

A dark blue vertical bar runs along the left edge of the page. A blue arrow-shaped banner points to the right from this bar, containing the text '2018-2019'. In the lower-left corner, there are several thin, curved, light blue lines that sweep upwards and to the right.

2018-2019

Seminario en Finanzas: Práctica

Máster Banca y Finanzas Cuantitativas

Celia Fructuoso Rodríguez
Eugenio Martín Gallego

Índice de contenido

Ejercicio 1:	3
a) Matriz de correlación:	3
b) Porcentaje de contribución al riesgo (PCTR):	3
c) Frontera de la cartera de media-varianza (MV) considerando las acciones 1 y 3 permitiendo posiciones largas:	4
d) Gráfico del conjunto de oportunidades de inversión de las carteras formadas solo con posiciones largas a partir de los 3 activos:	4
e) Frontera eficiente (EF) permitiendo posiciones cortas:	5
f) Cartera d (cartera con máximo rendimiento esperado por unidad de riesgo):	6
g) Composición de las carteras con rendimientos esperados del 5% y 15% y su riesgo:	6
h) Composición, media y riesgo de cada cartera objetivo:	7
i) Cartera de Tangencia cuando la rentabilidad del activo libre de riesgo es $r = 4\%$:	8
j) Considerando la siguiente función de utilidad:	9
k) Considerando la siguiente función de utilidad:	10
l) Considerando la siguiente función de utilidad:	11
m) Frontera Eficiente permitiendo solo posiciones largas en los activos:	12
n) Comparación entre momentos teóricos y estimados:	12
o) Expresión de forma cerrada para el retorno esperado de R_p, t que en términos de componentes activos y pasivos (descomposición de AP):	12
p) Expresión de forma cerrada para el retorno esperado de RT, t que en términos de componentes activos y pasivos (descomposición de AP):	14
Ejercicio 2:	16
a) Representación de cópulas:	16
i) Cópula 1:	16
ii) Cópula 2:	17
b) Estadísticos de las cópulas generadas:	17
c) Matriz de correlación, cartera eficiente, $wGMV$ y VaR:	17
i) Matriz de correlación de las cuatro carteras:	18
ii) Frontera eficiente a partir de las cuatro carteras propuestas:	18
iii) Cartera de Mínima Varianza Global y estadísticos:	18
iv) VaR de la Cartera de Mínima Varianza Global al 1% y al 5%:	19
Ejercicio 3:	20
a) Obtención de la función de probabilidad bivalente $gr1, r2$, dada la cópula gaussiana bivalente y de las funciones de densidad marginales de $r1$ y $r2$:	20
b) Función de probabilidad bivalente $gr1, r2$ dada la cópula de Clayton:	20
c) Función de probabilidad bivalente $gr1, r2$ dada la cópula de FGM:	21

d) Obtención de la expresión general para las curvas de nivel correspondientes a la pdf de la cópula FGM y representación de las curvas:.....	21
e) Obtención del histograma de los rendimientos simulados mediante 'conditional sampling' de la cartera A:.....	22
f) Expected shortfall (ES) de los rendimientos simulados de la cartera A para aquellos rendimientos por debajo del VaR de muestra de la cartera A al 1%:	23

Ejercicio 1:

Sea μ el vector de rendimiento esperado y Ω la matriz de covarianzas obtenidos de 3 series temporales de rendimientos anuales de 3 acciones:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.09 \\ 0.05 \end{pmatrix} \quad \Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & -0.06 \\ 0.1 & 0.5 & -0.1 \\ -0.06 & -0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

a) Matriz de correlación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.1690 & -0.2267 \\ 0.1690 & 1 & -0.4472 \\ -0.2267 & -0.4472 & 1 \end{pmatrix}$$

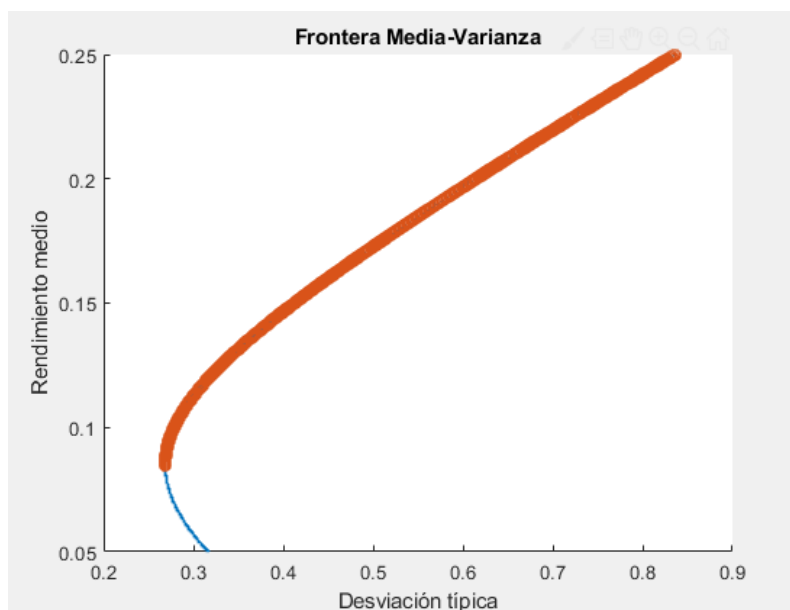
Se observa que la correlación entre el activo 1 y el activo 2 es positiva, mientras que entre el activo 1 y el activo 3 es negativa, al igual que entre el activo 2 y el activo 3.

b) Porcentaje de contribución al riesgo (PCTR):

Cartera	PCTR		
	Acción 1	Acción 2	Acción 3
Equiponderada	0.6271	0.4237	-0.0508
A1 _{20%} , A2 _{60%} y A3 _{20%}	0.1815	0.8687	-0.0502

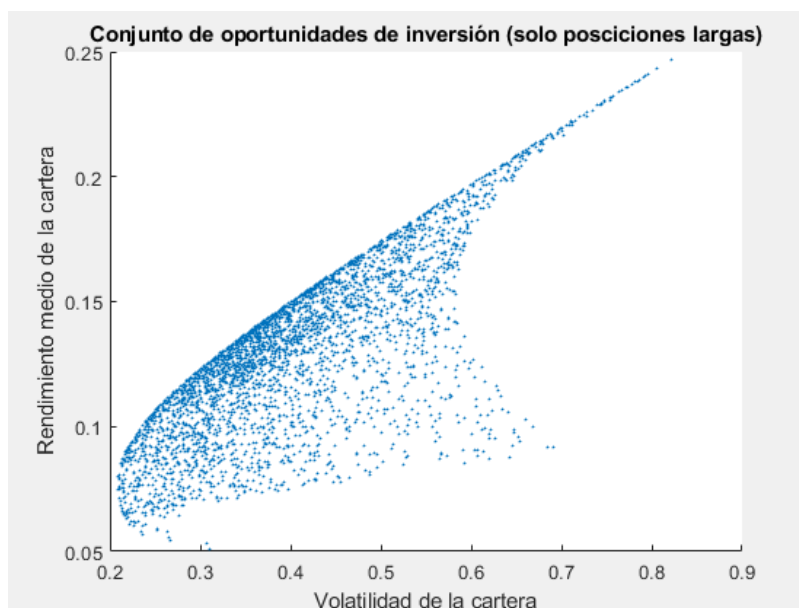
De los datos obtenidos se deduce que, de entre las carteras, la cartera equiponderada está más diversificada. Esto se debe a que el riesgo está más repartido entre los activos que la componen, no concentrando más del 62.71% del riesgo en ninguno de sus activos; mientras que, aquella formada por A1_{20%}, A2_{60%} y A3_{20%}, concentra el 86.87% de su riesgo total en el activo 2.

