложных и актуальных в теории и приложениях математического программирования и оптимизации динамических систем. Как правило, надежные процедуры нелокальной оптимизации основаны на балансе между глобальным исследованием пространства поиска и локальным улучшением полученных приближений. Соответственно, одна итерация алгоритма нахождения абсолютного экстремума должна включать два этапа: глобальный поиск в допустимом множестве и локальное уточнение градиентными методами в областях, где вероятно наличие глобального оптимума. В работе предложен подход, использующий преимущества биоинспирированных алгоритмов для исследования допустимого множества и градиентных методов для локальной оптимизации, позволяющий строить вычислительные схемы, лежащие в основе эффективных методов исследования задач нелокального поиска.

Предложенный подход к численному исследованию задач поиска абсолютного экстремума мультимодальных целевых функций основан на применении алгоритмов дифференциальной эволюции [1], генетического поиска [2], роя частиц [3], гармонического поиска [4], биогеографии [5], роя светлячков [6] и L-BFGS [7]. Предложены и реализованы в виде библиотеки алгоритмов шесть двухметодных вычислительных схем решения многоэкстремальных задач оптимизации.

Разработанные алгоритмы исследовались на наборе тестовых задач и «задач с содержательным смыслом», характеризующихся различным уровнем сложности. Все варианты алгоритмов, основанные на комбинациях с методом локального поиска L-BFGS, показали существенные улучшения по сравнению с исходными биоинспирированными алгоритмами. Предложенный подход позволяет строить вычислительные схемы, лежащие в основе эффективных методов исследования задач нелокального поиска. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Список литературы

[1] Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. J. of Global Optimization. 1997. Vol. 11. Pp. 341–359.

[2] Whitley D. A genetic algorithm tutorial. Statistics and computing. 1994. Vol. 4. Pp. 65–85.

[3] Liu Y., Ling X., Shi Z., Lv M., Fang J., Zhang L. A survey on particle swarm optimization algorithms for multimodal function optimization. J. of Software. 2011. Vol. 6. Pp. 2449–2455.

[4] Geem Z.W., Kim J.H., Loganathan G.V. A new heuristic optimization algorithm: harmony search. Simulation. 2001. Vol. 76. Pp. 60–68.

[5] Simon D. Biogeography-based optimization. IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2008. Vol. 12. Pp. 702–713.

[6] Yang X.S., He X. Firefly algorithm: recent advances and applications. International J. of Swarm Intelligence. 2013. Vol. 1. Pp. 36–50.

[7] Mokhtari A., Ribeiro A. Global convergence of online limited memory BFGS. J. of Machine Learning Research. 2015. Vol. 16. Pp. 3151–3181.

On Nonconvex Optimal Control Problems*

Alexander Strekalovsky

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB of RAS, Irkutsk, Russia
strekal@icc.ru

We address an optimal control (OC) problem along a state-linear control system with inequality constraints given by the Bolza functionals with state-DC data. Therefore, the problem turns out to be nonconvex, i.e. possesses a large number of locally optimal controls and Pontryaguin's extremals. Using the Exact Penalization Theory, the original Problem is reduced to an auxiliary penalized Problem, which is also state-DC. For the latter OC problem were developed new Global Optimality Conditions which possess the classical constructive property the effectiveness of that is demonstrated by examples.

Keywords: state-convex and state-DC functionals, nonconvex optimal control problem, exact penalty, Global Optimality Conditions, constructive property

Here we address the nonconvex Optimal Control (OC) Problem as follows

$$(P) \qquad J_0(x(\cdot),u(\cdot)) \downarrow \min_u, \quad J_i(x(\cdot),u(\cdot)) \le 0, \;\; i \in I := \{1,...m\}. \tag{1}$$

along the next state-linear Control System (StLCS)

$$\left.\begin{array}{c} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(u(t),t) \quad \overset{\circ}{\forall}\, t \in T :=]t_0, t_1[, \\ x(t_0) = x_0, \;\; -\infty < t_0 < t_1 < +\infty; \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$u(\cdot) \in \mathcal{U} := \{u(\cdot) \in L^r_\infty(T) \mid u(t) \in U \;\; \overset{\circ}{\forall}\, t \in T\}; \tag{3}$$

under standard assumptions [1,2]. Here the sign $\overset{\circ}{\forall}$ denotes "almost everywhere" in the sense of the Lebesque measure, and we consider the absolutely continuous solution $x(\cdot) = x(\cdot, u) \in AC_n(T)$ to StLCS (2). Besides, the functionals $J_i(\cdot)$, $i \in \{0\} \cup I$, have the Bolza form

$$J_i(u) := J_i(x(\cdot),u(\cdot)) := \varphi_{1i}(x(t_1)) + \int_T \varphi_i(x(t),u(t),t)dt, \tag{4}$$

where the functions $\varphi_{1i} : I\!R^n \to I\!R$ are DC, i.e. $\varphi_{1i}(x) := g_{1i}(x) - h_{1i}(x),\; x \in \Omega_1 \subset I\!R^n$, where the reachable set $\mathcal{R}(t_1)$ belongs to Ω_1, and the functions $g_{1i}(\cdot)$, $h_{1i}(\cdot)$ are convex on Ω_1.

In addition, the functions $\varphi_i(x,u,t)$ are also state-DC, i.e. have the next DC-decomposition $\varphi_i(x,u,t) := g_i(x,u,t) - h_i(x,t),\;\; i \in \{0\} \cup I,\ \forall x \in \Omega(t),\ \forall (u,t) \in U \times T,\ \mathcal{R}(t) \subset \Omega(t), t \in T,$ where the functions $g_i(\cdot)$ and $h_i(\cdot)$ are state-convex.

Finally, we assume the data from above is state-differentiable. Clearly, the feasible region of Problem (P)–(1)–(3) and Problem (P) itself turn out to be nonconvex, i.e. it may possess a large number of locally optimal, stationary and critical (say, in the sense of the

* The research is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (state registration No. 121041300065-9).

Pontryaguins Principle (PMP)) controls, which may be rather far from the set of globally optimal controls.

To overcome these drawbacks, we apply the popular tools of the Exact Penalization Theory introducing the penalty functional $\pi(u) := \pi(x(\cdot), u(\cdot)) := \max\{0, J_1(u), ..., J_m(u)\}$, the penalized cost functional $J_\sigma(u) := J_0(u)+\sigma\pi(u)$, and addressing the auxiliary (penalized) problem

$$(P_\sigma) \qquad J_\sigma(u) \downarrow \min_u, \quad u(\cdot) \in U, \tag{5}$$

along the control system (1)–(2). As well-known, if there exists the so-called threshold value σ_* of the penalty parameter, when

$$V(P) = V(P_\sigma), \;\; \mathrm{Sol}(P) = \mathrm{Sol}(P_\sigma) \;\; \forall \sigma > \sigma_*, \tag{6}$$

then Problems (P) and (P_σ) turns out to be equivalent. Furthermore, we carry out the DC-decomposition of the goal functional $J_\sigma(u)$ and get

$$J_\sigma(u) := G_\sigma(x(\cdot), u(\cdot)) - F_\sigma(x(\cdot)), \tag{7}$$

that the functionals $G_\sigma(x, u)$ and $F_\sigma(x)$ are state-convex.

Employing the DC structure of the penalized Problem (P_σ)–(5), we develop the new Global Optimality Conditions (GOCs) for Problems (P_σ) and (P), which have the following properties.

First,they reduce the solution of the nonconvex OC Problem (P)–(1)–(3) to a solving of Problem (P_σ), that, in turn, is also reduced to the investigation of the family of the (partially) linearized and state-convex problems of the form [3,4,5]

$$(P_\sigma L(y)) : \Phi_{\sigma y}(x(\cdot, u), u(\cdot)) := G_\sigma(x(\cdot, u), u(\cdot)) - \langle\langle \nabla F_\sigma(y(\cdot)), x(\cdot, u)\rangle\rangle \downarrow \min_u(\cdot), u(\cdot) \in U, \tag{8}$$

depending on the pair $(y(\cdot), \beta) \in AC_n(T) \times I\!R$, which fulfills the following equation

$$F_\sigma(y(\cdot)) = \beta - \zeta, \;\; \zeta := J_0(w),$$

where the control $w(\cdot) \in U$ (feasible in Problem (P)) and the corresponding state $z(t) = x(t, w), \; t \in T$ are under scrutiny.

Furthermore, the GOCs possess the classical constructive (algorithmic) property: once the GOC are violated, then one can find a feasible control $\overline{u}(\cdot) \in U$, which is better (in the original Problem (P)–(1)–(3)) than this one in question [3,4,5].

Examples demonstrate the effectiveness of the constructive property of the GOCs.

References

[1] Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A. Control of nonlinear dynamical systems: methods and applications. Springer, Berlin, 2008.

[2] Kurzhanski A.B., Varaiya, P. Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation. Birkhauser, Boston, 2014.

[3] Strekalovsky A.S. Global optimality conditions for optimal control problems with functions of A.D. Alexandrov. J. Optim. Theory Appl. 2013. Vol. 159. Pp. 297–321.

[4] Strekalovsky A.S. On Global Optimality Conditions for D.c. Minimization Problems With D.c. Constraints. J. Appl. Numer. Optim. 2021. Vol. 3, No. 1. Pp. 175–196

[5] Strekalovsky A.S. Global optimality conditions and exact penalization. Optim. Lett. 2019. Vol. 13. Pp. 597–615.

Stationary Points of d.c. Lagrangians in Solving Inverse Problems of the Control Theory

Nina Subbotina, Evgenii Krupennikov

IMM UrB RAS, UrFU, Ekaterinburg, Russia
subb@uran.ru, krupennikov@imm.uran.ru

The talk is devoted to the problem of dynamic control reconstruction (the DCRP) for dynamical systems. In this problem, using known discrete inaccurate measurements of the observed trajectory of a dynamic system, it is necessary to approximate the observed trajectory and the control that generated it. A new approach to solving the DCRP, proposed by the authors of the report, is discussed. The proposed solution is based on finding stationary points of regularized integral residual functionals in auxiliary variational problems. The key feature of the approach is the use of the so-called d.c. Lagrangians in auxiliary problems. This approach provides a stable oscillatory character of the approximations, as well as the stability of the constructed structures with respect to measurement errors. The report discusses the properties of constructions obtained in auxiliary variational problems.

