Université de Montréal

IFT6561 – Simulation: aspects stochastiques

Travail Final

par:

Eugénie Yockell
(20071932)
Cong Liu
(20161998)

Date de remise: 23 décembre 2020

1 Question 1

a)

L'équation Lundberg peut être écrit comme $M_h(\theta) = \frac{(\lambda+\theta c)}{\lambda}$, d'où le paramètre Lundberg $\theta^* > 0$ est la plus grande solution. Avec $\theta = \theta^*$, pour une processus de Poisson stationnaire, on a

$$\lambda_{\theta^*} = \lambda M_h(\theta^*) = \lambda + \theta^* c = 1 + \theta^* c$$

Comme les tailles de réclamations C_j suivent une loi de Gamma$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, on a la fonction génératrice des moments

$$M_h(\theta) = (\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - \theta})^{\frac{1}{2}}$$

Et donc on a

$$\begin{aligned}
1 + \theta c &= (\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - \theta})^{\frac{1}{2}} \\
1 + \theta c &= (1 - 4\theta)^{-\frac{1}{2}} \\
(1 + \theta c)^2 \times (1 - 4\theta) &= 1 \\
(\theta^2 c^2 + 2\theta c + 1)(1 - 4\theta) &= 1 \\
\theta^2 c^2 - 4\theta^3 c^2 + 2\theta c - 8\theta^2 c - 4\theta &= 0 \\
\theta(\theta c^2 - 4\theta^2 c^2 + 2c - 8\theta c - 4) &= 0
\end{aligned}$$

Comme $\theta > 0$,

$$-4\theta^2 c^2 + (c^2 - 8c)\theta + 2c - 4 = 0$$

ça donne deux racines conjuguées

$$\theta = \frac{c - 8 \pm \sqrt{c^2 + 16c}}{8c}$$

θ^* est la plus grande, donc θ^* en fonction de c est

$$\theta^* = \frac{c - 8 + \sqrt{c^2 + 16c}}{8c}$$

b)

Notons $R(t)$ le reste(le fonds disponible) au temps t, $R(0)$ est le reste initial

$$R(t) = R(0) + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} C_j$$

Notons A_j le temps entre la réclamation $j - 1$ et j.

$$R(0) - R(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} (C_j - A_j c) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j = D_{N(t)}$$

La probabilité de ruine est donc la probabilité que $D_{N(t)}$ dépasse $R(0)$.
La densité de loi $Gamma(\alpha, \beta)$

$$h(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

Ici, IS remplace la densité $h(x)$ par $h_\theta(x) = h(x)e^{\theta x}/M_\theta(x)$, et remplace la densité exponentielle $\lambda e^{\lambda x}$ de A_j par $(\lambda + \theta c)e^{-(\lambda+\theta c)x}$

$$\begin{aligned}
h_\theta(x) &= h(x)e^{\theta x}/M_\theta(x) \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{(\theta-\beta)x}/M_\theta(X) \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{(\theta-\beta)x}(1-\theta/\beta)^\alpha \\
&= \frac{(\beta-\theta)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{(\theta-\beta)x}
\end{aligned}$$

On voit directement que c'est une fonction de densité d'une distribution $Gamma(\alpha, (\beta-\theta))$. Voici le résultat d'estimation de la probabilité de ruine.

c	θ^*	Probabilité de ruine	S_n^2
3	0.10624	3.8E-10	2.3E-20
5	0.18117	6.2E-17	3.2E-33

Table 1: Ruin probability with c = 3, c= 5

c)

Pour un échantillon de taille n, la variance d'échantillon $VAR(\overline{X}) = VAR(X)/n$.
L'erreur relative RE

$$RE(X) = \frac{\sqrt{MSE(X)}}{\mu}$$

Estimation IS

$$\begin{aligned}
RE(X) = \frac{\sqrt{MSE(X)}}{\mu} &\leq 1\% \\
\frac{\sqrt{VAR(\overline{X})}}{p} &\leq 0.01 \\
VAR(\overline{X})/p^2 &\leq 0.0001 \\
\frac{VAR(X)}{n \times p^2} &\leq 0.0001 \\
n &\geq 10000 \times VAR(X)/p^2
\end{aligned}$$

