

Prof. Pierre L'Ecuyer

## Travail de fin de session

Travail final, à remettre au plus tard le **lundi 23 décembre 2019 à 23h59**, au professeur, en format .pdf. Le travail peut être fait seul ou en équipe de deux. N'oubliez pas d'écrire votre nom au début du document! Dans le même courriel, incluez aussi une copie de vos programmes pour que l'on puisse les regarder ou essayer *si nécessaire*. Ceci dit, ce sont surtout la clarté et l'exhaustivité de vos explications qui seront notées, pas les programmes comme tels. Pas besoin de réécrire les questions.

Attention au plagiat: il est strictement interdit de copier et/ou modifier les programmes ou les solutions d'un(e) autre étudiant(e) ou prises dans un livre ou sur Internet sans les citer. Ceci dit, vous pouvez regarder les programmes qui se trouvent dans la distribution de SSJ sur GitHub, dans `ssj/src/main/docs/examples/ift6561examples/` et vous en inspirer si vous voulez.

---

### — 1 —

(25 points)

Dans l'exemple 6.66 des notes de cours, supposons que les  $C_j$  suivent la loi Gamma(1/2, 1/4) et que le taux d'arrivée est  $\lambda = 1$ . La fonction génératrice des moments pour la loi gamma en général, dans la notation des notes de cours, est  $M(t) = (1 - t/\lambda)^{-\alpha}$ .

Attention, il y a deux  $\lambda$ 's qui veulent dire différentes choses dans cette question, donc un conflit de notation, mais c'est comme ça. Le taux d'arrivée est noté  $\lambda$ , ce qui est standard. Aussi, l'un des paramètres de la loi gamma est noté  $\lambda$  dans mes notes et cela aussi est standard (c'est le même paramètre  $\lambda$  que dans la loi exponentielle, qui est un cas particulier de la gamma, et aussi de la Weibull, qui généralise aussi l'exponentielle). Ce choix de  $\lambda$  est une question de cohérence entre les différentes lois. Je ne vais pas changer cette notation pour toutes les lois juste pour cet exercice. Dans Wikipedia ils utilisent  $\beta$  au lieu de  $\lambda$  pour la gamma, puis dans l'exponentielle ils ont  $\lambda$ , et puis un  $\beta$  qui est l'inverse du  $\beta$  de la gamma, ce qui n'est pas cohérent! Mais toutes ces entrées de Wikipedia ne sont pas écrites par la même personne.

Dans votre exercice, pour ne pas vous mêler, vous pouvez noter le paramètre de la loi gamma par  $\lambda_0$  ou  $\lambda_g$  ou quelque chose comme ça. Il suffit d'être clair. C'est à vous de penser à cela. Ce genre de chose arrive.

La notation  $M(t)$  utilisée ici est standard pour la fonction génératrice d'une v.a. en général. Dans l'exemple 6.6, on considère les fonctions génératrices de différentes v.a.'s, et c'est pour cela que j'en ai appelée une  $M_h$  et une autre  $M_a$ . Vous devez comprendre que pour le  $M_h$  de cet exemple, vous devrez prendre la fonction génératrice de la loi gamma, même si elle ne s'appelle pas  $M_h$  en général. Sur Wikipedia, par exemple, elle s'appelle MGF.

- (a) Quelle est la valeur de  $\theta^*$  en fonction de  $c$  dans ce cas, en supposant que  $c > 2$ ? Aide: Vous allez probablement trouver une équation de troisième degré à résoudre, mais en simplifiant des termes, on peut se ramener à une équation quadratique, qui se résout ensuite facilement.
- (b) Implantez cette méthode et estimez la probabilité de ruine avec une erreur relative d'au plus 1% pour  $R(0) = 200$  et  $c = 3$ , puis  $c = 5$ . Pour générer les variables selon la loi gamma, vous pouvez utiliser une méthode de rejet plus rapide (voir `GammaRejectionLoglogisticGen` dans SSJ) plutôt que l'inversion. (Note: Le programme `RuinIS.java` sur la page du cours fait cela pour l'exemple 1.45 des notes).
- (c) Donnez une estimation du nombre  $n$  de répétitions de la simulation qu'il faudrait faire, avec une méthode de Monte Carlo standard (sans IS) et les paramètres donnés en (b), pour estimer la probabilité de ruine avec une erreur relative d'au plus 1%. Aide: bien sûr, vous ne pouvez pas estimer cette valeur en faisant des simulations directement sans IS.
- (d) Expliquez pourquoi ne peut-on pas implanter la technique décrite dans cet exemple si les  $C_j$  suivent une loi lognormale?

## — 2 —

(50 points)

Cette question est liée à la question 2 de votre devoir 4. Vous pouvez réutiliser le code que vous avez fait pour ce devoir, si vous voulez. Vous allez simuler le même modèle VG qu'à l'exemple 6.52 des notes de cours (voir aussi la section 2.16.6), avec les mêmes valeurs des paramètres, **sauf que vous prendrez  $K = 90$  et  $100$ ,  $\nu = 0.2$ , et  $t_j = jT/d$  pour  $j = 0, \dots, d$ , et  $d = 8$** . SSJ fournit les outils requis pour simuler de tels processus.

Pour générer les processus gamma via "bridge sampling", utilisez la classe `GammaProcessSymmetricalBridge`, qui est beaucoup plus rapide que `GammaProcessBridge`.

Attention: la paramétrisation du processus VG n'est pas la même dans tous les articles et logiciels. Par exemple, elle n'est pas tout à fait la même dans SSJ, dans mes notes de cours, et dans l'article d'Avramidis et L'Ecuyer (2006): <http://www.iro.umontreal.ca/~lecuyer/myftp/papers/vg.pdf>. Dans ce dernier article, la loi  $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$  est définie au début de la section 2.1. La moyenne et la variance sont:  $\alpha\beta$  et  $\alpha\beta^2$ . Dans SSJ la moyenne et la variance sont plutôt  $\alpha/\lambda$  et  $\alpha/\lambda^2$ .