Keywords: dynamic reconstruction, d.c. functions, calculus of variations

Стационарные точки d.c. Лагранжианов в решении обратных задач теории управления*

Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников,

ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, Россия
subb@uran.ru, krupennikov@imm.uran.ru

Доклад посвящен задаче динамической реконструкции управлений (ЗДРУ) для динамических систем. В этой задаче по известным дискретным неточным замерам наблюдаемой траектории динамической системы нужно аппроксимировать наблюдаемую траекторию и управление, её породившее. Обсуждается новый подход к решению ЗДРУ, предложенный авторами доклада. Предлагаемое решение опирается на нахождение стационарных точек регуляризованных интегральных функционалов невязки во вспомогательных вариационных задачах. Ключевая особенность подхода — использование так называемых d.c. Лагранжианов во вспомогательных задачах. Такой подход обеспечивает устойчивый колебательный характер аппроксимаций, а также устойчивость построенных конструкций к погрешностям измерений. В докладе обсуждаются свойства конструкций, получаемых во вспомогательных вариационных задачах.

Ключевые слова: динамическая реконструкция, d.c. функции, вариационное исчисление

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-01-00362)

1. Основные результаты

В докладе обсуждается новый метод решения задачи динамической реконструкции управлений (ЗДРУ) для динамических управляемых систем, предложенный [1,2] авторами доклада. В этой задаче по известным дискретным неточным замерам наблюдаемой траектории динамической системы нужно аппроксимировать эту траекторию и управление, её породившее.

В докладе рассматриваются детерминированные управляемые системы, аффинные по управлениям. Допустимые управления — измеримые функции, значения которых ограничены известным выпуклым компактом.

Заметим, что задача реконструкции неизвестного управления некорректна, так как одна и та же траектория может порождаться не единственным допустимым управлением. Поэтому вводится понятие нормального управления — управления, порождающего наблюдаемую траекторию и имеющего минимальную норму в пространстве L^2. Показано [2], что при типичных предположениях о входных данных для любой траектории, порожденной допустимым управлением, существует единственное нормальное управление. Под ЗДРУ подразумевается задача реконструкции именно нормального управления.

Авторами доклада предложен и обоснован поход [1,2] к решению ЗДРУ, опирающийся на нахождение стационарных точек регуляризованного [3] интегрального функционала невязки. Отличительная особенность подхода — использование интегральных функционалов, в которых интегрант является d.c. функцией (т. е. разностью двух выпуклых функций. См., например, [4]).

Постановка ЗДРУ. Наблюдается некоторая траектория $x^*(\cdot):[0,T]\to R^n$ динамической управляемой системы вида

$$\dot{x}(t)=G(t,x(t))u(t)+f(t,x(t)),\quad x\in R^n,\quad u\in U\subset R^m,\quad m\geq n,\quad t\in[0,T],\qquad(1)$$

где $x(\cdot)$ — вектор фазовых переменных, $u(\cdot)$ — вектор управлений, $T<\infty$, U — выпуклый компакт. Наблюдаемая траектория порождается неизвестным допустимым управлением.

Роль входных данных в ЗДРУ играют неточные дискретные замеры наблюдаемой траектории $\{y_i^\delta:\ i=0,\dots,N\}$, имеющие погрешность $\delta>0$ и поступающие с шагом $h^\delta>0$ в моменты времени $t_i=ih^\delta,\ i=0,\dots,N$.

ЗДРУ ставится следующим образом: для известных параметров δ и h^δ и наборов замеров $\{y_i^\delta\}$ построить кусочно-непрерывные управления $u^\delta(\cdot):[0,T]\to R^m$, равномерно ограниченные по δ и h^δ такие, что при стремлении к нулю параметров δ и h^δ эти управления сходятся слабо со звездой к нормальному управлению, а траектории системы (1), порожденные этими управлениями, сходятся равномерно к наблюдаемой траектории $x^*(\cdot)$.

В работах [1,2] разработан и обоснован пошаговый алгоритм решения ЗДРУ. На каждом шаге алгоритма (т. е. на отрезке времени $[t_{i-1},t_i]$) используются вспомогательные конструкции из задачи на поиск стационарных точек функционалов вида

$$I(x(\cdot),u(\cdot))=\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}-\frac{\|x(t)-y^\delta(t)\|^2}{2}+\frac{\alpha^2\|u(t)\|^2}{2}dt,\quad i=1,\dots,N,\qquad(2)$$

где i — номер шага алгоритма, α — малый регуляризирующий (по Тихонову [3]) параметр. Функция $y^\delta(t)$ является гладкой интерполяцией дискретных замеров.

Отличительной особенностью алгоритма является использование стационарных точек функционала (2). Иными словами, не требуется находить экстремум функционала (2).

В докладе обсуждаются свойства стационарных точек функционалов вида (2) и использование этих свойств для построения решения ЗДРУ. Приводятся модельные примеры, наглядно демонстрирующие эти свойства.

Список литературы

[1] Субботина Н.Н, Крупенников Е.А. Слабые со звездой аппроксимации решения задачи динамической реконструкции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 208-220.

[2] Субботина Н.Н, Крупенников Е.А. Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции. // Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН, 315. 2021. С. 247–260.

[3] Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач. // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.

[4] Стрекаловский А.С. Элементы невыуклой оптимизации. Новосибирск.: Наука, 2003.

Oskolkov Models and Sobolev-type Equations in Magnetohydrodynamics

T.G. Sukacheva

The Yaroslav-the-Wise Novgorod State University (NovSU), Veliky Novgorod, Russia
South Ural State University (SUSU NRU), Chelyabinsk, Russia
tamara.sukacheva@novsu.ru

Various Oskolkov models are considered that describe the motion of an incompressible viscoelastic Kelvin-Voigt fluid in the Earth's magnetic field. The study is carried out within the framework of the theory of semilinear Sobolev-type equations based on the concept of a degenerate resolving semigroup of operators. Existence theorems for a unique solution, which is a quasi-stationary semitrajectory, are obtained. Descriptions of the corresponding phase spaces are given.

Keywords: Oskolkov models, Sobolev-type equations, phase space, quasi-stationary semi-trajectories, incompressible viscoelastic Kelvin-Voigt fluid

Модели Осколкова и уравнения соболевского типа в магнитогидродинамике

Т. Г. Сукачева

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (НовГУ), Великий Новгород, Российская Федерация
Южно-Уральский государственный университет (ЮУрГУ НИУ), Челябинск, Российская федерация
tamara.sukacheva@novsu.ru

Рассматриваются различные модели Осколкова, описывающие движение несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта в магнитном поле Земли. Исследование проводится в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа на основе понятия вырожденной разрешающей полугруппы операторов. Получены теоремы существования единственного решения, являющегося квазистационарной полутраекторией. Приводятся описания соответствующих фазовых пространств.

Ключевые слова: модели Осколкова, уравнения соболевского типа, фазовое пространство, квазистационарные полутраектории, несжимаемая вязкоупругая жидкость Кельвина–Фойгта

Система уравнений Осколкова

$$
\begin{aligned}
&(1-\kappa\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum_{l=1}^{K}\beta_l\nabla^2 w_l - \frac{1}{\rho}\nabla p - 2\Omega\times v + \\
&\tfrac{1}{\rho\mu}(\nabla\times b)\times b + f^1, \\
&\nabla\cdot v = 0, \quad \nabla\cdot b = 0, \quad b_t = \delta\nabla^2 b + \nabla\times(v\times b) + f^2. \\
&\frac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l\in\mathbb{R}_-, \quad \beta_l\in\mathbb{R}_+, \quad l=\overline{1,\ K},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

моделирует поток несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка K [1] в магнитном поле Земли. Здесь вектор-функции $v=(v_1(x,t),\ldots,v_n(x,t))$ и $b=(b_1(x,t),\ldots,b_n(x,t))$ характеризуют скорость жидкости и магнитную индукцию соответственно, $p=p(x,t)$ – давление, κ – коэффициент упругости, ν – коэффициент вязкости, Ω – угловая скорость, δ – магнитная вязкость, μ – магнитная проницаемость, ρ – плотность, параметры β_l, $\quad l=\overline{1,\ K}$ – определяют время ретардации (запаздывания) давления. Свободные члены $f^1=(f_1^1,\ldots,f_n^1)$, $f_i^1=f_i^1(x,t), f^2=f^2(x,t)$ отвечают внешнему воздействию на жидкость.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для системы (1)

$$
\begin{aligned}
&v(x,0)=v_0(x), \quad b(x,0)=b_0(x), \quad w_l(x,0)=w_{l0}(x) \quad x\in D, \\
&v(x,t)=0, \quad b(x,t)=0, \quad w_l(x,t)=0 \quad (x,t)\in\partial D\times\mathbb{R}_+.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь $l=\overline{1,\ K}$; $\quad D\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, – ограниченная область с границей ∂D класса C^∞.

Заметим, что задачи такого типа возникают, например, в геофизике [2]. Ранее вырожденные автономные модели магнитогидродинамики изучались в работах [3], [4]. В неавтономном случае исследование проводилось, например, в [5].

Задача (1), (2) исследуется в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа. Исследование проводится на основе понятия относительно p-секториального оператора и порожденной им разрешающей вырожденной полугруппы операторов [6]. Доказана теорема существования единственного решения указанной задачи, являющегося квазистационарной полутраекторией, и получено описание ее расширенного фазового пространства. Обзор результатов по исследованию моделей Осколкова в рамках теории уравнений соболевского типа содержится в [7].

Список литературы

[1] Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и Олдройта// Тр. Мат. института им. В. А. Стеклова. 1988. Т. 179. С. 126-164.

[2] Hide R. On planetary atmospheres and interiors// Mathematical Problems in the Geophisical Sciences, 1, W.H.Raid, ed. Am. Math. Soc., Providence R.I., 1971.

[3] Sukacheva T.G., Kondyukov A.O. Phase Space of a Model of Magnetohydrodynamics. Differential Equations. 2015. Vol. 51, № 4. Pp. 502-509.

[4] Сукачева Т.Г., Кондюков А.О. Фазовое пространство модели магнитогидродинамики ненулевого порядка // Дифф. уравнения. 2017. Т. 53, № 8. С. 1083–1090.

[5] Kondyukov A.O., Sukacheva T.G. A Non-stationary Model of the Incompressible Viscoelastic Kelvin-Voigt Fluid of Non-zero Order in the Magnetic Field of the Earth // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2019. Т. 12, № 3. С. 42-51.

[6] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators – Utrecht. Boston. Köln. Tokyo. : VSP, 2003.
[7] Sukacheva T.G. Oskolkov models and Sobolev-type equations. Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS). 2022. Vol. 15, № 1. Pp. 5–22.

On the Numerical Solution of Linear Multidimensional Differential-algebraic Systems*

Svetlana Svinina

ISDCT SB RAS, Irkutsk, Russia
svinina@icc.ru

An initial-boundary value problem for a linear multidimensional differential-algebraic system of hyperbolic and parabolic types is considered. For its numerical solution, an additive spline-collocation difference scheme is used. The results of numerical experiments are presented.

