Полочанина Евгения Денисовна, 3 курс, 2 группа

Лабораторная работа №2

Задача №22а)

Условие

Найти множество Парето в следующих многокритериальных задачах:

а) $f_1(x) \to \max$, $f_2(x) \to \max$,

где $f_1(x) = a\,x + b(1-x)$, $f_2(x) = x^{\alpha}\,(1-x)^{\beta}$,

при условии $0 \le x \le 1$. Здесь a, b, α, β – положительные константы;

Решение

Функция f_2 непрерывна на $[0,1]$ $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса она ограничена на $[0,1]$ и достигает своих минимального и максимального значений.

$f_2'(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(\alpha * (1-x) - \beta * x)$

$f_2'(x) = 0$ при $x = 0, x = 1, x = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ – критические точки.

$f_2(0) = 0,$

$f_2(1) = 0,$

$f_2\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) = \dfrac{\alpha^{\alpha} * \beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}} \Rightarrow x = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ – точка максимума.

$f_1'(x) = a - b$

Случай 1: a $> b$, тогда $f_1'(x) > 0 \Rightarrow f_1(x)$ возрастает на $[0,1]$, $f_2(x)$ возрастает на $[0,\frac{\alpha}{\alpha+\beta})$, убывает на $\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta},1\right]$, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ – точка максимума $\Rightarrow$ множество Парето есть $[\frac{\alpha}{\alpha+\beta},1]$.

Случай 2: a $< b$, тогда $f_1'(x) < 0 \Rightarrow f_1(x)$ убывает на $[0,1]$, $f_2(x)$ возрастает на $[0,\frac{\alpha}{\alpha+\beta})$, убывает на $\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta},1\right]$, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ – точка максимума $\Rightarrow$ множество Парето есть $[0,\frac{\alpha}{\alpha+\beta}]$.

Случай 3: a $= b$, тогда $f_1'(x) = 0 \Rightarrow f_1(x)$ постоянна на $[0,1]$ ($f_2(x) = b, x \in [0,1]$), $f_2(x)$ возрастает на $[0,\frac{\alpha}{\alpha+\beta})$, убывает на $\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta},1\right]$, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ – точка максимума $\Rightarrow$ множество Парето есть $\{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\}$.

Ответ: a $> b \Rightarrow [\frac{\alpha}{\alpha+\beta},1]$ – множество Парето; a $< b \Rightarrow [0,\frac{\alpha}{\alpha+\beta}]$ – множество Парето; a $= b \Rightarrow \{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\}$ – множество Парето.

Задача №22b)

Условие

Найти множество Парето в следующих многокритериальных задачах:

b) $f_1(x_1, x_2) \to \max$, $f_2(x_1, x_2) \to \max$,

где $f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$,

при условии $0 \le x_i \le 1$, i=1,2.

Решение

$f_1(1, x_2) > f_1(x_1, x_2)$, $f_2(1, x_2) > f_1(x_1, x_2)$, где $\{(x_1, x_2) |\ x_1 \in [0,1), x_2 \in [0,1]\} \Rightarrow$ точки из этого множества не принадлежат множеству Парето.

Рассмотрим множество $\{(1, x_2) | x_2 \in [0,1]\}$. $f_1(x)$ возрастает, $f_2(x)$ убывает по $x_2 \Rightarrow \{(1, x_2) | x_2 \in [0,1]\}$ – множество Парето.

Ответ: $\{(1, x_2) | x_2 \in [0,1]\}$ – множество Парето.

Задача №22c)

Условие

c) $f_i(x_1, x_2, x_3) \to \max$, $i = \overline{1,3}$,

где $f_1(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_2, x_3\}$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_1, x_3\}$,

$f_1(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_1, x_2\}$, при условии $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_i \geq 0$, $i = 1,2,3$.

Решение

$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \Rightarrow f_1(x_1, x_2, x_3) = x_3, f_2(x_2, x_2, x_3) = x_3, f_3(x_1, x_2, x_3) = x_2$.

Предположим, $x_2 > x_3$. Возьмём $x_2' = x_3' = \frac{x_2+x_3}{2} \Rightarrow f_1'(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2+x_3}{2} > f_1(x_1, x_2, x_3) = x_3, f_2(x_2, x_2, x_3) = x_3, f_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 \Rightarrow$ точки из множества $\{(x_1, x_2, x_3) |\ x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3}\ \ x_1 \geq x_2 > x_3\}$ не принадлежат множеству Парето.

$x_1 \geq x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = 1 - 2 * x_3 \Rightarrow f_1(x_1, x_2, x_3) = x_3, f_2(x_2, x_2, x_3) = x_3$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = 1 - 2 * x_3$. $f_1(x_1, x_2, x_3)$, $f_2(x_1, x_2, x_3)$ возрастают, $f_3(x)$ убывает по x_3. Учитывая $x_1 \geq 0 \Rightarrow 1 - 2 * x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq \frac{1}{2}$. Таким образом, $P_1 = \left\{(1 - 2 * x_3, x_3, x_3) |\ x_3 \in [0, \frac{1}{2}]\right\}$ – множество Парето.

Аналогично при $x_2 \geq x_1 = x_3 \Rightarrow P_2 = \left\{(x_1, 1 - 2 * x_1, x_1) |\ x_1 \in [0, \frac{1}{2}]\right\}$ – множество Парето; $x_3 \geq x_2 = x_1 \Rightarrow P_3 = \left\{(x_2, x_2, 1 - 2 * x_2) |\ x_2 \in [0, \frac{1}{2}]\right\}$ – множество Парето.

Таким образом множество Парето:

$$P_1 \cup P_2 \cup P_3 = \left\{(1 - 2 * x_3, x_3, x_3) |\ x_3 \in [0, \frac{1}{2}]\right\}$$
$$\cup \left\{(x_1, 1 - 2 * x_1, x_1) |\ x_1 \in [0, \frac{1}{2}]\right\}$$
$$\cup \left\{(x_2, x_2, 1 - 2 * x_2) |\ x_2 \in [0, \frac{1}{2}]\right\}$$

Ответ: $\left\{(1 - 2 * x_3, x_3, x_3) |\ x_3 \in [0, \frac{1}{2}]\right\} \cup \left\{(x_1, 1 - 2 * x_1, x_1) |\ x_1 \in [0, \frac{1}{2}]\right\} \cup \left\{(x_2, x_2, 1 - 2 * x_2) |\ x_2 \in [0, \frac{1}{2}]\right\}$ – множество Парето.

