Álgebra de Boole

UTN FRSR - Ingreso 2022

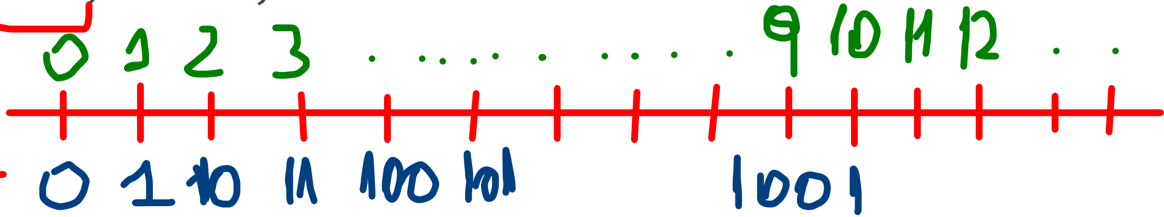
Introducción: Sistema binario

Las computadoras usan un sistema de representación binario (solo “entienden” información en cadenas de 0 y 1)

Sistema decimal:

- Símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9
- Ejemplos: 0, 1, 10, 128, 6835, …

Sistema binario:



- Símbolos: 0 y 1
- Ejemplos: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, …

Introducción: Álgebra de Boole

Es un sistema utilizado en el diseño y análisis de circuitos lógicos

Intento de aplicar técnicas algebraicas para tratar expresiones de la lógica proposicional (George Boole)

Álgebra de Boole:

- los elementos poseen únicamente dos estados (V-F; 1-0)
- son opuestos entre sí
- no permite estados intermedios
- leyes generales sobre los procesos lógicos

Operaciones: Complementación Lógica

Sea A una variable booleana (puede tomar 2 estados).

Si A tiene estado 1, su complemento es 0. Si A tiene estado 0, su complemento es 1. Se representa simbólicamente con una barra encima Ā (también debajo o A’). Su tabla de verdad es

A	Ā
0	1
1	0

¬A

Su equivalente el LP es el complemento ¬A

Operaciones: Suma Lógica

La suma lógica entre dos variables booleanas A y B se representa por A+B.

Su tabla de verdad es

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Su equivalente el LP es disyunción $A \vee B$

Operaciones: Producto Lógico

El producto lógico entre dos variables booleanas A y B se representa A∗B (o también con A•B y AB)

Su tabla de verdad es

A	B	A*B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Su equivalente el LP es la conjunción A ∧ B

Teoremas

Teorema 1: El resultado de aplicar cualquiera de las tres operaciones antes definidas, a variables booleanas, es otra variable booleana y además el resultado es único.

Teoremas

Teorema 2: Ley de idempotencia. La suma y el producto de una variable booleana consigo misma da como resultado la misma variable:

A + A = A

A * A = A

Teorremas

Teorema 3: Ley de involución. Una variable booleana negada dos veces, da como resultado la misma variable:

$$\underbrace{\overline{\overline{A}} = A}$$

$$\neg(\neg A) = A$$

Teoremas

Teorema 4: Ley conmutativa. Se define respecto a la suma y al producto, y nos dice que el orden de los sumandos o factores respectivamente, no altera el resultado:

$$A + B = B + A$$

$$A * B = B * A$$

Teoremas

Teorema 5: Ley asociativa. Se define respecto a las operaciones suma y producto de la siguiente forma:

$$A+(B+C) = (A+B)+C = A+B+C$$

$$A*(B*C) = (A*B)*C = A*B*C$$

Pre: $\underbrace{\neg, *, +}$

Teoremas

Teorema 6: Ley distributiva.

Respecto de la suma: A+(B*C) = (A+B)*(A+C)

Respecto del producto: A*(B+C) = (A*B)+(A*C)

Teoremas

Teorema 7: Ley de absorción.

A+(A*B) = A

A*(A+B) = A

Teoremas

Teorema 8: Leyes de De Morgan.

$\overline{A+B} = \overline{A}*\overline{B}$ $=$ $\neg A \wedge (\neg B)$

$\overline{A*B} = \overline{A}+\overline{B}$ $=$ $\neg A \vee (\neg B)$

Teoremas

Teorema 10: Otras relaciones importantes que se deducen de las operaciones booleanas y de los teoremas anteriores:

$$0+A = A$$

$$1*A = A$$

$$0*A = 0$$

$$1+A = 1$$

Sugerencia: Verificar mediante tablas de verdad!