Keywords: differential-algebraic system, additive difference schemes, index, spline-collocation method, hyperbolic and parabolic systems

О численном решении линейных многомерных дифференциально-алгебраических систем

С. В. Свинина

ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия
svinina@icc.ru

Рассматривается начально-краевая задача для линейной многомерной дифференциально-алгебраической системы гиперболического и параболического типов. Для её численного решения применяются аддитивная сплайн-коллокационная разностная схема. Представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраическая система, аддитивные разностные схемы, индекс, сплайн-коллокационный метод, гиперболические и параболические системы

Среди уравнений газовой динамики хорошо известны системы с вырожденной матрицей при старшей производной. Такие системы называют не разрешёнными относительно старшей производной и относят к системам более общего вида, которые в современной литературе получили название дифференциально-алгебраических систем. В докладе рассматривается линейная многомерная дифференциально-алгебраическая система:

$$A(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x,t), \quad \text{где} \quad Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} B_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + C(x,t)u, \tag{1}$$

заданная в цилиндре $\mathcal{U}_T = G \times \{t : \ t_0 \leq t \leq T\}$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : \ x_{\alpha,0} \leq x_\alpha \leq$

* Работа выполнена в рамках базового проекта "Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями", № 121041300060-4.

I_α, $\alpha = \overline{1,p}\}$, $(x,t) \in \mathcal{U}_T$. В системе (1) $f(x,t)$ и $u(x,t)$ – заданная и искомая, соответственно, n-мерные вектор-функции: $f(x,t) = (f^1(x,t), f^2(x,t), \dots, f^n(x,t))^\top$ и $u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t), \dots, u^n(x,t))^\top$; $A(x,t)$, $B_\alpha(x,t)$ и $C(x,t)$ – заданные квадратные матрицы-функции порядка n:

$$\det A(x,t) = 0, \quad \det B_\alpha(x,t) = 0 \ \ \forall \alpha = \overline{1,p},\ (x,t) \in \mathcal{U}_T.$$

Начально-краевые условия имеют следующий вид:

$$u(x,t_0) = \phi(x),$$
$$u(x_1,\dots,x_{\alpha,0},\dots,x_p,t) = \psi_\alpha(x_1,\dots,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1},\dots,x_p,t), \quad \alpha = \overline{1,p}.$$

При численном решении многомерных систем наиболее популярны методы расщепления [1]- [3]. К ним относят методы переменных направлений и локально-одномерные методы. В этом случае система (1) записывается в расщеплённом виде

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \mathfrak{L}_\alpha u = 0, \quad \mathfrak{L}_\alpha u = \frac{1}{p} A(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + L_\alpha u - f_\alpha(x,t),$$

где $L_\alpha u = B_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + C_\alpha(x,t)u$, $\sum_{\alpha=1}^{p} C_\alpha(x,t) = C(x,t)$, $\sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha(x,t) = f(x,t)$. На каждом отрезке Δ_α, где $\alpha = \overline{1,p}$ последовательно решаются одномерные дифференциально-алгебраические системы

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \mathfrak{L}_\alpha v_{(\alpha)} = \frac{1}{p} A(x,t)\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} + L_\alpha v_{(\alpha)} - f_\alpha(x,t) = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,p} \tag{2}$$

с начально-краевыми условиями:

$$v_{(\alpha)}(x_1,\dots,x_{\alpha,0},\dots,x_p,t) = \psi_\alpha(x_1,\dots,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1},\dots,x_p,t),$$

$$v_{(1)}(x,t_0) = \phi(x), \qquad v_{(\alpha)}(x,t_{i_0+(\alpha-1)/p}) = v_{(\alpha-1)}(x,t_{i_0+(\alpha-1)/p}), \quad \alpha = \overline{2,p},$$
$$v_{(1)}(x,t_{i_0}) = v_{(p)}(x,t_{i_0}).$$

Каждая система из (2) аппроксимируется сплайн-коллокационной разносной схемой [4]. В итоге получаются разностные схемы, которые названы аддитивными сплайн-коллокационными разностными схемами. Такие разностные схемы имеют высокий порядок точности по временной и пространственным переменным.

Список литературы

[1] Самарский А.А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1962. Т. 2. № 5. С. 787–811.

[2] Ковеня В.М. Разностные методы решения многомерных задач: Курс лекций / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2004.

[3] Вабищевич П.Н. Аддитивные операторно-разностные схемы (схемы расщепления). М.: КРАСАНД, 2013.

[4] Гайдомак С.В. Об устойчивости неявной сплайн-коллокационной разностной схемы для линейных дифференциально-алгебраических уравнений с частными производными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 9. С. 1460–1479.

Control Optimization in Systems with Phase Constraints

Alexander Tyatyushkin

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Russia
tjat@icc.ru

The optimal control problem with phase constraints is considered. A method proposed for solving this problem is based on using a modified Lagrange function and a procedure for constraints linearization.

Keywords: Optimal control problem, phase constraints, Lagrange function

The paper proposes a numerical method for solving the optimal control problems with phase constraints. The gradients of the functionals are calculated using the Pontryagin function and solutions of the conjugate system with boundary conditions. To solve the considered problem, some initial approximation of the control and the corresponding phase trajectory are selected, and in its vicinity the linearization of terminal and phase constraints is carried out.

The main idea of the approach is to use the modified Lagrange function to construct a minimized functional and apply a procedure for linearization of terminal and phase constraints. Iterations of the proposed method solve the problem of minimizing the corresponding functional on the solutions of the original controlled system with linearized constraints on phase coordinates and controls. The results contain the values of Lagrange multipliers, the relationship between the values of which on neighboring iterations is established by the necessary optimality condition.

Nonlinear Analysis Mixed Boundary Value Problem for the Sophie Germain Equation

A.L. Ushakov

South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia
ushakov_al@inbox.ru

A mixed boundary value problem for the Sophie Germain equation is considered. A fictitious continuation of this problem across the boundary with Dirichlet boundary conditions is carried out. The finite element method is used to approximate the continued problem. A generalization of the fictitious component method is proposed for the numerical solution of the problem under consideration. The numerical method for solving the problem is implemented as an iterative algorithm with the choice of its parameters while minimizing the residuals. The algorithm automatically selects the iterative parameters and provides a stopping criterion. Conditions sufficient for the convergence of the algorithm are indicated. Nonlinear analysis is used to optimize the rate of convergence of an iterative process. The iterative process converges at the rate of an infinitely decreasing geometric progression. The developed method is asymptotically optimal.

Keywords: Sophie Germain equation, mixed boundary value problem, fictitious component method

Нелинейный анализ смешанной краевой задачи для уравнения Софи Жермен

А. Л. Ушаков

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)
(ЮУрГУ (НИУ)), Челябинск, Россия
ushakov_al@inbox.ru

Рассматривается смешанная краевая задача для уравнения Софи Жермен. Проводится фиктивное продолжение этой задачи через границу с краевыми условиями Дирихле. Применяется метод конечных элементов для аппроксимации продолженной задачи. Предлагается обобщение метода фиктивных компонент для численного решения рассматриваемой задачи. Численный метод решения задачи реализуется в виде итерационного алгоритма с выбором его параметров при минимизации невязок. В алгоритме производится автоматический выбор итерационных параметров и приводится критерий остановки. Указываются условия достаточные для сходимости алгоритма. Нелинейный анализ применяется для оптимизации скорости сходимости итерационного процесса. Итерационный процесс сходится со скоростью бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Разработанный метод является асимптотически оптимальным.

Ключевые слова: уравнение Софи Жермен, смешанная краевая задача, метод фиктивных компонент

1. Основные результаты

Рассматривается математическую модель перемещений точек пластины под действием давления. Это смешанная краевая задача для уравнения Софи Жермен при общих предположениях обеспечивающих существование и единственность ее решения [1, 2]. Проводится фиктивное продолжение этой задачи в вариационной форме через участок границы с однородными краевыми условиями Дирихле [3]. Применяются кусочно-параболические конечные элементы для аппроксимации продолженной задачи, Предлагается обобщение метода фиктивных компонент не использующее построение явных операторов продолжения сеточных функций для численного решения рассматриваемой задачи [4]. Реализуется численный метод решения задачи в виде итерационного алгоритма с выбором его параметров на основе метода минимальных невязок. В алгоритме указывается способ автоматического выбора итерационных параметров и критерий остановки итерационного процесса при достижении заранее задаваемых допустимых погрешностей искомого решения рассматриваемой задачи, на основе данных получаемых в процессе вычислений. Указываются условия достаточные для сходимости метода на основе возможности продолжения функций с сохранением их более сильной нормы, чем энергетическая норма, возникающей задачи. Можно отметить, что решаемая задача является линейной и стационарной, но метод ее решения нелинейный и нестационарный. Нелинейный анализ применяется для оптимизации скорости сходимости итерационного процесса при обобщении метода фиктивных компонент. Последовательность относительных ошибок предлагаемого итерационного процесса мажорируется бесконечно убывающей геометрической прогрессией. Разработанный метод имеет скорость сходимости не зависящую от параметров дискретизации, является асимптотически оптимальным по вычислительным затратам. Численное решение задачи сводится к численному решению систем линейных алгебраических уравнений, получаемых при аппроксимации краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольной области для которых известны оптимальные по вычислительным затратам маршевые методы [5]. Теоретические результаты подтверждаются вычислительными экспериментами на ЭВМ.

Список литературы

[1] Aubin J.-P. Approximation of elliptic boundary-value problems. New York: Wiley-Interscience, 1972.

[2] Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: изд–во АН АрмССР, 1979.

[3] Ushakov A.L. *Research of the boundary value problem for the Sophie Germain Equationinin in a cyber-physical system.* Studies in Systems, Decision and Control. Springer, 2021. Vol. 338. Pp. 51–63.

[4] Мацокин А.М., Непомнящих С.В. *Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33, № 1. С. 52–68.

[5] Bank R.E., Rose D.J. *Marching algorithms for elliptic boundary value problems.* SIAM J. on Numer. Anal. 1977. Vol. 14, No 5, Pp. 792–829.

Traps in Quantum Control Landscapes

Boris Volkov, Alexander Pechen

[1] Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
[2] The National University of Science and Technology MISIS, Moscow, Russia
borisvolkov1986@gmail.com, apechen@gmail.com

Traps in quantum control landscapes are controls that complicate the search of globally optimal controls of the quantum objective functional. In particular, points of local but not global optima of the objective functional are traps. In this talk, we discuss the classification of traps and their presence or absence for various quantum control problems.

Keywords: quantum control, control landscape, qubit, phase shift gate

Quantum control, that is control of single quantum systems such as atoms or molecules, is an important tool necessary for modern quantum technologies [1,2,3]. A particularly important problem in quantum control is to develop methods for finding globally optimal controls, that is, controls which are the best for achieving a desired control objective [4]. Traps are controls which complicate the search for such globally optimal controls.