Estimation Monte Carlo sans IS

Avec le méthode Monte Carlo standard, X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $VAR(X) = p(1-p)$, et pour un p assez petit, on peut l'approximer par $VAR(X) = p$.

$$
\begin{aligned}
RE(X) = \frac{\sqrt{MSE(X)}}{\mu} &\leq 0.01 \\
\frac{\sqrt{VAR(X)}}{p} &\leq 0.01 \\
\frac{VAR(X)}{p^2} &\leq 0.0001 \\
\frac{p(1-p)}{n \cdot p^2} &\leq 0.0001 \\
n &\geq 10000 \times \frac{1-p}{p}
\end{aligned}
$$

Dans le tableau ci-dessous sont des tailles d'échantillon minimale pour estimer la probabilité de ruine avec une erreur relative au plus que 1%.

Taille d'échantillon n	MC Standard	IS
c = 3	2.7E+13	1664
c = 5	1.6E+20	8258

Table 2: La taille d'échantillon exigée pour avoir une RE=1%

d)

Pour implanter cette méthode, il nous faut connaître la fonction génératrice des moments de C_j. Si les C_j suit une distribution log-normale, sa fonction de densité est,

$$
f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(lnx - \mu)^2}{2\sigma^2}
$$

On calcul sa fonction génératrice des moments

$$
\begin{aligned}
M(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(lnx - \mu)^2}{2\sigma^2} + tx\right) dx
\end{aligned}
$$

On ne peut pas intégrer cette fonction génératrice des moments, donc on peut pas l'utiliser ainsi calculer la nouvelle densité. Donc si les C_j suivent une loi lognormale, on serait pas en mesure d'implanter cette technique.

2 Question 2

2.1 a)

À noter qu'on utilise la méthode `makeComparisonExperimentMCvsRQMC` donc on refait une expérience Monte Carlo à chaque cas. Il aurait été possible d'utiliser la même expérience Monte Carlo pour les cas de BGSS, BGBS, DGBS. Ce choix conserve tout de même les tendances des méthodes. Les résultats sont présentés au tableau 3 pour K=100 et au tableau 4 pour K=90.

On remarque que dans les deux cas, la méthode RQMC la plus efficace est Sobol avec un *random shift* avec $n = 2^{18}$. En effet, c'est avec cette méthode qu'on observe la plus grande diminution de variance. De plus, de manière général DGBS est toujours la méthode qui permet de faire diminuer la plus la variance. En effet, un des objectif de cette méthode était d'améliorer l'efficacité des méthode RQMC. [1] De plus, en général on voit une tendance qu'augmenter le nombre de points de Sobol, soit augmenter la taille de la matrice génératrice, permet de faire une importante diminution de la variance.

Sobol' Nets

		$n = 2^{14}$			$n = 2^{16}$			$n = 2^{18}$		
		BGSS	**BGBS**	**DGBS**	**BGSS**	**BGBS**	**DGBS**	**BGSS**	**BGBS**	**DGBS**
Sob+S	VRF	108.32	589.18	184.53	94.60	962.95	1625.49	246.20	1438.91	**3395.60**
	Var	0.33	0.06	0.20	0.38	0.03	0.02	0.14	0.03	0.01
	Value	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60
Sob+LMS+S	VRF	86.67	1042.47	407.18	123.59	1260.36	1876.29	224.93	1607.17	2053.34
	Var	0.4	0.03	0.09	0.30	0.03	0.01	0.16	0.02	0.01
	Value	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60

Korobov Lattice Rules

		$n = 16381$, $a = 5693$			$n = 65521$, $a = 944$			$n = 262139$, $a = 21876$		
		BGSS	**BGBS**	**DGBS**	**BGSS**	**BGBS**	**DGBS**	**BGSS**	**BGBS**	**DGBS**
Kor+S	VRF	27.67	105.03	297.34	77.59	332.28	83.77	34.79	506.70	582.76
	Var	1.30	0.35	0.13	0.47	0.11	0.44	1.05	0.07	0.06
	Value	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60
Kor+B+S	VRF	150.28	267.91	1013.71	66.63	895.80	124.89	334.11	1139.03	2485.83
	Var	0.24	0.14	0.04	0.55	0.04	0.30	0.11	0.03	0.02
	Value	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60	6.60

Table 3: BGSS, BGBS, DGBS pour K=100.

