

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

IFT6561 – SIMULATION: ASPECTS STOCHASTIQUES

Devoir 3

par:

Eugénie Yockell

(20071932)

Cong Liu

(20161998)

Date de remise: 21 Octobre 2020

Question 1

(a)

L'estimateur est biaisé quand $\delta > 0$ est fixé. En effet, nous avons l'estimateur,

$$X(\delta) = \frac{Y(s_0, r, \sigma + \delta, T) - Y(s_0, r, \sigma, T)}{\delta}$$

$$\mathbb{E}[X(\delta)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[X_i(\delta)]}{n}$$

Ce que l'on obtient est toujours une approximation de la dérivée de Y par rapport à σ , car on ne peut pas diminuer δ à exactement 0, il existe toujours le biais. Quand δ tends vers 0, le biais β tends vers 0.

Avec un δ fixé, quand n tends vers infini, le biais va pas être réduit.

(b)

Notons $Y(S_0, r, \sigma + \delta, T)$ et $Y(S_0, r, \sigma, T)$ respectivement Y_1 et Y_2 . Nous avons,

$$Y(S_0, r, \sigma, T) = e^{-rT} g(S(t_1), \dots, S(t_d)) \quad (1)$$

Supposons que la loi de $S(t)$ est connue. On généralise une variable aléatoire $U = u_i$ tel que les u_i suivent une loi uniforme sur $[0,1]$.

$$S = F^{-1}(U) \triangleq \min\{s \mid F(s) \geq u\}$$

$$\mathbb{P}[S(t) \leq s] = \mathbb{P}[F^{-1}(U) \leq s] = \mathbb{P}[U \leq F(s)] = F(s)$$

En utilisant la méthode IRN, on généralise des variables aléatoires uniformes indépendantes U et \tilde{U} , pour simuler respectivement des $S(t_i) = F^{-1}(U)$ et $\tilde{S}(t_i) = F^{-1}(\tilde{U})$. Ensuite on obtient les Y_1 et Y_2 par l'équation 1, les Y_1 et Y_2 seront indépendants.

Par contre, par la méthode CRN, on utilise exactement le même U (i.e. ici $U = \tilde{U}$) pour simuler Y_1 et Y_2 , il y aura une corrélation entre Y_1 et Y_2 .

$$Var[X(\delta)] = Var\left[\frac{Y_1 - Y_2}{\delta}\right] = \frac{1}{\delta^2} Var(Y_1 - Y_2) = \frac{1}{\delta^2} [Var(Y_1) + Var(Y_2) - 2Cov(Y_1, Y_2)] \quad (2)$$

IRN

Comme Y_1 et Y_2 sont indépendantes, on a

$$Cov(Y_1, Y_2) = 0$$

L'équation 2 devient,

$$Var[X(\delta)] = \frac{Var(Y_1) + Var(Y_2)}{\delta^2}$$

Quand δ est assez petit, σ et $\sigma + \delta$ seront assez proches, on peut approximer Y_1 par Y_2 (i.e. approximer $Var(Y_1) + Var(Y_2)$ par $2Var(Y_1)$). Comme $Var(Y_1)$ est fixé, on a,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2Var(Y_1)}{\delta^2} = \infty$$

Quand δ tends vers 0, la variance tends vers l'infini d'une manière quadratique.

CRN

$Y(s_0, r, \sigma, T)$ est continue. Soit σ fixé, quand δ est très petit, σ et $\sigma + \delta$ seront assez proches, on peut approximer Y_2 par Y_1 , la corrélation entre Y_1 et Y_2 va s'approcher de 1. On obtient,

$$Corr = \frac{Cov(Y_1, Y_2)}{\sqrt{Var(Y_1)Var(Y_2)}} \approx 1$$

$$Cov(Y_1, Y_2) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \sqrt{Var^2(Y_1)} = Var(Y_1)$$

Alors

$$Var[X(\delta)] \approx \frac{2Var(Y_1) - 2Cov(Y_1, Y_2)}{\delta^2} = \frac{o(0)}{o(0)}$$

Donc, pour un δ assez petit, $Var[X(\delta)]$ peut être borné.

