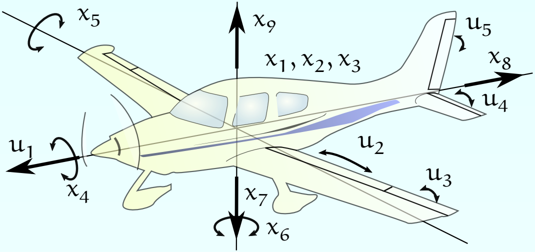
# ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ В РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ УЛУЧШЕНИЯ

Черкашин Е.А., Бадмацыренова С.Б.

ИДСТУ СО РАН, ИРНИТУ, ИМЭИ ИГУ

«Винеровские чтения — 2015»
16 – 18 апреля 2015 г., Иркутск

# Вектор-функция




## Состояние, управление

$\vec{x} = \mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle,$

$n = 9,$

$\vec{u} = \mathbf{u} = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle,$

$m = 5,$

$\vec{f} = \mathbf{f}.$

## Уравнение движения

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) \in R^n, \ \mathbf{u}(t) \in R^m, \quad t \in T,$$

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \to \min .$$

# Постановка задачи

## Уравнение движения (дискретный вариант)

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad t \in T = \{t_0, t_0+1, \ldots, t_1\}, \tag{1}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) \in R^n, \ \mathbf{u}(t) \in R^m, \quad t \in T, \tag{2}$$

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = F(\mathbf{x}(t_1)) + \sum_{t_0}^{t_1-1} f^0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \to \min. \tag{3}$$

## Задача улучшения

Пусть заданы управление $\mathbf{u}^{\mathrm{I}}(t)$ и соответствующее состояние $\mathbf{x}^{\mathrm{I}}(t)$. Требуется найти $\mathbf{x}^{\mathrm{II}}(t), \mathbf{u}^{\mathrm{II}}(t)$ такие, что

$$I(\mathbf{x}^{\mathrm{II}}, \mathbf{u}^{\mathrm{II}}) < I(\mathbf{x}^{\mathrm{I}}, \mathbf{u}^{\mathrm{I}}).$$

# Алгоритм первого порядка

1. Задается начальное управление $\mathbf{u}^{\mathrm{I}}(t)$, из уравнения (1) и условий (2) определяется $\mathbf{x}^{\mathrm{I}}(t)$. Вычисляется $I(\mathbf{x}^{\mathrm{I}}, \mathbf{u}^{\mathrm{I}})$.
2. Из системы $\boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{H}_x,\ \boldsymbol{\psi}(t_1) = -\mathbf{F}_x$, находим $\boldsymbol{\psi}(t)$, где $\boldsymbol{\psi}(t)$ — $n$-вектор, $\mathbf{H}_{\mathbf{u}}(t, x, \boldsymbol{\psi}(t+1), \mathbf{u}) = \boldsymbol{\psi}^{T}(t+1) \times \mathbf{f}(t, x, \mathbf{u}) - f^{0}(t, x, \mathbf{u})$, производные функции H по $\mathbf{u}$ $(\mathbf{H}_{\mathbf{u}})$ находятся в точке $\left(t, \mathbf{x}^{\mathrm{I}}(t), \boldsymbol{\psi}\,(t+1)\,, \mathbf{u}^{\mathrm{I}}(t)\right)$. Задается параметр $\alpha$.
3. Из системы $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}^{\mathrm{II}}(t)), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, где $\mathbf{u}^{\mathrm{II}}(t) = \mathbf{u}^{\mathrm{I}}(t) + \alpha \mathbf{H}_{\mathbf{u}}$, вычисляется $\mathbf{x}^{\mathrm{II}}(t)$.
4. Новое управление и значение параметра $\alpha$ подсчитываются из решения задачи одномерной минимизации для функционала $I(\mathbf{x}^{\mathrm{II}}, \mathbf{u}^{\mathrm{II}}) \to \min\limits_{\alpha}$.
5. Если $I\left(\mathbf{x}^{\mathrm{II}}, \mathbf{u}^{\mathrm{II}}\right) \geqslant I\left(\mathbf{x}^{\mathrm{I}}, \mathbf{u}^{\mathrm{I}}\right)$ (улучшение не произошло), то уменьшаем $\alpha$ и переходим к следующей итерации, начиная с пункта 3.
6. Иначе, если $I\left(\mathbf{x}^{\mathrm{II}}, \mathbf{u}^{\mathrm{II}}\right) - I\left(\mathbf{x}^{\mathrm{I}}, \mathbf{u}^{\mathrm{I}}\right) > \varepsilon$, то переходим к следующей итерации, начиная с пункта 2. Значение $\varepsilon$ — параметр точности.

# Задание модели

```
class LinModel1(Model):
    def __init__(self):
        X0=(1.0,)
        self.h = Ht
        self.num = int((1.0-0.0) / self.h)
        self.T = linspace(start=0.0, stop=1.0, num=self.num)
        self.t = arange(len(self.T))
        Model.__init__(self, X0=X0, U0=self.start_control())

    def start_control(self):
        U = [(0.0,) for t in self.t[:-1]]
        return array(U)

    def F(self, x):
        return 0.0

    def f(self, t, x, u):
        x0=x[0]; u0=u[0]
        return (x0+self.h*u0,)

    def f0(self, t, x, u):
        x0=x[0]; u0=u[0]
        return self.h * (x0*x0+u0*u0)
```

# Заключение

## Результаты

- Разработана первая версия библиотеки дифференцирования вектор-функций, поддерживающей библиотеки `numpy` и `scipy`;
- Использование библиотеки продемонстрировано на примере;
- Осуществляется реализация метода второго порядка.

Использование библиотеки позволяет повысить и точность и производительность вычислений.

## Задачи на будущее

- На основе методов `diff`, `lambdify` и `fun` реализовать генераторы кода разных вариантов $f$, $f^0$, $F$.
- Разработать эффективные процедуры для вычисления $\psi$, $H_u$ и $x$.
- Разработать методику представления схемы алгоритма улучшения и странслировать ее реализацию в компилируемый язык (C, C++, Fortran и т. п.).

# Спасибо за внимание!

Постоянный адрес презентации: http://github.com/