

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

IFT6561 – SIMULATION: ASPECTS STOCHASTIQUES

Devoir 4

par:

Eugénie Yockell

(20071932)

Cong Liu

(20161998)

Date de remise: 11 novembre 2020

Question1

(a)

$X_1 \sim U[0, 1]$, $X_2 \sim U[0, 1]$, alors

$$F_1(X_1 = x) = x$$

$$F_2(X_2 = x) = x$$

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{12}$$

$$\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{12}$$

Soit U une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$

$$X_1 = F_1^{-1}(U)$$

$$X_2 = F_2^{-1}(U)$$

Quand X_1 et X_2 ont la corrélation maximale, $X_1 = F_1^{-1}(U) = U$, $X_2 = F_2^{-1}(U) = U$

$$\begin{aligned} \text{corr}_{12} &= \rho(X_1, X_2) \\ &= \frac{\mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_1)]}{\sigma_1 \sigma_2} \\ &= 12 \mathbb{E} \left[\left(U - \frac{1}{2} \right) \left(U - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= 12 \mathbb{E} \left[U^2 - U + \frac{1}{4} \right] \\ &= 12 \left[\mathbb{E}(U^2) - E(U) + \frac{1}{4} \right] \\ &= 12 \int_0^1 U^2 du + 6 - 3 \\ &= 12 \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 + 3 - 6 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Quand X_1 et X_2 ont la corrélation minimale, $X_1 = F_1^{-1}(U) = U, X_2 = F_2^{-1}(1 - U) = 1 - U$

$$\begin{aligned}
\min r_{12} &= \rho(X_1, X_2) \\
&= \frac{\mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_1)]}{\sigma_1 \sigma_2} \\
&= 12 \mathbb{E} \left[\left(U - \frac{1}{2} \right) \left(1 - U - \frac{1}{2} \right) \right] \\
&= 12 \mathbb{E} \left[\left(U - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - U \right) \right] \\
&= 12 \left[-\mathbb{E}(U^2) + \mathbb{E}(U) - \frac{1}{4} \right] \\
&= -12 \int_0^1 U^2 du + 6 - 3 \\
&= -4 + 6 - 3 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Donc, $r_{12} \in [-1, 1]$.

(b)

$X_1 \sim N(0, 1)$ et $X_2 \sim N(0, 4)$, alors

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \mathbb{X}_{\mu} = 0 \\
\mu_2 &= \mathbb{X}_{\mu} = 0 \\
\sigma_1^2 &= 1 \\
\sigma_2^2 &= 4
\end{aligned}$$

On sait que si on a une distribution Z qui suit une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$, alors $Y = aZ + b$ suit une loi normale $N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$, a et b sont des constantes.

Soit $U \sim U[0, 1]$, $Z \sim N(0, 1)$ et $Z = \Phi^{-1}(U)$. Quand X_1 et X_2 ont la corrélation maximale, $X_1 = F_1^{-1}(U) = Z, X_2 = F_2^{-1}(U) = 2Z$, alors

$$\begin{aligned}
\max(r_{12}) &= \rho(X_1, X_2) \\
&= \frac{\mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]}{\sigma_1 \sigma_2} \\
&= \frac{\mathbb{E}[Z \cdot 2Z]}{\sigma_1 \sigma_2} \\
&= \mathbb{E}(Z^2)
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} Z^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp -\frac{Z^2}{2} dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-Z}{\sqrt{2\pi}} d \exp -\frac{Z^2}{2} \text{intégration par partie} \\
&= \left| -\frac{Z}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{Z^2}{2} \right|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp -\frac{Z^2}{2} dz \\
&= 0 + \int_{-\infty}^{\infty} f_z dz \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc la corrélation maximale $\max(r_{12}) = 1$.

Quand X_1 et X_2 ont la corrélation minimale, $X_1 = F_1^{-1}(U) = Z$, $X_2 = F_2^{-1}(1 - U) = -2Z$, car $\Phi^{-1}(1 - U) = -Z$.

