Matrices, Determinante y Sistemas de Ecuaciones

UTN FRSR - Ingreso 2022

Matrices y operaciones con matrices

Definición. Una matriz es un arreglo rectangular de números. Los números en el arreglo se denominan elementos de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

Matrices y operaciones con matrices

Definición. Una matriz es un arreglo rectangular de números. Los números en el arreglo se denominan elementos de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [4]$$

3x2 1x4 3x3 2x1 1x1

- **Tamaño**: número de filas y de columnas
- **Notación**: mayúscula para denotar matrices y minúsculas para <u>escalares</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Matrices y operaciones con matrices

Matriz general (o genérica) de tamaño mxn. El elemento que aparece en la fila i y la columna j de una matriz denota por a_{ij} .

$m = 3$
$n = 4$

- Matriz general 3x4

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

3×4

- Matriz general mxn

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$

Matrices y operaciones con matrices

Tipo de matrices de mxn

- Cuadrada: nxn
- Fila: 1xn
- Columna: mx1
- Nula: $a_{ij} = 0$
- T. Superior: cuadrada con $a_{ij} = 0$, para $i > j$
- T. Inferior: cuadrada con $a_{ij} = 0$, para $i < j$
- Diagonal: cuadrada con $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$
- Escalar: diagonal con $a_{ij} = k$, para $i = j$
- Identidad (I): escalar con $a_{ij} = 1$, para $i = j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Matrices y operaciones con matrices

Igualdad de matrices: dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales, es decir $a_{ij}=b_{ij}$.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$A \overset{?}{=} B$

$x = 5$

Matrices y operaciones con matrices

Igualdad de matrices: dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales, es decir $a_{ij} = b_{ij}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \underbrace{C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}}_{2x3}$$

$$D = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}}_{2X3} \qquad C+D \checkmark$$

Suma de matrices: si A y B son matrices de igual tamaño, entonces la suma A + B es la matriz C obtenida al sumar los elementos de B con los elementos correspondientes de A, es decir $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. (La diferencia A - B se define de la misma forma)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}_{3x4} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}_{3X4} \quad C = A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{3x4}$$

Matrices y operaciones con matrices

Propiedades de la suma de matrices: sean A, B y C matrices y k un escalar

- Asociativa: (A+B)+C = A+(B+C)
- Conmutativa: A + B = B + A
- Elemento Neutro: Matriz nula del tamaño correspondiente $n \times n$ $\underset{n\times n}{A} + \underset{n\times n}{O} = A$
- Elemento opuesto: A = -A (cambia el signo a los elementos de A)

Matrices y operaciones con matrices

Multiplicación de matrices. Si A es una matriz **mxr** y B es una matriz **rxn**, entonces el producto AB es la matriz C **mxn** cuyos elementos se determinan como sigue:

> Para encontrar el elemento en la fila i y en la columna j de AB, considerar sólo la fila i de la matriz A y la columna j de la matriz B. Multiplicar entre sí los elementos correspondientes de la fila y de la columna mencionados y luego sumar los productos resultantes.

$i=1, \; j=2$

Ejemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} = AB = C$$

$1\cdot4+2\cdot0+4\cdot2=12$

$1\cdot1+2(-1)+4\cdot7=27$

Matrices y operaciones con matrices

Propiedades de la multiplicación de matrices: sean A, B y C matrices y ~~*k* un escalar~~

- Asociativa: (AB).C = A.(BC)
- Distributiva respecto a la suma: A.(B+C) = AB+AC y (B+C).A = BA+CA
- Elemento neutro: $\boxed{A.I = I.A = A}$, con A de nxn
- Elemento absorbente: $\boxed{A.0 = 0.A = 0}$ con 0 la matriz nula

La multiplicación de matrices **NO es conmutativa: $\boxed{\textbf{en general } AB \neq BA}$**

$$\underset{2\times 2}{A_{m\times r}} \; \underset{2\times 3}{B_{r\times n}} = \underset{2\times 3}{C_{m\times n}}$$

$$\cancel{\underset{2\times 3}{B_{m\times r}} \cdot \underset{2\times 2}{A_{r\times n}}}$$

Matrices y operaciones con matrices

Multiplicación por un escalar. Si A es cualquier matriz y k es cualquier escalar, entonces el producto kA es la matriz B obtenida al multiplicar cada elemento de A por k, es decir $b_{ij} = ka_{ij}$.

