Eugénie Yockell

Devoir 1

#1

T est une variable aléatoire uniformement distribué dans $[0,b)$

Montrer que $X = (T+t) \bmod b$ est aussi uniformément distribué dans $[0,b)$ $\forall\ t \geq 0$

Intuitivement, on voit que peut importe la valeur de $T+t$, mod b va ramener $T+t$ entre 0 et b.

Pour prouver, il est possible d'étudier la fonction de répartition.

$F_T(x) = P(T \leq x) = \frac{x}{b}$ pour $x \in [0,b)$

Etudions la fonction de répartition de X.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\big((T+t) \bmod b \leq x\big)$$

Il est difficile de développer avec le terme mod b.

Trouvons des bornes pour exprimer X, sans 'mod b'. On sait que,

$$\exists\ n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \text{ tel que } nb \leq T+t \leq nb+x$$

on sait que $T+t$ est entre un multiple de b.

On peut maintenant définir la fonction de répartition selon cette nouvelle définition, où on s'intéresse au reste de la division de 'b'.

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \leq x) &= P(nb \leq T+t \leq nb+x) \\ &= P(nb-t \leq T \leq nb-t+x) \\ &= F(nb-t+x) - F(nb-t) \text{ , par la v.a. } T \sim U \\ &= \frac{\cancel{nb}-\cancel{t}+x}{b} - \frac{\cancel{nb}-\cancel{t}}{b} \text{ , par définition de la CDF pour v.a. Uniforme} \\ &= \frac{x}{b} = F_T(x) \end{aligned}$$

On voit qu'on revient à la même forme que $F_T(x)$

Donc X est bien uniformément distribué sur l'intervalle $[0,b)$.

#2 $X \sim \text{Geometric}(p)$ alors $P[X = y+x \mid X \geq y] = \mathbb{P}[X = x]$

Selon la définition de la probabilité conditionnelle,

$$P[X = y+x \mid X \geq y] = \frac{P[X = y+x \cap X = y]}{P[X \geq y]}$$

$$= \frac{P[X = y+x]}{P[X \geq y]}$$, car on sait que si $P(X = y+x)$ alors $P(X \geq y)$ est nécessairement vrai

Définissons les probabilités,
Pour la géométrique,

$$P[X \geq x] = (1-p)^x$$
$$P[X = k] = p(1-p)^k.$$

Retournons à l'équation,

$$= \frac{P[X = y+x]}{P[X \geq y]}$$

$$= \frac{p(1-p)^{y+x}}{(1-p)^y} = p(1-p)^x = P[X = x]$$

#3

Montrer que,

$X \sim \text{Binomiale}(N, p)$ où $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$

alors $X \sim \text{Poisson}(\lambda p)$

On sait que,

$$P(X=x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$$

et

$$P(N=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Pour la PMF de X, nous avons, où on veut les valeurs possibles de N,

$$P(X=x) = \sum_{i=0}^{\infty} P(N=i)\, P(X=x)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \binom{i}{x} p^x (1-p)^{i-x}$$

, remarquons que pour $i < x$ $\binom{i}{x} = 0$

on s'intéresse alors à $i \geq 0$

$$= \sum_{i=x}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{\cancel{i!}} \frac{\cancel{i!}}{x!(i-x)!} p^x (1-p)^{i-x}$$

$$= \sum_{i=x}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{x!(i-x)!} p^x (1-p)^{i-x}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^x}{x!} \sum_{i=x}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-x)!} (1-p)^{i-x}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^x (1-p)^{-x}}{x!} \sum_{i=x}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-x)!} (1-p)^i$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda}} p^x \cancel{(1-p)^{-x}}}{x!} \left(\cancel{e^{\lambda}} e^{-\lambda p} \lambda^x \cancel{(1-p)^x} \right)$$, selon WolframAlpha

$$= \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^x}{x!}$$

On obtient que $X \sim \text{Poisson}(\lambda p)$

#4

Montrer que si $X_1, \ldots, X_k$ sont des v.a. exponentielles avec les paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
alors $X = \min(X_1, \ldots, X_k)$ avec le paramètre $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$