Alors,

$$\begin{aligned} \min(r_{12}) &= \rho(X_1, X_2) \\ &= \frac{\mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]}{\sigma_1 \sigma_2} \\ &= \frac{\mathbb{E}(Z \cdot -2Z)}{1 \cdot 2} \\ &= \frac{-2\mathbb{E}(Z^2)}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Donc la corrélation minimale $\min(r_{12}) = -1$, $r_{12} \in [-1, 1]$.

(c)

$X_1 \sim U(0, 1)$ et $X_2 \sim \text{Exp}(1)$, alors

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2} \\ \sigma_1 &= \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \mu_2 &= \mathbb{E}(X_2) = 1 \\ \sigma_2 &= 1 \end{aligned}$$

Soit U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, quand X_1 et X_2 ont la corrélation maximale,

$$\begin{aligned} F_1(x) &= x = U \\ F_2(x) &= 1 - e^{-x} = U \\ X_1 &= F_1^{-1}(U) = U \\ X_2 &= F_2^{-1}(U) = -\log(1 - U) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(r_{12}) &= \rho(X_1, X_2) \\ &= \frac{\mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]}{\sigma_1 \sigma_2} \\ &= \sqrt{12} \mathbb{E}[(U - \frac{1}{2})(-\ln(1 - U) - 1)] \\ &= \sqrt{12} [\mathbb{E}(-U \ln(1 - U)) + \frac{1}{2} - \mathbb{E}(U) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(\ln(1 - U))] \\ &= \sqrt{12} [\mathbb{E}(-U \ln(1 - U)) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(\ln(1 - U))] \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\int u \ln(1-u) \cdot f_u du &= \int u \ln(1-u) du \\
&= \int \ln(1-u) d\frac{u^2}{2} \\
&= \frac{u^2}{2} \ln(1-u) - \int \frac{u^2}{2} d\ln(1-u) \\
&= \frac{u^2}{2} \ln(1-u) - \int \frac{u^2(-1)}{2(1-u)} du \\
&= \frac{u^2}{2} \ln(1-u) - \int \left(\frac{u+1}{2} + \frac{1}{2(u-1)} \right) du \\
&= \frac{u^2}{2} \ln(1-u) - \frac{u^2}{4} - \frac{u}{2} + \frac{\ln(1-u)}{2} + c, c \text{ est une constante} \\
&= (u-1)(u+1) \frac{\ln(1-u)}{2} - \frac{u^2}{4} - \frac{u}{2} + c
\end{aligned} \tag{3}$$

Par l'équation 3,

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 u \log(1-u) du &= \left| (u-1)(u+1) \frac{\log(1-u)}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + c \right|_0^1 = \frac{3}{4} \\
\int \log(1-u) du &= -\int \log(1-u) d(1-u) \\
&= -(1-u) \log(1-u) + \int (1-u) d\log(1-u) \\
&= (u-1) \log(1-u) + \int (1-u) \frac{-1}{1-u} du \\
&= (u-1) \log(1-u) - u + c, c \text{ est une constante}
\end{aligned} \tag{4}$$

Par l'équation 4,

$$\int_0^1 \log(1-u) = |(u-1) \log(1-u) - u + c|_0^1 = -1$$

Donc, l'équation 2 devient

$$\max(r_{12}) = \sqrt{12} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{12}}{4}$$

Quand X_1 et X_2 ont la corrélation minimale,

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= x = U \\
F_2(x) &= 1 - e^{-x} = 1 - U \\
X_1 &= F_1^{-1}(U) = U \\
X_2 &= F_2^{-1}(1-U) = -\ln(U)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\min(r_{12}) &= \rho(X_1, X_2) \\
&= \frac{\mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]}{\sigma_1 \sigma_2} \\
&= \sqrt{12} \mathbb{E}(-U \ln U - U + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln U) \\
&= \sqrt{12} [\mathbb{E}(-U \ln U) - \mathbb{E}(U) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathbb{E}(\ln U)]
\end{aligned} \tag{5}$$