Задача №1а)

Условие

1. Показать, что матричная игра с матрицей $H=(h_{ij})_{nxm}$ имеет решение в чистых стратегиях, и найти такое решения, если:

а) $h_{ij} = f(i) - g(j)$

Решение

$$\alpha_i = \min_{j=\overline{1,m}}(f(i) - g(j)) = f(i) - \max_{j=\overline{1,m}} g(j)$$

$$\alpha = \max_{i=\overline{1,n}} \alpha_i = \max_{i=\overline{1,n}} f(i) - \max_{j=\overline{1,m}} g(j) = \max_{\substack{i=\overline{1,n},\\ j=\overline{1,m}}} h_{ij}$$

$$\beta_j = \max_{i=\overline{1,n}}(f(i) - g(j)) = \max_{i=\overline{1,n}} f(i) - g(j)$$

$$\beta = \min_{j=\overline{1,m}} \beta_j = \min_{j=\overline{1,m}} (\max_{i=\overline{1,n}} f(i) - g(j)) = \max_{i=\overline{1,n}} f(i) - \max_{j=\overline{1,m}} g(j) = \max_{\substack{i=\overline{1,n},\\ j=\overline{1,m}}} h_{ij}$$

Ответ: $\alpha = \beta = \max_{\substack{i=\overline{1,n},\\ j=\overline{1,m}}} h_{ij} \Rightarrow$ игра разрешима в чистых стратегиях, решение игры – $(\arg_i \max_{\substack{i=\overline{1,n},\\ j=\overline{1,m}}} h_{ij}, \arg_j \max_{\substack{i=\overline{1,n},\\ j=\overline{1,m}}} h_{ij})$.

Задача №1b)

Условие

1. Показать, что матричная игра с матрицей $H=(h_{ij})_{nxm}$ имеет решение в чистых стратегиях, и найти такое решения, если:

b) $h_{ij} = f(i) + g(j)$

Решение

$$\alpha_i = \min_{j=\overline{1,m}}(f(i) + g(j)) = f(i) + \min_{j=\overline{1,m}} g(j)$$

$$\alpha = \max_{i=\overline{1,n}} \alpha_i = \max_{i=\overline{1,n}} f(i) + \min_{j=\overline{1,m}} g(j) = \max_{i=\overline{1,n}} \min_{j=\overline{1,m}} h_{ij}$$

$$\beta_j = \max_{i=\overline{1,n}}(f(i) + g(j)) = \max_{i=\overline{1,n}} f(i) + g(j)$$

$$\beta = \min_{j=\overline{1,m}} \beta_j = \max_{i=\overline{1,n}} f(i) + \min_{j=\overline{1,m}} g(j) = \max_{i=\overline{1,n}} \min_{j=\overline{1,m}} h_{ij}$$

Ответ: $\alpha = \beta = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \min\limits_{j=\overline{1,m}} h_{ij} \Rightarrow$ игра разрешима в чистых стратегиях, решение игры – $(\underset{i}{arg} \max\limits_{i=\overline{1,n}} \min\limits_{j=\overline{1,m}} h_{ij}, \underset{j}{arg} \max\limits_{i=\overline{1,n}} \min\limits_{j=\overline{1,m}} h_{ij})$.

Задача №1c)

Условие

1. Показать, что матричная игра с матрицей $H=(h_{ij})_{nxm}$ имеет решение в чистых стратегиях, и найти такое решения, если:

c) $H = \begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \\ a\,d \\ c\,b \end{pmatrix}$, a, b, c, d – произвольные числа;

Решение

Найдём соответствие между числами a, b, c, d и решениями:

$$\arg a = \{(1,1), (3,1)\}$$
$$\arg b = \{(1,2), (4,2)\}$$
$$\arg c = \{(2,1), (4,1)\}$$
$$\arg d = \{(2,2), (3,2)\}$$
$$\alpha_1 = \min(a, b)$$
$$\alpha_2 = \min(c, d)$$
$$\alpha_3 = \min(a, d)$$
$$\alpha_4 = \min(c, b)$$
$$\alpha = \max_{i=\overline{1,4}} \alpha_i = \max(\min(a, b), \min(c, d), \min(a, d), \min(c, b))$$
$$\beta_1 = \max(a, c)$$
$$\beta_2 = \max(b, d)$$
$$\beta = \min_{j=\overline{1,2}} \beta_j = \min(\max(a, c), \max(b, d))$$

Докажем, что $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned}\alpha = \max(\min(a, b), \min(c, d), \min(a, d), \min(c, b))\\ = \max(\max(\min(a, b), \min(a, d)), \max(\min(c, d), \min(c, b)))\\ = \max(\min(a, \max(b, d)), \min(c, \max(b, d)))\\ = \min(\max(a, c), \max(b, d)) = \beta\end{aligned}$$

Ч.т.д. Таким образом, для любых a, b, c, d игра разрешима в чистых стратегиях. Решениями будет являться множество $\arg \alpha = \arg \beta = \arg \min(\max(a, c), \max(b, d))$.

Ответ: для любых a, b, c, d игра разрешима в чистых стратегиях, множество решений – $\arg \min(\max(a, c), \max(b, d))$.

Задача №1d)

Условие

1. Показать, что матричная игра с матрицей $H=(h_{ij})_{nxm}$ имеет решение в чистых стратегиях, и найти такое решения, если:

d) $H=\begin{pmatrix} a\ e\ a\ e\ a\ e\ a\ e \\ b\ f\ b\ f\ f\ b\ f\ b \\ c\ g\ g\ c\ c\ g\ g\ c \end{pmatrix}$, a, b, c, e, f, g – произвольные числа;

