IFT-6561: SIMULATION **Automne 2020**

Prof. Pierre L'Ecuyer

DEVOIR 2

Devoir à remettre le *mercredi 30 septembre 2020, 13h30, avant le début du cours*, par courriel au professeur.

Les devoirs doivent être faits individuellement ou en équipe de deux. Il est très important de bien expliquer tout ce que vous faites et les preuves (quand il y en a) doivent être rigoureuses et convaincantes. Pour les expériences numériques, il est très important de bien expliquer tout ce que vous faites et d'expliquer le sens de vos résultats (discussion). Dans la correction, on accordera davantage d'importance à la clarté des explications qu'aux programmes informatiques et aux résultats comme tels. Dans ce sens, remettre uniquement un programme qui donne les bons résultats ne suffit pas et vous donnera peu ou pas de points (nous ne corrigeons pas les programmes comme tels). Vous devez quand même envoyer une copie de vos programmes par courriel avec votre devoir, pour que le professeur puisse les vérifier au besoin.

Attention au plagiat: il n'est pas permis de copier et/ou modifier les programmes ou les solutions venant de quelqu'un d'autre.

---

1. ***(15 points)*** Exercice 1.4. Pour cette question, vous pouvez écrire un programme Java qui utilise *sans la modifier* la classe `MathematicaSWB.java`, qui implante ce générateur et qui se trouve dans le répertoire `http://www.iro.umontreal.ca/~lecuyer/ift6561/java/examples/` sur la page web du cours.

Faites d'abord le test demandé pour les points $\mathbf{u}_i = (u_i, u_{i+1}, u_{i+2})$. Faites-le ensuite pour les $\mathbf{u}_i$ tels que définis dans la question (a). Puis faites ensuite (b). Comparez et discutez vos résultats. Que pouvez-vous conclure de cette expérience?

---

2. ***(10 points)*** Exercice 1.6. Traitez séparément les cas $\beta > 0$ et $\beta < 0$.

---

3. ***(10 points)*** Consider the class of functions $f : [0,1)^s \to \mathbb{R}$ defined by

$$f(\mathbf{u}) = \left(\sum_{j=0}^{s-1} u_j \cos(b u_j)\right)^2$$

for $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_{s-1})$, where b is a positive constant. We want to estimate $\mu = \int_{[0,1)^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$ by Monte Carlo (MC) or randomized quasi-Monte Carlo (RQMC). For that, we generate n points $\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$ in $[0,1)^s$ and estimate μ by the average

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_i \qquad \text{where } X_i = f(\mathbf{u}_i).$$

(a) For fixed $s \leq 3$, do you think RQMC is more likely to beat MC in the sense of having a smaller $\mathrm{Var}[\bar{X}_n]$ when b is smaller or when it is larger? Explain why, using intuitive arguments.

(b) Make an experiment with $s = 3$ and $b = 0.5$ for all j, with $n = 2^{16}$. For the RQMC points, take a Sobol net of n points randomized by a random digital shift in base 2. Make $r = 20$ independent randomizations to estimate $\mathrm{Var}[\bar{X}_n]$ and the variance per run $n\mathrm{Var}[\bar{X}_n]$ with RQMC. Make $n = 2^{16}$ independent runs to estimate $\mathrm{Var}[X_i]$, the variance per run with MC. Compare the efficiencies (e.g., their ratio) and discuss your results.‘

(c) Repeat the same experiment with $s = 3$ and $b = 50$. Compare and discuss your results.

Pour cet exercice, vous pouvez prendre pour modèle le programme `ProductExpCosRQMC` qui se trouve dans les exemples à `http://www.iro.umontreal.ca/~lecuyer/ift6561/java/examples/`.

---

4. ***(15 points)*** Consider a financial option whose payoff is given by

$$X = \begin{cases} CW_1W_2 - K & \text{if } CW_1 \leq a \text{ and } CW_1W_2 \geq b, \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

where C, K, a, and $b \geq K$ are positive constants, and W_1 and W_2 are independent lognormal random variables with parameters (μ_1, σ_1) and (μ_2, σ_2), respectively. We want to estimate $\mu = \mathbb{E}[X]$ in a situation where $\mathbb{P}[X > 0]$ is very small. Design an importance sampling (IS) strategy for this example. You can take inspiration from the example seen in class.

Suppose $C = 100$, $K = 102$, $a = 100$, $b = 102$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.01$, and $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.04$. Make an experiment with $n = 10\,000$ to estimate $\mathbb{E}[X]$ with a 95% confidence interval by Monte Carlo, with and without IS. Compare the two and discuss your results. Then, do the same with $b = 112$.