El modelo GARCH generalizado Regime-Switching (GRS)

La familia de modelos GARCH es un enfoque popular para la modelización de la volatilidad condicional cambiante en el tiempo, pero las formas estructurales de las medias y varianzas condicionales de los modelos GARCH son mantenidas fijas a través del periodo muestral entero. Para condicionar los coeficientes del modelo sobre el estado del mercado, Hamilton y Susmel (1994) y Cai (1994) propusieron un modelo de cambio de régimen con innovaciones ARCH en el cual el proceso de la varianza condicional se le permite cambiar entre diferentes regímenes de acuerdo a una variable de estado latente que sigue un proceso de Markov.

Gray (1996) presentó el modelo GRS, el cual permite innovaciones GARCH. El modelo GRS se describe como sigue: Sea r_t el rendimiento de un activo modelizado como una constante más un término de perturbación tal que:

$$r_t = \mu_{s_t} + a_{t,s_t} \tag{1}$$

$$a_{t,s_t} \mid \mathscr{Y}_{t-1} = \sigma_{t,s_t} \varepsilon_t \ , \tag{2}$$

donde $s_t = \{1,2\}$ es una variable de estado no observable en el instante t, que sigue un proceso de Markov de primer orden con dos estados; a_{t,s_t} es un término residual dependiente del estado, ε_t es una variable aleatoria Normal estándar y σ_{t,s_t} es la desviación típica condicional dependiente del estado de r_t. La volatilidad condicional se supone que sigue un proceso GARCH(1,1):

$$\sigma^2_{t,s_t} = \alpha_{0,s_t} + \alpha_{1,s_t} a^2_{t-1} + \beta_{1,s_t} \sigma^2_{t-1} \ , \tag{3}$$

donde α_{0,s_t} , α_{1,s_t} , β_{1,s_t} son coeficientes dependientes del estado.

Cuando el proceso GARCH está sujeto a cambio de régimen, sin embargo, la naturaleza recursiva del proceso GARCH hace que la forma básica del modelo sea intratable debido a la dependencia de la varianza condicional sobre la historia pasada entera de los datos. Esto es el conocido problema de la dependencia de la senda en la literatura de "regime switching". Gray resuelve el problema de la dependencia de la senda tomando la expectativa condicional de σ_t^2 basado en las probabilidades de cambio de régimen, tal que las varianzas independientes de la senda se definen como:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= E\left[r_t^2 \mid \mathscr{Y}_{t-1}\right] - E\left[r_t \mid \mathscr{Y}_{t-1}\right]^2 \\ &= \hat{\xi}_{1,t|t-1}\left(\mu_1^2 + \sigma_{t,1}^2\right) + (1-\hat{\xi}_{1,t|t-1})\left(\mu_2^2 + \sigma_{t,2}^2\right) - \\ &\quad \left[\hat{\xi}_{1,t|t-1}\mu_1 + (1-\hat{\xi}_{1,t|t-1})\mu_2\right]^2 .\end{aligned} \tag{4}$$

Nótese que $\hat{\xi}_{2,t|t-1} = 1 - \hat{\xi}_{1,t|t-1}$ y que $\hat{\xi}_{1,t|t-1} = \Pr(s_t = 1 \mid \mathscr{Y}_{t-1})$, es decir, la probabilidad de estar en el régimen 1 dada la información hasta el periodo *t*–1.

Como consecuencia, la varianza condicional depende sólo del régimen actual, no de la historia pasada entera del proceso y el modelo está libre del problema de la dependencia de la senda. De forma similar, el método de recombinación para los residuos está dado por:

$$\begin{aligned} a_t &= r_t - E\left[r_t \mid \mathscr{Y}_{t-1} \right] \\ &= r_t - \left[\hat{\xi}_{1,t|t-1}\mu_1 + (1-\hat{\xi}_{1,t|t-1})\mu_2 \right] . \end{aligned} \tag{5}$$

Después de la recombinación, las varianzas condicionales y los residuos independientes de la senda pueden ser utilizados como las varianzas condicionales y los residuos retardados para construir la varianza condicional del siguiente periodo.

Para calcular las probabilidades de cambio de régimen, Gray (1995, 1996), derivó una expresión recursiva no-lineal de la probabilidad de cambio de régimen como una función de las probabilidades de transición y distribuciones condicionales. Esta expresión simplifica la construcción de la función de verosimilitud y permite la estimación fácil de modelos relativamente complicados:

$$
\begin{aligned}
\hat{\xi}_{1,t|t-1} &\equiv \Pr(s_t = 1 \,|\, \mathscr{Y}_{t-1}) \\
&= p_{11}\left[\frac{\eta_{1,t-1}\hat{\xi}_{1,t-1|t-2}}{\eta_{1,t-1}\hat{\xi}_{1,t-1|t-2} + \eta_{2,t-1}(1-\hat{\xi}_{1,t-1|t-2})}\right] + \\
&\quad (1-p_{22})\left[\frac{\eta_{2,t-1}(1-\hat{\xi}_{1,t-1|t-2})}{\eta_{1,t-1}\hat{\xi}_{1,t-1|t-2} + \eta_{2,t-1}(1-\hat{\xi}_{1,t-1|t-2})}\right],
\end{aligned}
\tag{6}
$$

donde

$$p_{11} = \Pr\left[s_t = 1 \,|\, s_{t-1} = 1\right] \tag{7}$$

$$p_{22} = \Pr\left[s_t = 2 \,|\, s_{t-1} = 2\right] \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{i,t} &= f(r_t \,|\, s_t = i, \mathscr{Y}_{t-1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_{t,i}} \exp\left\{\frac{-(r_t-\mu_i)^2}{2\sigma_{t,i}^2}\right\}, \quad i = 1, 2,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

siendo p_{11} y p_{22} probabilidades de transición, es decir, las probabilidades de que el régimen 1 y el 2 en t–1 continúen en el periodo t, respectivamente, y $\eta_{i,t}$ es la función de densidad de probabilidad del rendimiento dado que ocurre el estado i en el periodo t y dada la información disponible hasta el periodo t–1. Los parámetros

$$\theta = \left\{ p_{11},\ p_{22},\ \mu_1,\ \mu_2,\ \alpha_{0,1},\ \alpha_{0,2},\ \alpha_{1,1},\ \alpha_{1,2},\ \beta_{1,1},\ \beta_{1,2} \right\},$$

pueden ser estimados maximizando la función de verosimilitud con respecto a θ:

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \log \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\hat{\xi}_{1,t|t-1}}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_{t,1}} \exp\left\{ \dfrac{-(r_t - \mu_1)^2}{2\sigma_{t,1}^2} \right\} + \\ \dfrac{(1-\hat{\xi}_{1,t|t-1})}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_{t,2}} \exp\left\{ \dfrac{-(r_t - \mu_2)^2}{2\sigma_{t,2}^2} \right\} \end{array} \right\}.$$