

УДК 539.3-517.946
№ ГР: 0112U002135
Инв. №

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.Е. ЖУКОВСКОГО “ХАИ”

61070, г. Харьков, ул. Чкалова, 17; тел. (057) 788-40-00

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по НР ХАИ
д-р техн. наук, проф.
_____ А. Гайдачук
2015.01.____

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
**НОВЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНО И
НЕЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ ИЗ
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**
**ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ
ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ МАТЕРИАЛОВ С ПОРАМИ И
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**
(заключительный)
Г405 — 16/2012–Ф
ТОМ 1

Руководитель НР
д-р физ.-мат. наук, профессор

А. Николаев

Рукопись закончена 25 декабря 2014 г.

2014

СПИСОК АВТОРОВ

Руководитель НИР

зав. кафедрой 405

д-р физ.-мат. наук, проф.

А. Николаев

(1, 2, 3, 4)

Ответственный исполнитель

аспирант кафедры 405

Е. Танчик

(1, 2, 3, 4)

Исполнители:

докторант кафедры 405

канд. техн. наук, доцент

С. Куреннов

(2.6, Выводы)

ст. препод. кафедры 405

К. Барахов

(4.2, Введение)

ст. препод. кафедры 405

В. Макаричев

(2.1)

студент

М. Дегтярева

(4.1)

Нормоконтролер

Н. Чернилевский

РЕФЕРАТ

Отчет о НИР 123 с., 64 рис., 3 табл., 146 источников.

В отчете приводятся результаты исследований по моделированию напряженно-деформированного состояния (НДС) упругого тела с полостями или включениями цилиндрической, сферической, вытянутой или сжатой сфероидальной формы.

Объектом исследования настоящей работы является многосвязный кусочно-однородный упругий материал. Предметом исследования являются модели НДС многосвязного кусочно-однородного упругого материала.

Целью и задачами данного исследования является построение аналитико-численных моделей НДС упругих тел с полостями и включениями, указанной выше формы. Важной составной частью исследования является строгий анализ полученных моделей, определение областей их эффективности, численный анализ полей напряжений и деформаций на основе построенных моделей, проверка адекватности предлагаемых моделей.

Модели НДС указанных тел строятся на основе точных базисных решений уравнения Ламе в канонических пространственных областях. Для определения параметров модели используется обобщенный метод Фурье.

В рамках третьего этапа бюджетной темы были построены и исследованы периодические и стохастические модели НДС в телах с неоднородностями, которые описывают поля напряжений и деформаций реального пористого или композиционного материала в областях с регулярной структурой и различными видами упаковки неоднородностей. Проведен строгий аналитический анализ построенных моделей и определены области их эффективности. На основании построенных моделей предложен метод вычисления эффективных упругих модулей пористых и композиционных материалов. Проведены расчеты эффективных характеристик некоторых материалов. Созданы пакеты прикладных программ для численной реализации построенных моделей. Проведен численный и качественный анализ распределения напряжений в некоторых рассматриваемых телах. Приведено сравнение изученных периодических моделей с локальными и глобальными моделями, построенными на первом и втором этапах исследования.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ, КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЕ ТЕЛО, ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ФУРЬЕ, ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ, ГЛОБАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, МЕТОД РЕДУКЦИИ, ПЕРИОДИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ МОДУЛИ.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
1 Развитие математического аппарата обобщенного метода Фурье	16
1.1 Теоремы сложения базисных гармонических функций в цилиндрических, сферических, вытянутых и сжатых сфероидальных системах координат со сдвинутыми началами	16
1.2 Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в сфероидальных координатах	20
1.3 Теоремы сложения решений уравнения Ламе в сфероидальных координатах для модифицированного базиса	25
1.4 Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в сферических координатах	36
1.5 Теоремы сложения решений уравнения Ламе для модифицированного базиса в сферических координатах	38
2 Механика упругого деформирования пространства с периодической системой полостей или включений	45
2.1 Упругое пространство с периодической системой сферических полостей	45
2.2 Упругое пространство с периодической системой сферических включений	51
2.3 Упругое пространство с периодической системой вытянутых сфероидальных полостей	55
2.4 Упругое пространство с периодической системой вытянутых сфероидальных включений	61
2.5 Упругое пространство с периодической системой сжатых сфероидальных полостей	66
2.6 Упругое пространство с периодической системой сжатых сфероидальных включений	71
3 Эффективные упругие модули пористых и композиционных материалов зернистой структуры	77
3.1 Эффективные упругие модули материалов со сферическими пораи	77
3.2 Эффективные упругие модули материалов со сферическими включениями	83
4 Механика упругого деформирования зернистых композитов со случайными размерами зерен	86
4.1 Упругое состояние пространства с несколькими сферическими полостями со случайными размерами	86

