Lógica Proposicional

UTN FRSR - Ingreso 2022

Introducción: Qué es la lógica?

Definición

- Ciencia que estudia los métodos de **razonamiento**,
- proporciona reglas y técnicas para **deducir verdades a partir de otras verdades**,
- indica los métodos para obtener **conclusiones de la forma correcta**

Introducción: Por qué es importante la lógica?

La programación requiere el desarrollo del razonamiento lógico

- Reconocer el problema -> buscar una solución -> formar conclusiones
- Análisis de condiciones en sentencias de control
- Razonamiento sobre el conocimiento del problema

La lógica favorece y mejora nuestra capacidad de razonar correctamente sobre problemas cotidianos

Otras aplicaciones de la lógica

- Sistemas de bases de datos, inteligencia artificial, circuitos computacionales, programación lógica, análisis y optimización de algoritmos, y muchos más

Proposiciones

Definición

- Enunciado que se puede juzgar **objetivamente** como **verdadero** o **falso**

Ejemplos

- **SI son proposiciones**: llueve; tengo paraguas; salió el sol; es de noche; 2+2=4; 2+2=3; 1 es un número entero
- **NO son proposiciones**: oprima la tecla enter; los números enteros son interesantes; abra el paraguas afuera; la noche es linda (?)

De modo que una proposición puede tomar un único **valor de verdad**: Verdadero (V) o Falso (F)

Proposiciones

p: llueve

p = V , p = 1

Definiciones

- **Variable proposicional**: símbolo que representa una proposición y puede tomar dos valores, verdadero (V, o 1) o falso (F o 0). Usaremos letras p, q, r, …
- **Proposición atómica**: compuesta de una única variable proposicional
- **Proposición compuestas**: se construye a partir de sentencias más simples mediante **conectivas lógicas**.

Tablas de verdad

Definición

- Método para mostrar los resultados obtenidos al aplicar cada uno de los conectores lógicos a una proposición

Ejemplo:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

nro filas: $\boxed{2^n}$

n: nro prop

Conectores lógicos

Negación ¬ (no): La negación de una proposición p, denotada ¬p, es otra proposición cuyo valor es el opuesto al de p.

p	¬p
V	F
F	V

Tabla 1: negación

$2^1 = 2$ fila

Conectores lógicos

Conjunción ∧ (y): La conjunción de dos proposiciones p, q, denotada p∧q, es la proposición que sólo es cierta si ambas son ciertas.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 3: Conjunción

$$\underbrace{\underbrace{(\underset{V}{p} \wedge \underset{V}{q})}_{V} \wedge \underset{F}{r}}_{F}$$

Conectores lógicos

Disyunción ∨ (o): La disyunción de dos proposiciones p, q, denotada p∨q, es la proposición que sólo es falsa si ambas son falsas.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 4: Disyunción

Conectores lógicos

Implicación → (“si p entonces q”, “p implica q”): La implicación de dos proposiciones, p, q denotada p→q (donde p es el **antecedente** y q el **consecuente**) es la proposición que sólo es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 5: Implicación

Observe que p→q ≠ q→p!

q	p	q→p
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Conectores lógicos

Doble implicación ↔ ("p si y solo q"): La doble implicación de dos proposiciones, p, q denotada p↔q es la proposición que sólo es verdadera si ambas coinciden en su valor.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 7: Doble implicación

Propiedades de los Conectores lógicos

Definiciones preliminares

- **Equivalencia lógica (≡)**: Dos proposiciones son lógicamente equivalentes cuando tienen los mismos valores de verdad.
- **Precedencia de los conectores**: Es una precedencia similar a la utilizada en la aritmética. El orden de precedencia en la lógica proposicional (de mayor a menor) es: ¬, ∧, ∨, → y ↔

Ejemplo:

$$\neg A \land B \rightarrow C \quad = \quad \overset{4}{(}\ \underbrace{(\ \overbrace{(\underset{\uparrow 1}{\neg} A) \land B\ )}^{2} \rightarrow C)}_{3}$$

Propiedades de los Conectores lógicos

Doble negación (¬¬): la doble negación es una propiedad a través de la cual se recupera el valor de verdad original de la variable o proposición en cuestión, es decir $\neg(\neg p) \equiv p$.