Puertas Lógicas

Convenio gráfico para representar circuitos lógicos y funciones booleanas elementales y complejas.

Son esquemas que representan funciones booleanas:

- OR
- AND
- NOT
- NOR
- NAND
- XOR (OR exclusiva)
- XNOR (NOR exclusiva)

Puertas Lógicas

Las **puertas OR** desarrollan la suma booleana

OR

Tabla de verdad puerta OR

Entrada A	**Entrada** B	**Salida** $A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Puertas Lógicas

Las **puertas AND** desarrollan el producto booleano

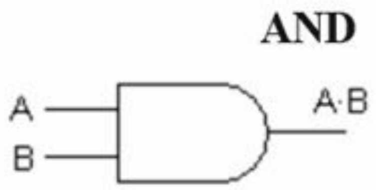


Tabla de verdad puerta AND

Entrada A	Entrada B	Salida $A * B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Puertas Lógicas

La **puerta NOT** representa la complementación o inversión booleana

Puerta NO (NOT)

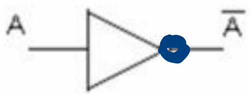


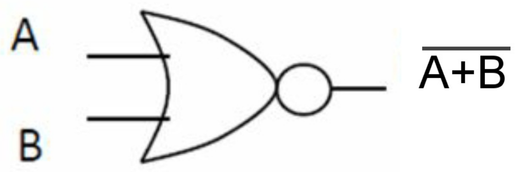
Tabla de verdad puerta NOT

Entrada A	**Salida** $\overline{A}$
0	1
1	0

Puertas Lógicas

Las **puertas NOR** representan la función inversa de una operación de suma booleana (equivalente a una puerta OR complementada): $\overline{A+B}$ ó $\neg(A+B)$

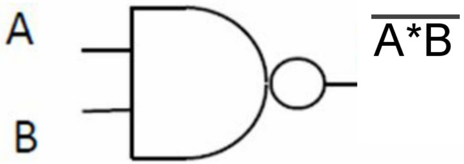
A	B	A+B	$\overline{A+B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0



Puertas Lógicas

Las **puertas NAND** representan la función inversa de una operación de producto booleano (equivalente a una puerta AND complementada): $\overline{A*B}$ ó $\neg(A*B)$

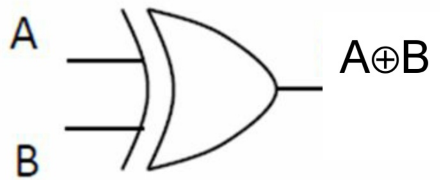
A	B	A·B	$\overline{A*B}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



Puertas Lógicas

Las **puertas OR EXCLUSIVAS** (XOR) representan la función lógica $A*\overline{B} + \overline{A}*B$, o de manera resumida $A \oplus B$

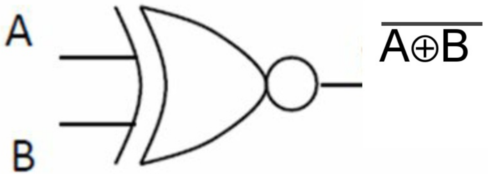
A	B	A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Puertas Lógicas

Las **puertas NOR EXCLUSIVAS** (XNOR) representan la función lógica $\overline{A \oplus B}$, o también $\overline{A * \overline{B} + \overline{A} * B} = A * B + \overline{A} * \overline{B}$

A	B	$\overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

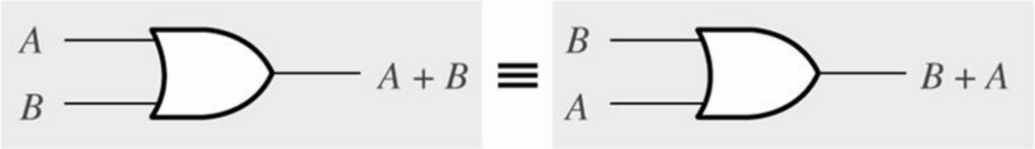


Puertas Lógicas

Propiedades:

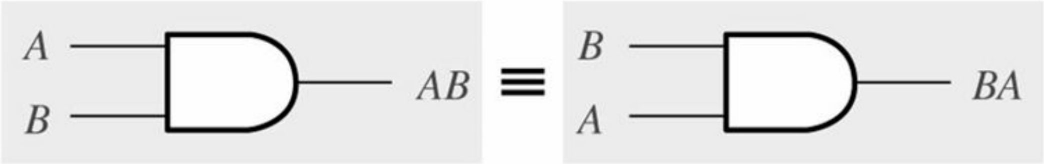
$A+B = B+A$

El orden en la OR no importa



$AB = BA$

El orden en la AND no importa



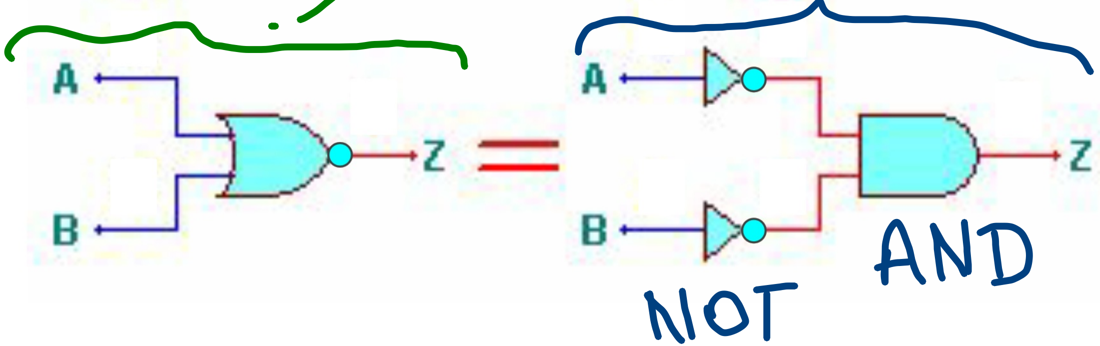
Circuitos Lógicos

- Máquinas con una o más entradas y exactamente una salida
- Cada entrada tiene un bit de información, 0 o 1
- El circuito da un bit de salida, 0 o 1
- Cada entrada puede recibir sucesiones de bits que se procesan para producir una sucesión de bits
- Bit voltaje a través de un dispositivo de entrad/salida
- El circuito procesa la sucesión de izquierda a derecha

Circuitos Lógicos

NOR

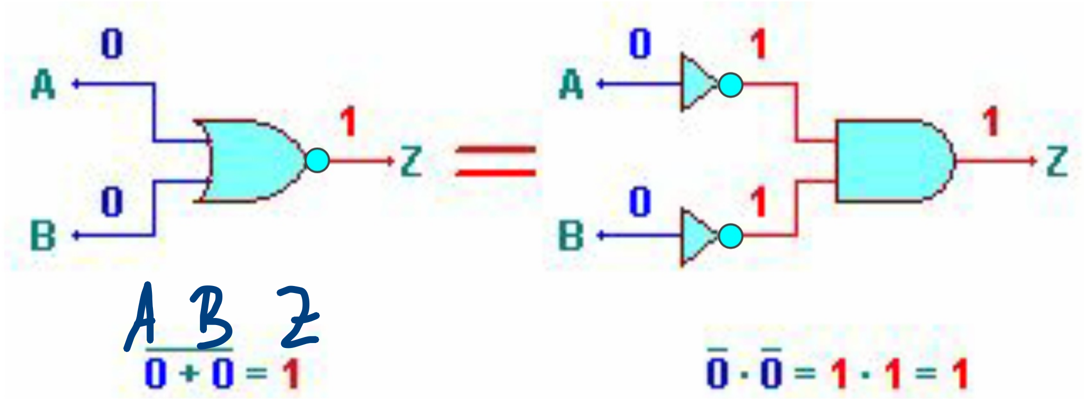
Ejemplo: Ley de Morgan $\overline{A+B} = \bar{A}*\bar{B}$