4.2 Упругое состояние пространства с несколькими сферическими включениями со случайными размерами	99
---	----

Выводы	109
---------------	------------

Перечень ссылок	111
------------------------	------------

ВВЕДЕНИЕ

Современный уровень развития техники и технологии в высокотехнологических областях накладывает повышенные требования на точность и эффективность моделей материалов, которые широко используются в авиации и ракетостроении. Одной из наиболее важных характеристик материалов, которые здесь применяются, является такая комплексная характеристика, как малая удельная масса и одновременно высокая прочность материала. Такой характеристикой обладают материалы типа композитов, в которых присутствуют конструктивно заложенные неоднородности. При современном уровне моделирования появляется возможность конструирования материалов с заранее заданными свойствами вначале на уровне модели, определяя оптимальную структуру, геометрические размеры и механические характеристики неоднородностей. И только после этого полученные в результате моделирования данные можно воплощать в реальном материале.

По самому названию композиционный материал — это составной материал, обладающий гетерогенной структурой. Разнородные компоненты композита имеют различные физико-механические свойства. Особое сочетание этих свойств и геометрии неоднородностей приводит к качественно новым характеристикам композита, отличным от характеристик составляющих его фаз. Двухфазный композит — это однородный материал, армированный волокнами или зернами из другого материала. В зависимости от технологии изготовления армирующие элементы тем или иным способом пропитываются связующим веществом (матрицей), которое после застывания обеспечивает сплошность композиционной среды и идеальный механический и тепловой контакт между разнородными фазами. В качестве армирующих элементов обычно применяют материалы с кристаллической или аморфной микроструктурой, такие, как полимеры, стекла, металлы и др. К материалам заполнителя относятся полимеры, металлы, керамика. Свойства композита существенно зависят от физико-механических характеристик арматуры и матрицы, геометрии арматуры, структуры армирующих элементов, характера их упаковки, объемного содержания элементов, углов армирования и др. Укажем на те основные физико-механические характеристики композиционного материала, которые приводятся в нормативных документах и должны контролироваться в процессе его изготовления. Это модули упругости и пределы прочности на растяжение, сжатие и поперечный сдвиг, коэффициенты Пуассона и линейного температурного расширения вдоль и поперек волокон, удельная теплоемкость и др.

В настоящей работе будут рассмотрены композиционные и пористые материалы, обладающие регулярной структурой. Под регулярной структурой понимается периодическое расположение слоев, зерен или волокон в материале. Считается, что физико-механические характеристики включений одинаковые,

но отличаются от характеристик матрицы. Далее будут рассмотрены только упругие модели деформирования этих материалов.

До настоящего времени многие важные задачи механики композиционных материалов остаются неизученными или недостаточно изученными. К ним относятся задачи определения напряженно-деформированного состояния образца из пористого и композиционного материалов в зависимости от приложенной внешней нагрузки, задачи выявления зон концентрации упругих напряжений как областей, в первую очередь подверженных разрушению, задачи анализа напряжений и деформаций в композиционном материале с отслоившимися включениями, задачи с межфазными и внутрифазными трещинами и др. Актуальной остается задача теоретического определения эффективных упругих модулей композиционных и пористых материалов. Все эти задачи в общей постановке относятся к классу весьма сложных задач механики деформированного твердого тела с многосвязной неоднородной структурой. До последнего времени эффективных методов решения подобных задач не существовало.

Обзор литературы. Приведем обзор научных исследований, связанных с тематикой данной работы. Исследованию пространственных задач теории упругости для односвязных цилиндра, шара и сфероида посвящены работы [1, 5–7, 14, 22, 23, 30, 33–36, 48, 50, 59, 91–93, 99, 100, 113, 114, 119, 129, 143, 145, 146]. В них краевые задачи для указанных областей решены методом Фурье.

В работах А. Я. Александрова [3, 4] получил развитие метод интегральных наложений, позволивший связать пространственное напряженное состояние с плоским и, как следствие, выразить решения ряда пространственных задач для односвязных и многосвязных тел через аналитические функции комплексного переменного.

