

Лабораторная работа №1

Задача №1

Решение

Пусть $\{1, 2, 3, 4\}$ – виды металла (медь, цинк, свинец, никель соответственно), $\{1, 2, 3\}$ – виды сплавов (обычный, специальный и для художественного литья соответственно).

Управляемые переменные: x_{ij} – процент содержания металла i -го вида в единице сплаве j -го вида, $i = \overline{1,4}, j = \overline{1,3}$.

Основные ограничения:

$$\sum_{i=1}^4 x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,3}$$

Прямые ограничения:

$$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in [0,1], \quad i = \overline{1,4}, j = \overline{1,3}$$

$$x_{43} \geq 0.06$$

$$x_{13} \geq 0.5$$

$$x_{33} \leq 0.3$$

$$x_{42} \geq 0.04$$

$$x_{12} \geq 0.7$$

$$x_{22} \geq 0.1$$

$$x_{32} \leq 0.2$$

Целевая функция:

$$\begin{aligned} & (2 - (x_{11} * 0.8 + x_{21} * 0.6 + x_{31} * 0.4 + x_{41} * 1)) * 400 \\ & + (3 - (x_{12} * 0.8 + x_{22} * 0.6 + x_{32} * 0.4 + x_{42} * 1)) * 700 \\ & + (4 - (x_{13} * 0.8 + x_{23} * 0.6 + x_{33} * 0.4 + x_{43} * 1)) * 100 \rightarrow \max \end{aligned}$$

что равносильно:

$$\begin{aligned} & (x_{11} * 0.8 + x_{21} * 0.6 + x_{31} * 0.4 + x_{41} * 1) * 400 \\ & + (x_{12} * 0.8 + x_{22} * 0.6 + x_{32} * 0.4 + x_{42} * 1) * 700 \\ & + (x_{13} * 0.8 + x_{23} * 0.6 + x_{33} * 0.4 + x_{43} * 1) * 100 \rightarrow \min \end{aligned}$$

Задача №2

Решение

Пусть $\{1, \dots, n\}$ – виды шихтовых материалов, $\{1, \dots, m\}$ – химические элементы, y_{ij} – содержание j -го химического элемента в i -м шихтовом материале, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$.

Управляемые переменные: x_i – процент содержания шихтового материала i -го вида в единице чугуна, $i = \overline{1, n}$.

Основные ограничения:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^n x_i * y_{ij} = H_j, \quad j = \overline{1, m}$$

Прямые ограничения:

$$x_i \geq 0, x_{ij} \in [0, 1], \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$$

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^n x_i * C_i \rightarrow \min$$

Задача №5

Решение

Пусть $\{1,2,3\}$ – поставщики, $\{1,2,3,4\}$ – аэропорты, a_{ij} – элементы матрицы стоимостей.

Управляемые переменные: x_{ij} – объём поставки топлива i -го поставщика j -му аэропорту, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$.

Основные ограничения:

$$\sum_{j=1}^4 x_{1j} \leq 2.5$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{2j} \leq 5$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{3j} \leq 6$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{i1} \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{i2} \leq 2$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{i3} \leq 3$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{i4} \leq 4$$

Прямые ограничения:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$$

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 x_{ij} * c_{ij} \rightarrow \min$$

Задача №8

Решение

Пусть $\{1, \dots, m\}$ – земельные участки, $\{1, \dots, n\}$ – сельскохозяйственные культуры, $\{1, \dots, z\}$ – тип удобрения.

Управляемые переменные: x_{ijk} – засеян ли i -й участок j -й культурой с использованием k -го удобрения, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, z}$; y_{ij} – требуются ли дополнительные затраты на i -м участке, засеянном j -й культурой, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$; s_i – орошается ли i -й участок, $i = \overline{1, m}$.