In our talk we discuss our results on the analysis of traps for closed quantum controlled system whose dynamics is described by the Schrödinger equation:

$$i\frac{dU_t^f}{dt} = (H_0 + f(t)V)U_t^f, \qquad U_{t=0}^f = \mathbb{I}. \tag{1}$$

Here H_0 and V ($[H_0, V] \neq 0$) are the free and interaction Hamiltonians (i.e., Hermitian $n \times n$-matrices) and $f \in L^2([0,T], \mathbb{R})$ is coherent control. A typical problem of quantum control can be formulated as the problem of maximizing the objective functional which is determined by the state of the quantum system. Some examples of objective functionals are the following.

1. Let O be a quantum observable (system's Hermitian operator) and ρ_0 an initial quantum density matrix (so that $\rho_0 \geq 0$ and $\mathrm{Tr}(\rho_0) = 1$). The objective functional of the expectation of a system observable O is:

$$J_O[f] = \mathrm{Tr}(OU_T^f \rho_0 U_T^{f\dagger}) \to \max. \tag{2}$$

2. The objective functional of the generation of a quantum gate $W \in \mathrm{SU}(n)$ is:

$$J_W[f] = |\mathrm{Tr}(W^\dagger U_T^f)|^2 \to \max. \tag{3}$$

Traps (real traps) are point of local but not global optima of the objective functional [4,5]. In more general sense traps are singular controls that could complicate the search for global optima of the objective functional. We provide a classification of traps, in which the n-th order trap is determined by the Taylor expansion of the objective functional up to the n-th order. Examples of n-th order traps in the landscape of the problem of maximizing the quantum functional (2) for some special multilevel quantum systems were found in [5,6]. Some examples of real traps for multilevel quantum systems were found in [7]. It is known that traps are absent in the quantum control landscapes for 2-level systems for sufficiently large time (see [8,9]). We consider the problem of controlled generation of single-qubit phase shift quantum gates. In this case without loss of generality we can consider the objective functional (3) with $W = e^{i\varphi_W \sigma_z}$, where σ_z is the Pauli z-matrix and $\varphi_W \in (0, \pi]$. We show that control landscape for this problem for short times is also free of traps. We also discuss the detailed structure of quantum control landscape for this problem [10,11].

The work is partially supported by the projects of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation No. 075-15-2020-788 and 0718-2020-0025 and by the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00330.

References

[1] Glaser S.J., Boscain U., Calarco T., Koch C.P., Köckenberger W., Kosloff R., Kuprov I., Luy B., Schirmer S., Schulte-Herbrüggen T., Sugny D., Wilhelm F.K. Training Schrödinger's cat: Quantum optimal control. Eur. Phys. J. D. 2015. Vol. 69. P. 279.

[2] Koch C.P., Boscain U., Calarco T., Dirr G., Filipp S., Glaser S.J., Kosloff R., Montangero S., Schulte-Herbrüggen T., Sugny D., Wilhelm F.K. Quantum optimal control in quantum technologies. Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe, arXiv:2205.12110

[3] K. W. Moore, A. Pechen, X.-J. Feng, J. Dominy, V.J. Beltrani, H. Rabitz, "Why is chemical synthesis and property optimization easier than expected?", Physical Chemistry Chemical Physics, 13:21 (2011), 10048–10070

[4] Rabitz H. A., Hsieh M. M., Rosenthal C. M. Quantum optimally controlled transition landscapes. Science. 2004. Vol. 303, no 5666. Pp. 1998–2001.

[5] Pechen A. N., Tannor D. J. Are there traps in quantum control landscapes? Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. P. 120402.

[6] Pechen A. N., Tannor D. J. Quantum control landscape for a Lambda-atom in the vicinity of second-order traps. Israel Journal of Chemistry. 2012. Vol. 52. Pp. 467–472.

[7] de Fouquieres P., Schirmer S. G. A closer look at quantum control landscapes and their implication for control optimization. Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2013. Vol. 16, no 3. P. 1350021.

[8] Pechen A. N., Il'in N. B. Coherent control of a qubit is trap-free. Proc. Steklov Inst. Math. 2014 Vol. 285, no 1. Pp. 233–240.

[9] Il'in N.B., Pechen A.N. On extrema of the objective functional for short-time generation of single-qubit quantum gates. Izvestiya: Mathematics. 2016 Vol. 80, no 6. Pp. 1200–1212

[10] Volkov B. O., Morzhin O. V., Pechen A. N. Quantum control landscape for ultrafast generation of single-qubit phase shift quantum gates. J. Phys. A: Math. Theor. 2021. Vol. 54, no 21. P. 215303.

[11] Volkov B. O., Pechen A. N. On the detailed structure of quantum control landscape for fast single qubit phase-shift gate generation, arXiv:2204.13671.

Optimization of Sphere Partitions and Estimates of the Chromatic Number for a Forbidden Interval of Distances⋆

Vsevolod Voronov, Viktoria Svistunova

Caucasus Mathematical Center of ASU, Maikop, Russia
v-vor@yandex.ru

The talk is devoted to the problem of optimization of some function on the set of partitions of the two-dimensional sphere into s spherical polygons colored in k colors. The objective is to maximize the ratio of the minimum of distances between polygons of the same color to the maximum of the diameters of polygons. The local minima can be found by the stochastic gradient descent algorithm. If the value of the function is strictly greater than one, one can derive an upper estimate of the chromatic number of the sphere with a forbidden interval of distances, i.e. the number of colors required to color an infinite graph whose vertices are points of the sphere, and whose edges connect points the distance between which belongs to some interval.

Keywords: distance geometry, chromatic number of sphere, stochastic gradient descent, SAT approach

Оптимизация разбиений сферы и оценки хроматических чисел при запрещенном интервале расстояний

В. А. Воронов, В. Р. Свистунова

Кавказский математический центр АГУ, Майкоп, Россия
v-vor@yandex.ru

Работа посвящена задаче оптимизации некоторой функции на множестве разбиений двумерной сферы на s сферических многоугольников, раскрашенных в k цветов. Требуется максимизировать отношение минимума расстояний между многоугольниками одного цвета к максимальному из диаметров многоугольников. Локальные минимумы в данной задаче могут быть найдены алгоритмом стохастического градиентного спуска. В том случае, если значение минимизируемой функции строго больше единицы, разбиение позволяет оценить хроматическое число сферы с запрещенным интервалом расстояний, т.е. количество цветов, необходимое для раскраски континуального графа, вершинами которого являются точки сферы, а ребрами соединены точки, расстояние между которыми принадлежит некоторому интервалу.

⋆ Работа выполнена при поддержке гранта “Ведущие научные школы” № НШ-775.2022.1.1.

Ключевые слова: метрическая геометрия, хроматическое число сферы, стохастический градиентный спуск, SAT-решатели

Рассматривается задача о поиске локально оптимального (в указанном далее смысле) разбиения сферы S^2 единичного радиуса на сферические многоугольники $Q_1, \dots, Q_s$, раскрашенные в $k \geq 8$ цветов, причем $s > k$. Обозначим разбиение $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_s\}$. Пусть $C = (c_1, \dots, c_s)$, $c_i \in \{1, 2 \dots, k\}$— цвет многоугольника P_i. Целевую функцию определим следующим образом:

$$F(\mathcal{Q}; C) = \frac{\min_{i \neq j:\, c_i = c_j} \operatorname{dist}(Q_i, Q_j)}{\max_{1 \leq i \leq s} \operatorname{diam} Q_i} \to \max\,. \tag{1}$$

Предложен следующий подход к поиску локально оптимальных решений: каждой триангуляции сферы можно сопоставить двойственное разбиение с вершинами $v_1, \dots, v_m$, определить некоторую раскраску и найти минимум в конечномерной задаче оптимизации с кусочно-гладкой функцией

$$F_{\mathcal{Q},C}(V) = \frac{\min_{(i,j) \in E_1} \operatorname{dist}(v_i, v_j)}{\max_{(i,j) \in E_2} \operatorname{dist}(v_i, v_j)} \to \max, \tag{2}$$
$$v_i \in S^2, \quad i = 1, \dots, m.$$

где E_1 включает пары индексов вершин, выбранных из каждого отдельно взятого многоугольника, а E_2 содержит пары индексов вершин, принадлежащих двум несовпадающим одноцветным многоугольникам.

Отметим, что число локальных минимумов в задаче (1) как функция s при фиксированом k растет заведомо быстрее, чем число (двойственных) триангуляций сферы с s вершинами и минимальной степенью вершины 5 (OEIS A081621). Каждой триангуляции T, кроме того, можно сопоставить некоторое множество допустимых раскрасок. Если предполагать, что диаметры P_i отличаются достаточно мало, то раскраски, для которых целевая функция достигает глобального максимума, могут быть получены как раскраски степени графа T^p, где $p > 1$ — целое число. Тогда одноцветные вершины находятся в графе T на расстоянии строго больше p.

В том случае, если для некоторого разбиения $\mathcal{Q}$ и раскраски C выполнено $F(\mathcal{Q}; C) = \alpha > 1$, данная раскраска сферы не содержит пары одноцветных точек на расстоянии из некоторого интервала (r_0, r_1), $r_1/r_0 = \alpha$, и, таким образом, позволяет получить некоторую верхнюю оценку хроматического числа двумерной сферы с запрещенным интервалом расстояний, а также измеримого хроматического числа сферы [1,2,3]. В конечномерной задаче оптимизации (2) достаточно высокую эффективность показал алгоритм стохастического градиентного спуска и развивающий его алгоритм Adam [4]. Для поиска раскрасок степени триангуляции использовался SAT-решатель Glucose 4.1 [5]. Последняя задача может представлять интерес в качестве бенчмарка для SAT-решателей: во некоторых случаях она является весьма трудоемкой, но доступной для существующих алгоритмов при использовании параллельных и распределенных вычислений.

Список литературы

[1] Simmons G.J. The chromatic number of the sphere. Journal of the Australian Mathematical Society. 1976. Vol. 21(4). Pp. 473–480.

[2] Malen G. Measurable Chromatic Number of Spheres. arXiv preprint arXiv:1412.2091. 2014.

[3] Sirgedas T. The surface of a sufficiently large sphere has chromatic number at most 7 // arXiv preprint arXiv:2107.11900. 2021.

[4] Kingma D.P., Ba J. Adam: A method for stochastic optimization. arXiv preprint arXiv:1412.6980. 2014.

[5] Audemard G., Simon L. On the glucose SAT solver. International Journal on Artificial Intelligence Tools. 2018. Vol. 27, no. 01. Pp. 1840001.