(c)

Oui, il est possible de construire un estimateur de Vega sans biais. On simule $S(t)$ par la méthode CRN. Soit

$$Y_1 = Y(\sigma + \delta, \mathbf{U}), \quad Y_2 = Y(\sigma, \mathbf{U}), \quad \text{et } \Delta = Y_1 - Y_2$$

\mathbb{U} représente les autres paramètres générés par $U = u_i$.

$$Y'(\sigma, \mathbf{U}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{Y(\sigma + \delta, \mathbf{U}) - Y(\sigma, \mathbf{U})}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\delta}$$

Prouvons que $\mathbb{E}[Y'(\sigma, \mathbf{U})]$ est un estimateur non-biaisé.

$$\mathbb{E}[Y'(\sigma, U)] = \mathbb{E}\left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{Y_1 - Y_2}{\delta}\right] \stackrel{?}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[\frac{Y_1 - Y_2}{\delta}\right] \quad (3)$$

$$Y(S_0, r, \sigma, T) = e^{-rT} g(S(t_1), \dots, S(t_d))$$

avec

$$g(S(t_1), \dots, S(t_d)) = \max\left(0, \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d S(t_j) - K\right)$$

$$S(t) = s_0 e^{(r - \sigma^2/2)t + \sigma B(t)}$$

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d S(t_j) - K \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$Y = \begin{cases} \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d S(t_j) - K, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5)$$

Dans le cas où le payoff n'est pas 0,

$$\begin{aligned}
\Delta &= Y_1 - Y_2 \\
&= e^{-rT} \frac{s_0}{d} \sum_{j=1}^d [\exp[(r - \frac{(\sigma + \delta)^2}{2})t + (\sigma + \delta)B(t)] - \exp[(r - \frac{(\sigma)^2}{2})t + (\sigma)B(t)]] \\
&\leq e^{-rT} \frac{s_0}{d} \sum_{j=1}^d [\exp[(r - \frac{(\sigma + \delta)^2}{2})t + (\sigma + \delta)B(t)]] \\
&\leq e^{-rT} \frac{s_0}{d} \sum_{j=1}^d \exp[rt + B(t)]
\end{aligned}$$

La fonction $\frac{\Delta}{\delta}$ est borné, on peut utiliser le théorème de convergence dominé de Lebesgue, et on obtient

$$\mathbb{E}[Y'(\sigma, U)] = \mathbb{E}[\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{Y_1 - Y_2}{\delta}] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}[\frac{Y_1 - Y_2}{\delta}] = v'(\sigma, U)$$

Question 2

Nous avons,

$$\rho_s(U_1, U_2) = \rho(F(U_1), G(U_2)) = \rho_s$$

où U_1 et U_2 sont des variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$. Les fonctions de répartition marginale sont définies comme,

$$F_{U_1}(U_1 = u) = u$$

$$G_{U_2}(U_2 = u) = u$$

Methode de Norta

Pour un ρ_s donné, on peut calculer un ρ

$$\rho = 2\sin\left(\frac{\pi\rho_s}{6}\right)$$

Ainsi on définit une distribution bivariable normales \mathbb{G} où les distributions marginales sont normales standards et les deux variables ont la coefficient de corrélation ρ . On fait une décomposition de Cholesky à la matrice de corrélation,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = LL^t \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & (1 - \rho^2)^{1/2} \end{pmatrix}$$

On génère une variable aléatoire \mathbb{Z} , soit

$$\mathbb{Z} = (Z_1, Z_2)^t \quad \text{avec } Z_1, Z_2 \text{ deux variables normales standards indépendantes}$$

Ensuite on crée une variable Y par $Y = (Y_1, Y_2)^t = LZ$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_1\rho + \sqrt{1 - \rho^2}Z_2 \end{pmatrix}$$

Y suit la distribution G . La loi marginale de G est normale standard, notons Φ . Comme Φ est connu, on peut ainsi calculer la valeur de la fonction de répartition marginales

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(Y_1) \\ \Phi(Y_2) \end{pmatrix} \quad p_1, p_2 \sim U[0, 1]$$

On cherche la paire $U = (U_1, U_2)$ où U_1 et U_2 suivent la loi uniforme $[0,1]$. La loi marginale de U_1 est

$$F_1(U_1 = p) = \frac{p}{1 - 0} = p$$

Il est facile d'obtenir la fonction inverse

$$F_1^{-1}(p) = U_1$$

On suit le même processus pour U_2 . De cette façon, on obtient une paire de variable aléatoire $U = (U_1, U_2)^t = (F_1^{-1}(p_1), F_2^{-1}(p_2))^t = (p_1, p_2)^t$

Fréchet Copula

Pour une distribution bivariables H avec des fonctions de répartition marginales $F(x) = u_1$ et $G(y) = u_2$, il existe toujours,

$$\max\{F(x) + G(y) - 1\} \leq H(x, y) \leq \min\{F(x), G(y)\}$$

$W = \min(u_1, u_2)$ et $M = \max(0, u_1 + u_2 - 1)$ définissent respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de l'inégalité Fréchet. Où W est la copula des variables aléatoires *countermonotonic*, qui maximise la corrélation entre les marginales données. Où M est la copula de variables aléatoires *comonotonic*, qui minimise la corrélation entre les marginales données. En combinant la copula W et la copula M par une probabilité p , on construit une copule de Fréchet.