- c) Frontera de la cartera de media-varianza (MV) considerando las acciones 1 y 3 permitiendo posiciones largas:

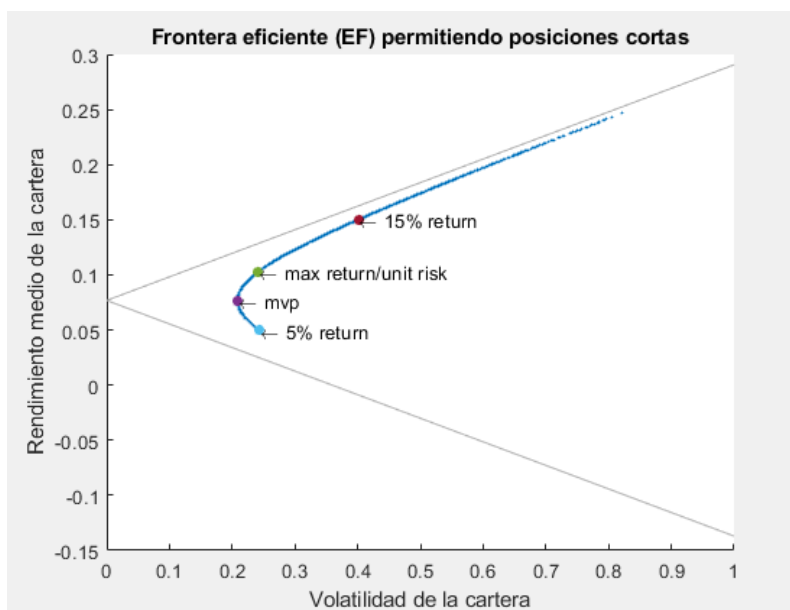


CARTERA DE MENOR VARIANZA		
Composición	Activo A	0.0773 → 7.73%
	Activo B	0.2261 → 22.61%
	Activo C	0.6965 → 69.65%
Media	0.0745	
Desviación típica	0.2092	

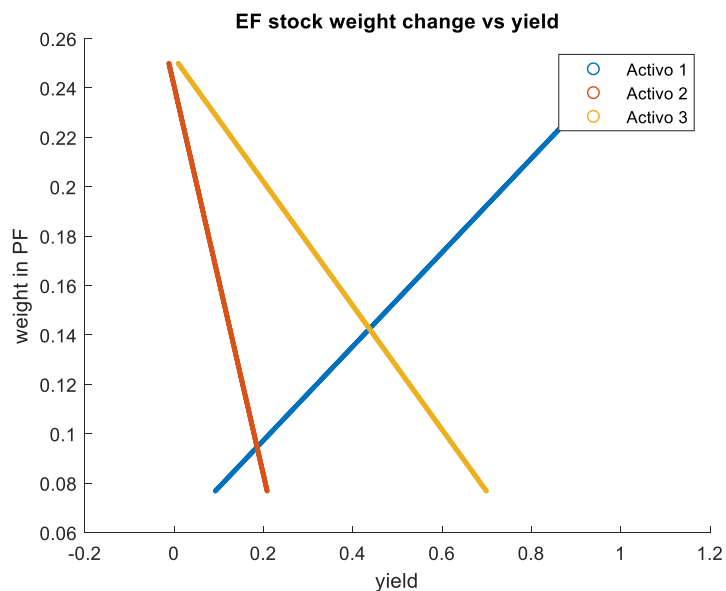
- d) Gráfico del conjunto de oportunidades de inversión de las carteras formadas solo con posiciones largas a partir de los 3 activos:



e) Frontera eficiente (EF) permitiendo posiciones cortas:



→ ¿Qué acciones en la Frontera Eficiente aumentan al aumentar el rendimiento de la cartera?



Observando el gráfico, se deduce que, ante un incremento del rendimiento de la cartera, los pesos de las carteras que forman la frontera eficiente varían, en concreto, aumenta la proporción de la cartera 1 y disminuye la proporción de las otras dos.

f) Cartera d (cartera con máximo rendimiento esperado por unidad de riesgo):

CARTERA DE MAYOR RENDIMIENTO (mayor SR)		
Composición	Activo A	0.2284 → 22.84%
	Activo B	0.1755 → 17.55%
	Activo C	0.5960 → 59.60%
Media	0.1027	
Varianza	0.0582	
Desviación típica	0.2413	

Donde el rendimiento esperado viene expresado por $\mu_d = \frac{B}{A}$ y la varianza por $\sigma_d^2 = \frac{B}{A^2}$, lo cual se puede demostrar de la siguiente manera:

Dado que $w_d = \frac{\Omega^{-1}\mu}{A} \rightarrow w_d' = \frac{(\Omega^{-1})'\mu'}{A}$ y, puesto que Ω^{-1} es simétrica, se da que:

$$(\Omega^{-1})' = \Omega^{-1},$$

por lo que:

$$E(R_d) = w_d'\mu = E\left(\frac{\mu'\Omega^{-1}\mu}{A}\right) = \frac{\mu'\Omega^{-1}\mu}{A} = \frac{B}{A}$$

Por otra parte, con respecto a la varianza:

$$Var(R_d) = w_d'\Omega w_d = \frac{\mu'\Omega^{-1}}{A} \Omega \frac{\Omega^{-1}\mu}{A} = \frac{\mu'\Omega^{-1}\mu}{A} = \frac{B}{A^2}$$

g) Composición de las carteras con rendimientos esperados del 5% y 15% y su riesgo:

CARTERA CON RENDIMIENTO 5%		
Composición	Cartera GMV (mínima varianza)	2.035 → 203.50%
	Cartera D (mayor rendimiento)	-1,035 → -105.50%
Riesgo: Desviación típica	0.2434	

CARTERA CON RENDIMIENTO 15%		
Composición	Cartera GMV (mínima varianza)	-1.8256 → -182.56%
	Cartera D (mayor rendimiento)	2.8256 → 282.56%
Riesgo: Desviación típica	0.401	

Ambas carteras son eficientes, puesto que son combinación lineal de dos carteras que se encuentran sobre la frontera eficiente, por lo tanto, estas también resultarán eficientes.

h) Composición, media y riesgo de cada cartera objetivo:

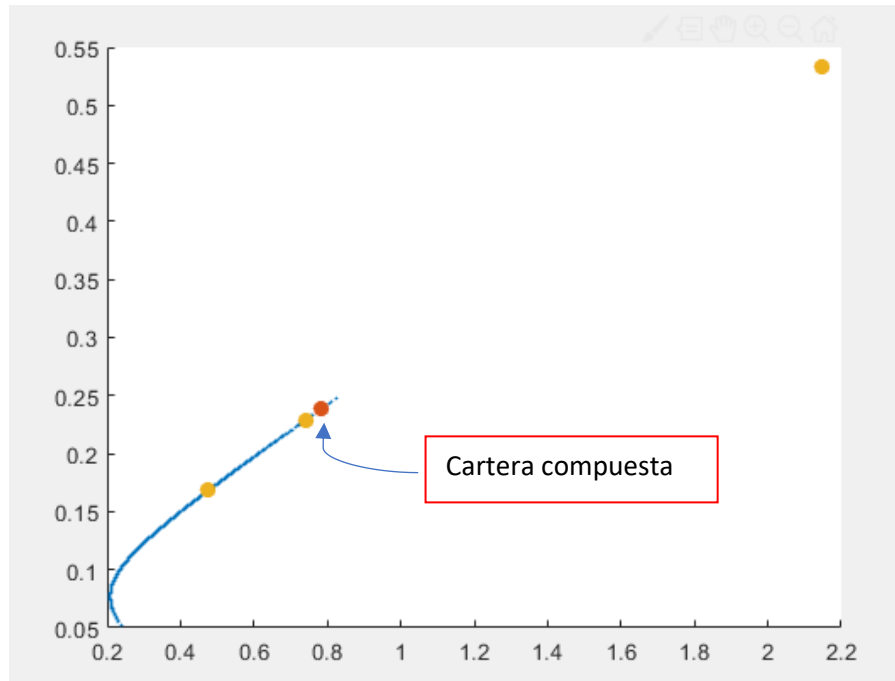
CARTERA DE JUBILACIÓN (Nivel de aversión al riesgo: 0.5)		
Composición	Activo A	0.5726 → 57.26%
	Activo B	0.0923 → 9.23%
	Activo C	0.3351 → 33.51%
Media	0.1682	
Desviación típica	0.4757	

CARTERA DE EDUCACIÓN (Nivel de aversión al riesgo: 0.3)		
Composición	Activo A	0.8927 → 89.27%
	Activo B	0.0150 → 1.50%
	Activo C	0.0923 → 9.23%
Media	0.2291	
Desviación típica	0.7425	

CARTERA DE HERENCIA (Nivel de aversión al riesgo: 0.1)		
Composición	Activo A	2.4934 → 249.34%
	Activo B	-0.3720 → -37.20%
	Activo C	-1.1214 → -112.14%
Media	0.5338	
Desviación típica	2.1479	

CARTERA MIXTA		
Composición	Cartera Jubilación	0.9407 → 94.07%
	Cartera Educación	0.0033 → 0.33%
	Cartera Herencia	0.0559 → 5.59%
Media	0.2383	
Desviación típica	0.7836	

→ ¿Son las tres carteras de destino eficientes? ¿Pertenece la 'cartera mixta' al PF?