On calcul $\mathbb{E}(-U \ln U)$ et $\mathbb{E}(\ln U)$

$$\int \ln u du = u \ln u - u + c, c \text{ est une constante}$$

$$\begin{aligned}
\int u \ln u du &= \frac{1}{2} \int \ln u du^2 \\
&= \frac{1}{2} u^2 \cdot \ln u - \left(\frac{1}{2}\right) \int u^2 \frac{1}{u} du \\
&= \frac{1}{2} u^2 \cdot \ln u - \frac{u^2}{4} + c
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\ln U) = \int_0^1 \ln u du = [u \ln u - u + c]_0^1 = -1$$

$$\mathbb{E}(-U \ln U) = - \int_0^1 u \ln u du = - \left[\frac{1}{2} u^2 \cdot \ln u - \frac{u^2}{4} + c \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Donc l'équation 5 devient

$$\min(r_{12}) = \sqrt{12} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{\sqrt{12}}{4}$$

Donc, $r_{12} \in \left[-\frac{\sqrt{12}}{4}, \frac{\sqrt{12}}{4}\right]$.

Question2

On décrit ci-dessous comment obtenir le processus variance-gamma selon trois différent algorithme. Pour chaque cas, nous avons $n = 10^4$ et $t_0 = 0, t_1 = 0.6, t_2 = 0.8, t_3 = 1.0, t_4 = 1.2$.

Algorithme BGSS

procedure BGSS

$t_0 = \tau_0 = 0$

$G(t_0) = X(\tau_0) = 0$

for i=1 à n **do**

$S = 0$

$\Gamma_1 \sim \text{Gamma}((t_1 - t_0)\alpha, \lambda)$

$\tau_1 = \Gamma_1 + \tau_0$

$Y_1 \sim N((\tau_1 - \tau_0)\mu, (\tau_1 - \tau_0)\sigma^2) + Y_0$

$\Gamma_2 \sim \text{Gamma}((t_2 - t_1)\alpha, \lambda)$

```

 $\tau_2 = \Gamma_2 + \tau_1$ 
 $Y_2 \sim N((\tau_2 - \tau_1)\mu, (\tau_2 - \tau_1)\sigma^2) + Y_1$ 

 $\Gamma_3 \sim \text{Gamma}((t_3 - t_2)\alpha, \lambda)$ 
 $\tau_3 = \Gamma_3 + \tau_2$ 
 $Y_3 \sim N((\tau_3 - \tau_2)\mu, (\tau_3 - \tau_2)\sigma^2) + Y_2$ 

 $\Gamma_4 \sim \text{Gamma}((t_4 - t_3)\alpha, \lambda)$ 
 $\tau_4 = \Gamma_4 + \tau_3$ 
 $Y_4 \sim N((\tau_4 - \tau_3)\mu, (\tau_4 - \tau_3)\sigma^2) + Y_3$ 

 $S = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)$ 
end for
On obtient ainsi  $n$  réalisation de  $S$ 
end procedure

```

Algorithme BGBS

```

procedure BGBS
   $t_0 = \tau_0 = 0$ 
   $G(t_0) = X(\tau_0) = 0$ 
   $\nu = 0.3$ 
   $\lambda = \alpha = 1/\nu$ 
   $\mu = -0.1436$ 
   $\sigma = 0.12136$ 
  for  $i=1$  à  $n$  do
     $S = 0$ 
     $\tau_4 \sim \text{Gamma}(t_4\alpha, \lambda)$ 
     $Y_4 \sim N(\tau_4\mu, \tau_4\sigma^2)$ 

     $\beta_2 \sim \text{Beta}((t_2 - t_0)\alpha, (t_4 - t_2)\alpha)$ 
     $\tau_2 = \beta_2(\tau_4 - \tau_0) + \tau_0$ 
     $Y_2 \sim N(Y_0 + (Y_4 - Y_0)(\frac{\tau_2}{\tau_4}), \sigma^2\tau_2(\tau_4 - \tau_2)/\tau_4)$ 

     $\beta_1 \sim \text{Beta}((t_1 - t_0)\alpha, (t_2 - t_1)\alpha)$ 
     $\tau_1 = \beta_1(\tau_2 - \tau_0) + \tau_0$ 
     $Y_1 = N(Y_0 + (Y_2 - Y_0)(\frac{\tau_1}{\tau_2}), \sigma^2\tau_1(\tau_2 - \tau_1)/\tau_2)$ 

     $\beta_3 \sim \text{Beta}((t_3 - t_1)\alpha, (t_4 - t_3)\alpha)$ 
     $\tau_3 = \beta_3(\tau_4 - \tau_2) + \tau_2$ 
     $Y_3 \sim N(Y_2 + (Y_4 - Y_2)(\frac{\tau_3}{\tau_4}), \sigma^2\tau_3(\tau_4 - \tau_3)/\tau_4)$ 

     $S = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)$ 
  end for
  On obtient ainsi  $n$  réalisation de  $S$ 
end procedure