Sobol' Nets

		$n = 2^{14}$			$n = 2^{16}$			$n = 2^{18}$	
		BGSS	**BGBS**	**DGBS**	**BGSS**	**BGBS**	**DGBS**	**BGSS**	**BGBS**	**DGBS**
	VRF	276.50	1770.42	1560.48	378.26	1979.28	2462.23	1043.06	2768.31	**4254.06**
Sob+S	Var	0.21	0.03	0.04	0.15	0.03	0.02	0.05	0.02	0.01
	Value	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54
	VRF	276.53	2097.02	964.04	259.21	3744.99	3947.94	696.77	2065.47	3286.41
Sob+LMS+S	Var	0.21	0.03	0.06	0.22	0.02	0.01	0.08	0.03	0.02
	Value	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54

Korobov Lattice Rules

		$n = 16381$, $a = 5693$			$n = 65521$, $a = 944$			$n = 262139$, $a = 21876$		
		BGSS	**BGBS**	**DGBS**	**BGSS**	**BGBS**	**DGBS**	**BGSS**	**BGBS**	**DGBS**
	VRF	90.80	93.22	508.85	97.42	600.06	475.86	105.91	716.41	913.95
Kor+S	Var	0.64	0.62	0.11	0.59	0.10	0.12	0.55	0.08	0.06
	Value	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54
	VRF	270.07	368.83	1191.30	67.79	1211.88	2651.69	595.94	3027.57	3777.78
Kor+B+S	Var	0.21	0.16	0.05	0.85	0.05	0.02	0.10	0.02	0.02
	Value	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54	14.54

Table 4: BGSS, BGBS, DGBS pour K=90.

2.2 b)

Avec exactement $n = 2^{14}$, la méthode qui diminue le plus la variance de $DGBS$ est la méthode Sob+LMS+S (pour K=100). Par contre, si on s'intéresse à une valeur approximative de $n = 2^{14}$, alors la méthode qui diminue le plus la variance est Kor+B+S. On mesure les deux résultats afin de pouvoir les comparer. On utilise la méthode `simulFDReplicatesRQMC` pour mesurer la dérivé avec RQMC. La dérivé est estimé à l'aide CRN et IRN. Les résultats sont présentés au tableau 5 pour K=100 et au tableau 6 pour K=90.

Dans le cas de K=100, comme on s'y attend l'utilisation de IRN donne des résultats beaucoup trop différent entre les itérations à cause de l'indépendance. La valeur retournée par la dérivé avec les CRN et avec RQMC ne diffère pas trop. On s'attend à un tel résultat puisque avec les CRN on est pas dans un cas de total indépendance. De plus, comme on s'y attend Kor+B+S est beaucoup plus efficace en terme de diminution de la variance. Comme on le voit dans les VRF de la table 3, Kor+B+S diminue la variance 10 fois plus, c'est ce qu'on voit dans nos résultats de dérivé.

Dans le cas de K=90, cette fois les résultats trouvé en **a)** affirmait que Sobol+S était plus efficace. C'est le résultat qu'on obtient ici aussi. Comme prévu Sobol+S fait diminuer la variance 1.3 fois plus que Kor+B+S (on obtient 1.46 dans cette expérience). De plus, on atteste encore de l'inefficacité des IRN pour la dérivé.