Se observa que tanto las carteras objetivo como la cartera mixta se sitúan sobre la frontera eficiente, por lo que son carteras con mínima varianza para las distintas tasas de rendimiento esperado.

Por este motivo, la cartera mixta podrá obtenerse como combinación de la cartera de mínima varianza y la de máxima rentabilidad, tal que:

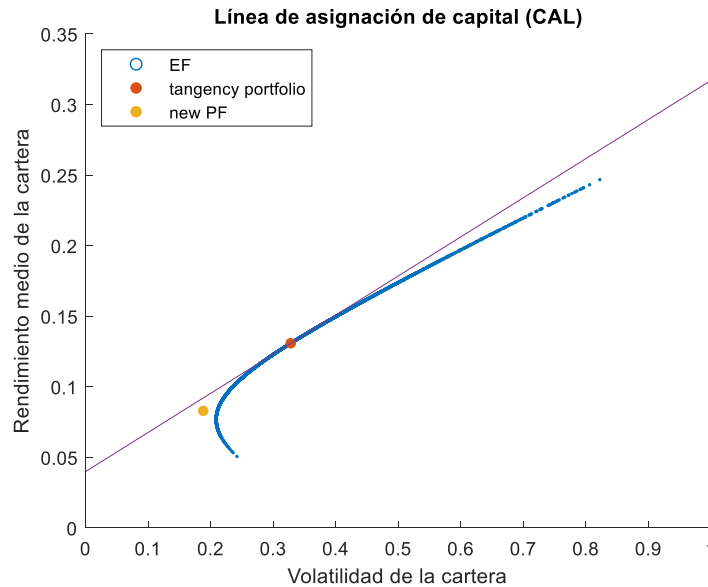
CARTERA DE TANGENCIA		
Composición mediante carteras	Cartera máxima rentabilidad (D)	-5.2337 → -523.37%
	Cartera mínima varianza (GMV)	6.2337 → 623.37%
Composición mediante activos	Activo A	0.9407 → 94.07%
	Activo B	0.0033 → 00.33%
	Activo C	0.0559 → 5.59%
Media	0.2383	

Comprobamos que la rentabilidad esperada calculada a través de la composición de activos coincide con la calculada a través de la composición de carteras objetivo.

i) Cartera de Tangencia cuando la rentabilidad del activo libre de riesgo es $r = 4\%$:

CARTERA DE TANGENCIA		
Composición	Activo A	0.3763 → 37.63%
	Activo B	0.1398 → 13.98%
	Activo C	0.4839 → 48.39%
Media	0.1309	
Desviación típica	0.3278	

- ➔ ¿Una cartera que contiene el 50% en el activo libre de riesgo, el 15% en acciones 1, el 20% en acciones 2 y el 15% en acciones 3 pertenece a la línea de asignación de capital (CAL)?



Se puede observar como esta nueva cartera no se situará sobre la línea de asignación de capital, por lo que, no pertenecerá a la frontera eficiente, es decir, que existirán carteras eficientes las cuales ofrezcan mayor rentabilidad para su mismo riesgo o menor riesgo para su misma rentabilidad.

j) Considerando la siguiente función de utilidad:

$$U(W) = W - 0.0114W^2 + 0.0002W^3$$

¿Es relevante para la selección óptima de la cartera del inversor la asimetría y la curtosis?

Dado que la utilidad esperada del rendimiento es tal que:

$$E[U(W)] = U(\mu_w) + \frac{1}{2} U^{(2)}(\mu_w) \sigma_p^2 + \frac{1}{3!} U^{(3)}(\mu_w) \sigma_p^3 SK_p + \frac{1}{4!} U^{(4)}(\mu_w) \sigma_p^4 KU_p$$

Donde $W = (1 + R_p)W_0$.

Esta utilidad esperada depende de la media, la varianza, la asimetría y la curtosis en general, es decir, que se basa hasta la expansión de Taylor de orden 4.

Sin embargo, en nuestro caso, dado que la ecuación de la utilidad del inversor es de orden 3, la tercera derivada existirá mientras que la cuarta será 0, lo que significará que la asimetría sí que estará incluida en el cálculo de $E[U(R_p)]$ mientras que la curtosis no.

En conclusión, la asimetría sí que resultará relevante en la selección óptima de la cartera del inversor, mientras que la curtosis no.

La demostración de la explicación anterior sería:

$$U'(W) = 1 - 2 * 0.0114W + 3 * 0.0002W^2$$

$$U''(W) = 2 * 0.0114 + 2 * 3 * 0.0002W$$

$$U'''(W) = 2 * 3 * 0.0002$$

$$U''''(W) = 0$$

k) Considerando la siguiente función de utilidad:

$$U(W) = \frac{W^{1-a}}{1-a} \quad \text{donde } a \neq 1$$

¿Es relevante para la selección óptima de la cartera del inversor la asimetría y la curtosis?

Siendo las derivadas de la expresión de utilidad las siguientes:

$$U'(W) = W^{-a}$$

$$U''(W) = -aW^{-(1+a)}$$

$$U'''(W) = a(1+a)W^{-(2+a)}$$

$$U''''(W) = -a(1+a)(2+a)W^{-(3+a)}$$

Al realizar la expansión de Taylor hasta el cuarto orden en torno a $E(W)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} U(W) &= U(E(W)) + E(W)^{-a}(W - E(W)) + \frac{1}{2!}(-aE(W)^{-(1+a)})(W - E(W))^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}a(1+a)E(W)^{-(2+a)}(W - E(W))^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}(-a(1+a)(2+a)E(W)^{-(3+a)})(W - E(W))^4 \end{aligned}$$

Por lo que, la utilidad esperada será:

$$\begin{aligned} E[U(W)] &= U(E(W)) + \frac{1}{2}(-aE(W)^{-(1+a)})\sigma_p^2 + \frac{1}{3!}a(1+a)E(W)^{-(2+a)}\sigma_p^3SK_p \\ &\quad + \frac{1}{4!}(-a(1+a)(2+a)E(W)^{-(3+a)})\sigma_p^4KU_p \end{aligned}$$

Donde $W = (1 + R_p)W_0$.

Y, basándonos en el argumento explicado en el apartado j:

- Si $a = -1 \rightarrow$ Los momentos de tercer y cuarto orden no existirán por lo que, ni la asimetría ni la curtosis serán relevantes a la hora de realizar la selección de la cartera óptima para el inversor.
- Si $a = -2 \rightarrow$ El momento de cuarto orden no existirá, por lo que, solo la asimetría será relevante a la hora de realizar la selección de la cartera óptima para el inversor, sin necesidad de fijarse en la curtosis.
- Si a fuera distinto de los valores anteriormente definidos, todos sus momentos incluida la curtosis serán relevantes para seleccionar la cartera óptima del inversor

Destacar, además, que en caso de que $\alpha = 0$, en este caso ni siquiera la varianza (momento de segundo orden) será relevante a la hora de realizar la selección de la cartera óptima para el inversor, la utilidad esperada de la riqueza solo dependerá de su media.

l) Considerando la siguiente función de utilidad:

$$U(W) = -e^{-\lambda W} \quad \text{donde } \lambda > 0$$

¿Es relevante para la selección óptima de la cartera del inversor la asimetría y la curtosis?