```

Algorithme DGBS

Par soucis de simplicité, on note ici $\tau_{i+} = G^+(t_i)$ et $\tau_{i-} = G^-(t_i)$

procedure DGBS

$$t_0 = \tau_0 = 0$$

$$G(t_0) = X(\tau_0) = 0$$

$$\nu = 0.3$$

$$\lambda = \alpha = 1/\nu$$

$$\mu = \theta = -0.1436$$

$$\sigma = 0.12136$$

$$\mu_+ = (\sqrt{\theta^2 + 2\sigma^2/\nu} + \theta)/2$$

$$\mu_- = (\sqrt{\theta^2 + 2\sigma^2/\nu} - \theta)/2$$

$$\nu_+ = \mu_+^2 \nu$$

$$\nu_- = \mu_-^2 \nu$$

$$\alpha_+ = \mu_+^2 / \nu_+$$

$$\alpha_- = \mu_-^2 / \nu_-$$

for i=1 à n **do**

$$S = 0$$

$$\tau_{4+} \sim \Gamma_{4+} = \text{Gamma}(t_4\alpha_+, \mu_+/\nu_+)$$

$$\tau_{4-} \sim \Gamma_{4-} = \text{Gamma}(t_4\alpha_-, \mu_-/\nu_-)$$

$$Y_4 = \tau_{4+} - \tau_{4-}$$

$$\beta_{2+} \sim \text{Beta}((t_2 - t_0)\alpha_+, (t_4 - t_2)\alpha_+)$$

$$\beta_{2-} \sim \text{Beta}((t_2 - t_0)\alpha_-, (t_4 - t_2)\alpha_-)$$

$$\tau_{2+} = \beta_{2+}(\tau_{4+} - \tau_0) + \tau_0$$

$$\tau_{2-} = \beta_{2-}(\tau_{4-} - \tau_0) + \tau_0$$

$$Y_2 = \tau_{2+} - \tau_{2-}$$

$$\beta_{1+} \sim \text{Beta}((t_1 - t_0)\alpha_+, (t_2 - t_1)\alpha_+)$$

$$\beta_{1-} \sim \text{Beta}((t_1 - t_0)\alpha_-, (t_2 - t_1)\alpha_-)$$

$$\tau_{1+} = \beta_{1+}(\tau_{2+} - \tau_0) + \tau_0$$

$$\tau_{1-} = \beta_{1-}(\tau_{2-} - \tau_0) + \tau_0$$

$$Y_1 = \tau_{1+} - \tau_{1-}$$

$$\beta_{3+} \sim \text{Beta}((t_3 - t_2)\alpha_+, (t_4 - t_3)\alpha_+)$$

$$\beta_{3-} \sim \text{Beta}((t_3 - t_2)\alpha_-, (t_4 - t_3)\alpha_-)$$

$$\tau_{3+} = \beta_{3+}(\tau_{4+} - \tau_{2+}) + \tau_{2+}$$

$$\tau_{3-} = \beta_{3-}(\tau_{4-} - \tau_{2-}) + \tau_{2-}$$

$$Y_3 = \tau_{3+} - \tau_{3-}$$

$$S = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)$$

end for

On obtient ainsi n réalisation de S

end procedure

REPORT on Tally stat. collector ==> BGSS results					
num. obs.	min	max	average	variance	standard dev.
10000	-2.021	-0.033	-0.515	0.075	0.275
95.0% conf. interval for the mean (normal approx.): (-5.208E-1, -5.100E-1)					
REPORT on Tally stat. collector ==> BGSS results					
num. obs.	min	max	average	variance	standard dev.
10000	-2.469	-0.033	-0.534	0.082	0.286
95.0% conf. interval for the mean (normal approx.): (-5.391E-1, -5.279E-1)					
REPORT on Tally stat. collector ==> DGBS results					
num. obs.	min	max	average	variance	standard dev.
10000	-3.115	1.057	-0.511	0.265	0.515
95.0% conf. interval for the mean (normal approx.): (-5.212E-1, -5.010E-1)					

Figure 1: Moyenne, variance et intervalle de confiance à 90% des 3 algorithmes pour mesurer le processus variance-gamma. Ces informations ont été produites à l'aide de la fonction Tally de la librairie *ssj*.

Les résultats de chaque algorithme sont présentés à la figure 1. Comme on s'y attendait les valeurs moyennes sont toutes plutôt semblables dans chaque cas. On remarque que l'algorithme avec la plus grande variance est le DGBS. Cette méthode se combine très bien avec RQMC pour réduire le nombre de dimensions efficaces, mais ne fait pas diminuer la variance.