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

Tabla 2: doble negación

Propiedades de los Conectores lógicos

Conmutativa: para la conjunción (∧) y la disyunción (∨) se cumple la propiedad conmutativa:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad\qquad p \vee q \equiv q \vee p$$

p	q	p∨q	q∨p
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

Propiedades de los Conectores lógicos

Distributiva: Para proposiciones con conjunción (∧) y disyunción (∨), esta propiedad se cumple de la siguiente manera

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $\qquad$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Propiedades de los Conectores lógicos

Asociativa: Esta propiedad también se cumple para la conjunción y disyunción. Si se emplea dos o más proposiciones a través del mismo conector, no importa el orden el resultado es el mismo

$$\underbrace{(p \wedge q) \wedge r}\ \equiv\ \underbrace{p \wedge (q \wedge r)} \qquad \underbrace{(p \vee q) \vee r}\ \equiv\ p \vee (q \vee r)$$

$$\underbrace{(q \wedge p)} \wedge r \equiv \underbrace{(p \wedge q)} \wedge r \equiv (r \wedge p) \wedge q$$

Propiedades de los Conectores lógicos

Asociativa: Esta propiedad también se cumple para la conjunción y disyunción. Si se emplea dos o más proposiciones a través del mismo conector, no importa el orden el resultado es el mismo

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \qquad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

CUIDADO: Si se utilizan conectores distintos no es posible verificar la ley asociativa, por ejemplo

$$(p \wedge q) \vee r \not\equiv p \wedge (q \vee r)$$

Propiedades de los Conectores lógicos

Idempotencia

$\boxed{p \wedge p} \equiv p$ $p \vee p \equiv p$

Leyes de De Morgan

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

$\neg(\neg(p)) \equiv p$

Propiedades de los Conectores lógicos

Definición: Dada una implicación $p \to q$, se obtienen las siguientes implicaciones

$p \to q$	Implicación directa,
$q \to p$	Implicación inversa,
$\neg p \to \neg q$	Implicación recíproca
$\neg q \to \neg p$	Implicación contrapositiva

$\boxed{\neg q \to \neg p} \equiv p \to q$

Teorema: Las implicaciones directa y contrapositiva son equivalentes, y las implicaciones inversa y recíproca son equivalentes

Propiedades de los Conectores lógicos

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Definición: Una **tautología** es una proposición cuya tabla de verdad es siempre verdadera. Una **contradicción** es aquella proposición cuya tabla de verdad es siempre falsa. Si la tabla de verdad, no es ni tautología ni contradicción se dice entonces que es una **contingencia**.

Ejemplo: vamos a probar que $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ es una tautología

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$p \to q \leftrightarrow \neg q \to \neg p$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Propiedades de los Conectores lógicos: Resumen

$\alpha = p \quad \beta = q \quad \gamma = r$

$$
\begin{array}{rcll}
(\alpha \land \beta) & \equiv & (\beta \land \alpha) & \text{Conmutatividad de } \land \\
(\alpha \lor \beta) & \equiv & (\beta \lor \alpha) & \text{Conmutatividad de } \lor \\
((\alpha \land \beta) \land \gamma) & \equiv & (\alpha \land (\beta \land \gamma)) & \text{Asociatividad de } \land \\
((\alpha \lor \beta) \lor \gamma) & \equiv & (\alpha \lor (\beta \lor \gamma)) & \text{Asociatividad de } \lor \\
\neg(\neg\alpha) & \equiv & \alpha & \text{Eliminación de la doble negación} \\
(\alpha \Rightarrow \beta) & \equiv & (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha) & \text{Contraposición} \\
(\alpha \Rightarrow \beta) & \equiv & (\neg\alpha \lor \beta) & \text{Eliminación de la implicación} \\
(\alpha \Leftrightarrow \beta) & \equiv & ((\alpha \Rightarrow \beta) \land (\beta \Rightarrow \alpha)) & \text{Eliminación de la bicondicional} \\
\neg(\alpha \land \beta) & \equiv & (\neg\alpha \lor \neg\beta) & \text{Ley de Morgan} \\
\neg(\alpha \lor \beta) & \equiv & (\neg\alpha \land \neg\beta) & \text{Ley de Morgan} \\
(\alpha \land (\beta \lor \gamma)) & \equiv & ((\alpha \land \beta) \lor (\alpha \land \gamma)) & \text{Distribución de } \land \text{ respecto a } \lor \\
(\alpha \lor (\beta \land \gamma)) & \equiv & ((\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma)) & \text{Distribución de } \lor \text{ respecto a } \land
\end{array}
$$

Ejercicios

---

a b $\neg p$: antec.

$\neg q$: con.

1.a $\neg(\neg p \to \neg q)$

c : a → b

d : ¬c

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to \neg q$	$\neg(\neg p \to \neg q)$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F

Ejercicios

1.c $\overbrace{(p\leftrightarrow q)}^{1}\leftrightarrow\overbrace{[(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)]}^{2}$

				d	a	b	c a ∨ b	d ↔ c
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p\leftrightarrow q)$	$(p\wedge q)$	$(\neg p\wedge\neg q)$	$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$	$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow[(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)]$
V	V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V