En este caso las derivadas de la expresión de utilidad las siguientes:

$$\begin{aligned} U'(W) &= \lambda e^{-\lambda W} \\ U''(W) &= -\lambda^2 e^{-\lambda W} \\ U'''(W) &= \lambda^3 e^{-\lambda W} \\ U''''(W) &= -\lambda^4 e^{-\lambda W} \end{aligned}$$

Al realizar la expansión de Taylor hasta el cuarto orden en torno a $E(W)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} U(W) &= U(E(W)) + \lambda e^{-\lambda E(W)}(W - E(W)) + \frac{1}{2!}(-\lambda^2 e^{-\lambda E(W)})(W - E(W))^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}\lambda^3 e^{-\lambda E(W)}(W - E(W))^3 + \frac{1}{4!}(-\lambda^4 e^{-\lambda E(W)})(W - E(W))^4 \end{aligned}$$

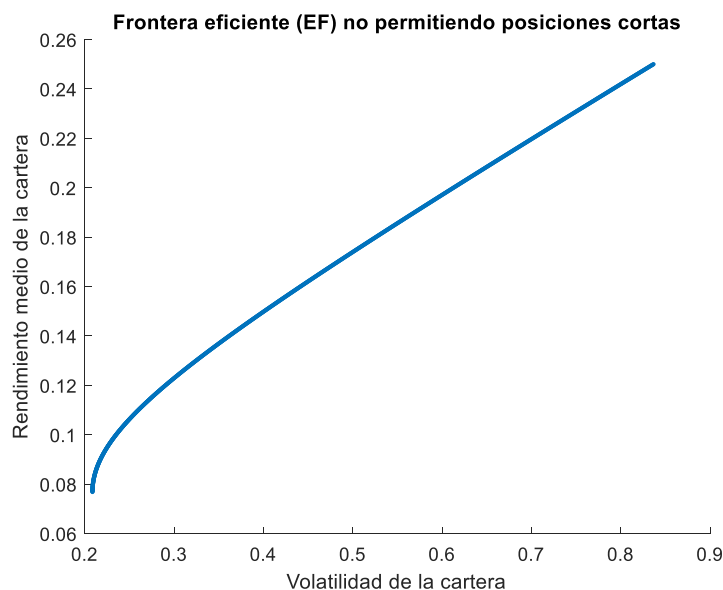
Por lo que, la utilidad esperada será:

$$\begin{aligned} E[U(W)] &= U(E(W)) + \frac{1}{2}(-\lambda^2 e^{-\lambda E(W)}) \sigma_p^2 + \frac{1}{3!}\lambda^3 e^{-\lambda E(W)} \sigma_p^3 SK_p \\ &\quad + \frac{1}{4!}(-\lambda^4 e^{-\lambda E(W)}) \sigma_p^4 KU_p \end{aligned}$$

Donde $W = (1 + R_p)W_0$.

Nuevamente, basándonos en el argumento explicado en el apartado j, en este caso, donde que la función de utilidad es infinitamente derivable, por lo que no hay ninguna derivada nula, lo que implica que cualquier momento de esta siempre existe, por lo que, siempre será relevante tanto la asimetría como la curtosis en la selección de la cartera óptima para el inversor.

m) Frontera Eficiente permitiendo solo posiciones largas en los activos:



n) Comparación entre momentos teóricos y estimados:

	Media	Varianza	Asimetría	Curtosis
Momentos teóricos de w_{GMV}	0.076807	0.043536	0	3
Momentos simulados de w_{GMV}	0.077161	0.043857	0.0073479	3.005

Se observa que la estimación realizada mediante simulación Montecarlo de los momentos resulta notablemente precisa, puesto que los datos obtenidos de la estimación son muy similares a los teóricos, siendo ligeramente superiores a los que corresponderían teóricamente.

o) Expresión de forma cerrada para el retorno esperado de $R_{p,t}$ que en términos de componentes activos y pasivos (descomposición de AP):

$$R_{T,t} = \alpha + \beta R_{M,t} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma_\varepsilon)$$

$$R_{M,t} = \delta_0 + \delta_1 R_{M,t-1} + \eta_t$$

$$\eta_t \sim iidN(0, \sigma_\eta)$$

$$|\delta_1| < 1$$

$$cov(\varepsilon_t, \eta_t) = 0 \quad \forall t$$

En primer lugar, estudiamos el proceso marginal de $R_{T,t}$:

$R_{M,t} = \delta_0 + \delta_1 LR_{M,t} + \eta_t \rightarrow (1 - \delta_1 L)R_{M,t} = \delta_0 + \eta_t$ donde L es el operador retardo de manera que $xL^k = x_{t-k}$

$$\begin{aligned} (1 - \delta_1 L)R_{T,t} &= (1 - \delta_1 L)\alpha + \beta(1 - \delta_1 L)R_{M,t} + (1 - \delta_1 L)\varepsilon_t \\ &= (1 - \delta_1 L)\alpha + \beta(\delta_0 + \eta_t) + (1 - \delta_1 L)\varepsilon_t \\ &= \underbrace{(1 - \delta_1 L)\alpha + \beta\delta_0}_{\text{Constante}} + \underbrace{\beta\eta_t + (1 - \delta_1 L)\varepsilon_t}_{\text{Parte estocástica (ruido: } Z_t)} \end{aligned}$$

$$E(Z_t) = E(\beta\eta_t + (1 - \delta_1 L)\varepsilon_t) = \beta E(\eta_t) + (1 - \delta_1 L)E(\varepsilon_t) = 0$$

$$\begin{aligned} Var(Z_t) &= Var(\beta\eta_t + (1 - \delta_1 L)\varepsilon_t) \\ &= Var(\beta\eta_t + \varepsilon_t - \delta_1 \varepsilon_{t-1}) = \beta^2 Var(\eta_t) + (1 - \delta_1)^2 Var(\varepsilon_t) + 2Cov(\eta_t, \varepsilon_t) \\ &= \beta^2 \sigma_\eta^2 + (1 - \delta_1^2) \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(Z_t, Z_{t-1}) &= Cov[(\beta\eta_t + (1 - \delta_1 L)\varepsilon_t), (\beta\eta_{t-1} + (1 - \delta_1 L)\varepsilon_{t-1})] \\ &= Cov[(\beta\eta_t + \varepsilon_t - \delta_1 \varepsilon_{t-1}), (\beta\eta_{t-1} + \varepsilon_{t-1} - \delta_1 \varepsilon_{t-2})] = -\delta_1 \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(Z_t, Z_{t-2}) &= Cov[(\beta\eta_t + (1 - \delta_1 L)\varepsilon_t), (\beta\eta_{t-2} + (1 - \delta_1 L)\varepsilon_{t-2})] \\ &= Cov[(\beta\eta_t + \varepsilon_t - \delta_1 \varepsilon_{t-1}), (\beta\eta_{t-2} + \varepsilon_{t-2} - \delta_1 \varepsilon_{t-3})] = 0 \end{aligned}$$

$$Cov(Z_t, Z_{t-k}) = 0 \quad k \geq 2$$

Por lo que, el proceso marginal de $R_{T,t}$ sigue un modelo ARMA(1)