Г. Н. Положий на основе построенной им теории p -аналитических функций предложил метод решения осесимметричных задач теории упругости, аналогичный методу Колосова — Мусхелишвили для плоских задач. В дальнейшем этот метод был распространен на двусвязные тела в работах А. А. Капшивого, Л. Н. Ломоноса [46, 58].

Важный подход к решению пространственных задач теории упругости основан на применении методов теории потенциала. В работах В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегели, О. М. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе [12, 53] путём исследования сингулярных интегральных уравнений различных классов краевых задач теории упругости были установлены условия существования и единственности их решений. Параллельно были созданы алгоритмы численного решения задач методами теории потенциала [4]. Численные возможности трех последних методов в многосвязных неосесимметричных телах весьма ограничены.

Методы теории потенциала в пространственных задачах теории трещин были развиты в монографии [49].

В монографии [38] описан метод решения краевых задач теории упругости

для областей, близких к каноническим, путем возмущения формы границы.

Приведем анализ методов решения пространственных задач для многосвязных тел. Прежде всего, заметим, что в этой области отсутствуют методы, близкие по общности и эффективности к методам решения плоских задач. Используемые здесь методы либо носят частный характер и предназначены для областей специального вида, не допуская распространения на более сложные области, либо, в виду своей общности, недостаточно эффективны при решении конкретных задач [114, 131, 136, 138].

Многие задачи решаются численными методами [41, 60]. Однако в телах с большим количеством неоднородностей эти методы неэффективны.

Остановимся на методах исследования механики композиционных материалов.

Определение интегральных упругих характеристик композиционных материалов проводилось различными методами в работах: Н. С. Бахвалова [8], Л. Браутмана [51], А. С. Вавакина [13], Ван Фо Фы [15, 16], Г. А. Ванина [17–21], А. Н. Власова, О. К. Гаришина [24], А. В. Головина, В. Т. Головчана [26–28, 121], В. Т. Гринченко [33–36], А. Н. Гузя [37], А. В. Дыскина [40], А. В. Ефименко, С. П. Киселёва, С. П. Копысова, Р. Кристенсен [52], Г. Н. Кувыркина, В. И. Куща [54], В. М. Левина [56], Б. П. Маслова, В. В. Мошева, А. А. Панькова, Б. Е. Победри [90], Ю. Н. Подильчука [91, 92], В. В. Полякова, Я. Я. Рущицкого, Р. Л. Салганик [95], К. Б. Устинова [101], А. Ф. Федотова [102], В. М. Фомина, Л. П. Хорошуна [104, 127, 128], Т. Д. Шермергора [107], Дж. Эшелби [108, 120], В. Budiansky [112], S. Boucher [111], R. M. Christensen [115, 116], Z. Hashin [122–125], M. Kachanov [126], S. Nemat-Nasser, M. Taya [133], A. S. Sangini, W. Lu [135], S. Torquato [139], R. W. Zimmerman [144] и др.

Один из первых подходов к определению эффективных упругих модулей был предложен в работах Дж. Эшелби [108, 120]. Он основан на решении задачи об одиночном включении в форме эллипсоида. Метод предполагает пренебрежение взаимодействием между включениями.

В работе [126] при анализе эффективных упругих свойств тела с трещинами использовался метод эффективного поля, в котором предполагается, что включения находятся в поле напряжений, соответствующему среднему полю напряжений в матрице.

В ряде работ [116] использовался метод самосогласования, в котором каждое включение находится в эквивалентной упругой среде, соответствующей матрице и остальным включениям, а также дифференциальный вариант метода самосогласования [13, 95, 144].

В работе [102] предложен метод расчета эффективных упругих модулей зернистых композитов, основанный на модели упругого деформирования пористых материалов. Отличительная особенность метода заключается в осреднении микроскопических напряжений и деформаций не по полному, а по эффективному

объему фаз. Получены расчетные зависимости эффективных объемов осреднения от упругих модулей и объемного содержания фаз. Проведено сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными при различном сочетании упругих модулей и произвольной объемной концентрации фаз.

Модели многослойных материалов и конструкций исследовались в монографии [10].

В книге [25] рассматривается моделирование перколяционных кластеров фаз внутренних границ композиционных материалов.

В монографиях [32, 94] решаются плоские задачи для многосвязных тел с отверстиями.