- (a) Écrivez un programme permettant de calculer l'équivalent du tableau 6.12 des notes, mais cette fois pour les nouvelles valeurs de  $K$ ,  $\nu$ , et  $t_j$  mentionnées plus haut. Vous pouvez construire un tableau pour  $K = 100$  et un autre pour  $K = 90$ . Essayez les quatre méthodes RQMC indiquées dans le tableau, avec les mêmes méthodes de simulation du processus (BGSS, BGBS, DGBS). Faites  $m = 32$  répétitions indépendantes pour estimer la variance et les VRFs. En plus des VRFs comme dans le tableau 6.12, donnez aussi les estimations de la valeur de l'option. Discutez vos résultats.
- (b) Estimez aussi la dérivée de la valeur de l'option par rapport à  $\nu$ , en utilisant DGBS et la méthode RQMC qui vous semble la plus efficace, disons avec  $n = 2^{14}$ . Comparez ce que vous obtenez avec RQMC et avec Monte Carlo ordinaire. Pour le choix de la méthode d'estimation de dérivée, c'est à vous de voir; faites ce qui vous semble le plus efficace et raisonnable.

(c) Supposons maintenant que  $d = 1$ , de sorte que  $\bar{S} = S(t_1) = S(1)$ , et aussi que  $K \gg 100$ , de sorte que le “payoff” de l’option sera rarement positif. On voudra alors utiliser l’importance sampling (IS). Si on simule le processus par DGBS, il semble raisonnable d’augmenter la moyenne du processus  $G^+$  et de diminuer celle du processus  $G^-$ , de manière à augmenter la valeur de  $G^+(1) - G^-(1)$ .

Pour cela, on peut utiliser la stratégie heuristique suivante. On applique une torsion exponentielle (“exponential twisting”) à la densité de chacune des deux v.a. gamma: on multiplie la densité  $g^+(x)$  de  $G^+(1)$  par  $e^{\theta x}$  et la densité  $g^-(y)$  de  $G^-(1)$  par  $e^{-\theta y}$ , pour une constante  $\theta \geq 0$  qui reste à choisir, puis on normalise les densités. (Attention au conflit de notation, ce  $\theta$  n’est pas le même que le paramètre  $\theta = \mu = -0.1436$  dans le processus Brownien dans le VG; donc mieux vaut appeler ce dernier  $\mu$ ).

Pour  $\theta \geq 0$  donné, quelles seront les nouvelles densités? Comment peut-on générer des variables aléatoires selon ces nouvelles densités? Et quel sera le rapport de vraisemblance associé?

(d) Notons que l’option commence à payer lorsque  $S(1) \geq K$ , i.e., lorsque  $r + \omega + G^+(1) - G^-(1) = \ln[S(1)/S(0)] \geq \ln(K/S(0))$ . Il apparaît alors raisonnable de choisir  $\theta$  tel que l’on ait  $\mathbb{E}[G^+(1) - G^-(1)] = \ln(K/S(0)) - r - \omega$  sous les nouvelles densités. En écrivant l’espérance en fonction de  $\theta$ , obtenez une fonction monotone de  $\theta$  dont la racine (la valeur où la fonction vaut 0) est précisément cette valeur de  $\theta$ . On pourra alors trouver cette racine en utilisant une méthode telle que celle de Brent-Dekker, disponible dans SSJ et ailleurs. Implantez cette stratégie IS, et utilisez-là pour estimer la valeur de l’option avec une erreur relative d’au plus 1% pour  $K = 130$  et pour  $K = 160$ . Comparez la valeur et la variance de votre estimateur IS avec celui obtenu sans IS, dans les deux cas. Pour ceci, utilisez pour le moment MC ordinaire (pas RQMC).

(e) Une seconde approche pourrait consister à trouver  $\theta$  qui minimise la valeur maximale du rapport de vraisemblance lorsque l’estimateur est non négatif, qui est en fait atteinte lorsque  $S(1) = K$ . Cela minimisera la borne sur la variance donnée par la proposition 6.26 des notes. Trouvez une expression pour ce  $\theta$  et comparez-le à celui utilisé en (d).

(f) On peut essayer d’améliorer l’estimateur défini en (e) en s’inspirant de l’exemple 1.42, comme suit. On génère d’abord  $G^-(1)$  via IS avec le  $\theta$  choisi. Ensuite, on génère  $G^+(1)$  selon sa loi gamma originale, mais conditionnelle à ce que  $G^+(1) \geq G^-(1) + \ln(K/S(0)) - r - \omega$  (une loi gamma tronquée). De cette manière, le revenu observé ne sera jamais nul. Implantez cet algorithme, faites le même type d’expérience qu’en (d) et (e), et comparez les résultats. Essayez ensuite de l’améliorer davantage en essayant d’optimiser  $\theta$  empiriquement.

(g) Combinez votre estimateur IS obtenu en (f) avec une méthode RQMC qui utilise un “Sobol’ net” constitué des  $n = 2^{14}$  premiers points de la suite de Sobol’, randomisé par un “left matrix scramble” suivi d’un décalage aléatoire digital (`LMScrambleShift` dans SSJ). Estimez la valeur de l’option avec ce nouvel estimateur pour les valeurs de  $K$  données en (d), donnez un intervalle de confiance approximatif, et estimez aussi le facteur additionnel de réduction de variance obtenu en appliquant IS avec RQMC par rapport à celui où on utilise IS seulement.