a) Valoración de un Interest Rate Swap

Se procede a valorar un IRS con fecha de comienzo y de valoración 31/12/2018 desde el punto del pagador fijo. Se trata de un derivado con vencimiento a 20 años con nominal $N = 10MM€$.

La pata fija paga un cupón del $c = 2{,}4215\%$ con una frecuencia anual (20 pagos en total) bajo la base $^{30}/_{360}$. El NPV de la parte fija se calcula evaluando los pagos que realizará hasta su vencimiento siguiendo el cupón fijo:

$$NPV_{fixed} = \sum_{i=1}^{T} N \cdot c \cdot \overline{\Delta}_i \cdot DF(\overline{T}_i)$$

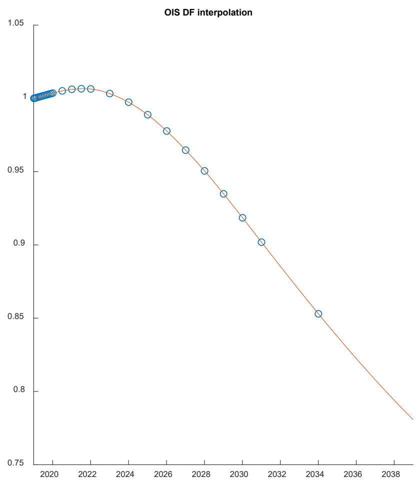
Donde $\overline{\Delta}_i$ es la fracción de tiempo entre cada pago, que están definidos entre el periodo $0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < T$ bajo la base $^{30}/_{360}$, y $DF(\overline{T}_i)$ es el factor de descuento a fecha t_i obtenido a partir de los , el cual nos permite actualizar todos los pagos realizado por esta parte a la fecha de valoración.

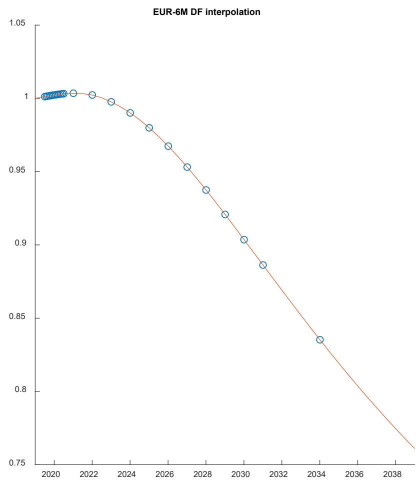
Así mismo el NPV de la parte flotante realiza pagos semianuales (40 pagos en total) sobre la base $^{Act}/_{360}$, con valor:

$$NPV_{float} = \sum_{i=1}^{T} N \cdot \Delta_i \cdot L_i^0 \cdot DF(T_i)$$

Donde L_i^0 es el tipo forward anualizado en la fracción temporal i definida, bajo la base de cálculo correspondiente, como la fracción de año entre las fechas $[t_{i-1}, t_i]$. El swap paga, para cada tenor, el tipo forward observado en el fixing date cuando vence el Euribor, en la fecha de pago de cada tenor.

El índice de referencia del swap es el Euribor 6M, del cual se dispone valores de la curva para algunos vencimientos que no coinciden con los pagos del swap, por lo tanto se deben interpolar los factores de descuento calculados a partir de los rendimientos de instrumentos del mercado a las fechas de pago del swap. Por otra parte descontaremos estos pagos según el factor de descuento dado por el OIS (*Overnight Index Swap*), que también tendremos que interpolar en las fechas de pago (pues está colaterizado en €). Esta interpolación se ha realizado a través de un spline cúbico, el cual como se puede observar en la siguiente gráfica parece realizar un buen ajuste a los valores observados en el mercado, sin embargo no es del todo correcto pues no tiene significado económico y por tanto solo es un ajuste matemático a unos valores observados.