$k = 2$ $\qquad k = -1 \qquad -A = -1 \cdot A$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

se tiene

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \tfrac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}_{1\times 3} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_{1\times 1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -7 \end{bmatrix}_{1\times 2} \qquad D = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$\cancel{A_{1\times 3} \cdot B_{1\times 2}} \qquad C_{1\times 1} \cdot A_{1\times 3} \checkmark = G_{1\times 3}$$

$$B_{1\times 2} \cdot D_{2\times 1} = F_{1\times 1} \checkmark$$

Matrices y operaciones con matrices

Propiedades de la multiplicación de un escalar por una matricez: sean A y B matrices y k un escalar

- Distributiva sobre la suma de matrices: $k.(A+B) = kA + kB$
- Distributiva sobre la suma de números: $(k+l).A = kA + lA$
- Asociativa sobre el producto de matrices: $k.(AB) = (kA).B = A.(kB)$
- Elemento neutro: $1.A = A$

Matrices y operaciones con matrices

Potencia de una matriz cuadrada: la potencia enésima de una matriz cuadrada A se denota por A^n y se define como sigue:

si $n=0$: $A^0 = \mathrm{I}$, si A *es inversible*

si $n=1$: $A^1 = A$

si $n>1$: $A^n = A.A^{n-1}$

Ejemplo: Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, calcular A^3

Propiedades de la potencia

- $A^n.A^m = A^{n+m}$
- $(A^n)^m = A^{n.m}$

Matrices y operaciones con matrices

Transpuesta de una matriz: Si A es cualquier matriz **mxn**, entonces la transpuesta de A, denotada por A^T, se define como la matriz **nxm** que se obtiene al intercambiar las filas y las columnas de A, es decir $a^T_{ij} = a_{ji}$

$(B^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad D = [4]$$

3x4 3x2 1x3

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad D^T = [4] \quad \Delta$$

4x3 2x3 3x1

Matrices y operaciones con matrices

Propiedades de la transpuesta.

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(k.A^{\cancel{T}})^T = k.A^T$, siendo k un escalar
- $(A.B)^T = B^T.A^T$ (observar el orden invertido)
- $(A^n)^T = (A^T)^n$

Matrices y operaciones con matrices

Matriz simétrica: una matriz cuadrada A es simétrica si A = A^T, es decir $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

Matriz inversible

Matriz inversa. Si A es una matriz cuadrada y existe una matriz B tal que AB = BA = I. entonces se dice que A es **invertible** (no singular o regular) y B se llama **matriz inversa** de A, y se denota B = $\mathbf{A^{-1}}$.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{es una inversa de} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Matriz inversible

Cálculo de la matriz inversa de 2x2.

$$A^{-1} \text{ INVERSA DE A}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Como $\boxed{a.d - b.c} \neq 0$ entonces

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{\frac{d}{ad-bc}} & \boxed{\frac{-b}{ad-bc}} \\ \boxed{\frac{-c}{ad-bc}} & \boxed{\frac{a}{ad-bc}} \end{bmatrix}$$

$$a^{-1}_{11} = \frac{d}{ad-bc}$$

$$a^{-1}_{22} = \frac{a}{ad-bc}$$

$$a^{-1}_{12} = \frac{-b}{ad-bc}$$

$$a^{-1}_{21} = \ldots\ldots$$

Matriz inversible

Propiedades de la inversas: sea A una matriz inversible, entonces

a. A^{-1} (la inversa de A) es única **(UNICIDAD DE LA INVERSA)**

b. Para toda matriz inversible B del mismo tamaño que A, A.B es inversible y $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ (observar orden invertido)

c. A^{-1} es inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$

d. Para todo escalar $k \neq 0$, $k.A$ es inversible y $(k.A)^{-1} = (1/k).A^{-1}$

e. A^n es inversible y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, con $n \in \mathbb{N}_0$

f. A^T es inversible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

DETERMINANTES

Función determinante

Definición. Sea A una matriz cuadrada de tamaño nxn. La función determinante se denota por det, y det(A) se define como la suma de los productos elementales ¿con signo? de A . El número det(A) se denomina determinante de A.