Решение

Найдём соответствие между числами a, b, c, e, f, g и решениями:

$$\arg a = \{(1{,}1), (1{,}3), (1{,}5), (1{,}7)\}$$
$$\arg b = \{(2{,}1), (2{,}3), (2{,}6), (2{,}8)\}$$
$$\arg c = \{(3{,}1), (3{,}4), (3{,}5), (3{,}8)\}$$
$$\arg e = \{(1{,}2), (1{,}4), (1{,}6), (1{,}8)\}$$
$$\arg f = \{(2{,}2), (2{,}4), (2{,}5), (2{,}2)\}$$
$$\arg g = \{(3{,}2), (3{,}3), (3{,}6), (3{,}7)\}$$
$$\alpha_1 = \min(a, e)$$
$$\alpha_2 = \min(b, f)$$
$$\alpha_3 = \min(c, g)$$
$$\alpha = \max_{i=\overline{1,3}} \alpha_i = \max(\min(a, e), \min(b, f), \min(c, g))$$
$$\beta_1 = \max(a, b, c)$$
$$\beta_2 = \max(e, f, g)$$
$$\beta_3 = \max(a, b, g)$$
$$\beta_4 = \max(e, f, c)$$
$$\beta_5 = \max(a, f, c)$$
$$\beta_6 = \max(e, b, g)$$
$$\beta_7 = \max(a, f, g)$$
$$\beta_8 = \max(e, b, c)$$
$$\beta = \min_{j=\overline{1,8}} \beta_j = \min(\max(a, b, c), \max(e, f, g), \max(a, b, g), \max(e, f, c),$$
$$\max(a, f, c), \max(e, b, g), \max(a, f, g), \max(e, b, c))$$

Докажем, что $\alpha = \beta$.

$$\beta = \min(\max(a, b, c), \max(e, f, g), \max(a, b, g), \max(e, f, c),$$
$$\max(a, f, c), \max(e, b, g), \max(a, f, g), \max(e, b, c)) =$$
$$= \min\begin{pmatrix} \min(\max(a, b, c), \max(\mathrm{a, b, g})), \min(\max(e, f, g), \max(a, f, g)), \\ \min\big(\max(e, f, c), \max(a, f, c)\big), \min(\max(e, b, g), \max(e, b, c)) \end{pmatrix} =$$

$$= \min\begin{pmatrix}\max(a, b, \min(c, g)), \max(f, g, \min(a, e)), \\ \max(f, c, \min(a, e)), \max(e, b, \min(c, g))\end{pmatrix} =$$

$$= \min\left(\min\begin{pmatrix}\max(f, g, \min(a, e)), \\ \max(f, c, \min(a, e))\end{pmatrix}, \min\begin{pmatrix}\max(a, b, \min(c, g)), \\ \max(e, b, \min(c, g))\end{pmatrix}\right)$$

$$= \min(\max(f, \min(c, g), \min(a, e)), \max(b, \min(a, e), \min(c, g)))$$

$$= \max(\min(a, e), \min(b, f), \min(c, g)) = \alpha$$

Ч.т.д. Таким образом, для любых a, b, c, e, f, g игра разрешима в чистых стратегиях. Решениями будет являться множество $\arg\alpha = \arg\beta = \arg\max(\min(a, e), \min(b, f), \min(c, g))$.

Ответ: для любых a, b, c, d игра разрешима в чистых стратегиях, множество решений – $\arg\max(\min(a, e), \min(b, f), \min(c, g))$.

Задача №1е)

Условие

1. Показать, что матричная игра с матрицей $H=(h_{ij})_{nxm}$ имеет решение в чистых стратегиях, и найти такое решения, если:

е) $h_{ij} = \dfrac{a_i + b_j}{c_i + d_j}$, a_i, b_j – произвольные числа, c_i, d_j – положительные числа.

Решение

$$\alpha = \max_{i=\overline{1,n}} \min_{j=\overline{1,m}} \frac{a_i + b_j}{c_i + d_j}$$

$$\beta = \min_{j=\overline{1,m}} \beta_j = \min_{j=\overline{1,m}} \max_{i=\overline{1,n}} \frac{a_i + b_j}{c_i + d_j}$$

Случай 1: предположим, $\min\limits_{j=\overline{1,m}} \frac{a_i+b_j}{c_i+d_j} \geq 0$. Для $\forall i = \overline{1,n} \Rightarrow$
$\arg\min\limits_{j=\overline{1,m}} \frac{a_i+b_j}{c_i+d_j} = \arg\min\limits_{j=\overline{1,m}} \frac{b_j}{d_j} = j_0$.

Случай 2: предположим, $\min\limits_{j=\overline{1,m}} \frac{a_i+b_j}{c_i+d_j} < 0$. Для $\forall i = \overline{1,n} \Rightarrow$
$\arg\min\limits_{j=\overline{1,m}} \frac{a_i+b_j}{c_i+d_j} = \arg\min\limits_{j=\overline{1,m}} b_j * d_j = j_0$.

Тогда чистая стратегия B_{j_0} доминирует чистые стратегии с номерами $B_j, j = \overline{1,m}, j \neq j_0$ $\Rightarrow$ размерность матрицы H – $n \times 1$. $\exists\, i_0 = \arg\max\limits_{i=\overline{1,n}} \frac{a_i+b_{j_0}}{c_i+d_{j_0}}$. Тогда чистая стратегия A_{i_0} доминирует чистые стратегии с номерами $A_i, i = \overline{1,n}, i \neq i_0$ $\Rightarrow$ размерность матрицы H – 1×1.

$\alpha = \beta = h_{i_0 j_0}$ – игра разрешима в чистых стратегиях.

Ответ: $\alpha = \beta = h_{i_0 j_0}$, где

$$j_0 = \begin{cases} \arg\min\limits_{j=\overline{1,m}} \frac{b_j}{d_j}, \min\limits_{j=\overline{1,m}} \frac{a_i+b_j}{c_i+d_j} \geq 0 \\ \arg\min\limits_{j=\overline{1,m}} b_j * d_j, \min\limits_{j=\overline{1,m}} \frac{a_i+b_j}{c_i+d_j} < 0 \end{cases}, \quad i_0 = \arg\max_{i=\overline{1,n}} \frac{a_i+b_{j_0}}{c_i+d_{j_0}}$$

$\Rightarrow$ игра разрешима в чистых стратегиях, решение игры – (i_0, j_0).

Задача №1f)

Условие

1. Показать, что матричная игра с матрицей $H=(h_{ij})_{nxm}$ имеет решение в чистых стратегиях, и найти такое решения, если:

f) $n = m$ и для любых i, j, k, $1 \le i, j, k \le m$, имеет место тождество $h_{ij}+h_{jk}+h_{ki}= 0$.