	MC		RQMC	
	CRN	IRN	Sob+LMS+S	Kor+B+S
Dérivé	1.20	-405.27	1.53	1.53
Variance	25.57	71.07×10^6	1.38×10^{-4}	7.46×10^{-5}

Table 5: Valeur de la dérivé en fonction de ν avec $\delta = 0.001$. On compare ici les dérivés et leurs variances avec MC ordinaire et RQMC pour K=100.

	MC		RQMC	
	CRN	IRN	Sob+S	Kor+B+S
Dérivé	0.590	-820.748	0.872	0.872
Variance	40.974	1.111×10^8	7.971×10^{-5}	1.167×10^{-4}

Table 6: Valeur de la dérivé en fonction de ν avec $\delta = 0.001$. On compare ici les dérivés et leurs variances avec MC ordinaire et RQMC pour K=90.

2.3 c)

Ici on s'intéresse à l'important sampling (IS) parce qu'on est dans un évènement rare. On mesure la valeur de l'option après seulement une unité de temps. On applique la torsion exponentielle. On sait que la PDF d'une distribution $Gamma(\alpha, \beta)$ est,

$$G_+(x) = \frac{\beta_+^{\alpha_+}}{\Gamma(\alpha_+)} x^{\alpha_+ - 1} e^{-\beta_+ x}$$
$$G_-(x) = \frac{\beta_-^{\alpha_-}}{\Gamma(\alpha_-)} x^{\alpha_- - 1} e^{-\beta_- x}$$

Où nous avons $\beta_+ = \mu_+/\nu_+$ et $\beta_- = \mu_-/\nu_-$ et $\alpha_+ = \alpha_- = 1/\nu$. On définit la densité sous l'IS comme,

$$\begin{aligned} e^{\theta x} g_+(x) &= e^{\theta x} \frac{\beta_+^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta_+ x} \\ &= \frac{\beta_+^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{\theta - \beta_+ x} \\ &= \frac{\beta_+^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\beta_+ - \theta) x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\theta x} g_-(x) &= e^{-\theta x} \frac{\beta_-^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta_- x} \\ &= \frac{\beta_-^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta - \beta_- x} \\ &= \frac{\beta_-^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\beta_- + \theta) x} \end{aligned}$$

On se retrouve alors avec une distribution $G_+ \sim Gamma(\alpha, \beta_+ - \theta)$ et $G_- \sim Gamma(\alpha, \beta_- + \theta)$. Il suffit de générer les variables par inversion comme d'habitude à l'aide d'une distribution uniforme.

On peut définir le rapport de vraisemblance à l'aide de l'exemple 6.62 des notes de cours. C'est définie comme,

$$\begin{aligned} L(\omega) &= \prod_{j=1}^{T_l} \frac{\pi(Y_j)}{\pi_\theta(Y_j)} \qquad \text{ici } T_l = 1 \\ &= M(\theta) exp\big(- \theta Y \big) \end{aligned}$$

Où $Y = G_+ - G_-$ les G_+ et G_- sont les variables généré par la distribution Gamma. On définit ensuite la MGF.

$$M(\theta) = \Big((1 - \frac{\theta}{\beta_+})(1 + \frac{\theta}{\beta_-}) \Big)^{-\alpha}$$

Nous avons alors que le rapport de vraisemblance est,

$$L(\omega) = \Big((1 - \frac{\theta}{\beta_+})(1 + \frac{\theta}{\beta_-}) \Big)^{-\alpha} exp\big(- \theta Y \big)$$

2.4 d)

On sait que l'option commence à payer lorsque $S(1) \geq K$. Nous avons,

$$E[G^+(1) - G^-(1)] = ln(\frac{k}{S(0)}) - r - \omega$$

On peut développer l'espérance en fonction de θ.

$$\begin{aligned} &E[G^+(1) - G^-(1)] \\ &= E[G^+(1)] - E[G^-(1)] \\ &= \frac{\alpha}{\beta_+ - \theta} - \frac{\alpha}{\beta_- + \theta} \end{aligned}$$

Nous avons alors la fonction,

$$f(\theta) = \frac{\alpha}{\beta_+ - \theta} - \frac{\alpha}{\beta_- + \theta} - ln(\frac{k}{S(0)}) + r + \omega$$

Pour s'assurer que la fonction est monotone, on applique la dérivé.