Question3

(a)

(X, Y) est un vecteur qui suit une loi binormale standard, alors la fonction de densité de probabilité conjointe du couple (X, Y)

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

avec ρ désigne la corrélation de (X, Y)

Pour trouver le minimal c pour lequel $f(x, y) \leq c$, on cherche à trouver le maximal de $f_{x,y}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{X,Y}}{\partial \rho} &= \frac{1}{2\pi} \rho (1-\rho^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{xy + \rho^2 xy - (x^2 + y^2)\rho}{(1-\rho^2)^2} \cdot \exp\left(\frac{xy + \rho^2 xy - (x^2 + y^2)\rho}{(1-\rho^2)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} (1-\rho^2)^{-\frac{7}{2}} \cdot \rho \cdot \exp\left(\frac{xy + \rho^2 xy - (x^2 + y^2)\rho}{(1-\rho^2)^2}\right) \end{aligned}$$

Pour que $f_{X,Y}$ atteigne le maximum, il faut que $\frac{\partial f_{X,Y}}{\partial \rho} = 0$, c'est à dire ρ soit égale à 0. La fonction de densité devient

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

Comme $|\rho| \leq 1$, $-\frac{x^2+y^2}{2(1-\rho^2)} \leq 0$, la fonction exponentiel est monotone et croissante

$$f_{X,Y}(x,y) \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \exp 0 = \frac{1}{2\pi}$$

Donc la plus petite valeur de c est $c = \frac{1}{2\pi}$.

(b)

L'algorithme pour la méthode de rejet est définie ci-dessous.

Input: Entrer des paramètres a, b

Soit $c = \frac{1}{2\pi}$

Output: Retourner un point (X, Y) de la distribution uniforme

f_{XY} la fonction de densité, $f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$

générer $u1, u2, u3$

$x = a \cdot u1$

$y = b \cdot u2$

$z = c \cdot u3$

while $z \geq f(x,y)$ **do**

 générer $u1, u2, u3$

$x = a \cdot u1$

$y = b \cdot u2$

$z = c \cdot u3$

end while

return (x, y)

Algorithm 1: Reject Acceptance

(c)

Notons A l'évènement d'accepter le point (X, Y) , alors la probabilité de A est

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\int_x \int_y f_{X,Y}(x,y) dx dy}{abc}, c = \frac{1}{2\pi}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

On fait un changement de variable avec

$$x = \varphi_1(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$y = \varphi_2(r, \theta) = r \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{1}{ab} \int \int \exp -\frac{x^2 + y^2}{2} dx dy \\ &= \frac{1}{ab} \int \int f(\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta)) \cdot |Jacobian(r, \theta)| dr d\theta\end{aligned}$$

La matrice Jacobienne =

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{ab} \int \int r \cdot \exp -\frac{r^2}{2} dr d\theta$$

La probabilité de rejet est donc $P(rejet) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Et c'est cette probabilité qu'on utilise pour calculer l'espérance. On cherche l'espérance de cette probabilité.

$$\mathbb{E}(rejet) = \int X(rejet) dP(rejet)$$

(d)

Nous avons généré 1000 paires (X, Y) selon la loi tronquée, pour $a = 5$ et $b = 5$. Le “scatter plot” est présenté à la figure 2.