В книге [41] метод конечных элементов применен при анализе напряжений в двухсвязных телах.

В статье [43] исследовано напряженно-деформированное состояние дисперсно наполненного полимерного композита с использованием объемных моделей.

В работе [61] эффективные свойства transversально-изотропных композитных материалов определяются из стохастических дифференциальных уравнений нелинейной теории упругости применением метода условных моментов. В работе [42] вычислительным экспериментом получены масштабные эффекты, определяющие зависимость прочностных характеристик материала от его структуры. В монографии [11] упругие модули среды со сферическими включениями асимптотическим подходом получены из приближенных полидисперсной и трехфазной моделей. В статье [130] метод конечных элементов применяется для определения эффективных характеристик материала. В статье [117] метод самосогласованного поля применяется к анализу упругих характеристик материала с микроструктурой. В работе [118] вариационный подход использован для получения материального уравнения, связывающего средние напряжения и деформации для класса случайных упругих композитных материалов.

В статьях [127, 128, 137, 140] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако поскольку уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В работе [121] проанализировано термонапряженное состояние в окрестности сферических включений в керамическом композите. Была строго решена краевая задача, которая соответствует приближенному моделированию механики композита парой включений. Численные результаты качественно согласуются с известными экспериментальными зависимостями.

В статье [146] получено явное аналитическое решение задачи с жестким сфероидальным включением в трансверсально изотропном упругом пространстве, где включению заданы контактные перемещения в направлении, перпендикулярном к оси симметрии материала. Для решения задачи использовано представление потенциала перемещений для равновесия трехмерного трансверсально изотропного тела.

В работе [143] исследован трансверсально изотропный стержень с цилиндрическим включением с осесимметричными собственными деформациями. Получено аналитическое упругое решение для перемещений, напряжений и энергии упругой деформации стержня.

В монографии [17] разработаны методы микромеханики композиционных сред с дискретной структурой и трещинами и некоторые их приложения к конкретным материалам. Рассмотрено влияние свойств компонентов и вида структуры неоднородных сред на их эффективные (интегральные) параметры и распределение внутренних полей. Наряду с задачами теории упругости исследуются другие физические свойства материалов.

В статье [24] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, т. е. учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости от степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В работе [106] построена математическая модель расчета эффективного модуля упругости полиминеральных горных пород. Суть исследований заключается в расчете эффективного упругого модуля характерного объема материала путем осреднения по всем реализациям случайного поля неоднородностей с учетом их концентрации и пространственной ориентации. В работе были использованы методы: теории обобщенных функций, тензорного исчисления, теории

уравнений математической физики и интегро-дифференциальных уравнений.

В работе [39] дано построение модели межфазного слоя материала, содержащего жесткую частицу под действием растягивающей нагрузки. Предлагается вариант чисто конструктивной расчетной модели. Основанием для построения такой модели являются результаты исследований, где показано, что в окрестности границ включения возникает дополнительная межфазная зона, механические свойства которой являются переменными, изменяясь по экспоненциальному закону от жесткости включения до жесткости матрицы. В рамках полученной расчетной модели учитываются размеры включения и протяженность межфазной зоны. Учитываются также изменение модулей упругости при повороте частицы по отношению к действующей нагрузке и влияние соседних частиц на свойства межфазного слоя. Приведены примеры расчета.

В статье [105] представлены исследования по моделированию структуры пористых материалов с малой объемной долей содержания твердой фазы. В качестве моделей рассматриваются главным образом стержневые и оболочечные конструкции. Предложена классификация моделей по степени упорядоченности структурных единиц. Представляется, что наиболее адекватной с точки зрения морфологии и деформационных свойств является модель, состоящая из хаотически ориентированных 14-гранных ячеек. Для анализа представленной модели предлагается метод выделения структурного элемента.

В работе [2] методом конечных элементов исследовано влияние начального растяжения на концентрацию напряжений вокруг круговых отверстий в пластине-полосе, подверженной изгибу. Математическая формулировка соответствующей краевой задачи дается в рамках трехмерной линейаризованной теории упругости при плоском деформированном состоянии. Материал пластины-полосы — линейно-упругий, однородный и ортотропный. Представлены численные результаты, оценивающие влияние предварительного растяжения и взаимного расположения отверстий на концентрацию напряжений. Установлено, что начальное растяжение существенно уменьшает концентрацию напряжений в некоторых характерных точках на контуре отверстий.