Commençons par définir la fonction de survie et la CDF,

- $\bar{F}(x_i) = P[X_i > x_i]$
$= 1 - P[X_i \leq x_i]$
$= 1 - F(x_i)$
$= 1 - (1 - e^{-\lambda_i x_i})$
$= e^{-\lambda_i x_i}$

- $F(x_i) = 1 - \bar{F}(x_i)$
$= 1 - e^{-\lambda_i x_i}$

Définissons la CDF de X,

$$
\begin{aligned}
F_X(x) = P(X \leq x) &= P[\min(X_1, \ldots, X_k) \leq x] \\
&= 1 - P[\min(X_1, \ldots, X_k) > x] \\
&= 1 - \left(P[X_1 > x] \cdots P[X_k > x]\right) \text{, car les variables sont indépendante} \\
&= 1 - \left((e^{-\lambda_1 x}) \ldots (e^{-\lambda_k x})\right) \\
&= 1 - (e^{-\lambda_1 x - \cdots - \lambda_k x}) \\
&= 1 - e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)x}
\end{aligned}
$$

5

Sachant que X_1, X_2 sont des v.a. dans $[0, \infty)$

Montrer que, $E[\max(X_1, X_2)] \geq \max(E[X_1], E[X_2])$

L'inégalité de Jensen dit que,

$$E[g(X)] \geq g(E[X])$$

où $g(x)$ est une fonction convexe

On remarque ça ressemble à ce qu'on veut prouver où $g(x) = \max(x)$. De plus, on veut montrer que Jensen est valide pour deux variables aléatoires.

On utilise ici le manuel: "All of statistics. A Concise course in statistical inference" Larry Wasserman.

Selon cette référence,

on peut prouver Jensen définissant la droite $L(x) = a + bx$ qui est tengeante au point $g(x)$ en $x = E[X]$.

Si $g(x)$ est convexe, alors c'est plus grand que la droite $L(x)$

On peut alors dire,

$$g(X) \geq L(X)$$

$$\begin{aligned} E[g(X)] \geq E[L(X)] &= E[a + bX] \\ &= a + bE[X] \\ &= L(E[X]) \\ &= g(E[X]) \text{, car au point } E[X] \; g(x) = L(x) \end{aligned}$$

Donc, $E[g(X)] \geq g(E[X])$

On peut utiliser cette même logique pour montrer Jensen à deux variables.

On définit l'hyperplan $L(X_1, X_2) = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$ qui est tengeant au point $g(x)$ en $x = (E[X_1], E[X_2])$.

$$g(X_1, X_2) \geq L(X_1, X_2)$$

$$\begin{aligned} E[g(X_1, X_2)] \geq E[L(X_1, X_2)] &= E[a + b_1 X_1 + b_2 X_2] \\ &= a + b_1 E[X_1] + b_2 E[X_2] \\ &= L(E[X_1], E[X_2]) \\ &= g(E[X_1], E[X_2]) \end{aligned}$$

car au point $(E[X_1], E[X_2])$ $g(x) = L(x)$

On a alors prouver que Jensen est valide à deux variables.

$$E[g(X_1, X_2)] \geq g(E[X_1], E[X_2])$$

5 Suite.

On veut alors maintenant monter que

$\max(X_1, X_2)$ est convexe

On doit montrer que,

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y).$$
$$\max(tX+(1-t)y) \leq t\max(X)+(1-t)\max(y)$$

On sait que,

$tX \leq t\max(X)$ et $(1-t)y \leq (1-t)\max(y)$

On voit alors que $\max(X_1, X_2)$ est convexe.

On peut alors utilisé Jensen à deux variables.

Nous avons,

$$E[g(X_1, X_2)] \geq g(E[X_1], E[X_2])$$
où $g(X_1, X_2) = \max(X_1, X_2)$
$$\Rightarrow E[\max(X_1, X_2)] \geq \max(E[X_1], E[X_2])$$

Montrons ensuite pour la fonction minimum,

L'inégalité de Jensen dit,

$$E[g(X)] \leq g(E[X])$$

où $g(X)$ est concave. *selon le manuel de référence définit

Nous avons déjà montré la validité de Jensen à deux variables.