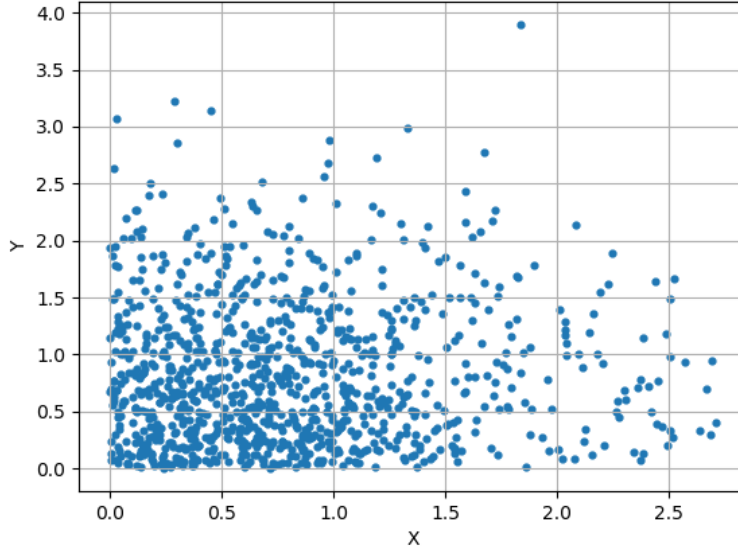


Figure 2: Truncated binormal distribution of (X, Y) with $a = 4, b = 5, n = 1000$

(e)

Si on génère X et Y directement selon des lois normales tronquées respectivement sur $[0, a]$ et $[0, b]$, ça va aussi donner la bonne loi que l'on veut. Voici la preuve en dessous

Pour le X qui suit une loi normale tronquée sur $[0, a]$, sa densité

$$f_X(x) = \frac{\Phi(x)}{\Phi(a) - \Phi(0)} = \frac{\phi(x)}{\Phi(a) - \frac{1}{2}}$$

Où Φ désigne la fonction répartition de la distribution normale standard. La densité de Y est

$$f_Y(y) = \frac{\Phi(y)}{\Phi(b) - \Phi(0)} = \frac{\Phi(y)}{\Phi(b) - \frac{1}{2}}$$

Comme on génère X et Y respectivement, ils sont indépendantes, on peut obtenir la fonction de densité conjointe par

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_X \cdot f_Y \\ &= \frac{\Phi(x)}{\Phi(a) - \frac{1}{2}} \cdot \frac{\Phi(y)}{\Phi(b) - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{(\Phi(a) - \frac{1}{2})(\Phi(b) - \frac{1}{2})} \Phi(x)\phi(y) \\ &= \frac{1}{(\Phi(a) - \frac{1}{2})(\Phi(b) - \frac{1}{2})} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) \\ &= c \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) \end{aligned}$$

c est une constante définie par $c = \frac{1}{(\Phi(a) - \frac{1}{2})(\Phi(b) - \frac{1}{2})}$. Donc (X, Y) obtenu par cette méthode suit une loi binormale.

En plus, on a fait une expérimentation pour générer des (X, Y) par cette méthode, avec $a = 4, b = 5, n = 1000$. Dans le scatter plot au dessous, On compare le résultat avec celui obtenu dans la question (d). On voit dans le graphique que les deux méthodes donnent la meme distribution de (X, Y) .