Основные ограничения:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, m}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}$$

$$\pi_j * \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^z x_{ijk} = p_j, \quad j = \overline{1, n}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^z (\alpha_{ijk}^{00} * x_{ijk} * (1 - y_{ij}) * (1 - s_i) + \alpha_{ijk}^{01} * x_{ijk} * (1 - y_{ij}) * s_i + \alpha_{ijk}^{10} * x_{ijk} * y_{ij} * (1 - s_i) + \alpha_{ijk}^{11} * x_{ijk} * y_{ij} * s_i) \geq p_j, \quad j = \overline{1, n}$$

Прямые ограничения:

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, z}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

$$s_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}$$

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^z x_{ijk} * (d_{ij} + y_{ij} * c_{ij} + b_{ijk} + s_i * q_i) \rightarrow \min$$

Задача №9

Решение

Пусть $\{1,2,3\}$ – типы земельных участков (соответственно лучшие, обыкновенные, худшие), $\{1,2,3\}$ – культуры (соответственно пшеница, рожь, овёс).

Управляемые переменные: x_{ij} – площадь, отведённая под j -ю культуры на i -м участке, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$.

Основные ограничения:

$$\sum_{j=1}^3 x_{1j} \leq 100, \quad i = \overline{1,3}$$

$$\sum_{j=1}^3 x_{2j} \leq 200, \quad i = \overline{1,3}$$

$$x_{11} * 30 + x_{21} * 20 + x_{31} * 15 \geq 5000$$

$$x_{12} * 25 + x_{22} * 20 + x_{32} * 15 \geq 3500$$

$$x_{13} * 28 + x_{23} * 26 + x_{33} * 25 \geq 5000$$

Прямые ограничения:

$$x_{1j} \in [0,100], \quad j = \overline{1,3}$$

$$x_{2j} \in [0,200], \quad j = \overline{1,3}$$

$$x_{3j} \geq 0, \quad j = \overline{1,3}$$

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^3 (x_{i1} * 10 + x_{i2} * 8 + x_{i3} * 7) \rightarrow \min$$

Задача №11

Решение

Пусть $\{1,2,3,4\}$ – станки, $\{1,2,3\}$ – операции.

Управляемые переменные: x_{ij} – i -й станок выполняет j -ю операцию, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,3}$.

Основные ограничения:

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,4}$$

$$\sum_{i=1}^4 x_{ij} \leq 1, \quad j = \overline{1,3}$$

Прямые ограничения:

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1,4}, j = \overline{1,3}$$

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij} * a_{ij} \rightarrow \min$$

Задача №13

Решение

Пусть t_{i1} , t_{i2} , t_{j1} , t_{j2} – время вылета из А, время прибытия в В, время вылета из В, время прибытия в А соответственно, $i \in \{1,3,5,7,9\}$, $j \in \{2,4,6,8,10\}$.

Управляемые переменные: x_{ij} – спарены ли рейсы i и j , где
 $\begin{cases} i \in \{1,3,5,7,9\}, j \in \{2,4,6,8,10\}, \text{ если база – в } A \\ i \in \{2,4,6,8,10\}, j \in \{1,3,5,7,9\}, \text{ если база – в } B \end{cases}$

Основные ограничения:

$$\sum_{j \in \{2,4,6,8,10\}} (x_{ij} + x_{ji}) = 1, \quad i \in \{1,3,5,7,9\}$$

$$\sum_{i \in \{1,3,5,7,9\}} (x_{ij} + x_{ji}) = 1, \quad j \in \{2,4,6,8,10\}$$

$$x_{ij} * (t_{j1} - t_{i2}) \geq 1 \quad i \in \{1,3,5,7,9\}, j \in \{2,4,6,8,10\}$$

$$x_{ji} * (t_{i1} - t_{j2}) \geq 1 \quad i \in \{1,3,5,7,9\}, j \in \{2,4,6,8,10\}$$

Прямые ограничения:

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \begin{cases} i \in \{1,3,5,7,9\}, j \in \{2,4,6,8,10\}, & \text{если база – в } A \\ i \in \{2,4,6,8,10\}, j \in \{1,3,5,7,9\}, & \text{если база – в } B \end{cases}$$

Целевая функция:

$$\sum_{\substack{i \in \{1,3,5,7,9\}, \\ j \in \{2,4,6,8,10\}}} (x_{ij} * (t_{j2} - t_{i1}) + x_{ji} * (t_{i2} - t_{j1})) \rightarrow \min$$

Задача №14

Решение

Воспользуемся терминологией предыдущей Задача.