Nous avons alors qu'à montrer la concavité de la fonction min.

On doit montrer que,

$$f(tx+(1-t)y) \geq tf(x)+(1-t)f(y)$$
$$\min(tx+(1-t)y) \geq t\min(x)+(1-t)\min(y)$$

On sait que,

$tx \geq t\min(x)$ et $(1-t)y \geq \min(y)$

On voit alors que $\min(X_1, X_2)$ est concave.

On peut alors utilisé Jensen à deux variables,

$$E[g(X_1, X_2)] \leq g(E[X_1], E[X_2])$$
où $g(X_1, X_2) = \min(X_1, X_2)$ une fonction concave.

$$\Rightarrow E[\min(X_1, X_2)] \leq \min(E[X_1], E[X_2])$$

#5 b) On peut définir le plus long chemin P, où on remplace par l'espérence.

Le chemin P est,

$$P = \sum_{i \in T} E[Y_i]$$

On veut montrer que $E[T] \geq P$

Essayons d'utiliser les preuves définies plus haut, avec le maximum

$$E[T] = E[\max(T,P)]$$, car T est le plus long chemin.

et selon le numéro a),

$E[T] = E[\max(T,P)] \geq \max(E[T], E[P])$, selon Jensen.

$\Rightarrow E[\max(T,P)] \geq \max(E[T], P)$, car P est une somme d'espérence et $E[E[x]] = E[x]$

$\Rightarrow E[\max(T,P)] \geq P$, est vrai

On a alors montré que,

$$E[T] \geq P.$$

Montrons pour le plus court chemin,

si T est le plus court chemin et P est le chemin définit par l'espérence des chemins,

$$P = \sum_{i \in T} E[Y_i]$$

Si on repense à Jensen, on voudrait montrer que,

$$E[T] \leq P$$

On a que,

$$E[T] = E[\min(T,P)]$$, car T est le plus court chemin

Selon le a),

$E[T] = E[\min(T,P)] \leq \min(E[T], E[P])$, selon Jensen

$\Rightarrow E[\min(T,P)] \leq \min(E[T], P)$, car $E[E[x]] = E[x]$

$\Rightarrow E[\min(T,P)] \leq P$, est vrai

On a alors montré que,

$$E[T] \leq P$$

où T est le plus court chemin.

#6 Prouver que si $X=F^{-1}(U)$ où $U \sim Uniform(F(a), F(b))$ où F est la CDF de la variable aléatoire Y

a) Montrer que la CDF de X est la même que la CDF de $Y \in (a,b]$

Définissons la CDF de $Y \in (a,b]$,

- $\tilde{f}_Y(x) = \begin{cases} f(x)/\int_a^b f(u)du & \text{si } a<x<b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
$= f_Y(x) / (F(b)-F(a))$

où $\tilde{f}_Y(x)$ est la fonction de densité tronqué par Y

- $F_Y(x) = \int_a^x \tilde{f}_Y(t)dt = \int_a^x \frac{f_Y(t)}{F(b)-F(a)} dt = \frac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)}$

où $F_Y(x)$ est la CDF de $Y \in (a,b]$.

Pour la variable X, la CDF est,

$F_X(x) = P[X \leq x] = P[F^{-1}(U) \leq x]$

$= P[U \leq F(x)]$, on applique la fonction des deux côtés, car F est monotone et croissante

$= \frac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)}$, car c'est la définition de la fonction de répartition d'une uniforme $\sim U(F(a), F(b))$ où $F(x)$ est une constante

On revient à la même forme pour la CDF définit plus haut. alors,

$$F_X(x) = F_Y(x)$$

b) Si la fonction à un saut en 'a', alors il F(a) n'est pas définit. Il faut alors que ce saut soit pris en compte dans la fonction uniforme et dans la CDF tronqué de Y.