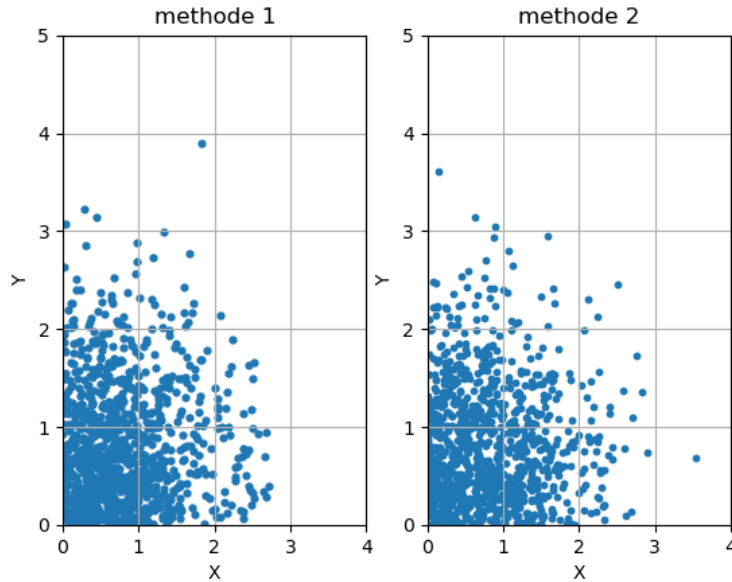


Figure 3: X, Y générés directement selon la loi normale tronquée

Question4

(a)

Dans les deux cas, on cherche à itérer au travers de tous les sommets et changer la couleur des sommets à chaque itération selon les couleurs admissibles. Les couleurs admissibles sont définies par des couleurs différentes des voisins, car aucun sommet voisin peut avoir la même couleur.

1) Ré-échantillonne la couleur d'un seul sommet choisi au hasard à chaque itération

procedure GIGGS

for $i=1$ à d dans un ordre aléatoire **do**

 Efface c_l , la couleur du sommet l

 Pige uniformément parmi les couleurs disponibles (couleurs différentes des voisins)

end for

 On obtient un état Y accepté

end procedure

2) Balayage systématique

procedure GIGGS

for $i=1$ à d **do**

 Efface c_l , la couleur du sommet l

 Pige uniformément parmi les couleurs disponibles (couleurs différentes des voisins)

end for

 On obtient un état Y accepté

end procedure

Intuitivement, on peut penser qu'avec la méthode systématique, on a plus de chance de revenir à un état déjà connue, car on passe toujours par les mêmes sommets au même moment. Tandis qu'avec la méthode aléatoire, on risque de tendre vers l'état stationnaire plus rapidement, car on a plus de chance d'aller à des nouveaux états rapidement. La méthode aléatoire est alors plus rapide pour tendre vers l'état stationnaire.

(b)

Un des problèmes de la méthode de Gibbs est qu'il n'est pas toujours possible d'atteindre tous les coloriage admissibles. Étudions ce fait avec l'exemple de 3 sommets où chaque sommet est de degré 2 relié à chaque autre sommet.

Pour le cas $k = 2$, la chaîne n'est pas irréductible. Il est évident qu'il n'y a aucun coloriage possible dans ce cas, car les trois sommets sont reliés.

Pour le cas $k = 3$, la chaîne n'est pas irréductible. il y a 6 possibilité de coloriage. Par contre, la méthode de Gibbs est incapable de se rendre à un nouvel état à partir d'un état donné. En effet, le fait de regarder un sommet à fois, empêche de se rendre à une autre solution. En regardant un sommet, on voit qu'il n'y a aucune autre couleur possible pour ce sommet, autre que sa couleur actuelle. L'état reste alors toujours le même.

Pour le cas $k = 4$, la chaîne est irréductible. Quand on passe par chaque sommet, soit à chaque itération, il est toujours possible de définir une nouvelle couleur. En tout, il y a $4 * 3 * 2 = 24$ possibilités. On pourra alors atteindre tous les états possibles, après appliqué la méthode de

Gibbs quelque fois.