Решение

$\alpha_i = \min\limits_{j=\overline{1,m}} h_{ij}$

$\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \alpha_i = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \min\limits_{j=\overline{1,m}} h_{ij}$

$\beta_j = \max\limits_{i=\overline{1,m}} h_{ij}$

$\beta = \min\limits_{j=\overline{1,m}} \beta_j = \min\limits_{j=\overline{1,m}} \max\limits_{i=\overline{1,m}} h_{ij}$

Докажем, что $\alpha = \beta$.

$$\alpha = \max_{i=\overline{1,m}} \min_{j=\overline{1,m}} h_{ij} = \max_{i=\overline{1,m}} \min_{j=\overline{1,m}} \left(-h_{jk} - h_{ki}\right) = \max_{i=\overline{1,m}} \left(\min_{j=\overline{1,m}} \left(-h_{jk}\right) - h_{ki}\right)$$
$$= \max_{i=\overline{1,m}} (-h_{ki}) + \min_{j=\overline{1,m}} \left(-h_{jk}\right) = \min_{j=\overline{1,m}} \left(-h_{jk} + \max_{i=\overline{1,m}} (-h_{ki})\right)$$
$$= \min_{j=\overline{1,m}} \left(\max_{i=\overline{1,m}} \left(-h_{ki} - h_{jk}\right)\right) = \min_{j=\overline{1,m}} \max_{i=\overline{1,m}} h_{ij}$$

Ч.т.д. Таким образом, игра разрешима в чистых стратегиях.

Ответ: $\alpha = \beta = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \min\limits_{j=\overline{1,m}} h_{ij} \Rightarrow$ игра разрешима в чистых стратегиях, решение игры – $(\arg\limits_{i} \max\limits_{i=\overline{1,n}} \min\limits_{j=\overline{1,m}} h_{ij}, \arg\limits_{j} \max\limits_{i=\overline{1,n}} \min\limits_{j=\overline{1,m}} h_{ij})$.

Задача №5

Условие

5. Каждый из игроков имеет три фишки, которые может располагать в трёх позициях (в одной позиции можно расположить одну, две или три фишки). Фишка второго игрока “уничтожает” фишку противника, расположенную в той же позиции. Расстановка фишек производится в отсутствии информации о решении противника. Неуничтоженная фишка первого игрока “ прорывается” через соответствующую позицию. Составить и решить матричную игру, считая выигрышем первого игрока (соответственно проигрышем второго игрока) общее число “прорвавшихся” фишек.

Решение

Пусть $\{1,2,3\}$ – позиции, $\{1-x, 2-y, 3-z\}, x+y+z=3,$– чистая стратегия, при которой на первую позицию ставится x фишек, на вторую позицию ставится y фишек, на первую позицию ставится z фишек.

Тогда чистые стратегии первого игрока – $\{A_i | i=\overline{1,10}\}$, чистые стратегии первого игрока – $\left\{B_j \middle| j=\overline{1,10}\right\}$:

$$A_1 = B_1 = \{1-3, 2-0, 3-0\}$$
$$A_2 = B_2 = \{1-2, 2-1, 3-0\}$$
$$A_3 = B_3 = \{1-2, 2-0, 3-1\}$$
$$A_4 = B_4 = \{1-1, 2-2, 3-0\}$$
$$A_5 = B_5 = \{1-1, 2-1, 3-1\}$$
$$A_6 = B_6 = \{1-1, 2-0, 3-2\}$$
$$A_7 = B_7 = \{1-0, 2-3, 3-0\}$$
$$A_8 = B_8 = \{1-0, 2-2, 3-1\}$$
$$A_9 = B_9 = \{1-0, 2-1, 3-2\}$$
$$A_{10} = B_{10} = \{1-0, 2-0, 3-3\}$$

Тогда матрица выигрышей:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В виде таблицы:

B_j / A_i	1-3 2-0 3-0	1-2 2-1 3-0	1-2 2-0 3-1	1-1 2-2 3-0	1-1 2-1 3-1	1-1 2-0 3-2	1-0 2-3 3-0	1-0 2-2 3-1	1-0 2-1 3-2	1-0 2-0 3-3
1-3 2-0 3-0	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3
1-2 2-1 3-0	1	0	1	1	1	2	2	2	2	3
1-2 2-0 3-1	1	1	0	2	1	1	3	2	2	2
1-1 2-2 3-0	2	1	2	0	1	2	1	1	2	3
1-1 2-1 3-1	2	1	1	1	0	1	2	1	1	2
1-1 2-0 3-2	2	2	1	2	1	0	3	2	1	1
1-0 2-3 3-0	3	2	3	1	2	3	0	1	2	3
1-0 2-2 3-1	3	2	2	1	1	2	1	0	1	2
1-0 2-1 3-2	3	2	2	2	1	1	2	1	0	1
1-0 2-0 3-3	3	3	2	3	2	1	3	2	1	0

$\alpha = 0$

$\beta = 2$

Игра не разрешима в чистых стратегиях.

Построим задачу линейного программирования для первого игрока:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i \to min$$

$$0*x_1+1*x_2+1*x_3+2*x_4+2*x_5+2*x_6+3*x_7+3*x_8+3*x_9+3*x_{10} \geq 1$$
$$1*x_1+0*x_2+1*x_3+1*x_4+1*x_5+2*x_6+2*x_7+2*x_8+2*x_9+3*x_{10} \geq 1$$
$$1*x_1+1*x_2+0*x_3+2*x_4+1*x_5+1*x_6+3*x_7+2*x_8+2*x_9+2*x_{10} \geq 1$$
$$2*x_1+1*x_2+2*x_3+0*x_4+1*x_5+2*x_6+1*x_7+1*x_8+2*x_9+3*x_{10} \geq 1$$
$$2*x_1+1*x_2+1*x_3+1*x_4+0*x_5+1*x_6+2*x_7+1*x_8+1*x_9+2*x_{10} \geq 1$$
$$2*x_1+2*x_2+1*x_3+2*x_4+1*x_5+0*x_6+3*x_7+2*x_8+1*x_9+1*x_{10} \geq 1$$
$$3*x_1+2*x_2+3*x_3+1*x_4+2*x_5+3*x_6+0*x_7+1*x_8+2*x_9+3*x_{10} \geq 1$$
$$3*x_1+2*x_2+2*x_3+1*x_4+1*x_5+2*x_6+1*x_7+0*x_8+1*x_9+2*x_{10} \geq 1$$
$$3*x_1+2*x_2+2*x_3+2*x_4+1*x_5+1*x_6+2*x_7+1*x_8+0*x_9+1*x_{10} \geq 1$$
$$3*x_1+3*x_2+2*x_3+3*x_4+2*x_5+1*x_6+3*x_7+2*x_8+1*x_9+0*x_{10} \geq 1$$
$$x_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,10}$$