$\Delta A = \det(A)$

Función determinante

Definición. Sea A una matriz cuadrada de tamaño nxn. La función determinante se denota por det, y det(A) se define como la suma de los productos elementales con signo de A . El número det(A) se denomina determinante de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

2x2

Producto elemental
$\boxed{a_{11}a_{22}}$
$\boxed{a_{12}a_{21}}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3x3

Producto elemental
$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$

Función determinante

Definición. Sea A una matriz cuadrada de tamaño nxn. La función determinante se denota por det, y det(A) se define como la suma de los productos elementales con signo de A . El número det(A) se denomina determinante de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

2x2

Producto elemental
$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$

$\left.\begin{matrix} a_{11}a_{22} \\ a_{12}a_{21} \end{matrix}\right\} 2$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3x3

Producto elemental
$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$

6

Una matriz A de tamaño nxn tiene n! productos elementales.

2x2, entonces 2! = 2

3x3, entonces 3! = 6

4x4, entonces 4! = 24

5x5, entonces 5! = 120

Función determinante

Definición. Sea A una matriz cuadrada de tamaño nxn. La función determinante se denota por det, y det(A) se define como la suma de los productos elementales con signo de A . El número det(A) se denomina determinante de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \boxed{\begin{array}{r} a_{11}a_{22} \\ -a_{12}a_{21} \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{r} a_{11}a_{22}a_{33} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} \\ -a_{12}a_{21}a_{33} \\ a_{12}a_{23}a_{31} \\ a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

MUY DIFÍCIL DE MEMORIZAR!

Función determinante

Definición. Sea A una matriz cuadrada de tamaño nxn. La función determinante se denota por det, y det(A) se define como la suma de los productos elementales con signo de A . El número det(A) se denomina determinante de A.

Regla de Sarrus: para no memorizar expresiones difíciles (**solo para n = 2 y n = 3**)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} a_{11}a_{22} \\ -a_{12}a_{21} \end{matrix}\right\} \longrightarrow \det(A) =$$

2×2

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \underline{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Función determinante

Definición. Sea A una matriz cuadrada de tamaño nxn. La función determinante se denota por det, y det(A) se define como la suma de los productos elementales con signo de A . El número det(A) se denomina determinante de A.

Regla de Sarrus: para no memorizar expresiones difíciles (**solo para n = 2 y n = 3**)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Función determinante

Definición. Sea A una matriz cuadrada de tamaño nxn. La función determinante se denota por det, y det(A) se define como la suma de los productos elementales con signo de A . El número det(A) se denomina determinante de A.

Regla de Sarrus: para no memorizar expresiones difíciles (**solo para n = 2 y n = 3**)

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right]$$

~~3x5~~

(1) $a_{11} a_{22} a_{33}$ (3) ...

(2) $a_{12} a_{23} a_{31}$ (5) ...

(4) $- a_{13} a_{22} a_{31}$ (6) ...

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Función determinante

Definición. Sea A una matriz cuadrada de tamaño nxn. La función determinante se denota por det, y det(A) se define como la suma de los productos elementales con signo de A . El número det(A) se denomina determinante de A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

2x2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \det(B) = (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Función determinante

Notación. El determinante de una matriz se puede escribir de otras dos formas, como:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\det(A)$

ΔA

Con la última notación, el determinante de la matriz de 2x2 del ejemplo anterior se puede escribir como:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

Propiedades de los determinantes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{4 \quad 8} \end{bmatrix} \quad \times 4$$