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\alpha}{(\beta_+ - \theta)^2} + \frac{\alpha}{(\beta_- + \theta)^2}$$

Cette fonction est toujours positive pour n'importe quel θ, par contre, évidemment on a que $\theta \neq \lambda_+$. La fonction est donc bien monotone. On applique l'algorithme de Brent-Dekker de SSJ pour trouver les racines de la fonction $f(\theta)$. On retrouve les valeurs présentés au tableau 7.

	K=130	**K=160**
Valeur de θ	11.90	23.52

Table 7: Les racines de la fonction $f(\theta)$ trouvé avec Brent-Dekker pour différent K.

On peut tester cette stratégie IS sur notre option financière, avec les θ trouvés. Les résultats sont présentés au tableau 8. Comme on s'y attend, ça permet de faire diminuer fortement la variance. Cette diminution est plus prononcé dans le cas de K=160. C'est logique puisque lorsque K=160, c'est un évènement encore plus rare que l'option paie. On le voit aussi par la valeur de l'option qui est très faible. Le fait que l'évènement soit encore plus rare, fait en sorte que l'*important sampling* a un impact important sur la variance. On ne prend pas en compte des cas qui ne correspond pas au critère et qui font varier les résultats.

	K=130		**K=160**	
	Sans IS	Avec IS	Sans IS	Avec IS
Valeur	0.522	0.521	5.0×10^{-3}	4.011×10^{-3}
Variance	5.892	0.359	0.078	4.102×10^{-5}
Erreur Rel.	X	0.3%	X	0.5%

Table 8: Valeur et la variance de l'estimateur sans IS et avec IS. Les estimateurs utilisent Monte Carlo régulier avec 100 000 observations.

2.5 e)

Nous avons la forme de L

$$L(\omega) = \Big((1 - \frac{\theta}{\beta_+})(1 + \frac{\theta}{\beta_-})\Big)^{-\alpha} exp\big(- \theta Y\big)$$

On sait que L est maximisé en $S(1) = K$. On cherche à obtenir une valeur de L maximisé. Pour s'y faire on remplace Y par sa valeur maximisant L. Soit,

$$K = S(1) = S(0)\exp[r + Y + \omega]$$
$$Y = \ln(\frac{K}{S(0)}) - r - \omega$$

Nous avons alors,

$$L(\omega) = \Big((1 - \frac{\theta}{\beta_+})(1 + \frac{\theta}{\beta_-})\Big)^{-\alpha} exp\big(- \theta(\ln(\frac{K}{S(0)}) - r - \omega)\big)$$

On cherche le minimum de cette valeur de L. On applique alors la dérivé en fonction de θ et on pose cette dérivé à 0. On obtient l'équation suivante,

$$\ln(\frac{S(0)}{K}) + r + \omega = \alpha\Big(\frac{1-\theta/\beta_+}{\beta_-} - \frac{1+\theta/\beta_-}{\beta_+}\Big)\Big((1-\frac{\theta}{\beta_+})(1+\frac{\theta}{\beta_-})\Big)^{-1}$$

Pour $Y = \ln(\frac{K}{S(0)}) - r - \omega$, on obtient que θ est,

$$\theta = \frac{-2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + Y^2\beta_-^2 + Y^2\beta_-\beta_+ + \beta_-^2\beta_+^2} - Y\beta_- + Y\beta_+}{2Y}$$

Les résultats sont présentés au tableau 9. On remarque que les valeurs sont identiques à ceux du numéro **d)**. On comparant avec les valeurs obtenues en **d)** on remarque que les différences à la 9^e décimale pour $K = 130$ et à la 14^e décimale pour $K = 160$. En effet en **d)** on s'intéresse à une valeur d'option tel que $S(1) \geq K$. Pour s'y faire on choisie une borne tel que $E[Y] = ln(\frac{k}{S(0)}) - r - \omega$. Ce qui correspond à la même valeur de Y que nous avons ici. Nous sommes alors dans l'étude du même cas de valeur d'option.