Решение: $x = \left(\frac{1}{6}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{6}, 0, 0, \frac{1}{6}\right)$

Значение игры: $I = \frac{1}{\sum_{i=1}^{10} x_i} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

Оптимальная смешанная стратегия первого игрока:

$p = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}\right).$

Построим задачу линейного программирования для второго игрока:

$$\sum_{j=1}^{10} y_j \to max$$

$$0*y_1+1*y_2+1*y_3+2*y_4+2*y_5+2*y_6+3*y_7+3*y_8+3*y_9+3*y_{10} \leq 1$$
$$1*y_1+0*y_2+1*y_3+1*y_4+1*y_5+2*y_6+2*y_7+2*y_8+2*y_9+3*y_{10} \leq 1$$
$$1*y_1+1*y_2+0*y_3+2*y_4+1*y_5+1*y_6+3*y_7+2*y_8+2*y_9+2*y_{10} \leq 1$$
$$2*y_1+1*y_2+2*y_3+0*y_4+1*y_5+2*y_6+1*y_7+1*y_8+2*y_9+3*y_{10} \leq 1$$
$$2*y_1+1*y_2+1*y_3+1*y_4+0*y_5+1*y_6+2*y_7+1*y_8+1*y_9+2*y_{10} \leq 1$$
$$2*y_1+2*y_2+1*y_3+2*y_4+1*y_5+0*y_6+3*y_7+2*y_8+1*y_9+1*y_{10} \leq 1$$
$$3*y_1+2*y_2+3*y_3+1*y_4+2*y_5+3*y_6+0*y_7+1*y_8+2*y_9+3*y_{10} \leq 1$$
$$3*y_1+2*y_2+2*y_3+1*y_4+1*y_5+2*y_6+1*y_7+0*y_8+1*y_9+2*y_{10} \leq 1$$
$$3*y_1+2*y_2+2*y_3+2*y_4+1*y_5+1*y_6+2*y_7+1*y_8+0*y_9+1*y_{10} \leq 1$$
$$3*y_1+3*y_2+2*y_3+3*y_4+2*y_5+1*y_6+3*y_7+2*y_8+1*y_9+0*y_{10} \leq 1$$
$$y_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,10}$$

Решение: $y = \left(\frac{1}{6}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{6}, 0, 0, \frac{1}{6}\right)$

Значение игры: $I = \frac{1}{\sum_{j=1}^{10} y_j} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

Оптимальная смешанная стратегия второго игрока:

$q = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}\right).$

Решения найдены с помощью библиотеки scipy.optimize.linprog.

Ответ: оптимальная смешанная стратегия первого игрока: $p = \left(\frac{1}{3}, 0,0,0,0,0, \frac{1}{3}, 0,0, \frac{1}{3}\right)$, оптимальная смешанная стратегия второго игрока: $q = \left(\frac{1}{3}, 0,0,0,0,0, \frac{1}{3}, 0,0, \frac{1}{3}\right)$. Цена игры $I = 2$.

Задача №6

Условие

6. Два игрока одновременно и независимо друг от друга показывают от одного до пяти пальцев. Если общее число указанных пальцев чётно, то сумму равную этому числу выигрывает первый игрок, если нечётно, то второй игрок. Определить чистые стратегии игроков. Найти смешанные стратегии и значение игры.

Решение

Пусть $i, i = \overline{1,5}$, – чистая стратегия, при которой игрок показывает i пальцев.

Тогда чистые стратегии первого игрока – $\{A_i \middle| i = \overline{1,5}\}$, чистые стратегии первого игрока – $\{B_j \middle| j = \overline{1,5}\}$:

$$A_1 = B_1 = 1$$
$$A_2 = B_2 = 2$$
$$A_3 = B_3 = 3$$
$$A_4 = B_4 = 4$$
$$A_5 = B_5 = 5$$

Тогда матрица выигрышей:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ -3 & 4 & -5 & 6 & -7 \\ 4 & -5 & 6 & -7 & 8 \\ -5 & 6 & -7 & 8 & -9 \\ 6 & -7 & 8 & -9 & 10 \end{pmatrix}$$

В виде таблицы:

A_i \ B_j	1	2	3	4	5
1	2	-3	4	-5	6
2	-3	4	-5	6	-7
3	4	-5	6	-7	8
4	-5	6	-7	8	-9
5	6	-7	8	-9	10

$\alpha = -5$

$\beta = 6$

Игра не разрешима в чистых стратегиях.

Построим задачу линейного программирования для первого игрока:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i \to min$$

$$2 * x_1 - 3 * x_2 + 4 * x_3 - 5 * x_4 + 6 * x_5 \geq 1$$
$$-3 * x_1 + 4 * x_2 - 5 * x_3 + 6 * x_4 - 7 * x_5 \geq 1$$
$$4 * x_1 - 5 * x_2 + 6 * x_3 - 7 * x_4 + 8 * x_5 \geq 1$$
$$-5 * x_1 + 6 * x_2 - 7 * x_3 + 8 * x_4 - 9 * x_5 \geq 1$$
$$6 * x_1 - 7 * x_2 + 8 * x_3 - 9 * x_4 + 10 * x_5 \geq 1$$
$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}$$

Чтобы получить решение, прибавим к матрице 1.

Решение: $x = \left(\frac{1}{8}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$.

Оптимальная смешанная стратегия первого игрока: $p = \left(\frac{1}{8}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$.

Так как для получения решения прибавили к матрице 1, то требуется вычесть 1 из значения игры:

Значение игры: $I = \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} x_i} - 1 = \frac{1}{1} - 1 = 0$.

Построим задачу линейного программирования для второго игрока:

$$\sum_{j=1}^{5} y_j \to max$$

$$2 * y_1 - 3 * y_2 + 4 * y_3 - 5 * y_4 + 6 * y_5 \leq 1$$
$$-3 * y_1 + 4 * y_2 - 5 * y_3 + 6 * y_4 - 7 * y_5 \leq 1$$
$$4 * y_1 - 5 * y_2 + 6 * y_3 - 7 * y_4 + 8 * y_5 \leq 1$$
$$-5 * y_1 + 6 * y_2 - 7 * y_3 + 8 * y_4 - 9 * y_5 \leq 1$$
$$6 * y_1 - 7 * y_2 + 8 * y_3 - 9 * y_4 + 10 * y_5 \leq 1$$
$$y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

Чтобы получить решение, прибавим к матрице 1.