Sea A y B matrices cuadradas de tamaño nxn

1. Si A tiene una fila o columna de ceros, entonces det(A) = 0
2. Si A tiene dos filas proporcionales o iguales, entonces det(A) = 0
3. $\det(A) = \det(A^T)$
4. Si A es una matriz diagonal entonces $\det(A) = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$
5. Si A es una matriz triangular (superior o inferior) entonces $\det(A) = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$
6. $\det(AB) = \det(A).\det(B)$
7. Sea $k \in \mathbb{R}$, $\det(kA) = k^n \det(A)$
8. $\det(A^p) = \det(A)^p$
9. Sea E una matriz elemental, $\det(E) \neq 0$
10. En general, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

Propiedades de los determinantes

El siguiente teorema es uno de los más importantes en álgebra lineal, y proporciona un criterio importante de invertibilidad en términos de determinantes.

Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si det(A) ≠ 0

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 0 + 4 + 12 - 0 - 4 - 12 = 0$$

A no acepta inversa

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuaciones lineales. una ecuación lineal en las n **variables** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se define como una ecuación que se puede expresar en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes reales llamadas **coeficientes**, y b es el **término independiente**. Las variables en una ecuación lineal a veces se denominan incógnitas.

Ecuaciones Lineales:

$$x + 3y = 7 \qquad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$$

$$y = \tfrac{1}{2}x + 3z + 1 \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

Ecuaciones NO Lineales:

$$x + 3y^2 = 7 \qquad 3x + 2y - z + xz = 4$$

$$y - \text{sen } x = 0 \qquad \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Solución. Una solución de una ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ es una **sucesión de n números** $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de modo que la ecuación se cumple cuando se sustituye $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$. El conjunto de todas las soluciones de la ecuación se denomina **conjunto solución**.

Ejemplos: (a) $4x - 2y = 1$ (b) $x_1 - 4x_2 + 7x_3 = \boxed{5}$

$x = 0,\ y = -\frac{1}{2}$ ✓

$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$ ✗

$\boxed{x = 1,\ y = 2}$

$x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$ ✓

$4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0$ ✗

$-2 - 0 + 7 = 5$

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas de ecuaciones lineales. Un conjunto de ecuaciones lineales en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se denomina sistema de ecuaciones lineales. Una sucesión de números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se denomina solución del sistema si $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ es una **solución de todas y cada una de las ecuaciones** del sistema.

Ejemplos:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = \boxed{-1} \quad (1) \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 = \boxed{-4} \quad (2) \end{cases} \qquad x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1 \checkmark$$

(1) $4 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot (-1) = \boxed{-1}$

(2) $3 \cdot 1 + 2 + 9 \cdot (-1) = \boxed{-4}$

$$\begin{cases} x + y = \boxed{4} \quad (1) \checkmark \\ 2x + 2y = \boxed{6} \quad (2) \times \end{cases}$$

$\boxed{x = 2,\ y = 2}$

(1) $2 + 2 = \boxed{4}$

(2) $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = \boxed{8}$

No tiene solución

(ecuaciones contradictorias)

Sistemas de ecuaciones lineales

Tipos de sistemas de ecuaciones lineales (SEL)

Cualquier SEL o no tiene soluciones, o tiene una solución o tiene una infinidad de soluciones.

1. **Incompatible**: si el SEL no tiene soluciones
2. **Compatible**: el SEL tiene al menos una solución
   a. **Determinado**: solución única
   b. **Indeterminado**: infinitas soluciones

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$x = 1,\ y = 1$ ✓

$x = 2,\ y = 2$ ✓

$x = y$

Sistemas de ecuaciones lineales

Representación matricial de SEL.

Un sistema cualquiera de **3 ecuaciones** lineales en ~~3~~ 4 **incógnitas** se puede escribir de forma genérica como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 & (3) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

donde x_1, x_2, x_3, x_4 son las incógnitas y las letras a y b con subíndices son constantes.

Podemos distinguir las matrices A, X y B, y expresar el SEL en forma matricial: $\boxed{\mathbf{AX=B}}$

$$\underset{3\times 4}{\overset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}}} \cdot \underset{4\times 1}{\overset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}} = \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Matriz aumentada de un SEL. Un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas puede abreviarse en una sola matriz

Ejemplo:

$$\left\{\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\begin{array}{c} \qquad\quad A \qquad\qquad\qquad B \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

NOTA: las incógnitas deben escribirse en el mismo orden en cada ecuación.