7

Nous avons, $\tilde{p}_n$: la fraction des points qui tombe dans la sphère.

où le volume de la sphère est estimé par,

$\tilde{u}_n = 2^s \tilde{p}_n$ où 2^s est le volume de l'hypercube

La probabilité qu'un point tombe dans la sphère est,

$p = \frac{V_s}{2^s}$, où V_s est le volume de la sphère.

a) Montrons que l'estimateur $\tilde{u}_n$ est sans-biais, $E[\tilde{u}_n] = V_s$

$$
\begin{aligned}
E[\tilde{u}_n] &= E[2^s \tilde{p}_n] \\
&= 2^s E[\tilde{p}_n] \\
&= 2^s E\left[\frac{\sum_{x=0}^{n} \mathbb{1}(x)}{n}\right]
\end{aligned}
$$

, où $\mathbb{1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in V_s \\ 0 & \text{si } x \notin V_s \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2^s}{n} \sum_{x=0}^{n} E[\mathbb{1}(x)] \\
&= \frac{2^s}{n} \sum_{x=0}^{n} (1 \cdot p + 0(1-p))
\end{aligned}
$$

, où p est la probabilité que le point x soit dans la sphère

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2^s}{n} np = 2^s p \\
&= V_s
\end{aligned}
$$

Montrons la variance en fonction de s,

$$
\begin{aligned}
Var[\tilde{u}_n] = Var[2^s \tilde{p}_n] &= 2^{2s} Var[\tilde{p}_n] \\
&= 2^{2s} Var\left[\sum_{x=0}^{n} \mathbb{1}(x)/n\right] \\
&= \frac{2^{2s}}{n^2} Var\left[\sum_{x=0}^{n} \mathbb{1}(x)\right] \\
&= \frac{2^{2s}}{n^2} \sum_{x=0}^{n} \sum_{y=0}^{n} cov(\mathbb{1}(x), \mathbb{1}(y)) \\
&= \frac{2^{2s}}{n^2} \sum_{x=0}^{n} cov(\mathbb{1}(x), \mathbb{1}(y)) \\
&= \frac{2^{2s}}{n^2} \sum_{x=0}^{n} Var(\mathbb{1}(x))
\end{aligned}
$$

, car les variables sont indépendantes *

*tiré de https://stats.stackexchange.com/questions/31177/does-the-variance-of-a-sum-equal-the-sum-of-the-variances

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2^{2s}}{n^2} n Var(\mathbb{1}(x)) \\
&= \frac{2^{2s}}{n} \left(E[\mathbb{1}(x)^2] - E[\mathbb{1}(x)]^2\right) \\
&= \frac{2^{2s}}{n} \left((1^2 p + 0^2(1-p)) - p^2\right)
\end{aligned}
$$

, tel qu'il est montré plus haut

#7 suite, a)

$$= \frac{2^{2s}}{n}(p - p^2)$$

$$= \frac{2^{2s}}{n} p(1-p)$$

$$= \frac{2^{2s}}{n} \frac{V_s}{\cancel{2^s}}\left(1 - \frac{V_s}{2^s}\right), \text{ car } p = \frac{V_s}{2^s}$$

$$= \frac{2^s V_s}{n}\left(1 - \frac{V_s}{2^s}\right)$$

Pour l'erreur relative,

$$RE[\tilde{\mu}_n] = \sqrt{Var[\hat{\mu}_n]} / E[\hat{\mu}_n]$$

$$= \sqrt{\frac{2^s V_s}{n}\left(1 - \frac{V_s}{2^s}\right)} / V_s$$

$$= \sqrt{\frac{2^s}{nV_s}\left(1 - \frac{V_s}{2^s}\right)}$$

b) on veut que $RE[\hat{\mu}_n] \leq 0{,}01$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2^s}{nV_s}\left(1 - \frac{V_s}{2^s}\right)} \leq 0{,}01$$