Пусть $\{1,3,5,7\}$ – рейсы поездов из А в В (соответственно в 9.00, 12.00, 16.00, 20.00), $\{2,4,6,8\}$ – рейсы поездов из В в А (соответственно в 10.00, 15.00, 18.00, 22.00); t_i, t_j – время отправления из А в В и время отправления из В в А соответственно, $i \in \{1,3,5,7\}, j \in \{2,4,6,8\}$.

Управляемые переменные: x_{ij} – спарены ли рейсы i и j , где
 $\{i \in \{1,3,5,7\}, j \in \{2,4,6,8\}, \text{ если база – в А}$
 $\{i \in \{2,4,6,8\}, j \in \{1,3,5,7\}, \text{ если база – в В}.$

Основные ограничения:

$$\sum_{j \in \{2,4,6,8\}} (x_{ij} + x_{ji}) = 1, \quad i \in \{1,3,5,7\}$$

$$\sum_{i \in \{1,3,5,7\}} (x_{ij} + x_{ji}) = 1, \quad j \in \{2,4,6,8\}$$

$$x_{ij} * (t_j - (t_i + 6)) \leq \min_{j \in \{2,4,6,8\}} (t_j - (t_i + 6)) \quad i \in \{1,3,5,7\}, j \in \{2,4,6,8\}$$

$$x_{ji} * (t_i - (t_j + 6)) \leq \min_{j \in \{1,3,5,7\}} (t_i - (t_j + 6)) \quad i \in \{1,3,5,7\}, j \in \{2,4,6,8\}$$

Прямые ограничения:

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in \{1,3,5,7\}, j \in \{2,4,6,8\}.$$

Целевая функция:

$$\sum_{\substack{i \in \{1,3,5,7\}, \\ j \in \{2,4,6,8\}}} (x_{ij} * (t_j - (t_i + 6)) + x_{ji} * (t_i - (t_j + 6))) \rightarrow \min$$

Задача №15

Решение

Пусть $\{1,2,3,4,5\}$ – типы кредитов (соответственно, кредиты физическим лицам, кредиты на покупку автомобилей, кредиты на покупку жилья, сельскохозяйственные, коммерческие), a_i – ставка процента, b_i – вероятность безнадёжных долгов.

Управляемые переменные: x_i – объём кредитов i -го типа, $i = \overline{1,5}$.

Основные ограничения:

$$x_4 + x_5 \geq 0.4 * \sum_{i=1}^5 x_i$$

$$x_1 + x_2 \leq x_3$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i * b_i \leq 0.04 * \sum_{i=1}^5 x_i$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 12$$

Прямые ограничения:

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}$$

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^5 x_i * (a_i * (1 - b_i) - b_i) \rightarrow \max$$

Задача №16

Решение

Пусть $\{1,2,3\}$ – тип вложения (страховой полис, шестилетние ценные бумаги, девятилетние ценные бумаги), a_j – сумма, отложенная в j -м году, $j = \overline{1,10}$.

Управляемые переменные: x_{ij} – сумма i -го вложения в j -м году, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,10}$.

Основные ограничения:

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = a_j, \quad j = \overline{1,10}$$

Прямые ограничения:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, j = \overline{1,20}$$

Целевая функция:

$$\sum_{j=1}^{10} x_{1j} * 1.075^{10-j+1} + \sum_{j=1}^5 x_{2j} * 1.079^6 * 0.98 + \sum_{j=1}^2 x_{3j} * 1.085^9 * 1.02 \rightarrow \max$$

Задача №17

Решение

Пусть $\{1,2,3,4\}$ – кварталы, a_i – объём заказа в i -м квартале, $i = \overline{1,4}$.

Управляемые переменные: x_i – количество собранных компьютеров в i -м квартале, $i = \overline{1,4}$,

Основные ограничения:

$$\sum_{j=1}^i x_j \geq \sum_{j=1}^i a_j, \quad i = \overline{1,4}$$

Прямые ограничения:

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}$$

Целевая функция:

$$100 * \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^i x_j - \sum_{j=1}^i a_j \right) + \sum_{\substack{i=2, \\ x_i > x_{i-1}}}^4 60 + \sum_{\substack{i=2, \\ x_i < x_{i-1}}}^4 50 \rightarrow \min$$