Ahora, realizando la descomposición AP para el rendimiento esperado de $R_{p,t}$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} E(R_{p,t}) &= E(w_t R_{T,t}) + (1 - E(w_t))R_f = Cov(w_t, R_{T,t}) + E(w_t)E(R_t) + (1 - E(w_t))R_f \\ &= \sigma_{w,R} + \mu_w \mu_R + (1 - \mu_w)R_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donde } \sigma_{w_t, R_{T,t}} &= Cov(w_t, R_{T,t}) = Cov(\lambda_0 + \lambda_1 R_{T,t-1}, R_{T,t}) = Cov(\lambda_0 + \lambda_1(\alpha + \beta R_{M,t-1} + \varepsilon_{t-1}), \alpha + \beta R_{M,t} + \varepsilon_t) \\ &= Cov(\lambda_0 + \lambda_1(\alpha + \beta(\delta_0 + \delta_1 R_{M,t-2} + \eta_{t-1}) + \varepsilon_{t-1}), \alpha + \beta(\delta_0 + \delta_1 R_{M,t-1} + \eta_t) + \varepsilon_t) \\ &= Cov(\lambda_0 + \lambda_1(\alpha + \beta(\delta_0 + \delta_1 R_{M,t-2} + \eta_{t-1}) + \varepsilon_{t-1}), \alpha + \beta(\delta_0 + \delta_1 R_{M,t-1} + \eta_t) + \varepsilon_t) \\ &= Cov(\lambda_0 + \lambda_1(\alpha + \beta(\delta_0 + \delta_1 R_{M,t-2} + \eta_{t-1}) + \varepsilon_{t-1}), \alpha + \beta(\delta_0 + \delta_1(\delta_0 + \delta_1 R_{M,t-2} + \eta_{t-1}) + \eta_t) + \varepsilon_t) \\ &= Cov(\lambda_1 \beta \eta_{t-1}, \beta \delta_1 \eta_{t-1}) = \lambda_1 \beta^2 \delta_1 \sigma_\eta^2 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$E(R_{p,t}) = \lambda_1 \beta^2 \delta_1 \sigma_\eta^2 + \mu_w \mu_R + (1 - \mu_w)R_f \quad \text{donde } \mu_w = \lambda_0 + \lambda_1 \mu_R$$

$$E(R_{p,t}) = \underbrace{\lambda_1 \beta^2 \delta_1 \sigma_\eta^2}_{\text{Componente activo}} + \underbrace{(\lambda_0 + \lambda_1 \mu_R) \mu_R + (1 - \lambda_0 - \lambda_1 \mu_R) R_f}_{\text{Componente pasivo}}$$

El inversor en función de qué estrategia decida seguir deberá tomar una posición corta o una posición larga en la cartera de tangencia.

Si toma una posición corta ($\lambda_1 < 0$) estará optando por la estrategia de reversión a la media, dado que cuando el rendimiento sea positivo ($R_{T,t-1} > 0$), reducirá posiciones en la cartera de tangencia para reducir su rentabilidad convergiendo hacia el rendimiento medio, mientras que cuando la rentabilidad sea negativa ($R_{T,t-1} < 0$), incrementará posiciones en la cartera de tangencia con el fin de obtener un rendimiento como el esperado.

Por el contrario, si el inversor toma una posición larga en la cartera de tangencia ($\lambda_1 > 0$), estará optando por la estrategia de momentum la cual implica que ante rendimientos pasados positivos ($R_{T,t-1} > 0$) se incrementa el peso en la cartera de tangencia y ante rendimientos pasados negativos ($R_{T,t-1} < 0$), se reduce el peso de la inversión dedicado a la cartera de tangencia.

Por otra parte, sí que existirá parte de componente activo siempre que la correlación de la cartera de tangencia con su retardo sea $\neq 0$, dado que ante la independencia entre rentabilidades eliminará la gestión activa de la estrategia. Por lo que, una $\delta_1 = 0$ implicará la no existencia de componente activo, haciendo que los pesos sean constantes en el tiempo.


p) Expresión de forma cerrada para el retorno esperado de $R_{T,t}$ que en términos de componentes activos y pasivos (descomposición de AP):

$$\begin{aligned} R_{T,t} &= \alpha + \beta R_{M,t} + \varepsilon_t & \varepsilon_t &\sim iidN(0, \sigma_\varepsilon) \\ R_{M,t} &= \mu_M + \eta_t + \theta \eta_{t-1} & \eta_t &\sim iidN(0, \sigma_\eta) \\ |\theta| &< 1 & cov(\varepsilon_t, \eta_t) &= 0 \forall t \end{aligned}$$

En primer lugar, estudiamos el proceso marginal de $R_{T,t}$:

$$R_{M,t} = \mu_M + \eta_t(1 + \theta L) \text{ donde } L \text{ es el operador retardo de manera que } xL^k = x_{t-k}$$

$$R_{T,t} = \alpha + \beta(\mu_M + \eta_t(1 + \theta L)) + \varepsilon_t = \alpha + \beta\mu_M + \beta\eta_t(1 + \theta L) + \varepsilon_t$$



Constante Parte variable (ruido: Z_t)

$$E(Z_t) = E(\beta\eta_t(1 + \theta L) + \varepsilon_t) = \beta(1 + \theta L)E(\eta_t) + E(\varepsilon_t) = 0$$

$$\begin{aligned} Var(Z_t) &= Var(\beta\eta_t(1 + \theta L) + \varepsilon_t) = \beta^2(1 + \theta L)^2 Var(\eta_t) + Var(\varepsilon_t) + 2Cov(\eta_t, \varepsilon_t) \\ &= \beta^2(1 + \theta L)^2 \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(Z_t, Z_{t-1}) &= Cov[(\beta\eta_t(1 + \theta L) + \varepsilon_t), (\beta\eta_{t-1}(1 + \theta L) + \varepsilon_{t-1})] \\ &= Cov[(\beta\eta_t(1 + \theta L) + \varepsilon_t), (\beta\eta_{t-1} + \beta\theta L\eta_{t-1} + \varepsilon_{t-1})] \\ &= Cov[(\beta\eta_t(1 + \theta L) + \varepsilon_t), (\beta\eta_{t-1} + \beta\theta\eta_{t-2} + \varepsilon_{t-1})] = \beta^2\theta\sigma_\eta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(Z_t, Z_{t-2}) &= Cov[(\beta\eta_t(1 + \theta L) + \varepsilon_t), (\beta\eta_{t-2}(1 + \theta L) + \varepsilon_{t-2})] \\ &= Cov[(\beta\eta_t + \beta\theta\eta_{t-1} + \varepsilon_t), (\beta\eta_{t-2} + \beta\theta\eta_{t-3} + \varepsilon_{t-1})] = 0 \end{aligned}$$

$$Cov(Z_t, Z_{t-k}) = 0 \quad k \geq 2$$

Por lo que, el proceso marginal de $R_{T,t}$ sigue un modelo MA(1)

Ahora, realizando la descomposición AP para el rendimiento esperado de $R_{p,t}$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} E(R_{p,t}) &= E(w_t R_{T,t}) + (1 - E(w_t))R_f = Cov(w_t, R_{T,t}) + E(w_t)E(R_t) + (1 - E(w_t))R_f \\ &= \sigma_{w,R} + \mu_w \mu_R + (1 - \mu_w)R_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donde } \sigma_{w_t, R_{T,t}} &= Cov(w_t, R_{T,t}) = Cov(\lambda_0 + \lambda_1 R_{T,t-1}, R_{T,t}) = Cov(\lambda_0 + \lambda_1 R_{T,t-1}, \alpha + \beta R_{M,t} + \varepsilon_t) \\ &= Cov(\lambda_0 + \lambda_1 R_{T,t-1}, \alpha + \beta(\mu_M + \eta_t + \theta\eta_{t-1}) + \varepsilon_t) = Cov(\lambda_0 + \lambda_1(\alpha + \beta R_{M,t-1} + \varepsilon_{t-1}), \alpha + \beta(\mu_M + \eta_t + \theta\eta_{t-1}) + \varepsilon_t) \\ &= Cov(\lambda_0 + \lambda_1(\alpha + \beta(\mu_M + \eta_{t-1} + \theta\eta_{t-2}) + \varepsilon_{t-1}), \alpha + \beta(\mu_M + \eta_t + \theta\eta_{t-1}) + \varepsilon_t) = Cov(\lambda_1\beta\eta_{t-1}, \beta\theta\eta_{t-1}) = \lambda_1\beta^2\theta\sigma_\eta^2 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$E(R_{p,t}) = \lambda_1\beta^2\theta\sigma_\eta^2 + \mu_w \mu_R + (1 - \mu_w)R_f \quad \text{donde } \mu_w = \lambda_0 + \lambda_1\mu_R$$

$$E(R_{p,t}) = \underbrace{\lambda_1\beta^2\theta\sigma_\eta^2}_{\text{Componente activo}} + \underbrace{(\lambda_0 + \lambda_1\mu_R)\mu_R + (1 - \lambda_0 - \lambda_1\mu_R)R_f}_{\text{Componente pasivo}}$$

Nuevamente, el tipo de estrategia que decida tomar el inversor condicionará la posición sobre la que se situará con respecto a la cartera de tangencia (explicado en detalle en el apartado o) y la correlación de esta con sus retardos determinará la existencia o no de componente activo, es decir, en el caso de $\theta = 0$ no existirá componente activo debido a que se eliminará la correlación entre los pesos y los rendimientos, siendo por ello las ponderaciones sobre estos constantes en el tiempo.