Решение: $y = \left(\frac{1}{8}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$

Оптимальная смешанная стратегия второго игрока: $q = \left(\frac{1}{8}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$.

Так как для получения решения прибавили к матрице 1, то требуется вычесть 1 из значения игры:

Значение игры: $I = \frac{1}{\sum_{j=1}^{5} y_j} - 1 = \frac{1}{1} - 1 = 0$.

Решения найдены с помощью библиотеки scipy.optimize.linprog.

Ответ: оптимальная смешанная стратегия первого игрока: $p = \left(\frac{1}{8}, 0,0, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$, оптимальная смешанная стратегия второго игрока: $q = \left(\frac{1}{8}, 0,0, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$. Цена игры $I = 0$.

Задача №7

Условие

7. Каждый игрок имеет по три фишки с номерами 1, 2, 3. Игроки независимо друг от друга кладут от одной до трёх фишек на стол цифрами вниз. Затем фишки переворачиваются. Выигрывает первый игрок, если сумма цифр всех фишек делится на три. Второй игрок выигрывает, если сумма делится на четыре. Определить чистые стратегии игроков. Найти смешанные стратегии и значение игры.

Решение

Пусть $i, i = \overline{1,6}$ – чистая стратегия, при которой игрок кладёт на стол фишки, сумма цифр которых равна i.

Тогда чистые стратегии первого игрока – $\{A_i | i = \overline{1,6}\}$, чистые стратегии первого игрока – $\{B_j \big| j = \overline{1,6}\}$:

$$A_1 = B_1 = 1$$
$$A_2 = B_2 = 2$$
$$A_3 = B_3 = 3$$
$$A_4 = B_4 = 4$$
$$A_5 = B_5 = 5$$
$$A_6 = B_6 = 6$$

Тогда матрица выигрышей:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В виде таблицы:

A_i \ B_j	1	2	3	4	5	6
1	0	1	-1	0	1	0
2	1	-1	0	1	0	-1
3	-1	0	1	0	-1	1
4	0	1	0	-1	1	0
5	1	0	-1	1	0	0
6	0	-1	1	0	0	0

$\alpha = -1$

$\beta = 1$

Игра не разрешима в чистых стратегиях.

Построим задачу линейного программирования для первого игрока:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i \to min$$

$$x_2 - x_3 + x_5 \geq 1$$
$$x_1 - x_2 + x_4 - x_6 \geq 1$$
$$-x_1 + x_3 - x_5 + x_6 \geq 1$$
$$x_2 - x_4 + x_5 \geq 1$$
$$x_1 - x_3 + x_4 \geq 1$$
$$-x_2 + x_3 \geq 1$$
$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6}$$

Решение: $x = (1, 2, 3, 3, 2, 1)$

Значение игры: $I = \frac{1}{\sum_{i=1}^{6} x_i} = \frac{1}{12}$.

Оптимальная смешанная стратегия первого игрока: $p = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$.

Построим задачу линейного программирования для второго игрока:

$$\sum_{j=1}^{6} y_j \to max$$

$$y_2 - y_3 + y_5 \leq 1$$
$$y_1 - y_2 + y_4 - y_6 \leq 1$$
$$-y_1 + y_3 - y_5 + y_6 \leq 1$$
$$y_2 - y_4 + y_5 \leq 1$$
$$y_1 - y_3 + y_4 \leq 1$$
$$-y_2 + y_3 \geq 1$$
$$y_j \geq 0, \quad j = 6$$

Решение: $y = (1, 2, 3, 3, 2, 1)$

Значение игры: $I = \frac{1}{\sum_{j=1}^{6} y_j} = \frac{1}{12}$.

Оптимальная смешанная стратегия второго игрока: $q = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$.

Решения найдены с помощью библиотеки scipy.optimize.linprog.

Ответ: оптимальная смешанная стратегия первого игрока: $p = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$, оптимальная смешанная стратегия второго игрока: $q = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$. Цена игры $I = \frac{1}{12}$.

Задача №8

Условие

8. Проверить, являются ли данные смешанные стратегии и значение игры

$p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $q = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$, I=0,4 ,

решением матричной игры с выигрышами

$$H = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Решение

$\alpha = 0.4$

$\beta = 0.6$

Игра не разрешима в чистых стратегиях.

Построим задачу линейного программирования для первого игрока:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \to min$$

$0.8 * x_1 + 0.4 * x_2 \geq 1$

$0.6 * x_2 \geq 1$

$0.6 * x_2 \geq 1$

$0.4 * x_2 + 0.8 * x_3 \geq 1$

$x_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,3}$

Построим задачу линейного программирования для второго игрока:

$$\sum_{j=1}^{4} y_j \to max$$

$0.8 * y_1 \leq 1$

$0.4 * y_1 + 0.6 * y_2 + 0.6 * y_3 + 0.4 * y_4 \leq 1$

$0.8 * y_4 \leq 1$

$y_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,4}$

Проверим, являются ли смешанные стратегии $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ и $q = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ и значение игры $I = 0.4$ решением матричной игры.

$$\begin{cases} I = \frac{1}{\sum_{i=1}^{3} x_i} \\ x_i * I = p_i, i = \overline{1,3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{6} \\ x_2 = \frac{5}{6} \\ x_3 = \frac{5}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} I = \frac{1}{\sum_{j=1}^{4} y_j} \\ y_j * I = q_j, j = \overline{1,4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{5}{4} \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

x не удовлетворяет основному ограничению $0.6 * x_2 \geq 1$. Значит, смешанная стратегия $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ не является оптимальной.

Найдём решение задач линейного программирования.

Решение: $x = \left(\frac{5}{12}, \frac{5}{3}, \frac{5}{12}\right)$

Значение игры: $I = \frac{1}{\sum_{i=1}^{3} x_i} = \frac{2}{5}$.

Оптимальная смешанная стратегия первого игрока: $p = (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$.

Решение: $y = \left(\frac{5}{4}, 0, 0, \frac{5}{4}\right)$

Значение игры: $I = \frac{1}{\sum_{j=1}^{4} y_j} = \frac{2}{5}$.