$$\Rightarrow \frac{2^s}{nV_s}\left(1 - \frac{V_s}{2^s}\right) \leq 0{,}0001$$

$$\Rightarrow \frac{2^s}{nV_s} - \frac{1}{n} \leq 0{,}0001$$

$$\Rightarrow \frac{2^s}{V_s} - 1 \leq 0{,}0001n$$

$$\Rightarrow \frac{2^s}{V_s} - 1 \leq 0{,}0001n.$$

$$\Rightarrow \frac{2^s}{0{,}0001V_s} - \frac{1}{0{,}0001} \leq n.$$

$$\Rightarrow \frac{10\,000 \cdot 2^s}{V_s} - 10\,000 \leq n$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{2^s}{V_s} - 1\right) \leq n \quad , \text{où } a = 10\,000$$

#7 b) $a\left(\frac{2^s\Gamma(1+s/2)}{\pi^{s/2}}-1\right)\leq n$

$\Rightarrow a\left(\frac{2^s(\pi s)^{1/2}(s/(2e))^{s/2}}{\pi^{s/2}}-1\right)\leq n.$, selon l'approximation de Sterling.

$\Rightarrow a\left(\frac{2^s\pi^{\left(\frac{1-s}{2}\right)}s^{\left(\frac{1+s}{2}\right)}}{(2e)^{s/2}}-1\right)\leq n$

$\Rightarrow n=o\left(a\left(\frac{2^s\pi^{\left(\frac{1-s}{2}\right)}s^{\left(\frac{1+s}{2}\right)}}{(2e)^{s/2}}-1\right)\right)$

$\Rightarrow n=o(g(s))$

Il faut que $n\geq a\left(\frac{2^s\pi^{\left(\frac{1-s}{2}\right)}s^{\left(\frac{1+s}{2}\right)}}{(2e)^{s/2}}-1\right)$ lorsque s est grand où $a=10\,000$

Si $s=10$,

$n\geq 39391456$

Si $s=20$,

$n\geq 4\,029\,454\,820\,649$

À grande dimension, il faut beaucoup de points, pour garder une petite erreur
De plus, n augmente très rapidement avec les dimensions 's'

---

c) • $V_s=\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1+s/2)}=\frac{\pi^{s/2}}{(\pi s)^{1/2}(s/(2e))^{s/2}}$

$=\frac{\pi^{\left(\frac{s-1}{2}\right)}(2e)^{s/2}}{s^{\left(\frac{1+s}{2}\right)}}$

• $p=\frac{V_s}{2^s}$

• $nRE^2[\tilde{\mu}_n]=\cancel{n}\cdot\frac{2^s}{\cancel{n}V_s}\left(1-\frac{V_s}{2^s}\right)=\frac{2^s}{V_s}\left(1-\frac{V_s}{2^s}\right)=\frac{2^s}{V_s}-1$

Calculons pour différent s,

#7 c)

$S = 2$: $V_s = 3{,}41$ $\quad p = 0{,}85$ $\quad$ erreur $= 0{,}17$

$S = 5$: $V_s = 5.44$ $\quad p = 0{,}17$ $\quad$ erreur $= 4.88$

$S = 10$: $V_s = 2{,}59$ $\quad p = 0{,}002$ $\quad$ erreur $= 393{,}9$

$S = 20$: $V_s = 0{,}03$ $\quad p = 2{,}48e^{-8}$ $\quad$ erreur $= 40\,294\,548{,}2$

L'erreur augmente très rapidement avec les dimensions.
De plus, comme on s'y attend, la proportion de la sphère p dans le cube diminue rapidement avec l'augmentation des dimensions.

De plus, le volume de la sphère diminue avec les dimensions, on s'y attend, car on a,

$$V_s = \frac{\pi^{\frac{S-1}{2}} \, 2e^{S/2}}{S^{1+S/2}}$$

$$\approx \frac{C^S}{S^S}$$

, en ignorant les chiffres et généralisant pour avoir une idée plus clair du volume en fonction de S.
où C est une constante.

S^S augmente beaucoup plus rapidement que C^S. Ainsi, plus S est grand, plus V_s diminue rapidement.