About Exponential Stability of Solutions to Systems of Differential Equations of Neutral Type with Distributed Delay*

Timur Yskak

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
istima92@mail.ru

We consider a class of systems of nonlinear non-autonomous differential equations of neutral type with distributed delay. For this class of systems, the Lyapunov – Krasovskii functional is proposed, with the help of which it is possible to obtain sufficient conditions for exponential stability of the zero solution, estimates of the norms of solutions that characterize the rate of decrease, and estimates of the attraction set.

Keywords: exponential stability, distributed delay, Lyapunov – Krasovskii functional, nonlinear differential equations, estimates of solutions

Об экспоненциальной устойчивости решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием

Т. Ыскак

ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия
istima92@mail.ru

В работе рассматривается класс систем нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием нейтрального типа. Для данного класса систем предложен функционал Ляпунова – Красовского, с помощью которого удается получить достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения, оценки норм решений, которые характеризуют скорость убывания, и оценки множества притяжения.

Ключевые слова: экспоненциальная устойчивость, распределенное запаздывание, функционал Ляпунова – Красовского, нелинейные дифференциальные уравнения, оценки решений

* Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

1. Основные результаты

Рассмотрим класс систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида

$$\frac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds,$$

$$+F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \tag{1}$$

где $D(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывно дифференцируемыми T-периодическими элементами, $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t, s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е.

$$D(t+T) \equiv D(t), \quad A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T, s) \equiv B(t, s),$$

$F(t, u_1, u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1, u_2) и следующей оценке:

$$\|F(t, u_1, u_2)\| \leq q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2}, \quad t \geq 0,$$

где

$$q_1,\, q_2 \geq 0, \quad \omega_1, \omega_2 > 0 \, - \, const.$$

При исследовании устойчивости нулевого решения системы (1) используется функционал Ляпунова – Красовского, предложенный в [2]:

$$v(t, y) = \langle H(t)(y(t) + D(t)y(t-\tau)), (y(t) + D(t)y(t-\tau))\rangle$$

$$+ \int\limits_{0}^{\tau} \int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds d\eta + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle M(t-s, s)y(s), y(s)\rangle \, ds.$$

Данный функционал является аналогом функционала Ляпунова – Красовского из [1].

Используя этот функционал, получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения в терминах матричных и интегральных неравенств, указаны оценки норм решений, которые характеризуют скорость убывания, и оценки множества притяжения.

Список литературы

[1] Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

[2] Ыскак Т. Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 416–427.

Decentralized Computation of Wasserstein Barycenter over Time-Varying Networks*

Olga Yufereva[1], Michael Persiianov[2], Pavel Dvurechensky[3], Alexander Gasnikov[2], Dmitry Kovalev[4]

[1] N. N. Krasovski Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg, 620108, Russia
olga.o.yufereva@gmail.com
[2] Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow 141701, Russia
[3] Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin 10117, Germany
[4] King Abdullah University of Science and Technology, Thuwal 23955-6900, Kingdom of Saudi Arabia

We propose a distributed computation algorithm for the Wasserstein barycenter problem for the case of time-varying communication networks. The study is motivated by features of the Wasserstein barycenter problem including the efficiency of distributed methods for it. However, no straightforward generalization of existent distributed methods for Wasserstein barycenter fits the case of time-varying networks. Our approach is novel and based on relaxation of non-smooth optimization problems and on a projected accelerated algorithm with inexact consensus-based projection. We prove non-asymptotic accelerated, in the sense of Nesterov convergence, rates and explicitly characterize their dependence on the parameters of the network and its dynamics. In the experiments, we demonstrate the efficiency of the proposed algorithm.

Keywords: time-varying networks, Wasserstein barycenter, accelerated decentralized optimization, regularization technique

Introduction

Starting with [1] it was observed that decentralized methods with dual oracle are well suited for Wasserstein barycenter (WB) problem. In the cycle of subsequent papers (e.g., [2,3,4,5]) different decentralized accelerated (randomized) algorithms were proposed for dual WB problem. However, since accelerated methods have potential functions that depend on target functions it is difficult to generalize directly algorithms from these works for time-varying networks. On the other hand, for time-varying networks [6] proposed ADOM with dual oracle, that is an optimal decentralized algorithm for smooth strongly convex unconstrained problems. Since WB problem is not smooth, is not strongly convex, and is not unconstrained, ADOM is not directly applicable for WB problem. The main result of this paper is generalization of ADOM for general convex decentralized optimization problem (with simple constraints).

1 Problem setting

1.1 Wasserstein barycenter problem

Since we deal with numerical experiments we take into consideration only finite-supported distributions. So most definitions below are simplified to this case. For instance, as a

* The work of A. Gasnikov was funded by Russian Science Foundation (project 18-71-10108). The work of O. Yufereva was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2022-874).

probability distribution with support on a finite set of points we take a vectors from d-dimensional simplex $S_1(d) = \{p \in [0,1]^d \mid p^\top \mathbf{1}_d = 1\}$, where $\mathbf{1}_d = (1,\dots,1)^\top$. Let M be a non-negative symmetric matrix with zeros on the diagonal. The matrix M is called cost (or loss) matrix and its elements $[M]_{ij}$ represent the cost of moving a unit mass from i-th to j-th points of the support. For two probability distributions $p, q \in S_1(d)$, the set of *transport plans* between them is defined as

$$U(p,q) := \left\{X \in \mathbb{R}_+^{d\times d} \mid X\mathbf{1} = p, X^T\mathbf{1} = q\right\}.$$

Then Wasserstein distances between $p, q \in S_1(d)$ is

$$\mathcal{W}(p,q) := \min_{X\in U(p,q)} \langle M, X\rangle.$$

It is more proper to call $\mathcal{W}(p,q)$ as Kantorovich-–Rubinstein metric [7], but unfortunately it is less common. The Wasserstein barycenter of the family of $q_i \in S_1(d)$ for $i = 1,\dots,m$ is defined as the solution to the following optimization problem

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathcal{W}_{q_i}(p) \to \min_{p\in S_1(d)} \tag{1}$$

where $\mathcal{W}_{q_i}(p)$ is one-argument function that equals to $\mathcal{W}(q_i, p)$.

1.2 Decentralized optimization problem over time-varying networks

Let a set S be non-empty and convex, let functions $f_i \colon S \to S$ be convex for $i = 1,\dots,m$, and let networks W_k be of m nodes for $k = 1,\dots$. Consider a decentralized optimization problem

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \to \min_{x\in S}$$

where m agents, interconnected at k-th step as nodes of the corresponding network W_k, are minimizing the sum of their individual functions $f_i \colon S \to S$. Each f_i is assumed to be known only by agent i. Each agent can perform computations based on its local state and data, and can directly communicate with its neighbors (according to W_k) only. Then W_k are called communication networks.

2 Result

Assume that Laplacians W_k of time-varying communication networks satisfy

$$\lambda^+_{\min} \le \lambda^+_{\min}(W_k) \le \lambda_{\max}(W_k) \le \lambda_{\max} \qquad \forall k = 1, 2, \dots$$

for some $\lambda^+_{\min}, \lambda_{\max} > 0$, where $\lambda^+_{\min}(W_k)$ is the smallest positive eigenvalue of W_k and $\lambda_{\max}(W_k)$ is the biggest one. For finite-supported and bounded away from zero initial probability distributions $\{q_i\}_{i=1}^m$, we propose a method for distributed computation Wasserstein barycenter over communication matrices W_k; we prove that it approximates the minimum of the sum $\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{W}_{q_i}(\cdot)$ and that it requires $n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$ iteration for the accuracy of ε.

References

[1] Uribe C.A., Dvinskikh D., Dvurechensky P., Gasnikov A., and Nedic A. Distributed computation of Wasserstein barycenters over networks. In: 2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC), pp. 6544–6549, IEEE, 2018.

[2] Dvurechensky P., Dvinskikh D., Gasnikov A., Uribe C.A., and Nedic A. Decentralize and randomize: Faster algorithm for Wasserstein barycenters. In: Advances in Neural Information Processing Systems, Vol. 31, 2018.

[3] Kroshnin, A., Tupitsa, N., Dvinskikh, D., Dvurechensky, P., Gasnikov, A., and Uribe, C. On the complexity of approximating Wasserstein barycenters. In: International conference on machine learning, pp. 3530-3540, PMLR, 2019.

[4] Dvinskikh D., Tiapkin D. Improved complexity bounds in Wasserstein barycenter problem. In: International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, pp. 1738–1746, PMLR, 2021.

[5] Rogozin A., Beznosikov A., Dvinskikh D., Kovalev D., Dvurechensky P., and Gasnikov A. Decentralized distributed optimization for saddle point problems. arXiv preprint arXiv:2102.07758. 2021

[6] Kovalev D., Shulgin E., Richtarik P., Rogozin A.V., and Gasnikov A. ADOM: accelerated decentralized optimization method for time-varying networks. In: International Conference on Machine Learning, pp. 5784–5793, PMLR, 2021.

[7] Vershik A.M. Long history of the Monge-Kantorovich transportation problem. The Mathematical Intelligencer. 2013. Vol. 35, no. 4. Pp. 1–9.

Variant of the Objective Function Parametrization Method for a Convex Programming Problem

I.Ya. Zabotin, K.E. Kazaeva, O.N. Shulgina

Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russia
iyazabotin@mail.ru, k.e.kazaeva@gmail.com

This article proposes a method of conditional minimization of a convex function, which is ideologically close to the well-known method of parametrizing the objective function functions (e.g., [1,2]). In the mentioned well-known method, each iteration point is found by solving the minimization problem of some auxiliary function on the entire space or on the set of simple structure. These auxiliary functions are based on a parameterized objective function and constraint functions. The parameter values vary from step to step, but they do not have to exceed the optimal value of the objective function. To satisfy this requirement, it is necessary to solve an auxiliary problem precisely at each step. This circumstance indicates that the method is hard to implement. In contrast to the mentioned well-known method, the method proposed here does not have such problems with the choice of parameter values.

The problem

$$\min \{f(x) : x \in D\},$$

is solved, where $D = \{x \in R_n : F(x) \leqslant 0\}$, the functions $f(x)$ and $F(x)$ are convex in R_n, the set D is bounded,

$$f^* = \min \{f(x) : x \in D\} < 0.$$

Assume that $X^* = \{x \in D : f(x) = f^*\}$, $F^+(x) = \max \{F(x), 0\}$, $K = \{0, 1, ...\}$.

The proposed method for solving this problem generates a sequence of approximations x_k, $k \in K$, as follows. Choose a convex closed set $D_0 \subseteq R_n$, which satisfies the inclusion $D \subset D_0$, and the numbers $\delta_0 > 0$, $\alpha_0 = 0$. Set $i = 0$, $k = 0$.