$$C(u_1, u_2) = p \min(u_1, u_2) + (1 - p) \max(0, u_1 + u_2 - 1)$$

En variant la valeur de p , on peut créer n'importe quelle corrélation qui prends valeur entre $[-1, 1]$. Pour une corrélation de rangs entre les variables X et Y désirée, notée ρ_s , par la définition,

$$\rho_s(X, Y) = \rho(F(X), G(Y)) = \rho(u_1, u_2) \quad \text{où } \rho \text{ désigne la corrélation Pearson}$$

$$\rho = p - (1 - p)$$

$$p = \frac{(\rho + 1)}{2}$$

Dans N simulations, on mesure $N \cdot p$ fois où la corrélation atteint 1, et dans les autres $N \cdot (1 - p)$ simulations, où la corrélation atteint le minimum. C'est à dire, pour $N \cdot p$ simulations, on génère une variable aléatoire $U_1 = u_j$, $u_j \sim U[0, 1]$ et on pose que $U_2 = U_1$.

Dans les autres $N \cdot (1 - p)$ simulations, on génère une variable aléatoire $U_1 = u_j$, $u_j \sim U[0, 1]$ et on pose que $U_2 = 1 - U_1$. De cette façon, ça on obtient les paires (U_1, U_2) , qui sont les valeurs des fonctions marginales. Avec des fonction inverse, il est facile d'obtenir,

$$X = F^{-1}(U_1)$$

$$Y = G^{-1}(U_2)$$

Ici, $X = U_1$ et $Y = U_2$ car les lois marginales sont uniforme standard.

(b)

On fait 10^6 fois simulations avec $\rho_s = 0.9$ et obtient les résultats présentés à la table 1.

Copula	Probability
NORTA	0.042673
Frechet	0.047785

Table 1: Probabilité $P[U_1 + U_2 \leq 0.1]$

(c)

On fait 10^6 fois simulations avec $\rho_s = 0.8$, et obtient les résultats présentés à la table 2.

Copula	Probability
NORTA	0.639009
Frechet	0.952566

Table 2: Probabilité $P[U_1 - U_2 \leq 0.05]$

Question 3

(a)

La difficulté de la simulation de banque était d'ajouter les clients B. Pour s'y faire, à chaque nouveau jour, nous avons définissons un tableau contenant tous les agents ainsi que tous leurs clients pour chaque période dans un tableau. Les clients B sont définie dans une classe qui contient leur informations comme le temps de service, leurs délai, s'ils viennent au rendez-vous, etc. Pour chaque période, nous avons une liste chaînée d'agents qui ont chacun une liste chaîné de 4 clients B, car nous avons 4 clients par période. Lors de la première période, on instancie une classe **Service_B** pour chaque agent présent. Cette classe est une extension de **Event**. Elle permet de céduer les rendez-vous de chaque clients avec la méthode **nextClient()**. Cette méthode cédule la fin du rendez-vous, et c'est à ce moment qu'on mesure les temps d'attentes pour chaque client jusqu'à la fin de la journée (ou jusqu'à ce l'agent quitte). Si un nouvel agent se présente à une période, on créer un nouveau **Service_B**.

Les résultats des histogramme pour les clients A et B sont respectivement présenté à la figure 1 et 2. Ces mesures ont été faites à l'aide des informations définies au **b)**. On remarque que les temps d'attentes des clients A semble avoir une forme de distribution Gamma qui est plus concentré. Tandis que les temps d'attentes des clients B sont presque tous à zéro.

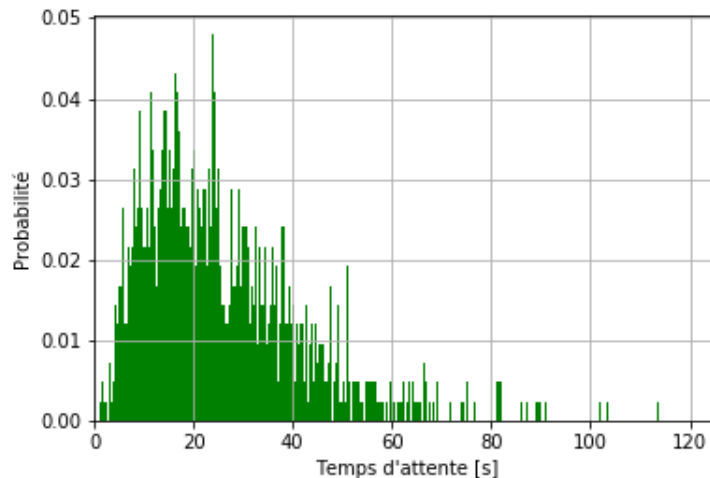


Figure 1: Histogramme des temps d'attente pour les clients A sur 1000 jours où la moyenne est de 25.950 secondes.