Sistemas de ecuaciones lineales

$S = A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Resolución de SEL: Regla de Cramer

$$\boxed{\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases}}$$

Encontrar la terna de valores que soluciona el sistema de ecuaciones lineales (SEL) propuesto

$x = \dfrac{\Delta x}{\Delta s}$	$y = \dfrac{\Delta y}{\Delta s}$	$z = \dfrac{\Delta z}{\Delta s}$

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$\Delta S = \det(S)$

$AX = B$

Sistemas de ecuaciones lineales

$\Delta s = \det(A)$

Resolución de SEL: Regla de Cramer

$$x - y + z = 0$$
$$x + 3y + 2z = -1$$
$$2x + 2y + z = -1$$

Encontrar la terna de valores que soluciona el sistema de ecuaciones lineales (SEL) propuesto

$x = \dfrac{\Delta x}{\Delta s}$	$y = \dfrac{\Delta y}{\Delta s}$	$z = \dfrac{\Delta z}{\Delta s}$

$\Delta S = -8$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Sarrus

$$\Delta S: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ΔS= [(1x3x1)+(1x2x1)+(2x(-1)x2)]
- [(1x3x2)+(2x2x1)+(1x(-1)x1)] = **-8**

ΔS= [(1x3x1)+((-1)x2x2)+(1x1x2)]
- [(1x3x2)+(2x2x1)+((-1)x1x1)] = **-8**

Sistemas de ecuaciones lineales

Resolución de SEL: Regla de Cramer

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Encontrar la terna de valores que soluciona el sistema de ecuaciones lineales (SEL) propuesto

$x = \dfrac{\Delta x}{\Delta s}$	$y = \dfrac{\Delta y}{\Delta s}$	$z = \dfrac{\Delta z}{\Delta s}$

$$S = A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$TI = B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \boxed{\frac{2}{-8}} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

$$\begin{array}{ccc} TI & y & z \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Δx= [(0x3x1)+((-1)x2x1)+((-1)x(-1)x2)]
- [(1x3x(-1))+(2x2x0)+(1x(-1)x(-1))] = **2**

$$\Delta x = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

$x = -\frac{1}{4}, \; y = -\frac{1}{2}, \; z = 0$

Resolución de SEL: Regla de Cramer

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Encontrar la terna de valores que soluciona el sistema de ecuaciones lineales (SEL) propuesto

$x = \dfrac{\Delta x}{\Delta s}$	$y = \dfrac{\Delta y}{\Delta s}$	$z = \dfrac{\Delta z}{\Delta s}$

TI

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & \mathbf{-1} & 2 \\ 2 & \mathbf{-1} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Δy= [(1x(-1)x1)+(1x(-1)x1)+(2x0x2)]
- [(1x(-1)x2)+(2x(-1)x1)+(1x0x1)] = **2**

TI

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \mathbf{0} \\ 1 & 3 & \mathbf{-1} \\ 2 & 2 & \mathbf{-1} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Δz= [(1x3x(-1))+(1x2x0)+(2x(-1)x(-1))]
- [(0x3x2)+((-1)x2x1)+((-1)x(-1)x1)] = **0**

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{2}{-8} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{0}{-8} = \boxed{0}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Resolución de SEL: Regla de Cramer

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Encontrar la terna de valores que soluciona el sistema de ecuaciones lineales (SEL) propuesto

$x = \dfrac{\Delta x}{\Delta s}$	$y = \dfrac{\Delta y}{\Delta s}$	$z = \dfrac{\Delta z}{\Delta s}$

Comprobación

$$\boxed{\begin{aligned} \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) + 0 &= 0 \\ \left(-\frac{1}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{4}\right) + 2(0) &= -1 \\ 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 0 &= -1 \end{aligned}}$$

Este ejemplo corresponde al ejercicio 15 a del tpn 6 Intente resolver el ej 15b