1. It is assumed that

$$f_i(x) = f(x) + \alpha_i, \quad \Phi_i(x) = \max \{f_i(x), F^+(x)\}.$$

2. If

$$\Phi_i^* = \min \{\Phi_i(x) : x \in D_0\} = 0,$$

   then set $i_k = i$, $x_k = y_{i_k} = \operatorname{argmin} \{\Phi_i(x) : x \in D_0\}$, $r = i_k$, $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \delta_{i+1}$, where $\delta_{i+1} = \delta_i$, the value of k is increased by one and proceeds to step 3. Otherwise, i.e. on occasion

$$\Phi_i^* > 0 \tag{1}$$

   $\alpha_{i+1} = \alpha_r + \delta_{i+1}$ is assumed, where $\delta_{i+1} = \delta_i / p$, $p > 1$, and step 3 is performed.
3. The value of i is increased by one, and the process proceeds to step 1.

We emphasize that due to the condition $f^* < 0$, when $i = 0$, the equality $\Phi_0^* = 0$ holds. Consequently, for the first of the numbers $i > 0$, at which inequality (1) holds, the value of α_r will be already determined.

Also, note that if at the i-th step of the process of solving the problem

$$\min \{\Phi_i(x) : x \in D_0\} \tag{2}$$

it turns out that inequality (1) is guaranteed, then the value of Φ_i^* and the point y_i the minimum of the function $\Phi_i(x)$ at D_0 might be not found. If there is a point $y_i \in D_0$ such that $\Phi_i(y_i) = 0$, while solving problem (2), then $\Phi_0^* = 0$ due to the inequality $\Phi_i(x) \geqslant 0$, $x \in R_n$, and the point y_i can be taken as the point x_k of the main sequence.

Let us explore some features of the method. Set

$$Y_i^* = \text{Argmin}\left\{\Phi_i(x) : x \in D_0\right\}, \quad y_i \in Y_i^*, \quad i \in K.$$

It is easy to prove that if $\Phi_i(y_i) = 0$, then $y_i \in D$.

Theorem 1. *Suppose that for some $i \in K$ the relations $\Phi_i(y_i) > 0$, $F^+(y_i) = 0$ are satisfied for a point y_i. Then $y_i \in X^*$.*

Let $K^* = \left\{k \in K : \Phi_{i_k}^* = 0, \ \Phi_{i_k+1} > 0\right\}$. According to the method of specifying the sequence $\{\delta_i\}$, $i \in K$, the set K^* is infinite.

Theorem 2. *Any limit point of the sequence $\{x_k\}$, $k \in K^*$, belongs to the set X^*.*

A procedure based on the principles of cutting methods is proposed. It allows for each fixed $i \in K$ to determine the fulfillment of relations (1), (2) in a finite number of steps.

References

[1] Evtushenko Yu. Methods of Solving Extremal Problems and Their Application in Optimization Systems. Moscow: Nauka, p. 432.

[2] Sukharev A. G., Timokhov A. V., Fedorov V. V. Course of optimization methods (in Russian). Moscow: Nauka, 1986. 328p.

One variant of the Two-Stage Cutting-Plane Method

Igor Zabotin, Oksana Shulgina, Rashid Yarullin

Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia
iyazabotin@mail.ru, onshul@mail.ru, yarullinrs@gmail.com

We propose a cutting-plane method for solving conditional minimization problem. In this method each main iteration point is constructed by two stage. A set is fixed to approximate the feasible set at the first stage, and it is performed an approximation of the epigraph of the objective function on the basis of some auxiliary points. The first stage is finished, when the approximation quality of the epigraph is quite good. At the second stage, the next main iteration point is constructed by cutting the previous ones from the set which approximates the feasible set, and it is performed a process to update the set which approximates the epigraph. Computational aspects of the proposed method are discussed.

Keywords: cutting-plane method, epigraph, convex function, nonlinear programming problem

1 Introduction

The method proposed here belongs to the class of cutting-plane methods (for example, [1, 2]). The developed method uses approximation by polyhedral sets of both the feasible set and the epigraph of the objective function in the optimization process. Each point of the main sequence is constructed in two stages. Some set is fixed to approximate the feasible set at the first stage, and it is performed an approximation of the epigraph of the objective function on the basis of some auxiliary points. When the approximation quality of the epigraph becomes acceptable in a certain sense, the first stage is completed. Further, the main iteration point is found at the second stage, and by cutting this point another set is constructed which approximates the feasible set. Note that after finding the main iteration point, it is possible to update the set which approximates the epigraph by discarding any number of previously constructed cutting planes.

2 Problem Settings and Minimization Method

We solve the following optimization problem:

$$\min \{f(x) : x \in D\},$$

where $D = \bigcap\limits_{j \in J = \{1,\dots m\}} D_j$, the sets D_j, $j \in J$, are convex and closed from an n-dimensional Euclidian space R_n, $\operatorname{int} D_j \neq \emptyset$, $f(x)$ is a convex function on the R^n. Note that it is possible to put $\operatorname{int} D = \emptyset$.

Suppose that $X^* = \{x \in D : f(x) = f^*\} \neq \emptyset$, $x^* \in X^*$, $\operatorname{epi}(f, R_n) = \{(x, \gamma) \in R_{n+1} : x \in R_n, \gamma \geq f(x)\}$, $W(z, Q)$ is a set of normalized generalized support vectors for the set Q at the point z, $K = \{0, 1, \dots\}$.

The proposed method constructs a points x_k, $k \in K$, for solving the optimization problem as follows. Choose points $v^j \in \operatorname{int} D_j$, $j \in J$, and $v \in \operatorname{int}\operatorname{epi}(f, R_n)$. Construct a convex closed bounded set $M_0 \subset R_n$ and a convex closed set $G_0 \subseteq R_{n+1}$ such that $x^* \in M_0$, $\mathrm{epi}\,(f, R_n) \subset G_0$. Define numbers $\bar{\gamma}$, ε_k, τ_k, $k \in K$ such that $\bar{\gamma} \le f(x)$ for all $x \in M_0$, $\varepsilon_k > 0$, $\tau_k \ge 0$, $k \in K$, $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$, $\tau_k \to 0$, $k \to \infty$, $1 \le q < +\infty$. Assign $i = 0$, $k = 0$.

1. Find a solution $u_i = (y_i, \gamma_i)$, where $y_i \in R_n$, $\gamma_i \in R_1$, of the problem $\min\{\gamma : x \in M_k, (x, \gamma) \in G_i, \gamma \ge \bar{\gamma}\}$. If $y_i \in D$, $f(y_i) = \gamma_i$, then $y_i \in X^*$, and the method is stopped.

2. A point $\bar{u}_i \notin \mathrm{int\,epi}\,(f, R_n)$ is found from the interval $(v, u_i]$ such that there exists a point $z_i \in \mathrm{epi}\,(f, R_n)$ satisfied $\|u_i - z_i\| \le q\|u_i - \bar{u}_i\|$. Choose a finite set $A_i \subset W(\bar{u}_i, \mathrm{epi}\,(f, R_n))$.

3. If the inequality

$$\|u_i - \bar{u}_i\| > \varepsilon_k \|v - \bar{u}_i\| \tag{1}$$

is determined, then $G_{i+1} = G_i \cap \{u \in R_{n+1} : \langle a, u - \bar{u}_i\rangle \le 0\, \forall a \in A_i\}$, and go to Step 1 by incrementing i. Otherwise, Step 4 is performed.

4. Choose $r_i \le i$ and $\tilde{y}_i \in M_k$ such that $f(\tilde{y}_i) \le f(y_i) + \tau_k$. Assign $i_k = i$, $x_k = \tilde{y}_i$, $\sigma_k = \gamma_i$,

$$G_{i+1} = G_{r_i} \cap \{u \in R_{n+1} : \langle a, u - \bar{u}_i\rangle \le 0\, \forall a \in A_i\}. \tag{2}$$

5. If $x_k \in D$, then assign $M_{k+1} = M_k$, and go to Step 9. Otherwise, Step 6 is performed.

6. Form a set $J_k = \{j \in J : x_k \notin D_j\}$. For each $j \in J_k$ the point $\bar{x}_k^j \notin \mathrm{int}\, D_j$ is chosen from the interval (v^j, x_k) such that there exists a point $z_k^j \in D_j$ satisfied $\|x_k - z_k^j\| \le q\|x_k - \bar{x}_k^j\|$.

7. Find a number $j_k \in J_k$ according to $\|x_k - \bar{x}_k^{j_k}\| = \max_{j \in J_k} \|x_k - \bar{x}_k^j\|$.

8. Choose a finite set $B_k \subset W(\bar{x}_k^{j_k}, D_{j_k})$. $M_{k+1} = M_k \cap \{x \in R_n : \langle b, x - \bar{x}_k^{j_k}\rangle \le 0\, \forall b \in B_k\}$.

9. Increment i and k by one, and go to Step 1.

M_0, G_0 are naturally chosen as polyhedral sets. Then for all i, $k \in K$ the problem $\min\{\gamma : x \in M_k, (x, \gamma) \in G_i, \gamma \ge \bar{\gamma}\}$ will be a linear programming problem. Note that this problem is solvable, because $x^* \in M_k$, $(x^*, f^*) \in G_i$ for all i, $k \in K$. The optimality criterion introduced in Step 1 of the method follows from the obvious inequality $\gamma_i \le f^*$, $i \in K$.

It is possibility to choose the points $\bar{u}_i$ and $\bar{x}_k^j$, $j \in J_k$, according to Steps 2, 6. In particular, they can be boundary points of the sets $\mathrm{epi}\,(f, R_n)$ and D_j respectively. In Step 5 it is admissible to assign, for example, $x_k = \tilde{y}_{i_k} = y_{i_k}$.

The above-mentioned updates of the set which approximates the epigraph can be performed at iterations $i = i_k$ as follows. When performing (1), the approximation quality of the epigraph is considered unsatisfactory, and G_{i+1} is constructed on the basis of G_i. If $\|u_i - \bar{u}_i\| \le \varepsilon_k \|v - \bar{u}_i\|$, then the main iteration point x_k is fixed and the set G_{i_k+1} is constructed according to (2) on the basis of any sets $G_0, \ldots, G_{i_k}$. In accordance with $r_{i_k} < i_k$ discarding of the cutting planes occurs. It is proved that for each $k \in K$ inequality (1) is performed for a finite amount of numbers $i \in K$. This means that for each $k \in K$ the number i_k will be fixed, i.e. it will be possible to update the set G_{i_k+1}, and, in addition, the point x_k will be constructed.

In accordance with [3] the following assertions are proved.

