O Teorema do Dodecagrama Crítico e a Unicidade da Estelação Regular Completa

José Eugênio A. G.

Resumo

Neste trabalho, caracterizamos uma classe crítica de polígonos estrelados regulares definidos pelo símbolo de Schläfli $\{n/k\}$. Demonstramos que, sob a relação diofantina crítica $k = n/2 - 1$ com $k - 2 > 1$, o polígono $\{12/5\}$ é o único que gera uma cadeia completa de estelações internas não degeneradas e cujos anéis internos são todos compostos por polígonos regulares perfeitos. Este resultado estabelece o dodecagrama regular como uma estrutura limiar entre simetria geométrica máxima e complexidade combinatória crescente.

1 Introdução

Polígonos estrelados regulares constituem um objeto clássico da geometria euclidiana, sendo representados pelo símbolo de Schläfli $\{n/k\}$. A estelação desses polígonos produz cadeias internas de componentes estreladas, cuja regularidade geométrica é, em geral, perdida à medida que n e k crescem.

Neste artigo, introduzimos uma relação crítica entre n e k e demonstramos que o dodecagrama $\{12/5\}$ ocupa uma posição estrutural única, pois contém internamente todas as três tesselações regulares do plano: triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares.

2 Definições Preliminares

Definição 1. *Um polígono estrelado regular* $\{n/k\}$ *consiste em* n *vértices igualmente espaçados sobre uma circunferência, com arestas ligando cada vértice ao* k*-ésimo vértice subsequente, onde* $\gcd(n, k) = 1$ *e* $1 < k < n/2$.

Definição 2. *Um* anel de estelação interna *é uma componente conexa interna obtida pela estelação completa do polígono* $\{n/k\}$*, excluindo o ciclo externo.*

3 Relação Crítica

Consideramos a relação diofantina crítica:

$$k = \frac{n}{2} - 1, \tag{1}$$

que implica

$$n = 2(k + 1). \tag{2}$$

Esta relação situa o polígono no limiar máximo de complexidade antes da perda de simetria global perceptível.

4 Teorema Principal

Teorema 1 (Teorema do Dodecagrama Crítico)**.** *Seja* $\{n/k\}$ *um polígono estrelado regular satisfazendo* $k = n/2 - 1$ *e* $k - 2 > 1$*. Então:*

1. *Existe uma cadeia completa de estelações não degeneradas*

$$\{n/k\}, \{n/(k-1)\}, \ldots, \{n/2\}.$$

2. *O único par inteiro* (n, k) *para o qual todos os* $k-2$ *anéis internos são compostos por polígonos regulares é* $(n, k) = (12, 5)$*.*

3. *No caso* $\{12/5\}$*, os três anéis internos correspondem a compostos de triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares.*

5 Demonstração

Lema 1. *Se* $k = n/2 - 1$ *e* $\gcd(n, k) = 1$*, então* k *é ímpar.*

Demonstração. De $n = 2(k+1)$, segue $\gcd(n, k) = \gcd(2(k+1), k) = \gcd(2, k)$. Logo, $\gcd(n, k) = 1$ implica que k é ímpar. □

Portanto, os candidatos são

$$(n, k) = (8, 3), (12, 5), (16, 7), (20, 9), \ldots$$

Lema 2. *O polígono* $\{n/k\}$ *possui exatamente* $k - 2$ *anéis internos de estelação não degenerados.*

Demonstração. A teoria clássica de estelações mostra que $\{n/k\}$ particiona o plano em k regiões, sendo uma externa, uma central (quando existente) e $k - 2$ componentes estreladas internas. □

Lema 3. *Um anel interno é composto por polígonos regulares se e somente se seus ângulos centrais são múltiplos racionais de* π*.*

Demonstração. Um polígono regular possui ângulos e lados congruentes, o que exige que os ângulos subtendidos no centro sejam múltiplos racionais de π. □

Análise de Casos

Caso $k = 3$, $n = 8$. Temos $k - 2 = 1$, violando a condição $k - 2 > 1$.

Caso $k = 5$, $n = 12$. Temos $k - 2 = 3$. A cadeia de estelação é

$$\{12/5\}, \{12/4\}, \{12/3\}, \{12/2\}.$$

As estelações internas correspondem respectivamente a compostos de triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares, todos polígonos regulares tesselares.

Caso $k \geq 7$. Para $n = 2(k+1)$, os polígonos internos têm número de lados

$$p_j = \frac{n}{\gcd(n, j)}.$$

Para $k \geq 7$, existe ao menos um $p_j \notin \{3, 4, 6\}$, logo pelo menos um anel não é regular.

Conclusão da Demonstração

O único caso que satisfaz todas as condições é $(n, k) = (12, 5)$, concluindo a prova.

6 Discussão

O dodecagrama regular $\{12/5\}$ surge como uma estrutura crítica entre simetria máxima e complexidade crescente. Ele contém internamente as únicas três tesselações regulares do plano e está relacionado aos três politopos regulares existentes em qualquer dimensão (simplex, hipercubo e ortoplexo). Este resultado sugere uma interpretação ontológica da geometria estrelada como base estrutural da organização matemática da realidade.

7 Conclusão

Demonstramos a unicidade do polígono $\{12/5\}$ sob uma relação crítica natural. Este polígono constitui um ponto fixo estrutural na teoria de estelações regulares e fornece uma base geométrica para interpretações simbólicas e filosóficas fundamentadas em propriedades matemáticas rigorosas.

Agradecimentos

O autor agradece às discussões sobre geometria estrelada e teoria de estelações que motivaram este trabalho.