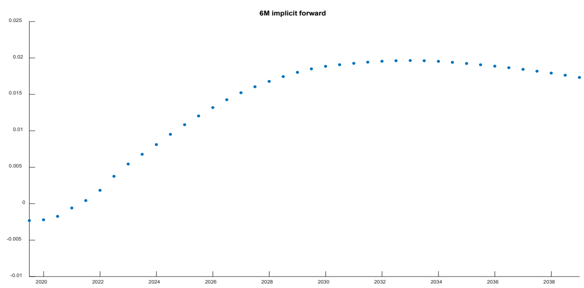




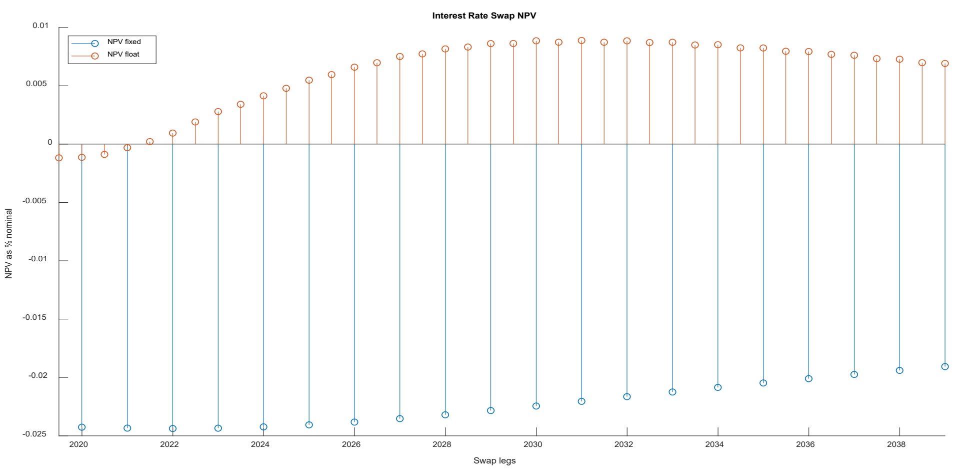
El forward implícito anualizado (L_T^0) en el periodo $[t, T]$ se obtiene a partir de los factores de descuento del EURIBOR a 6M (el índice de referencia). Aplicando que $\Delta_T L_T^0 = r(t, T)$

$$\frac{1}{FD(0,T)} = \frac{1}{1 + r(t,T)} \frac{1}{FD(0,t)} \quad \rightarrow L_T^0 = \frac{\frac{FD(0,t)}{FD(0,T)} - 1}{\Delta_T}$$

Los factores de descuento en las fechas de pago se obtienen a partir de la interpolación del Euribor, tomando el FD en el momento de valoración del OIS a 1 día.



Desde el punto de vista del pagador fijo, este pagará la pata fija del swap (flujo negativo) y recibirá la pata flotante (flujo positivo). A continuación se representa el valor esperado en el instante de valoración de cada pago del swap para las dos patas como porcentaje del nocional



Y los pagos realizados y recibidos desde el punto de vista del pagador fijo en cada fecha de pago:

Fecha de pago	Pata fija (€)	Pata flotante (€)
30/06/2019	0	-11674,7546
31/12/2019	-242578,118	-11340,2912
30/06/2020	0	-8841,27906
31/12/2020	-243382,23	-3046,85663
30/06/2021	0	2170,60237
31/12/2021	-243740,499	9435,33408
30/06/2022	0	18971,5327
31/12/2022	-243443,096	27896,8536
30/06/2023	0	34098,0993
31/12/2023	-242327,832	41366,4716
30/06/2024	0	47799,5145
31/12/2024	-240588,233	54770,9122
30/06/2025	0	59559,6064
31/12/2025	-238217,266	65911,338
30/06/2026	0	69703,8199
31/12/2026	-235271,555	75085,5224
30/06/2027	0	77290,2138
31/12/2027	-231966,575	81552,2806
30/06/2028	0	83166,786
31/12/2028	-228349,084	86123,6793
30/06/2029	0	86216,3505
31/12/2029	-224455,434	88502,3882
30/06/2030	0	87301,2381
31/12/2030	-220454,041	88792,3686
30/06/2031	0	87279,8205
31/12/2031	-216423,422	88463,3134
30/06/2032	0	87019,8346
31/12/2032	-212428,216	87264,1267
30/06/2033	0	84920,8878
31/12/2033	-208515,493	85166,2996
30/06/2034	0	82437,8742
31/12/2034	-204696,821	82363,0967
30/06/2035	0	79555,2815
31/12/2035	-200990,086	79337,913
30/06/2036	0	76904,9075
31/12/2036	-197398,718	76115,2576
30/06/2037	0	73224,162
31/12/2037	-193955,209	72714,2411
30/06/2038	0	69787,2343
31/12/2038	-190662,407	69127,77

Con estos flujos obtenidos (ya descontados al tipo OIS de la fecha de pago) se obtiene, desde el punto de vista del pagador fijo:

- El NPV de la pata fija es -4,459,844.34 €
- El NPV de la pata flotante es 2,432,493.75 €
- El NPV del IRS es -2,027,350.59 €

b) Valoración de cap

Ahora se va a valorar un Interest Rate Cap con frecuencia de pago semianual y nominal $N = 10MM€$. La fecha de comienzo del derivado es el 31/12/2018 y la de vencimiento el 31/12/2038. Este derivado se puede entender como una suma de caplets en los que la fecha de pago de uno coincide con la fixing date del siguiente en los tenores que se encuentran entre la fecha de inicio y la de vencimiento. El NPV del cap es la suma de los valores de cada caplet:

$$NPV_{cap} = \sum_{i=1}^{40} N \cdot \Delta_i \cdot E_0\left[\max\left(L_i^0 - K, 0\right)\right]$$

