Matrices y determinantes

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}\right\}$$

En este caso tenemos *m* ecuaciones y *n* incógnitas. Los a_{ij} se denominan coeficientes y los x_i se denominan incógnitas y b_j se denominan términos independientes

Resolver el sistema consiste en calcular las incógnitas para que se cumplan TODAS las ecuaciones del sistema simultáneamente

Matrices y determinantes

Expresión matricial de un sistema

Cualquier sistema de ecuaciones lineales se puede expresar en forma matricial del modo:

$$\underset{\text{m x n}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}} \cdot \underset{\text{n x 1}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{\text{m x 1}}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se llama *matriz de coeficientes*,

matriz $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ se llama *matriz de términos independientes*.

matriz de incógnitas,

UTN FACULTAD REGIONAL MENDOZA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Matrices y determinantes

La matriz formada por A y B conjuntamente, es decir:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

se llama matriz ampliada del sistema y se representará por $(A|B)$

Ejemplo: El sistema: $\left.\begin{array}{c} x+y-z=5 \\ x+y=7 \\ 2x+2y-z=12 \end{array}\right\}$ escrito matricialmente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & -1 & 12 \end{array}\right)$$

Matrices y determinantes

Regla de Cramer

$$x - y + z = 0$$
$$x + 3y + 2z = -1$$
$$2x + 2y + z = -1$$

Encontrar la terna de valores que soluciona el sistema de ecuaciones lineales (SEL) propuesto

$x = \dfrac{\Delta x}{\Delta s}$	$y = \dfrac{\Delta y}{\Delta s}$	$z = \dfrac{\Delta z}{\Delta s}$

$$\text{Determinante del sistema} \Delta s = \text{Diagonal Principal} - \text{Diagonal Secundaria}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Sarrus

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ΔS= [(1x3x1)+(1x2x1)+(2x(-1)x2)]
- [(1x3x2)+(2x2x1)+(1x(-1)x1)] = **-8**

ΔS= [(1x3x1)+((-1)x2x2)+(1x1x2)]
- [(1x3x2)+(2x2x1)+((-1)x1x1)] = **-8**

Matrices y determinantes

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{TI} & y & z \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

Δx= [(0x3x1)+((-1)x2x1)+((-1)x(-1)x2)]
- [(1x3x(-1))+(2x2x0)+(1x(-1)x(-1))] = **2**

Matrices y determinantes

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & \mathbf{-1} & 2 \\ 2 & \mathbf{-1} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & \mathbf{0} \\ 1 & 3 & \mathbf{-1} \\ 2 & 2 & \mathbf{-1} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Δy= [(1x(-1)x1)+(1x(-1)x1)+(2x0x2)]
- [(1x(-1)x2)+(2x(-1)x1)+(1x0x1)] = **2**

Δz= [(1x3x(-1))+(1x2x0)+(2x(-1)x(-1))]
- [(0x3x2)+((-1)x2x1)+((-1)x(-1)x1)] = **0**

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{0}{-8} = 0$$

Comprobación

$$\left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) + 0 = 0$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{4}\right) + 2(0) = -1$$

$$2\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 0 = -1$$

Este ejemplo corresponde al ejercicio 15 a del tpn 6
Intente resolver el ej 15b

Matrices y determinantes

CRAMER PARA DOS VARIABLES

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Intente los ejercicios 15b y 15 d

Matrices y determinantes

Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra que facilitan el ordenamiento de datos, así como su manejo.

Los conceptos de matriz y todos los relacionados fueron desarrollados básicamente en el siglo XIX por matemáticos como los ingleses J.J. Sylvester y Arthur Cayley y el irlandés William Hamilton

Matrices y determinantes

Una matriz es una tabla rectangular de números reales dispuestos en filas y columnas del modo:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Columnas de la matriz A}} \left.\begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}\right\} \text{Filas de la matriz A}$$

mxn orden o tamaño de una matriz

(a_{ij}). Cada elemento de la matriz lleva dos subíndices. El primero de ellos "i", indica la fila en la que se encuentra el elemento, y el segundo, "j", la columna

Ejemplo: el elemento a_{23} está en la fila 2 y columna 3.