Theorem 1. *Any limit point of the sequence $\{x_k\}$, $k \in K$, belongs to D. If $(\tilde{x}, \tilde{\sigma})$ is a limit point of the sequence $\{(x_k, \sigma_k)\}$, $k \in K$, then $\tilde{x} \in X^*$, $\tilde{\sigma} = f^*$.*

References

[1] Bulatov V.P. Embedding Methods in Optimization Problems. Nauka, Novosibirsk, 1977. [In Russian]

[2] Zabotin I.Ya., Yarullin R.S. Cutting-plane method based on epigraph approximation with discarding the cutting planes. Autom. Remote Control. 2015. Vol. 76. Pp. 1966–1975.
[3] Zabotin I.Ya. On the several algorithms of immersion-severances for the problem of mathematical programming. Izv. Irk. gos. un. 2011. Vol. 4, no 2. Pp. 91–101. [In Russian]

On Matrix Eigenvalue Spectrum Assignment for High-order Linear Systems by Static Output Feedback*

Vasilii Zaitsev, Inna Kim

UdSU, Izhevsk, Russia
verba@udm.ru, kimingeral@gmail.com

For linear time-invariant control systems defined by a linear differential equation of the nth order with a multidimensional state, input and output, necessary and sufficient conditions for the solvability of the problem of assigning an arbitrary matrix spectrum by means of static output feedback are obtained.

Keywords: linear control system, eigenvalue spectrum assignment, linear static output feedback

О назначении матричного спектра линейных систем высших порядков статической обратной связью по выходу

В. А. Зайцев, И. Г. Ким

УдГУ, Ижевск, Россия
verba@udm.ru, kimingeral@gmail.com

Для линейных стационарных управляемых систем высших порядков получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи назначения произвольного матричного спектра посредством статической обратной связи по выходу.

Ключевые слова: линейная система управления, управление спектром, обратная связь по выходу

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n = \{x = \operatorname{col}(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\}$ — линейное пространство вектор-столбцов над полем $\mathbb{K}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ — пространство матриц размерности $m \times n$ над полем $\mathbb{K}$; $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$; $I \in M_n(\mathbb{K})$ — единичная матрица.

Рассмотрим линейную управляемую систему [1]

$$x^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} A_i x^{(n-i)} = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{l=p}^{n} B_{l\alpha} u_\alpha^{(n-l)}, \tag{1}$$

$$y_\beta = \sum_{\nu=1}^{p} C_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}, \quad \beta = \overline{1,k}. \tag{2}$$

* Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00, проект FEWS-2020-0010.

Здесь $s, n, m, k \in \mathbb{N}$ — заданные числа, $p \in \{\overline{1,n}\}$; $x \in \mathbb{K}^s$ — фазовый вектор, $u_\alpha \in \mathbb{K}^s$ — векторы управления, $y_\beta \in \mathbb{K}^s$ — векторы выходных сигналов, A_i, $B_{l\alpha}$, $C_{\nu\beta} \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{p,n}$, $\nu = \overline{1,p}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$. Построим векторы $u = \mathrm{col}(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{K}^{ms}$, $y = \mathrm{col}(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{K}^{ks}$. Будем строить управление в системе (1), (2) по принципу линейной статической обратной связи по выходу

$$u = Qy. \tag{3}$$

Здесь $Q = \{Q_{\alpha\beta}\} \in M_{ms,ks}(\mathbb{K})$, $Q_{\alpha\beta} \in M_s(\mathbb{K})$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$.

Определение 1. Скажем, что для системы (1), (2) *разрешима задача назначения произвольного матричного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу* (3), если для любых матриц $\Gamma_i \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, существует матрица обратной связи $Q \in M_{ms,ks}(\mathbb{K})$ такая, что замкнутая система (1), (2), (3) имеет вид

$$x^{(n)} + \Gamma_1 x^{(n-1)} + \dots + \Gamma_n x = 0.$$

По системе (1), (2) построим блочные матрицы $B = \{B_{l\alpha}\} \in M_{ns,ms}(\mathbb{K})$, $l = \overline{1,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $C = \{C_{\nu\beta}\} \in M_{ns,ks}(\mathbb{K})$, $\nu = \overline{1,n}$, $\beta = \overline{1,k}$, где $B_{l\alpha} = 0 \in M_s(\mathbb{K})$ при $l < p$ и $C_{\nu\beta} = 0 \in M_s(\mathbb{K})$ при $\nu > p$.

Обозначим $\mathcal{J} := J \otimes I \in M_{ns}(\mathbb{K})$, где $I \in M_s(\mathbb{K})$, $J \in M_n(\mathbb{K})$ — первый единичный косой ряд, $\otimes$ — прямое (кронекерово) произведение матриц.

Пусть X, Y — блочные матрицы с блоками размерности s такие, что число (блочных) столбцов матрицы X совпадает с числом (блочных) строк матрицы Y:

$$X = \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}(\mathbb{K}), \quad X_{ij} \in M_s(\mathbb{K}), \quad i = \overline{1,q}, \quad j = \overline{1,r};$$
$$Y = \{Y_{j\nu}\} \in M_{rs,ts}(\mathbb{K}), \quad Y_{j\nu} \in M_s(\mathbb{K}), \quad j = \overline{1,r}, \quad \nu = \overline{1,t}.$$

Для матриц X и Y определим операцию блочного умножения по следующему правилу:

$$Z = X \star Y := \{Z_{i\nu}\}, \quad Z_{i\nu} := \sum_{j=1}^{r} X_{ij} \otimes Y_{j\nu} \quad i = \overline{1,q}, \quad \nu = \overline{1,t}.$$

Имеем $Z_{i\nu} \in M_{s^2}(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,q}$, $\nu = \overline{1,t}$, поэтому $Z := X \star Y \in M_{qs^2,ts^2}(\mathbb{K})$.

Введем отображение $\mathrm{VECRR}_s : M_{qs,rs}(\mathbb{K}) \to M_{s,qrs}(\mathbb{K})$, которое разворачивает матрицу $X = \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}(\mathbb{K})$ по блочным строкам в блочную строку с блоками размерности s: $\mathrm{VECRR}_s\, X = [X_{11}, \dots, X_{1r}, \dots, X_{q1}, \dots, X_{qr}]$. Рассмотрим матрицы $C^T \star B$, $C^T \star \mathcal{J}B$, ..., $C^T \star \mathcal{J}^{n-1}B$. Построим матрицы $\mathrm{VECRR}_{s^2}(C^T \star \mathcal{J}^{i-1}B) \in M_{s^2,kms^2}(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, и матрицу

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathrm{VECRR}_{s^2}(C^T \star B) \\ \mathrm{VECRR}_{s^2}(C^T \star \mathcal{J}B) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{VECRR}_{s^2}(C^T \star \mathcal{J}^{n-1}B) \end{bmatrix} \in M_{ns^2,kms^2}(\mathbb{K}).$$

Теорема 1. *Для системы* (1), (2) *разрешима задача назначения произвольного матричного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу* (3) *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{rank}\,\Theta = ns^2.$$

Список литературы

[1] Zaitsev V., Kim I. Matrix eigenvalue spectrum assignment for linear control systems by static output feedback. Linear Algebra and its Applications. 2021. Vol. 613. Pp. 115–150.

The Modified Monowave Method for the Reachable Set Approximation of the Nonlinear Controlled System on the Plane

Tatiana Zarodnyuk, Alexander Gornov

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Russia
tzarodnyuk@gmail.com, gornov@icc.ru

The paper deals with the monowave method allowed to construct the boundary of the reachable set for controlled dynamical system. It is presented the results of numerical experiments for nonconvex optimal control test problems.

Keywords: controlled dynamical system, monowave method, reachable set

We propose the numerical technique based on the approximation of the reachable set boundary for controlled dynamical system. The presented monowave method uses the given sequence of the control functions with a variable switching point. To build "the wave" of the control function, the time interval is divided into equal parts. Then we construct the control functions as relay functions with the switching point selected at the nodes of the resulting grid.

To study the computational properties of the proposed method, the series of computational experiments have been carried out. Test examples are presented in which it was possible to simply set the boundary of the reachable set, it is impossible to recreate the boundaries correctly, and examples in which the construction of the boundary of the reachable set deteriorates with an increase in the time interval.

It is found that too few points may not be enough to construct the boundary of the reachable set. As the number of points increases, the boundary of the set can be built better (Fig. 1).

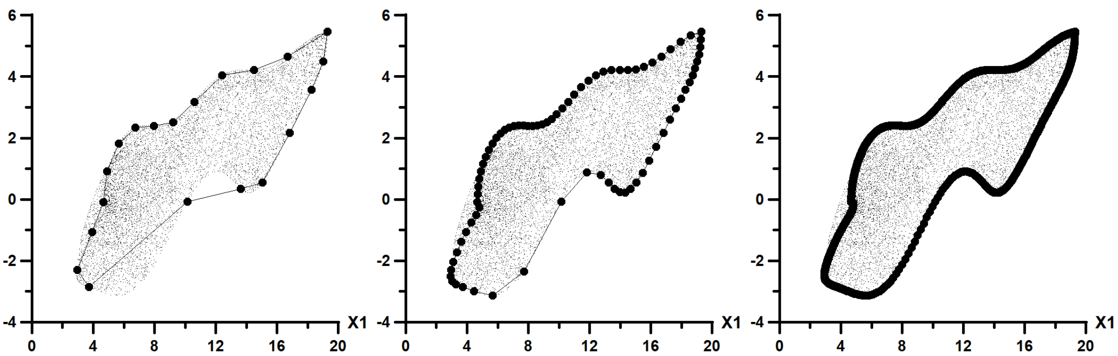


Figure 1. The well-known reachable set for the optimal control problem of the nonlinear pendulum oscillations [1]

References

[1] Gornov A.Y., Zarodnyuk T.S., Madzhara T.I., Daneyeva A.V., Veyalko I.A. A collection of test multiextremal optimal control problems. Springer Optimization and Its Applications. 2013. Vol. 76. Pp. 257–274.

Lower Bounds for Area Complexity of Decoder in Model of Cellular Circuits

Vadim Zizov

CMC MSU M.V.Lomonosov, Moscow, Russia
vzs815@gmail.com

In general the cellular circuit of functional and commutation elements (CC) is a mathematical model of integrated circuits (IC), which takes into account the features of their physical synthesis. The fundamental difference of this model from the wellstudied classes of boolean circuit (BC) is the presence of additional requirements to the geometry of the circuit, which take into account necessary routing resources when creating an IC. The subject of many authors study became the complexity of implementation of decoder. Lower bounds for the area complexity of boolean circuits implementing decoder with repeating inputs are shown in this paper.