Ejercicio 2:

Sea r_1 y r_2 denota variables aleatorias para los rendimientos de dos acciones que tienen la siguiente densidad conjunta:

$$f(r_1, r_2) = \begin{cases} \alpha + \beta r_1 + \gamma r_2 & -1 \leq r_1 \leq 2, -2 \leq r_2 \leq 2.5 \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases}$$

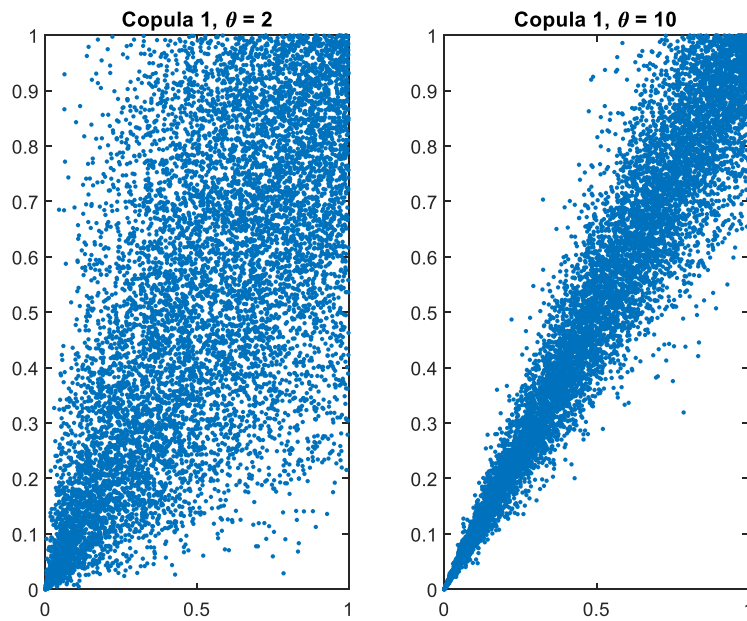
Siendo $\alpha = 0.0642$, $\beta = 0.0049$ y $\gamma = 0.0296$

a) Representación de cópulas:

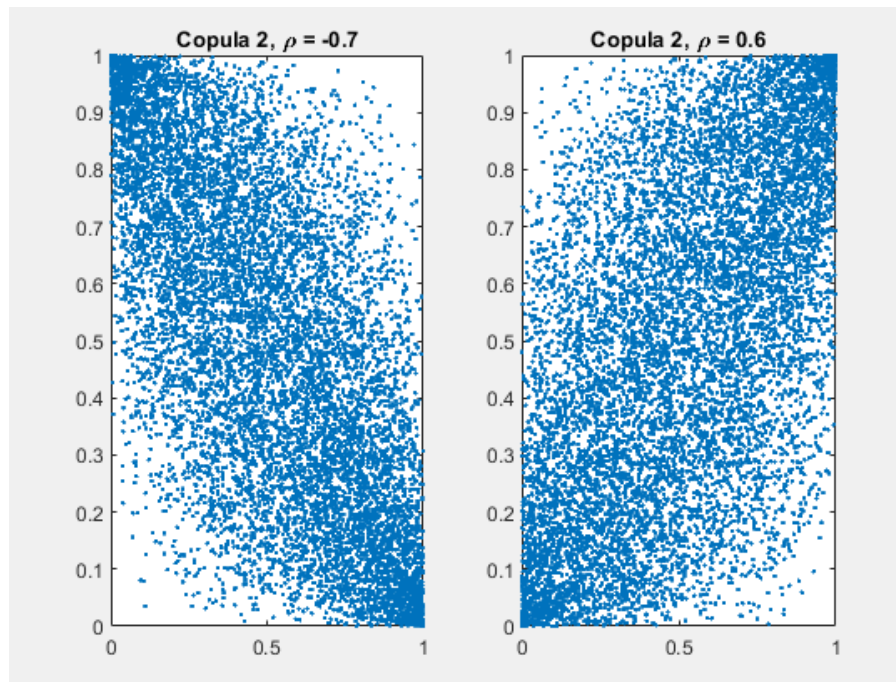
i) Cópula 1:

$$w = u^{-\theta-1} [u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-\frac{\theta+1}{\theta}}, \theta > 0$$

Considerando dos casos particulares: $\theta = 2$ y $\theta = 10$



ii) Cópula 2:
Gaussiana con $\rho \in [-1,1]$, considerando dos casos particulares: $\rho = -0.7$ y $\rho = 0.6$.



b) Estadísticos de las cópulas generadas:

	Cópula 1 ($\theta = 2$)	Cópula 1 ($\theta = 10$)	Cópula 2 ($\rho = 0.7$)	Cópula 2 ($\rho = 0.6$)
Media	0.66862	0.46261	0.81837	0.82923
Desviación típica	1.0653	1.3684	0.69828	0.96398
Cuantil 1%	-1.3253	-1.4361	-0.8461	-1.4108
Cuantil 5%	-1.1171	-1.2808	-0.49279	-0.93824
Cuantil 95%	1.9049	2.0097	1.7126	2.1694
Cuantil 99%	2.141	2.1347	1.8754	2.3229
Correlación	-0.55926	-0.69915	-0.684	0.55616

c) Matriz de correlación, cartera eficiente, w_{GMV} y VaR:

Considerando las siguientes carteras:

P1: (50% stock 1, 50% stock 2) con cópula 1 donde $\theta = 2$

P2: (20% stock 1, 80% stock 2) con cópula 2 donde $\rho = -0.7$

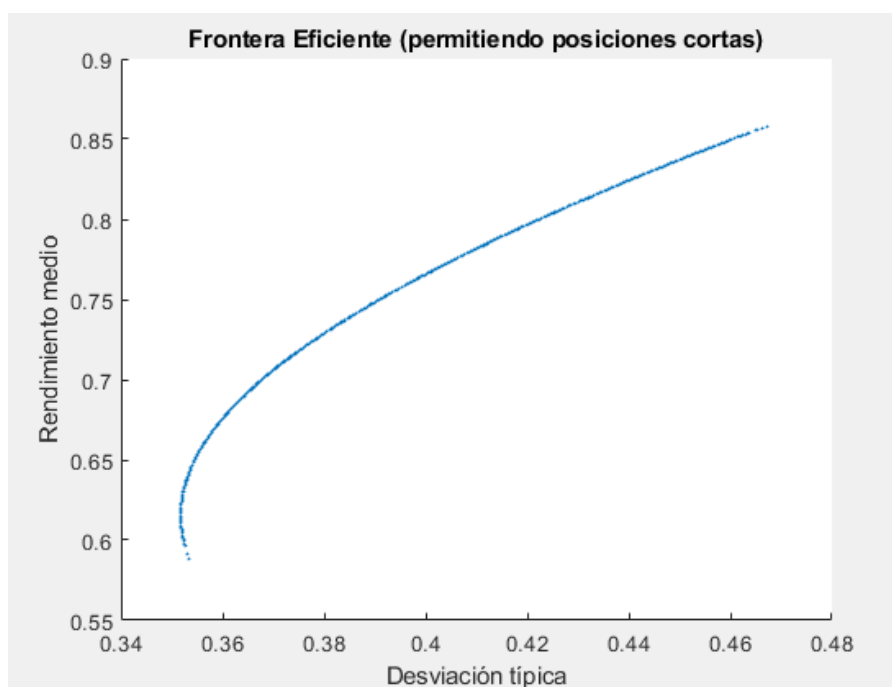
P3: (70% stock 1, 30% stock 2) con cópula 1 donde $\theta = 10$