Donde *K* es el strike del caplet. Para valorar este derivado es necesario realizar un supuesto sobre la distribución del tipo forward implícito. Observando el índice al que está referenciado el producto (Euribor 6M) se ve que este alcanza tipos de interés negativo, por lo tanto es necesario aplicar un modelo que permita esta característica. Una posibilidad es el modelo Normal, el cual cumple que *L* sigue el modelo:

$$dL_t = \sigma_N dW_t$$

Donde W_t es un movimiento browniano y σ_N es la volatilidad a vencimiento bajo este modelo. Debido a cómo se referencian el mercado los caps, nombrando solo la volatilidad a vencimiento, para cada caplet que se valore utilizaremos esta volatilidad, en vez de la volatilidad correspondiente al vencimiento de cada caplet. Según este modelo, el valor de cada caplet en la fecha de valoración es

$$c_N(T,K) = e^{-rT}\left[(L(t) - K)N(d) + \sigma_N\sqrt{t}N'(d)\right], \qquad d = \frac{L(t_i) - K}{\sigma_N\sqrt{t_{i-1}}}$$

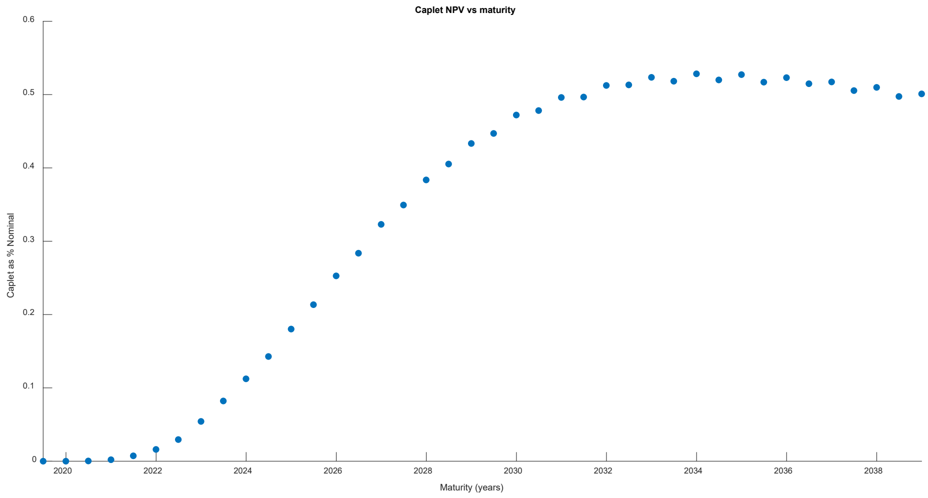
Por tanto el NPV del cap es (Δ_i es la fracción de año en $[t_{i-1}, t_i]$):

$$NPV_{cap} = N\Delta_1(L_1 - K)^+ + \sum_{i=2}^{40} N \cdot \Delta_i \cdot FD(0,t_i)\left[(L(t_i) - K)N(d) + \sigma_N\sqrt{t_{i-1}}N'(d)\right]$$

Como estamos valorando el cap en $t = 0$, conocemos el valor del tipo forward implícito a 6 meses, por tanto en esta fixing date ya conocemos cual es el tipo forward a pagar en el vencimiento del primer tenor.

La volatilidad a vencimiento σ_N en $K = 0.015133$ se obtiene interpolando a partir de los datos de la volatilidad de mercado para el tenor 20 años que se encuentra en la tabla de volatilidades normales (definidos en puntos básicos). La volatilidad obtenida mediante una interpolación mediante splines cúbicos (similar a la de los factores de descuento anteriores) es $\sigma_N = 0.635\%$.

Utilizando estos datos el valor de cada caplet para el modelo normal como porcentaje del nominal es



Y utilizando la ecuación para el NPV del cap, desde el punto de vista del vendedor:

- $NPV_{cap} = -1{,}339{,}032€$

c) Aplicando el modelo shifted log-normal ($\theta = 3\%$) obtener la volatilidad a vencimiento del cap valorado en el apartado anterior.

Ahora suponemos que el tipo forward sigue un modelo de difusión log-normal

$$d(L_t + \theta) = \sigma_{DD}(L_t + \theta)W_t$$

Donde el tipo forward se desplaza hacia la parte positiva para permitir tipos forwards (L_i) y σ_{DD} es la volatilidad. El valor del cap, bajo este modelo para el tipo forward, es

$$NPV_{cap} = \sum_{i=2}^{40} N \cdot \Delta_i \cdot C_{B76}(t_i, K + \theta, L_i^0 + \theta, \sigma_{DD})$$

Donde C_{B76} es el precio de cada uno de los caplets. El primer caplet, entre la fecha de valoración y el 30/06/2019 tiene valor 0 porque en el instante de valoración conocemos el valor del tipo forward, que es el OIS a 6 meses, y por lo tanto sabemos que va a ser menor que el strike y no se ejercerá. Puesto que conocemos el NPV del cap valorado mediante el modelo normal ajustado por los parámetros estimados a través del mercado, cualquier cap con las mismas características valorado con cualquier otro modelo debe tener el mismo NPV que este cap.

Esta característica nos permite definir obtener cual es la volatilidad a vencimiento bajo el modelo shifted log-normal para este cap. Mediante una función que encuentra el cero entre la diferencia del valor esperado mediante el modelo shifted log-normal y el valor de mercado del cap se encuentra el valor de la volatilidad equivalente (o a vencimiento). El valor obtenido para la volatilidad es $\sigma_{DD} = 14.22\%$