	K=130	**K=160**
Valeur de θ	11.901	23.519

Table 9: Les racines de la dérivé du rapport de vraisemblance, soit les valeurs de θ définissant la borne minimale du rapport de vraisemblance maximale.

2.6 f)

On utilise le θ trouvé en **e)**, soit les résultats du tableau 9. On utilise cette fois des conditions pour générer les distributions Gamma. On génère $G_-(1)$ comme d'habitude, mais on utilise la condition que $G_+(1) \geq G_-(1) + \ln(\frac{K}{S(0)}) - r - \omega$. On utilise cette valeur pour créer une borne inférieur pour généré $G_+(1)$ par inversion, où la variable uniforme est créer sachant la condition, en utilisant la CDF de la Gamma. Les résultats sont présentés au tableau 10.

Cette nouvelle condition permet de ne jamais obtenir de valeur négative. Lorsqu'on compare au résultat obtenue en **d)**, cette nouvelle stratégie IS a peu d'impact sur les valeurs des options et leurs variances. On trouve aussi une variance semblable pour les deux stratégie IS. Dans le cas de K=130, la variance augmente d'un facteur 1.04. Dans le cas de K=160, la variance diminue d'un facteur 2.27. Le résultat non intéressant de K=130 peut être expliqué par le fait que la valeur de θ utilisé était optimisé pour le cas définie en **d)**. Nous sommes ici dans une situation différente. Nous allons alors tenté d'optimiser θ afin de faire diminuer la variance dans cette stratégie IS.

On développe alors une méthode qui permet d'optimiser la valeur de θ. On optimise en fonction de la variance. On cherche θ qui génère la plus petite variance. On sait que $\theta \in [0, \mu_+/\nu_+] = [0, 37.57]$ (car G_+ est généré autour d'une moyenne de $\mu_+/\nu_+ - \theta$). Pour s'y faire, on débute avec le θ trouvé en **e)** puis on l'augmente au taux de 0.001 sur 100 000 itérations. On conserve la valeur qui diminue le plus la variance. Ensuite, on débute de nouveau avec le θ trouvé en **e)** puis on le diminue au taux de 0.001 sur 100 000 itérations. On conserve la valeur qui optimise la variance. On considère le θ optimisé entre les deux θ qui diminue le plus la variance.

Il est intéressant de se questionner à savoir si cette valeur de θ optimisé aura un impact important sur la variance. Les résultats sont présenté au tableau 11. On remarque que dans les deux cas, on répond à l'objectif. En comparant avec le tableau 10, la variance diminue. La variance diminue d'un facteur 1.53 avec $K = 130$ et d'un facteur 1.09 avec $K = 160$. On s'attendait à une diminution de la variance, car les θ ont été choisi à cette fin.

	K=130	**K=160**
Valeur	0.521	4.009×10^{-3}
Variance	0.374	1.807×10^{-5}
Erreur Rel.	0.3%	0.3%

Table 10: Valeur et la variance de l'estimateur avec l'IS conditionnel par Monte Carlo avec 100 000 réalisations.

	K=130	**K=160**
θ optimisé	22.574	27.547
Valeur option	0.522	4.015×10^{-3}
Variance	0.245	1.657×10^{-5}

Table 11: Valeur de l'option et sa variance en utilisant les θ optimisé pour l'IS.

2.7 g)

On cherche ici à mesurer la valeur de l'option et sa variance avec RQMC avec un Sobol net. On utilise la valeur de θ optimisé du **f)** qui permettait de faire diminuer la variance. Encore une fois, on utilise l'IS avec la conditionnel. Les résultats sont présentés au tableau 12. On remarque que les variances diminuent grandement avec RQMC. En effet, pour $K = 130$ la variance diminue d'un facteur 1.96×10^8 et d'un facteur 1.72×10^8 pour $K = 160$. Ce résultat fait comprendre que les méthodes RQMC sont très puissantes pour faire diminuer la variance. Particulièrement avec les points de Sobol, on créer une séquence de point qui recouvre l'espace plus uniformément et qui sont dans la région d'intérêt avec l'*important sampling*. Il est intéressant de voir les améliorations possibles avec des méthodes judicieuses.