Оптимальная смешанная стратегия второго игрока: $q = (\frac{1}{2}, 0,0, \frac{1}{2})$.

Решения найдены с помощью библиотеки scipy.optimize.linprog.

Ответ: оптимальная смешанная стратегия первого игрока: $p = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$, оптимальная смешанная стратегия второго игрока: $q = (\frac{1}{2}, 0,0, \frac{1}{2})$. Цена игры $I = \frac{2}{5}$.

Задача №9

Условие

9. Проверить, являются ли данные смешанные стратегии и значение игры

$p = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $I=4$,

решением матричной игры с выигрышами

$$H = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

$\alpha = 4$

$\beta = 8$

Игра не разрешима в чистых стратегиях.

Построим задачу линейного программирования для первого игрока:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i \to min$$

$14 * x_1 - 4 * x_2 + 4 * x_3 + 2 * x_4 \geq 1$

$-4 * x_1 + 8 * x_2 + 4 * x_3 + 8 * x_4 \geq 1$

$2 * x_1 + 8 * x_2 + 4 * x_3 + 2 * x_4 \geq 1$

$x_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,4}$

Построим задачу линейного программирования для второго игрока:

$$\sum_{j=1}^{3} y_j \to max$$

$14 * y_1 - 4 * y_2 + 2 * y_3 \leq 1$

$-4 * y_1 + 8 * y_2 + 8 * y_3 \leq 1$

$4 * y_1 + 4 * y_2 + 4 * y_3 \leq 1$

$2 * y_1 + 8 * y_2 + 2 * y_3 \leq 1$

$y_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,3}$

Проверим, являются ли смешанные стратегии $p = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ и $q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ и значение игры $I = 4$ решением матричной игры.

$$\begin{cases} I = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} x_i} \\ x_i * I = p_i, i = \overline{1,4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{16} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{1}{16} \\ x_4 = \frac{1}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} I = \frac{1}{\sum_{j=1}^{3} y_j} \\ y_j * I = q_j, j = \overline{1,3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{12} \\ y_2 = \frac{1}{12} \\ y_3 = \frac{1}{12} \end{cases}$$

x не удовлетворяет основному ограничению $2 * x_1 + 8 * x_2 + 4 * x_3 + 2 * x_4 \geq 1$. Значит, смешанная стратегия $p = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ не является оптимальной.

Найдём решение задач линейного программирования.

Решение: $x = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, 0, \frac{1}{12}\right)$

Значение игры: $I = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} x_i} = 4.$

Оптимальная смешанная стратегия первого игрока $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$

Решение: $y = (\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12})$

Значение игры: $I = \frac{1}{\sum_{j=1}^{3} y_j} = 4.$

Оптимальная смешанная стратегия второго игрока: $q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Решения найдены с помощью библиотеки scipy.optimize.linprog.

Ответ: оптимальная смешанная стратегия первого игрока: $p = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$, оптимальная смешанная стратегия второго игрока: $q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Цена игры $I = 4$.

Задача №10b)

Условие

10. Найти графоаналитическим методом решение матричной игры с матрицей $H = (h_{ij})_{nxm}$, если:

b) $H = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 7 \\ -1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

Решение

$\alpha = 1$

$\beta = 2$

Игра не разрешима в чистых стратегиях.

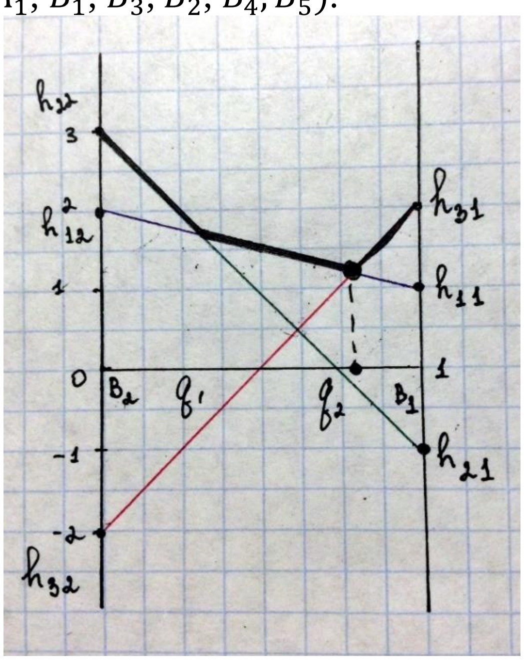
Чистая стратегия A_2 доминирует стратегию A_1.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 7 \\ -1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Чистая стратегия B_1 доминирует стратегию B_5, чистая стратегия B_3 доминирует стратегии B_2 и B_4.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Перенумеруем стратегии: $(A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5) \rightarrow (A_2, A_3, A_4, A_1, B_1, B_3, B_2, B_4, B_5)$.



$$\begin{cases} I = h_{11} * q_1 + h_{12} * (1 - q_1) \\ I = h_{31} * q_1 + h_{32} * (1 - q_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = q_1 + 2 * (1 - q_1) \\ I = 2 * q_1 - 2 * (1 - q_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{4}{5} \\ q_2 = \dfrac{1}{5} \\ I = \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Возвращаясь к изначальной нумерации стратегий, получим: $p = [\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}, 0, 0]$.

Первый игрок имеет в своём распоряжении три чистые стратегии, значит, для него графоаналитический метод применить нельзя. Решение может быть найдено, например, как решение задачи линейного программирования.

Построим задачу линейного программирования для первого игрока:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \to min$$

$$x_1 - x_2 + 2 * x_3 \geq 1$$

$$2 * x_1 + 3 * x_2 - 2 * x_3 \geq 1$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,3}$$

Решение: $x = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{6}\right)$

Значение игры: $I = \frac{1}{\sum_{i=1}^{6} x_i} = \frac{6}{5}$.

Оптимальная смешанная стратегия первого игрока: $p = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$.

Возвращаясь к изначальной нумерации стратегий, получим: $p = [0, \frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}]$.

Ответ: оптимальная смешанная стратегия первого игрока: $p = \left(0, \frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$, оптимальная смешанная стратегия второго игрока: $q = (\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}, 0,0)$. Цена игры $I = \frac{6}{5}$.

Задача №10с)

Условие

10. Найти графоаналитическим методом решение матричной игры с матрицей $H = (h_{ij})_{nxm}$, если:

c) $H = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 2 & 0 & 9 & 2 \\ 7 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

Решение

$\alpha = 2$

$\beta = 5$

Игра не разрешима в чистых стратегиях.