Circuitos Lógicos

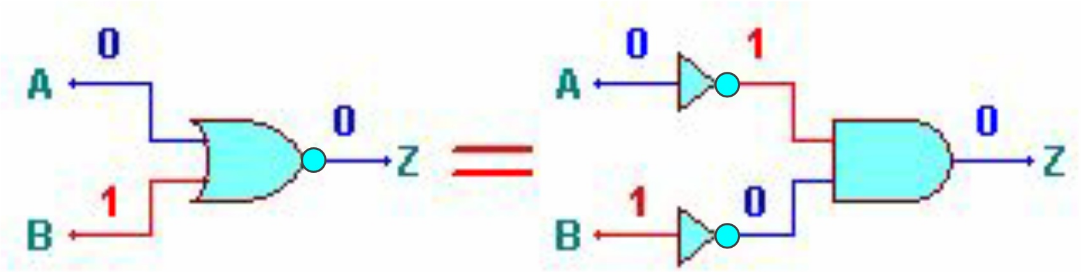
NOR

Ejemplo: Ley de Morgan $\overline{A+B} = \bar{A} * \bar{B}$



Circuitos Lógicos

Ejemplo: Ley de Morgan $\overline{A+B} = \overline{A} * \overline{B}$

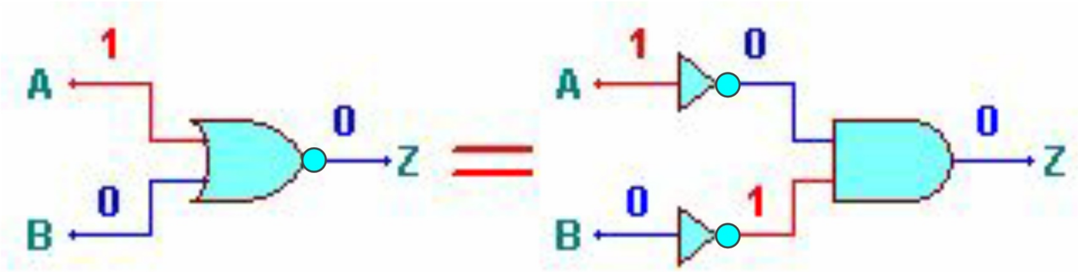


$$\overline{0+0} = 1$$
$$\overline{0+1} = 0$$

$$\overline{0} \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 = 1$$
$$\overline{0} \cdot \overline{1} = 1 \cdot 0 = 0$$

Circuitos Lógicos

Ejemplo: Ley de Morgan $\overline{A+B} = \bar{A} * \bar{B}$

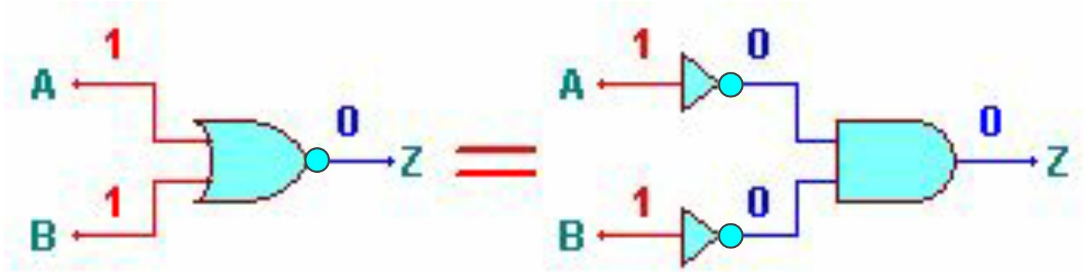


$$\overline{0+0} = 1$$
$$\overline{0+1} = 0$$
$$\overline{1+0} = 0$$

$$\bar{0} \cdot \bar{0} = 1 \cdot 1 = 1$$
$$\bar{0} \cdot \bar{1} = 1 \cdot 0 = 0$$
$$\bar{1} \cdot \bar{0} = 0 \cdot 1 = 0$$

Circuitos Lógicos

Ejemplo: Ley de Morgan $\overline{A+B} = \bar{A} * \bar{B}$



$$\overline{0+0} = 1$$
$$\overline{0+1} = 0$$
$$\overline{1+0} = 0$$
$$\overline{1+1} = 0$$

$$\bar{0} \cdot \bar{0} = 1 \cdot 1 = 1$$
$$\bar{0} \cdot \bar{1} = 1 \cdot 0 = 0$$
$$\bar{1} \cdot \bar{0} = 0 \cdot 1 = 0$$
$$\bar{1} \cdot \bar{1} = 0 \cdot 0 = 0$$