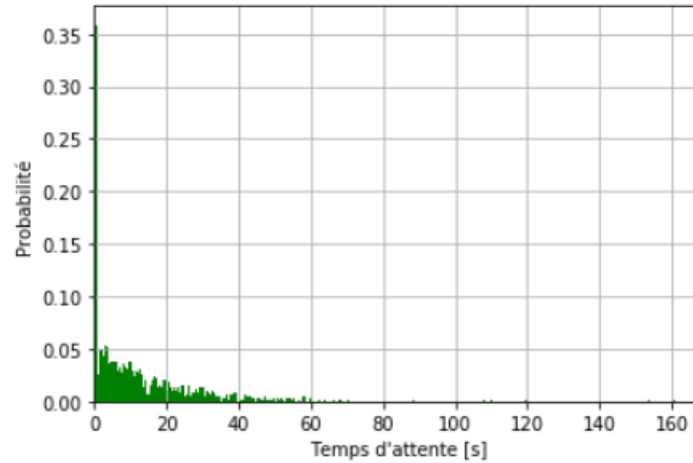


Figure 2: Histogramme des temps d'attente pour les clients B sur 1000 jours où la moyenne est de 13.317 secondes.

(b)

En utilisant les informations demandées on obtient les résultats définis à la table 3. On remarque que les temps d'attente moyen sont très petits dans les deux cas. Une attente moyenne de 30 secondes est petit. Pour les client B, le plus grand temps d'attente possible est de 3 minutes, tandis que pour les clients A, le temps d'attente maximum est de 2 minutes. Ce résultat peut sembler logique puisque les clients B ont un temps de service d'une moyenne de 25 minutes, lorsqu'un retard est créé pour un agent, il y a de bonne chance que ce retard soit de moins de 5min, et ainsi n'affecte pas le prochain client (en sachant qu'il y a une plage de 30min sur chaque rendez-vous).

	Client A	Client B
Num. d'observation	1000	1000
Minimum	1.205	0.000
Maximum	126.166	168.107
Moyenne	25.950	13.317
Variance	274.106	286.885
Déviatoin standard	16.573	16.938
Intervalle de confiance avec Student de 90%	(25.087,26.813)	(12.435, 14.199)

Table 3: Statistiques des temps d'attentes moyens pour les clients A et B où les observations sont mesurées en secondes.

(c)

Dans notre cas, nous distinguons 6 types de nombre aléatoire. Ceux utilisés pour l'arrivée des clients A, le temps de service des clients A, le temps de service des clients B, si le client B à un rendez-vous, si le B vient au rendez-vous et le retard de client B. Pour s'assurer que les mêmes séquences de nombre aléatoire sont utilisées pour chaque cas, on utilise un générateur de nombre aléatoire unique pour chaque cas. On initialise ces 6 générateurs au début de l'instanciation d'une banque.

Ainsi pour mesurer les dérivés des temps d'attentes par rapports à différents s , nous allons utiliser les différences finies avec des valeurs aléatoires communes (CRN). Nous voulons générer les mêmes nombres aléatoires au même endroit pour deux systèmes différents. Nous allons ainsi initialiser les générateurs de nombres aléatoires à chaque jour de simulation pour que les deux systèmes aient les mêmes nombres aléatoires aux mêmes endroits. On définit la dérivé comme étant

$$\Delta w_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{w_{ai}(s + \delta) - w_{ai}(s)}{\delta}$$

$$\Delta w_b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{w_{bi}(s + \delta) - w_{bi}(s)}{\delta}$$

où $w_{ai}(s)$ et $w_{bi}(s)$ sont les temps d'attentes de a et b à la journée i selon s . Les résultats de dérivé sont présentés suivants à table 4 où les valeurs des dérivés sont colorées. Nous avons alors que les valeurs des dérivés sont de 0.040 secondes pour les clients A et de -0.016 secondes pour les clients B. Comme on s'y attend, augmenter la valeur de s augmente le temps d'attente des clients A, car les conseillers D ont moins de chance d'aller répondre à un client A. Ils attendent alors plus longtemps en moyenne. Tandis que le temps d'attente des clients B diminue, car les agents D ont plus de chance d'attendre l'arrivée des clients B, et ainsi, ces derniers n'attendent pas.

	Dérivé pour client A	Dérivé pour client B
Num. d'observation	5000	5000
Minimum	-11.015	-23.885
Maximum	13.366	20.199
Moyenne	0.040	-0.016
Variance	5.022	5.755
Déviatoin standard	2.127	2.399
Intervalle de confiance avec Student de 90%	(-0.012, 0.092)	(-0.072, 0.039)

Table 4: Statistiques des dérivés des temps d'attentes moyens par rapport à s pour les clients A et B où les observations sont mesurées en secondes avec CRN.