Las matrices siempre se representan con letras mayúsculas.

Matrices y determinantes

Tipos de matrices

1. Se llama *matriz nula* a la que tiene todos los elementos cero.

   Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   es una matriz nula de tamaño 2x5.

2. Se llama *matriz fila* a la que sólo tiene una fila, es decir su dimensión es 1x n.

   Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

   es una matriz fila de tamaño 1 x 4.

3. Se llama matriz columna a la que sólo consta de una columna, es decir su dimensión será m x 1, como por ejemplo:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix}$$

   es una matriz columna de tamaño 3 x 1.

Matrices y determinantes

4. Una matriz es cuadrada cuando tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir su dimensión es n x n. La matriz $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ del primer ejemplo anterior es cuadrada de tamaño 2 x 2 o simplemente de orden 2.

Otro ejemplo de matriz cuadrada es:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

de orden 3.

Dentro de las matrices cuadradas llamaremos *diagonal principal* a la formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$, siendo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En la matriz D del ejemplo anterior, su diagonal principal estaría formada por 1, 5, 0.

Matrices y determinantes

Una clase especial de matrices cuadradas son las *matrices triangulares*.

Una matriz es *triangular superior* si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos y *triangular inferior* si son nulos todos los elementos situados por encima de dicha diagonal.

Son ejemplos de estas matrices:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 16 & -78 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Triangular inferior

Triangular superior

Si una matriz es a la vez triangular superior e inferior, sólo tiene elementos en la diagonal principal. Una matriz de este tipo se denomina *matriz diagonal*.

Un ejemplo de matriz diagonal sería:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices y determinantes

Por último, si una matriz diagonal tiene en su diagonal principal sólo unos, se denomina matriz unidad o identidad. Se suelen representar por I_n , donde n es el orden o tamaño de la matriz. Algunas matrices identidad son:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices y determinantes

Operaciones entre matrices

Suma y diferencia

Dadas dos matrices A y B podemos realizar su suma o diferencia de acuerdo a la siguiente regla. Para sumar o restar dos matrices *del mismo tamaño*, se suman o restan los elementos que se encuentren en la misma posición, resultando otra matriz de igual tamaño.

Por ejemplo:

$$\underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}} - \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$$

Si las matrices tienen diferente tamaño, no se pueden sumar o restar entre sí.

Propiedades de la suma (y diferencia) de matrices:

a) Conmutativa: $A + B = B + A$

b) Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) Elemento neutro: La matriz nula del tamaño correspondiente.

d) Elemento opuesto de A: La matriz -A, que resulta de cambiar de signo a los elementos de A.

Matrices y determinantes

Anímese con las siguientes operaciones

$$A = \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -2 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}} \Longrightarrow -A$$

$$-A = \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -2 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}} + \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}} = \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Matrices y determinantes

Ejercicio n°13: Determine las siguientes operaciones

$$\underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}} - \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$A = \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -2 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}} \Longrightarrow -A$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Matrices y determinantes

Producto por un número real

Dada una matriz cualquiera A y un número real k, el producto k·A se realiza multiplicando todos los elementos de A por k, resultando otra matriz de igual tamaño. (Evidentemente la misma regla sirve para dividir una matriz por un número real).