	K=130	**K=160**
θ	22.574	27.547
Valeur option	0.52192	4.0162×10^{-3}
Variance	1.253×10^{-9}	9.6516×10^{-14}
Intervalle de confiance	(0.52191, 0.52192)	$(4.0162\times10^{-3}, 4.0163\times10^{-3})$

Table 12: Valeur de l'option, variance et intervalle de confiance mesuré par RQMC, avec les θ optimisés.

3 Question 3

3.1 a)

Oui, le système est régénératif. Les époques de régénérations peuvent être des instants où un client arrive à la machine 1 et le système est vide, i.e., Son temps d'attente $W_{1,i} = 0$, les trois machines sont toutes libres.

Pour chaque machine, les temps de service sont i.i.d. entre chaque clients. Les fonction de distribution du temps de service pour les trois machines sont respectivement G_1, G_2 et G_3. Les clients arrivent à la machine 1 en suivant un processus de Poisson stationnaire avec taux $\lambda = 1$, on en déduit que le temps inter-arrivée $A_{1,i}$ pour la machine 1 suit une distribution exponentielle avec $\lambda = 1$. Comme la distribution exponentielle n'a pas de mémoire, on peut aussi prendre des instants où le système se vide comme des époques.

On ne peut pas déterminer le cycle de régénération en considérant les trois machines séparément, parce que la distribution du temps inter-arrivée pour la machine 2 va dépendre de la distribution du temps de service G_1, ainsi ça dépends du temps de passée. C'est le même cas pour la machine 3, la distribution de temps inter-arrivée pour la machine 3 va dépendre de G_2.

3.2 b)

Notons $A_{j,i}$ pour le temps inter-arrivée de la machine j entre le client i et $i-1$. Dans notre cas, les $A_{1,i}$ suivent une loi exponentielle avec paramètre $\lambda = 1$.

$S_{j,i}$ le temps de service du client i sur la machine j. Pour s'assurer que le cycle de régénération soit fini, il faut que chaque partie j dans le système admets une condition que

$$\mathbb{E}(S_j - A_j) < 0$$
$$i.e.\mathbb{E}(S_j) < \mathbb{E}(A_j)$$

Pour la machine 1, les temps inter-arrivée $A_{1,i}$ suivent une loi exponentielle(1), on a

$$\mathbb{E}(A_1) = 1$$

La fonction de distribution pour le temps de service de la machine 1 est $G_1(x)$:

$$\mathbb{E}(S_1) = \int xG_1^{'}dx$$

Alors

$$\mathbb{E}(S_1) = \int xG_1^{'}dx < 1$$

Les temps inter-arrivée A_2 pour la machine 2 est en fait les temps de service de la machine 1, car il n'y a pas de blocking. On a alors,

$$\mathbb{E}(S_2) < \mathbb{E}(A_2) = \mathbb{E}(S_1)$$
$$\int xG_2^{'}dx < \int xG_1^{'}dx$$

De même, pour la machine 3

$$\mathbb{E}(S_3) < \mathbb{E}(A_3) = \mathbb{E}(S_2)$$

$$\int xG_3^{'}dx < \int xG_2^{'}dx$$

En conclusion, pour que le cycle de regeneration soit fini, la contrainte ici est que

$$\int xG_3^{'} < \int xG_2^{'} < \int xG_1^{'} < 1$$

3.3 c)

3.3.1

On prends des instants où un client arrive à la machine 1 et le système est vide comme l'époque de régénération du système. Dans le cas ici, la régénération est toujours valide. Les temps inter-arrivée A_i suivent la distribution $U(1,2)$, les temps de service de la machine 1 et de la machine 2 sont constants et égaux à 1, le temps de service de la machine 3 $S_{3,i}$ suit une distribution $U(0.5,1)$, ça indique que il n'y a pas de blocking dans le système.