Keywords: cellular circuit, boolean circuit, decoder, planar schemes, lower bounds

Нижние оценки сложности длинных дешифраторов в модели клеточных схем

В. С. Зизов

ВМК МГУ, Москва, Российская Федерация
vzs815@gmail.com

В общем случае клеточная схема (КС) представляет собой математическую модель интегральных схем (ИС), которая учитывает особенности их физического синтеза. Предметом изучения многих авторов стала сложность реализации дешифратора в различных классах схем. В настоящей работе устанавливаются асимптотически некоторые нижние оценки для площади КС, реализующих дешфираторы в модели с повторяющимися входами.

Ключевые слова: плоские схемы, клеточные схемы, схемы из функциональных элементов, дешифратор, нижние оценки

Модель клеточных схем (**КС**) впервые была предложена в 1967 году С.С. Кравцовым в работе [1], в которой для неё был получен порядок функции Шеннона. Функция Шеннона характеризует сложность самой «сложной» функции алгебры логики (ФАЛ) от n переменных. Модель **КС** является математической моделью интегральных схем (ИС), учитывающей особенности физического синтеза. Наличие требований на геометрию схемы, обеспечивающих учёт необходимых трассировочных ресурсов при создании ИС, представляет собой принципиальное отличие от хорошо изученных классов схем из функциональных элементов (СФЭ). В работе А. Альбрехта [2] продемонстрировано, что функция Шеннона для **КС** имеет вид $\sigma 2^n, \sigma = const$ при $n \to \infty$, но остается неизвестным точное значение σ в настоящий момент.

Аналогичная математическая модель в зарубежных источниках была описана в 1980 году К.Д. Томпсоном в работе [3]. Для исследований, связанных с ИС, модель является основополагающей. Исследование [4] показало, что модель плоских схем Томпсона является удовлетворительным приближением для ИС.Более того, она остаётся точным приближением для небольших участков (отдельных компонентов) ИС в случаях, когда модель не может верно отразить все особенности проектируемых систем.

Ранее в работе [5] были показаны асимптотические верхние и нижние оценки для площади схем, реализующих дешифратор порядка n без повторяющихся входов. Более того, данные оценки совпадают в первом члене разложения, имеют вид $n2^{n-1}(1+O\left(\frac{1}{n}\right))$. В настоящей работе устанавливаются некоторые асимптотические нижние оценки площади схем, реализующих дешифраторы порядка n с повторяющимися входами.

В рамках модели клеточных схем были получены также точные по порядку роста нижние оценки сложности для некоторых специальных функций и систем булевых функций. Так, Н.А. Шкаликова установила [6] порядок роста вида $n2^n$ для сложности дешифратора, то есть системы из всех 2^n элементарных конъюнкций ранга n от n переменных. В работе Ю. Хромковича, С.А. Ложкина и др. [7] получены нижняя и верхняя оценки для одной конкретной булевой функции от n переменных, с порядком роста n^2. В работе А.Ю. Яблонской [8] была установлена асимптотика площади $C\frac{2^n}{logn}$ для площади **КС** с ограниченной высотой и кратными входами, реализующих функции из ненулевого инвариантного класса, где константа C зависит от мощности этого класса.

Определение модели. Предметом изучения настоящей работы являются клеточные схемы (**КС**), они же плоские прямоугольные схемы. **КС** является прямоугольной решёткой на плоскости, состоящей из клеток - единичных квадратов. Каждая клетка представляет собой элемент. Модель подробно рассматривается в работе [5].

Длинные клеточные схемы – это выделенный класс клеточных схем, который характеризуется следующими свойствами. Данными **КС** реализуется одна существенная ФАЛ либо семейство ФАЛ, выходы которых расположены либо на одной, либо на двух заранее выбранных сторонах, и входы которых могут дублироваться сколь угодно большое число раз.

Определение. Сложностью системы ФАЛ F от n переменных в модели клеточных схем с повторяющимися входами называется минимальная площадь A клеточной схемы S, реализующую данную систему ФАЛ F, в которой произвольные входы повторяются произвольное число раз, общим числом не превосходя kn.

$$A^k(F(n)) = \min_k A(F(n)) = \min_k \min_{S: S\text{реал.}F(n)} A(S)$$

Теорема 1. В модели клеточных схем с повторяющимися входами при ограничении $kn = O(\frac{2^n}{n})$, т.е. $\exists C : kn \leqslant C\frac{2^n}{n}$ верно

$$A^k(Q_n) \geqslant 2^n \log_2(n) - O(\frac{2^n \log^2(n)}{n}).$$

Теорема 2. В модели клеточных схем с повторяющимися входами при ограничении $kn = \Omega(2^n \log(n) \log\log(n))$, т.е. $\forall C : C2^n \log(n) \log\log(n) < kn$ верно

$$A^k(Q_n) \geqslant \Omega(2^n \log(n) \log\log(n)).$$

Список литературы

[1] Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов. // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1967. Вып. 19. С. 285–292.

[2] Альбрехт А. О схемах из клеточных элементов // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1975. Вып. 33. С. 209–214.

[3] Thompson Clark D. A complexity theory for VLSI (1980)

[4] Chazelle B., Louis M. A model of computation for VLSI with related complexity results. Journal ACM. 32 №3 (July 1985), С. 573–588.

[5] Ложкин С. А., Зизов В. С. Уточненные оценки сложности дешифратора в модели клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2020 Т. 162 №3. С. 322–334. DOI: 10.26907/2541-7746.2020.3.

[6] Шкаликова Н.А. О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. М.: Наука, 1989. С. 177–197.

[7] Hromkovich Yu., Lozhkin S., Rybko A., Sapozhenko A., Shkalikova N. Lower bounds on the area complexity of Boolean circuits. Theoretical Computer Science. 97 (1992) С. 285–300.

[8] Яблонская А.Ю. О сложности реализации булевых функций из инвариантных классов клеточными схемами ограниченной высоты с кратными входами // Вестник ННГУ. 2012. Т. 16 № 4. С. 225–231.

Laplace Cascade Method

E. I. Zotova[1], R. D. Murtazina[2]

[1] USATU, Ufa, Russia
zot-kate83@yandex.ru
[2] USATU, Ufa, Russia
reginaufa@yandex.ru

The equation $z_{xy} + mxz_x + nyz_y + (2m - n + mnxy)z = 0$ is integrated by the Laplace cascade method.

Keywords: invariant, cascade integration method, Laplace transforms

Каскадный метод Лапласа

Е. И. Зотова[1], Р. Д. Муртазина[2]

[1] УГАТУ, Уфа, Россия
zot-kate83@yandex.ru
[2] УГАТУ, Уфа, Россия
reginaufa@yandex.ru

В работе проинтегрировано уравнение

$$z_{xy} + mxz_x + nyz_y + (2m - n + mnxy)z = 0$$

каскадным методом Лапласа.

Ключевые слова: инвариант, метод каскадного интегрирования, преобразования Лапласа

Уравнение $u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0$ можно записать в двух равносильных формах

$$u_{xy} + au_x + bu_y + (a_x + ab - h)u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)u - hu = 0,$$
$$u_{xy} + au_x + bu_y + (a_x + ab - k)u = \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)u - ku = 0.$$

Поэтому исходное уравнение эквивалентно каждой из систем

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)u = u_1, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)u_1 - hu = 0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)u = u_{-1}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)u_{-1} - ku = 0,$$

показыващих, что если хотя бы один из инвариантов h или k тождественно равен нулю, то исходное уравнение интегрируется в квадратурах.

Таким образом, X- преобразование Лапласа генерирует из исходного уравнения E_0 уравнения E_i вида

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} + a_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y} + c_i u_i = 0, \qquad i = 1, 2, \dots,$$

коэффициенты и инварианты которых связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned}
&a_i = a_{i-1} - (\ln h_{i-1})_y, \quad b_i = b_{i-1}, \quad c_i = a_i b_i - (b_i)_y - h_{i-1},\\
&h_i = 2h_{i-1} - k_{i-1} - (\ln h_{i-1})_{xy}, \quad k_i = h_{i-1}.
\end{aligned}$$

Здесь $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$. Аналогично y- преобразование Лапласа дает цепочку уравнений E_{-i}

$$\frac{\partial^2 u_{-i}}{\partial x \partial y} + a_{-i} \frac{\partial u_{-i}}{\partial x} + \frac{\partial u_{-i}}{\partial y} + c_{-i} u_{-i} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots,$$

где

$$\begin{aligned}
&a_{-i-1} = a_{-i}, \quad b_{-i-1} = b_{-i} - (\ln k_{-i})_x, \quad c_{-i-1} = a_{-i-1} b_{-i-1} - (a_{-i})_x - k_{-i},\\
&h_{-i-1} = k_{-i}, \quad k_{-i-1} = 2k_{-i} - h_{-i} - (\ln k_{-i})_{xy}.
\end{aligned}$$

Для уравнений E_i и E_{-i} системы первого порядка имеют вид

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_i\right) u_i = u_{i+1}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) u_{i+1} - h_i u_i = 0,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial x} + b_{-i}\right) u_{-i} = u_{-i-1}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) u_{-i-1} - k_{-i} u_{-i} = 0,
\end{aligned}$$

а их инварианты h_i, k_i и h_{-i}, k_{-i} выражаются через инварианты предыдущих уравнений

$$\begin{aligned}
&h_i = (i+1)h - ik - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln(h^i h_1^{i-1} \dots h_{i-2}^2 h_{i-1}),\\
&k_i = ih - (i-1)k - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln(h^{i-1} h_1^{i-2} \dots h_{i-3}^2 h_{i-2}),\\
&h_{-i} = ih_{-1} - (i-1) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln(h_{-1}^{i-1} h_{-2}^{i-2} \dots h_{-i+2}^2 h_{-i+1}),\\
&k_{-i} = h_{-i-1} = (i+1)h_{-1} - ih - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln(h_{-1}^{i} h_{-2}^{i-1} \dots h_{-i+1}^2 h_{-i}).
\end{aligned}$$

Общее решение уравнения

$$z_{xy} + mxz_x + nyz_y + (2m - n + mnxy)z = 0$$

имеет вид

$$z = \frac{e^{-nxy}}{n-m} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{(n-m)xy} \left(X(x) + \int Y(y) e^{(m-n)xy} dy \right) \right).$$

Список литературы

[1] Соколов В.В. Алгебраические структуры в теории интегрируемых систем. Новосибирск: Наука, 2021.

[2] Муртазина Р.Д., Кудашева Е.Г., Низамова А.Д., Сидельникова Н.А. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Устойчивость течения жидкостей в канале с линейным профилем температуры. М.: Русайнс, 2021.

[3] Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б. Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения. М.: Юрайт, 2022.

Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2022)

Published in Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science

Publisher's address: 134, Lermontova str., Irkutsk, Russia, 664033