Por ejemplo:

$$-5 \cdot \underset{2\text{x}3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{2\text{x}3}{\begin{pmatrix} -10 & -5 & -15 \\ 20 & -10 & -5 \end{pmatrix}}$$

Propiedades:

a) Distributiva respecto de la suma de matrices: $k\cdot(A + B) = k\cdot A + k\cdot B$

b) Distributiva respecto de la suma de números: $(k + d)\cdot A = k\cdot A + d\cdot A$

c) Asociativa: $k\cdot(d\cdot A) = (k\cdot d)\cdot A$

d) Elemento neutro, el número 1: $1\cdot A = A$

Matrices y determinantes

Traspuesta de una matriz

Dada una matriz cualquiera A, se llama matriz traspuesta de A, y se representa por A^t a la matriz que resulta de intercambiar las filas y las columnas de A.

Ejemplo obtenga la traspuesta la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Evidentemente, si A es una matriz de tamaño m x n, su traspuesta A^t tendrá tamaño n x m, pues el número de columnas pasa a ser el de filas y viceversa.

Si la matriz A es cuadrada, su traspuesta tendrá el mismo tamaño.

Propiedades:

a) $(A^t)^t = A$, es decir, la traspuesta de la traspuesta es la matriz inicial.

b) $(A+B)^t = A^t + B^t$

c) $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

Matrices y determinantes

Ejercicio n14: Realice las siguientes operaciones

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & \frac{1}{3} & -2 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & \frac{2}{3} & -2 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & 1 & -4 \\ 2\sqrt{3} & -2\sqrt{2} & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 0 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}$$

Matrices y determinantes

Producto de matrices

No todas las matrices pueden multiplicarse. Dos matrices se pueden multiplicar cuando se cumple la siguiente condición:

"*Para multiplicar dos matrices A y B*, en este orden, $A \cdot B$, *es condición indispensable que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B*"

Una vez comprobado que el producto A·B se puede realizar, si A es una matriz m x n y B es una matriz n x p (observemos que el nº de columnas de A = n = nº de filas de B), entonces **el producto A·B da como resultado una matriz C de tamaño n x p** del siguiente modo:

Para multiplicar las matrices:

$$A = \underset{2x4}{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}} \quad y \quad B = \underset{4x3}{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{2x4}{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4x3}{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$a_{11} = fila\ 1\ (Matriz\ A)xColumna\ 1\ (Matriz\ B)$$

$$a_{12} = fila\ 1\ (Matriz\ A)xColumna\ 2\ (Matriz\ B)$$

$$a_{13} = fila\ 1\ (Matriz\ A)xColumna\ 3\ (Matriz\ B)$$

$$a_{21} = fila\ 2\ (Matriz\ A)xColumna\ 1\ (Matriz\ B)$$

$$a_{22} = fila\ 2\ (Matriz\ A)xColumna\ 2\ (Matriz\ B)$$

$$a_{23} = fila\ 2\ (Matriz\ A)xColumna\ 3\ (Matriz\ B)$$

Matrices y determinantes

$$\underset{2x4}{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4x3}{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2x} = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 5 \\ 5 & 22 & 11 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$a_{11} = (-3)x0 + (2x1) + (1x2) + (4x3) = 0 + 2 + 2 + 12 = 16$$

$$a_{12} = \big(-3\,x(-4)\big) + \big(2x(-2)\big) + (1x0) + (4x2) = 12 - 4 + 0 + 8 = 16$$

$$a_{13} = (-3x1) + 2x1 + 1x2 + 4x1 = -3 + 2 + 2 + 4 = 5$$

$$a_{21} = 2x0 + (5x1) + (3x2) + (-2x3) = 0 + 5 + 6 - 6 = 5$$

$$a_{22} = 2x(-4) + \big(5x(-2)\big) + (3x0) + (-2x2) = -8 - 10 + 0 - 4 = -22$$

$$a_{23} = 2x1 + 5x1 + 3x2 + (-2x1) = 2 + 5 + 6 - 2 = 11$$

Matrices y determinantes

Propiedades del producto de matrices

a) Asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

b) Distributiva respecto de la suma:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

c) Elemento neutro, la matriz identidad correpondiente, si A es m x n:

$$A \cdot I_n = A$$

$$I_m \cdot A = A$$

Matrices y determinantes

d) En general *el producto de matrices no es conmutativo*

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Pueden verse ejemplos en los ejercicios anteriores. Esta es una propiedad muy importante.

e) El producto de dos matrices no nulas A y B puede dar lugar a una matriz nula:

$$\underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3x1}{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}} = \underset{2x1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Se dice que el conjunto de las matrices con la operación producto tiene *divisores de cero*, es decir, hay matrices no nulas cuyo producto es nulo.