Чистая стратегия A_1 доминирует стратегию A_4.

$H = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 2 & 0 & 9 & 2 \\ 7 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

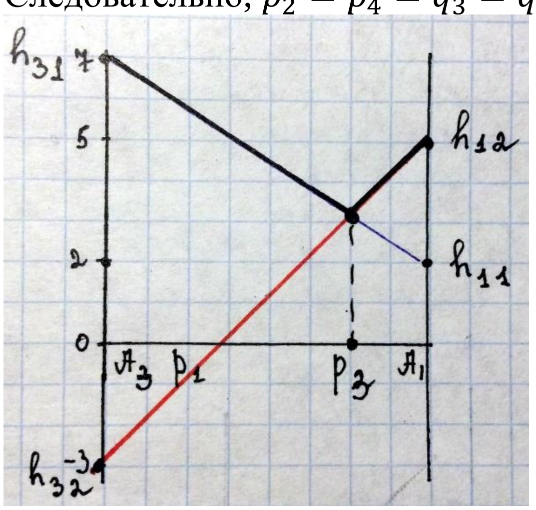
Чистая стратегия B_2 доминирует стратегии B_3 и B_4.

$H = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 0 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$

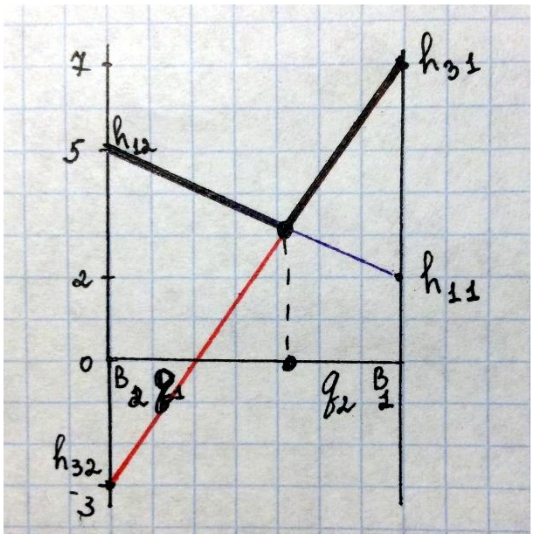
Чистая стратегия A_1 доминирует стратегию A_2.

$H = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$

Следовательно, $p_2 = p_4 = q_3 = q_4 = 0$.



$$\begin{cases} I = h_{11} * p_1 + h_{31} * (1 - p_1) \\ I = h_{12} * q_1 + h_{32} * (1 - p_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = 2 * p_1 + 7 * (1 - p_1) \\ I = 5 * p_1 - 3 * (1 - p_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{10}{13} \\ p_3 = \dfrac{3}{13} \\ I = \dfrac{41}{13} \end{cases}$$



$$\begin{cases} I = h_{11} * q_1 + h_{12} * (1 - q_1) \\ I = h_{31} * q_1 + h_{32} * (1 - q_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = 2 * q_1 + 5 * (1 - q_1) \\ I = 7 * q_1 - 3 * (1 - q_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{8}{13} \\ q_2 = \dfrac{5}{13} \\ I = \dfrac{41}{13} \end{cases}$$

Ответ: оптимальная смешанная стратегия первого игрока: $p = \left(\frac{10}{13}, 0, \frac{3}{13}, 0\right)$, оптимальная смешанная стратегия второго игрока: $q = (\frac{8}{13}, \frac{5}{13}, 0{,}0)$. Цена игры $I = \frac{41}{13}$.

Задача №10d)

Условие

10. Найти графоаналитическим методом решение матричной игры с матрицей $H = (h_{ij})_{nxm}$, если:

d) $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Решение

$\alpha = 0$

$\beta = 1$

Игра не разрешима в чистых стратегиях.

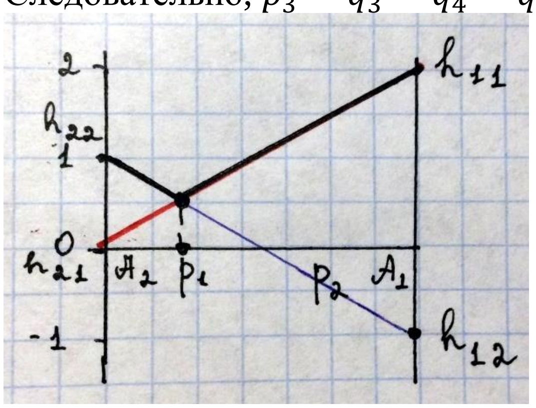
Чистая стратегия B_2 доминирует стратегии B_3, B_4 и B_6, чистая стратегия B_1 доминирует стратегию B_5

$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

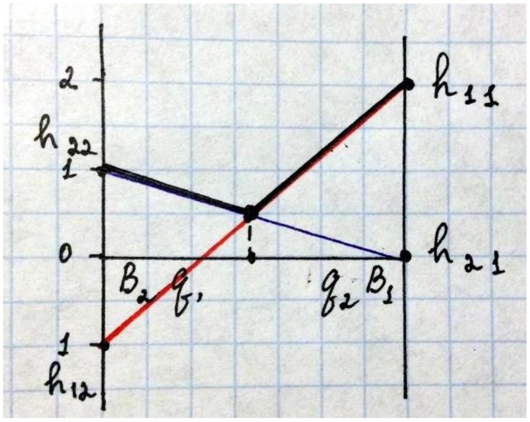
Чистая стратегия A_1 доминирует стратегию A_3.

$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Следовательно, $p_3 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$.



$$\begin{cases} I = h_{11} * p_1 + h_{21} * (1 - p_1) \\ I = h_{12} * q_1 + h_{22} * (1 - p_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = 2 * p_1 \\ I = -p_1 + (1 - p_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{4} \\ p_2 = \dfrac{3}{4} \\ I = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} I = h_{11} * q_1 + h_{12} * (1 - q_1) \\ I = h_{21} * q_1 + h_{22} * (1 - q_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = 2 * q_1 - (1 - q_1) \\ I = 1 - q_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{1}{2} \\ q_2 = \frac{1}{2} \\ I = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: оптимальная смешанная стратегия первого игрока: $p = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0)$, оптимальная смешанная стратегия второго игрока: $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0,0,0,0,0)$. Цена игры $I = \frac{1}{2}$.