P4: (15% stock 1, 85% stock 2) con cópula 2 donde $\rho = 0.6$

i) Matriz de correlación de las cuatro carteras:

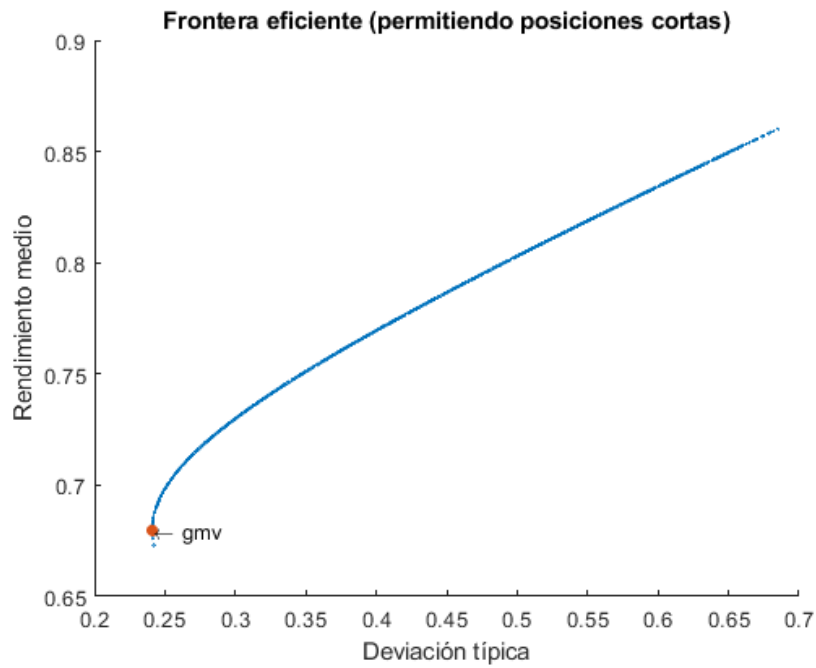
$$\begin{pmatrix} \rho_{P1} & \rho_{P1P2} & \rho_{P1P3} & \rho_{P1P4} \\ \rho_{P1P2} & \rho_{P2} & \rho_{P2P3} & \rho_{P2P4} \\ \rho_{P1P3} & \rho_{P2P3} & \rho_{P3} & \rho_{P3P4} \\ \rho_{P1P4} & \rho_{P2P4} & \rho_{P3P4} & \rho_{P4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7848 & 0.7362 & 0.6908 \\ 0.7848 & 1 & 0.2764 & 0.8213 \\ 0.7362 & 0.2764 & 1 & 0.1999 \\ 0.6908 & 0.8213 & 0.1999 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Frontera eficiente a partir de las cuatro carteras propuestas:



iii) Cartera de Mínima Varianza Global y estadísticos:

CARTERA DE MÍNIMA VARIANZA GLOBAL		
Composición	Cartera P1	-0.8576 → -85.76%
	Cartera P2	1.5006 → 150.06%
	Cartera P3	0.5197 → 51.97%
	Cartera P4	-0.1627 → -16.27%
Media	0.6153	
Varianza	0.1237	



iv) VaR de la Cartera de Mínima Varianza Global al 1% y al 5%:

$VaR_{1\%} = -0.1685 \rightarrow$ Con un 99% de probabilidad los rendimientos de la cartera no descenderán por debajo de -16.85%

$VaR_{5\%} = 0.1072 \rightarrow$ Con un 95% de probabilidad los rendimientos de la cartera no descenderán por debajo de 10.72%

Ejercicio 3:

Sea r_1 y r_2 denota variables aleatorias para los rendimientos de dos acciones que tienen la siguiente densidad conjunta:

$$f(r_1, r_2) = \begin{cases} \alpha + \beta r_1 + \gamma r_2 & -1 \leq r_1 \leq 2, -2 \leq r_2 \leq 2.5 \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases}$$

Siendo $\alpha = 0.0642$, $\beta = 0.0049$ y $\gamma = 0.0296$

- a) Obtención de la función de probabilidad bivalente $g(r_1, r_2)$, dada la cópula gaussiana bivalente y de las funciones de densidad marginales de r_1 y r_2 :

Sea $f(r_1, r_2) = c^G(F_1(r_1), F_2(r_2)) \prod_{i=1}^2 f_i(r_i)$ la función de densidad de la cópula, entonces:

$$\begin{aligned} g(r_1, r_2) &= \sum_{t=1}^T \ln c^G + \sum_{t=1}^T \ln(f(r_1)f(r_2)) = \\ &= -\frac{T}{2} \ln |P| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \eta'_t (P^{-1} - I) \eta_t + \sum_{t=1}^T \ln(f(r_1)f(r_2)) \end{aligned}$$

Donde $f(r_1) = 0.3222 + 0.0222r_1$ y $f(r_2) = 0.2 + 0.0889r_2$

- b) Función de probabilidad bivalente $g(r_1, r_2)$ dada la cópula de Clayton:

$$\begin{aligned} C^{\text{clayton}}(u_1, u_2, \theta) &= (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \\ \frac{\partial C^{\text{clayton}}}{\partial u_1} &= \frac{\partial C^{\text{clayton}}}{\partial u_1^{-\theta}} \frac{\partial u_1^{-\theta}}{\partial u_1} = \frac{-1}{\theta} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} (-\theta u_1^{-(\theta+1)}) \\ &= (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} u_1^{-(\theta+1)} \\ \frac{\partial C^{\text{clayton}}}{\partial u_2} &= \frac{\partial C^{\text{clayton}}}{\partial u_2^{-\theta}} \frac{\partial u_2^{-\theta}}{\partial u_2} = \frac{-(1+\theta)}{\theta} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-2} u_1^{-(\theta+1)} (-\theta u_2^{-(\theta+1)}) \\ &= (1+\theta) (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-2} u_1^{-(\theta+1)} u_2^{-(\theta+1)} \\ C^{\text{clayton}}(u_1, u_2, \theta) &= \frac{\partial^2 (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}}{\partial u_1 \partial u_2} = (1+\theta) (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-2} u_1^{-(\theta+1)} u_2^{-(\theta+1)} \end{aligned}$$

$$g(r_1, r_2) = T \ln(1 + \theta) + \sum_{t=1}^T \left(-\frac{1}{\theta} - 2 \right) \ln(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1) - (\theta + 1) \sum_{t=1}^T \ln(u_1 u_2) \\ + \sum_{t=1}^T \ln(f(r_1) f(r_2))$$

c) Función de probabilidad bivalente $g(r_1, r_2)$ dada la cópula de FGM:

$$C^{FGM} = u_1 u_2 [1 + \lambda(1 - u_1)(1 - u_2)], \quad \lambda \in [-1, 1] \\ \frac{\partial C}{\partial u_1} = u_2 \lambda (1 - u_1)(1 - u_2) + u_1 u_2 (-\lambda)(1 - u_1) \\ \frac{\partial^2 C}{\partial u_1 \partial u_2} = \lambda(1 - u_1)(1 - u_2) - \lambda u_2(1 - u_1) - \lambda u_1(1 - u_2) + u_1 u_2 \lambda$$

Reordenando:

$$c^{FGM} = 1 + \lambda(2u_1 - 1)(2u_2 - 1) \\ g(r_1, r_2) = T \ln(\lambda) + \sum_{t=1}^T \ln((2u_1 - 1)(2u_2 - 1)) + \sum_{t=1}^T \ln(f(r_1) f(r_2))$$

d) Obtención de la expresión general para las curvas de nivel correspondientes a la pdf de la cópula FGM y representación de las curvas:

Las curvas de nivel se obtienen a partir de igualar la c^{FGM} a un valor constante. Se presentan de forma que u_1 queda en función de u_2 :

$$c^{FGM} = k \rightarrow u_1 = \frac{1}{2} + \frac{k - 1}{2\lambda(2u_2 - 1)}$$

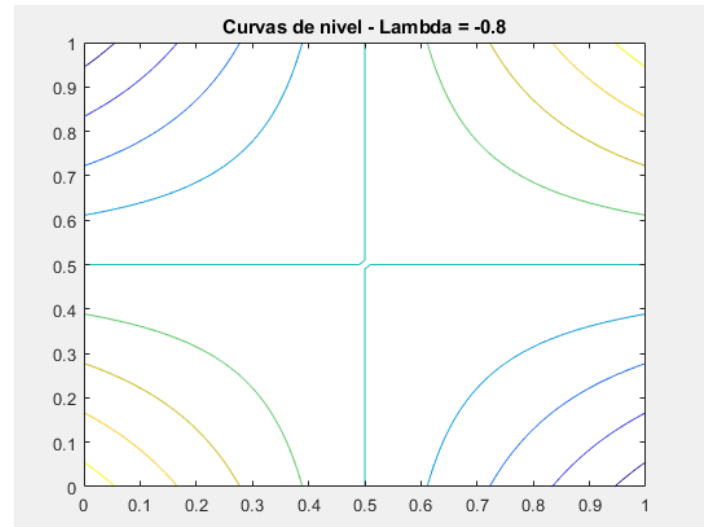
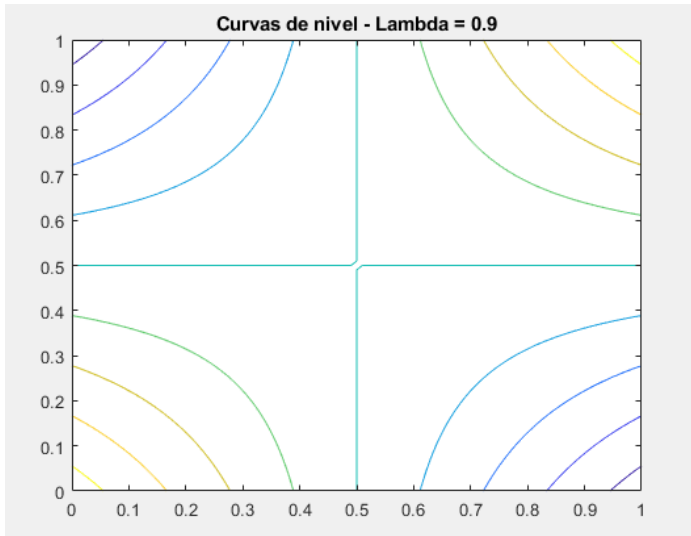
De tal forma que a la hora de obtener la curva para el nivel k se obtiene un valor de u_1 que depende del valor de u_2 .

¿Cuáles son las expresiones para los pdfs marginales de la FGM pdf?

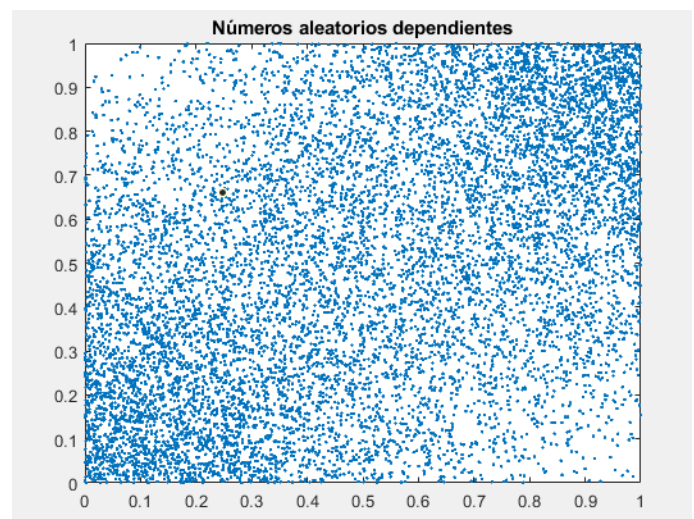
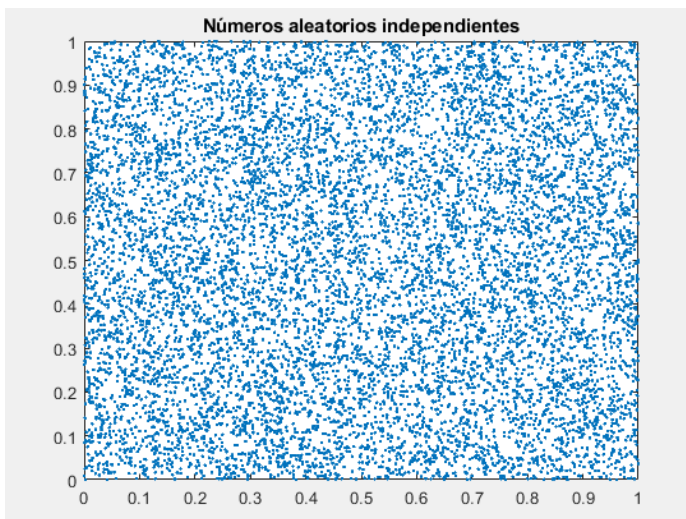
$$pdf_v^{marg} = \int_0^1 c^{FGM} du = 1 \\ pdf_u^{marg} = \int_0^1 c^{FGM} dv = 1$$

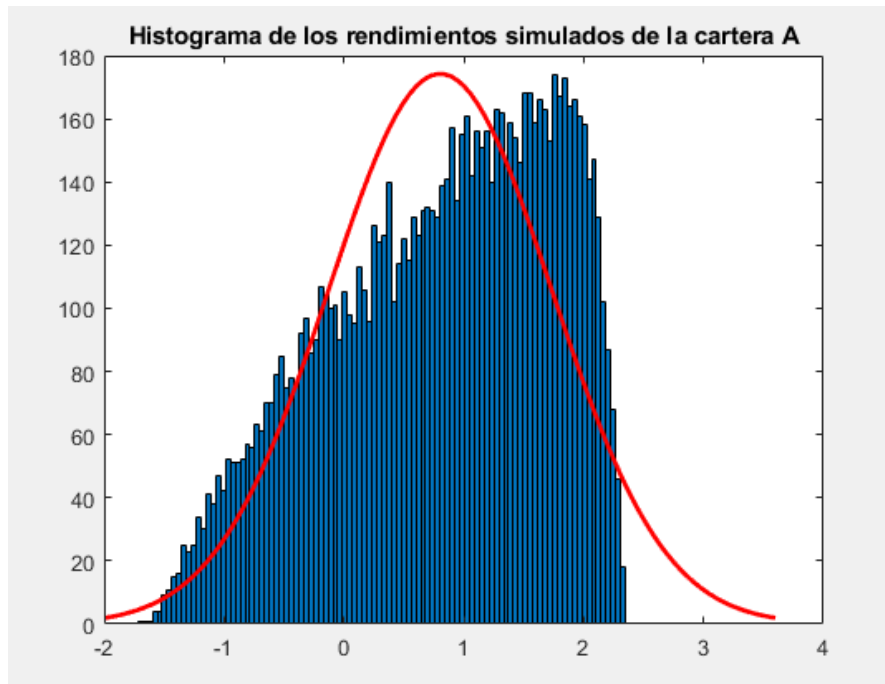
Como debe suceder para que se pueda definir como cópula la función del enunciado (la distribución marginal de probabilidad es uniforme).

La representación de las curvas de nivel generadas es:



e) Obtención del histograma de los rendimientos simulados mediante 'conditional sampling' de la cartera A:





- f) Expected shortfall (ES) de los rendimientos simulados de la cartera A para aquellos rendimientos por debajo del VaR de muestra de la cartera A al 1%:

VaR _{1%}	-1.2942
ES _{1%}	-1.4032