Matrices y determinantes

Dada una matriz cuadrada de orden n , A, se dice que A *es invertible* (o que posee inversa o que es no singular o que es regular), si existe otra matriz del mismo orden, denominada matriz inversa de A y representada por A^{-1} y tal que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

y

$$A^{-1} \cdot A = I_n$$

Si A no tiene inversa, se dice que es *singular o no invertible.*

Si una matriz tiene inversa, dicha matriz inversa es única (sólo hay una). Para calcular dicha matriz inversa, podemos utilizar dos vías:

A.B = B.A = I → A es inversible y B es la inversa de la matriz A

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Matrices y determinantes

A^{-1} INVERSA DE A

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Como a.d – b.c ≠0 entonces

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

Matrices y determinantes

Matrices booleanas

Si A y B son dos conjuntos finitos con m y n elementos, respectivamente, y R es una relación de A en B, entonces es posible representar a R como una matriz $M_R = [m_{ij}]$ cuyos elementos se definen como :

$$m_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1 \text{ si } (a,b) \in R} \\ \mathbf{0 \text{ si } (a,b) \notin R} \end{cases}$$

Ejemplo : R: A → B , A={1,2,3,4,5} y B={1,2,3,4,5,6,7}

R={(1,2), (1,3), (2,2), (2,5), (3,2), (3,7), (4,2), (4, 5), (5,6)}

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Matrices y determinantes

Matrices Booleanas

Sean dos matrices A y B

Disyunción $A \vee B = D$ cuyas entradas son
$d_{ij} = 0 \qquad a_{ij} = 0 \vee b_{ij} = 0$

Conjunción $A \wedge B = D$ cuyas entradas son
$d_{ij} = 1 \qquad a_{ij} = 1 \wedge b_{ij} = 1$

Complemento: se intercambian los 1 por 0 y los o por 1

Intersección $M_{R \cap s} = M_R \wedge M_S$

Unión $M_{R \cup s} = M_R \vee M_S$

Inversa es equivalente a obtener la traspuesta de la matriz

Composición $R°S = M_R \odot M_S$

Matrices y determinantes

Propiedades de las relaciones a partir de las propiedades de las matrices booleanas

R es reflexiva $\leftrightarrow I_n \leq M_R$

R es simétrica $\leftrightarrow M_R = M_R{}^t$

R es transitiva $\leftrightarrow M_{R \odot R} \leq M_R$

R es antisimétrica $\leftrightarrow M_R \wedge M_R{}^t \leq I_n$

R es total $\leftrightarrow M_R \vee M_R{}^t$ = Matriz unidad

UTN FACULTAD REGIONAL MENDOZA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Matrices y determinantes

Relación transitiva

Una relación de A en B tiene la propiedad de ser transitiva si cuando aRb y bRc entonces existe el par aRc.

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array} \odot \begin{array}{|cccc|}
1 & 2 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{array} = \begin{array}{|cccc|}
1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Es análogo a multiplicar matrices

$$0(0)+0(0)+1(1)+0(0)=0+0+1+0=1$$
$$0(0)+0(1)+1(0)+0(0)=0+0+0+0=0$$
$$0(1)+0(1)+1(1)+0(1)=0+0+1+0=1$$
$$0(0)+0(1)+1(1)+0(0)=0+0+1+0=1$$

CUIDADO!!!
SON SUMAS Y MULTIPLICACIONES BOOLEANAS