Notons x le nombre de clients espérée dans un cycle de régénération, τ pour la longueur du cycle de régénération. c représente l'écart entre l'instant où le système se vide et l'instant où le prochain client arrive à la machine 1 (i.e. le prochain cycle commence).

$$\begin{cases} \tau = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{i=x} A_i\right] \\ \tau = 1 + 1 + \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{i=x} S_{3,i} + c\right], \quad c \leq \mathbb{E}[A_i] \end{cases}$$

$$\tau = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{i=x} A_i\right] \xlongequal{A_i i.i.d.} \sum_{1}^{x} \mathbb{E}(S_{1,i}) = \cdot\frac{1+2}{2}x \tag{1}$$

$$\tau = \mathbb{E}\left[\sum_{1}^{x} S_{3,i} + c\right] + 2 \xlongequal{S_{3,i} i.i.d.} \sum_{1}^{x} \mathbb{E}(S_{3,i}) + 2 + c = \frac{0.5+1}{2}x + 2 + c \tag{2}$$

La solution de l'équation (1) et (2) est $x = 4$.
Conclusion : Dans notre définition, l'espérance longueur du cycle de 4 clients.

3.3.2

Maintenant on a une nouvelle définition des époques : l'instant où un client arrive à la machine 2 et la machine 3 est libre. Avec cette nouvelle définition, $W_0 = 0$, comme $S_{1,i} = S_{2,i} = 1$ pour toutes clients i, le temps inter-arrivée nouveaux de la machine 2 $A_{2,i}$ est constant et égale à 1(parce que ça dépend du temps de service de la machine 1), i.e. $A_{2,i} = S_{2,i}$. Les fonctions du temps de service dans le nouveau cycle ($S_{2,i} et S_{3,i}$) admettent les contraintes dans 3.2 b). En dessous on va prouver de la même façon que l'espérance de longueur du cycle est fini: (on utilise les même notations)

$$\begin{cases} \tau = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{i=x} A_{2,i}\right] \\ \tau = 1 + \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{i=x} S_{3,i} + c\right], \quad c < \mathbb{E}(A_2) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Les $A_{2,i}$ sont i.i.d., et les le sont $S_{3,i}$ aussi. En résolvant l'équation (3), on a $x = 4$. Et donc le cycle est fini, et a une longueur de 4 clients.

3.4 d)

On garde toujours la même notation. On considère le cas où le temps inter-arrivée $A_1 = 1.5$ et les époques sont définies comme des instants où un client arrive à la $2^{ème}$ machine, et la $3^{ème}$ machine est libre. Dans ce cas là, le système peut être considéré comme un système GI/GI/1, d'ou le temps inter-arrivée $A_i = 1.5$ est constant, et le temps de service $S_i \sim U(1.5, 2)$. Les variable $(S_i - A_i)$ sont i.i.d, ainsi le système est régénératif avec délai. D'après la question 3.2 b):

$$\mathbb{E}\left[S_i - A_i\right] = \mathbb{E}[S_i] - 1.5 = 0.25 > 0$$

Donc dans cette définition, le cycle n'est pas fini.

Pour que le cycle soit fini, on redéfini l'époque de régénération comme le centre de la machine 2. Avec la nouvelle définition, le temps inter-arrivée devient $A_i = 2$, et le temps de service est maintenant $S_i \sim U(1, 1.5)$. On vérifie l'inégalité:

$$\mathbb{E}\left[S_i - A_i\right] = \mathbb{E}(S_i) - 2 = -0.75 < 0$$

Avec la nouvelle définition, d'où l'instant de régénération est au centre de la deuxième machine, le cycle de régénération aura une longueur finie.

References

[1] Athanassios N. Avramidis and Pierre L'Ecuyer. Efficient Monte Carlo and Quasi–Monte Carlo Option Pricing Under the Variance Gamma Model. *Management Science*, 2006.