(c)

Pour le cas $k = 3$, nous avons le petit cycle de 3 sommets, où on a $3! = 6$ possibilité de couleurs. Tandis que les sommets 2 et 3 de degré 1 auront chacun 2 possibilités de couleur. Nous avons alors en tout, $6 * 2 * 2 = 24$ possibilité de coloriage admissible. La chaîne n'est pas irréductible, car comme mentionné en b) pour le cas du cycle de 3 sommets, on ne pourra jamais les couleurs des sommets 1, 4, 5 car il touche en tout temps à 2 couleurs différentes, ils resteront alors toujours la même couleur. On pourra seulement changer la couleur des sommets 2 et 3.

Pour le cas $k = 4$, la chaîne est irréductible. Nous avons, le cycle de 3 sommets qui ont $4 * 3 * 2 = 24$ possibilités, tandis que les sommets 2 et 3 ont trois possibilité chacune. Nous avons alors $24 * 3 * 3 = 216$ possibilités au total. La chaîne est irréductible, car lorsqu'on passe par chaque sommet, soit à chaque itération, il est toujours possible de définir une nouvelle couleur. On pourra alors atteindre tous les états possibles, après avoir appliqué la méthode de Gibbs quelque fois.

(d)

On définit une méthode de rejet simple où on génère un coloriage aléatoire sur le graph et on accepte ou rejette le coloriage.

Dans l'exemple en c), si nous avons $k=4$ couleurs disponibles, la probabilité d'accepté le coloriage est $\mathbb{P} = \frac{\text{nombre de coloriage admissible}}{\text{nombre de coloriage possible}} = \frac{216}{k^d} = \frac{216}{4^5} = 0.2109$.

Dans le cas d'un graphe de $d = 1000$ sommets, dont les degrés vont de 2 à 6, et avec $k = 8$ couleurs. Il n'est pas possible de déterminer le nombre de coloriage admissible exact. Le nombre de possibilités totales est $k^d = 8^{1000}$. Nous allons alors définir une borne supérieure et inférieure. Comme borne supérieur, on peut définir le meilleur cas où tous les degré des sommets sont de degrés 2. Dans un tel cas, le graph est un 1000 cycles. Le nombre de coloriage admissible est tel que le sommet 1 à 8 possibilité, le sommet 2 à 7 possibilité, le sommet 3 à 7 possibilité, jusqu'au sommet d qui a 6 possibilité. Nous avons alors, que le nombre de coloriage admissible est $8 * 6 * 7 * (d - 2) = 8 * 6 * 7 * 998 = 335328$. La probabilité d'accepter le coloriage est $\mathbb{P} = \frac{\text{nombre de coloriage admissible}}{\text{nombre de coloriage possible}} = \frac{335328}{8^{1000}} = 2.726 \times 10^{-898}$. Avec cette information, on voit que même la borne supérieure du cas (le meilleur cas où la probabilité d'accepter est la plus haute), la probabilité d'accepter un coloriage est extrêmement basse. La probabilité d'accepter un coloriage aléatoire pour le graph définie qui aura encore moins de coloriage admissible sera alors presque zéro.

(e)

Nous avons implémenter une matrice d'adjacence et un tableau de couleur pour définir le graph en java. Nous avons ensuite implémenter la méthode de Gibbs. Théoriquement, nous avons 216 possibilités de coloriage admissibles. C'est le résultat expérimental que nous obtenons. Chaque réalisation apparaît environs 1000 fois. C'est logique puisque on applique Gibbs 216

000 fois. On atteint alors l'état stationnaire.

On calcule la valeurs du χ^2 où le nombre espéré d'observations pour une possibilité est $\frac{216000}{216} = 1000$. On obtient $\chi^2 = 177.2$ et $p - valeur = 0.97$. Le χ^2 permet de quantifier la différence entre le compte observé et la compte attendu si les variables sont indépendantes. La valeurs de 177.2 indique alors que le compte de chaque état varie selon cet incrément des valeurs attendue. La valeur du $p - valeur$ permet de dire si ce résultat est significatif. Notre valeur de 0.97 indique que le résultat est significatif.