В статье [109] разработана численно-аналитическая методика моделирования нелинейно-наследственного поведения композитов, имеющих пространственно-ориентированную структуру (пространственно-армированных композитов), позволяющая в дискретные моменты времени рассматривать такую композицию как нелинейно-упругую. Применение итерационного процесса типа метода переменных параметров упругости позволило линейаризовать определяющие соотношения и свести задачу расчета механического поведения рассматриваемого композита в дискретные моменты времени к серии линейно-упругих задач механики композитов.

В статье [29] исследованы зернистые композитные материалы с эластомерной матрицей, наполненной твердыми частицами диаметром 10 — 1000 мкм.

Рассмотрен один из возможных механизмов реологического поведения наполненных систем, связанный с возникновением и развитием вакуолей около жестких включений в вязкоупругой матрице. Для моделирования такого механизма формирования реологических свойств наполненного эластомера использована структурная ячейка в виде эластомерного цилиндра, высота которого равна диаметру, с жестким сферическим включением в центре цилиндра. Деформирование ячеек исследовали при соблюдении граничных условий, обеспечивающих сохранение их плотной упаковки при деформировании. Принято, что включение является жестким, а свойства матрицы описываются уравнениями линейной наследственной теории вязкоупругости. Для описания процесса роста вакуоли использован подход, согласно которому изначальное отслоение начинает распространяться, когда энергия, накопленная в матрице при растяжении, достигает величины, достаточной для создания новой поверхности раздела. Структурную неоднородность композита моделировали путем учета непостоянства локальной концентрации наполнителя. Рассчитаны кривые ползучести для композитов с разным содержанием твердой фазы. Проведено сравнение с экспериментальными данными, показавшее удовлетворительное согласование результатов.

В работе [31] предлагается алгоритм оценки свойств волокнистого композита при растяжении, основанный на процедуре В. З. Власова; дается оценка эффективных свойств эквивалентного гомогенного материала; приводится сравнение результатов расчета эффективного модуля Юнга с результатами других авторов.

В статье [9] предлагается корректная модель сред с микроструктурой (по определению Миндлина), которая определяется наличием свободных деформаций и обобщает известные модели Миндлина, Коссера и Аэро-Кувшинского. Корректность формулировки модели определяется использованием “кинематического” вариационного принципа, основанного на последовательном формальном описании кинематики сред, формулировке кинематических связей для сред разной сложности и построении соответствующей потенциальной энергии деформации с использованием процедуры множителей Лагранжа. Устанавливается система определяющих соотношений и формулируется согласованная постановка краевой задачи. Показывается, что исследуемая модель среды не только отражает масштабные эффекты, аналогичные когезионным взаимодействиям, но и является основой для описания широкого спектра адгезионных взаимодействий. В связи с анализом физической стороны модели предлагается трактовка физических характеристик, ответственных за неклассические эффекты, дается описание спектра адгезионных механических параметров.

В работе [24] разработаны модели структур многоуровневых волокнистых композитов с упрочняющими частицами в матрице и методы решения задач о плоском напряженном состоянии и разрушении. Предложен новый критерий хрупкого разрушения на основе интегралов, не зависящих от пути интегри-

рования. Найдены обобщенные равновесные термодинамические потенциалы неоднородных сред. Предложены методы определения поправок в состоянии материалов, возникающих от градиентных эффектов вблизи свободных и межфазных поверхностей, кончиков трещин, при высокочастотных волновых процессах. Указанные результаты оригинальны, и пока не известны их аналоги в литературе. Соотношения теории описывают состояние тел на выбранном масштабном уровне и связывают его с состоянием и процессами, протекающими на других масштабных уровнях неоднородных сред. Отмеченное представляет интерес в теории разрушения материалов, в задачах нанотехнологии и др.

Исследование напряженного состояния тела с однопериодической системой сферических полостей (осесимметричная задача) проводилось в работе [89].

Двусвязные осесимметричные задачи рассмотрены в работах [98, 110, 132, 141, 142]. Напряженно-деформированное состояние кусочно-однородных тел исследовано с помощью обобщенного метода Фурье в работах [66–88].

Приведенный обзор литературы показывает, что одной из актуальных проблем современной механики деформированного твердого тела является построение и анализ моделей напряженного состояния пористых и композиционных материалов, которые находят широкое применение в высокотехнологических областях техники, в частности в авиации и ракетостроении. Известные пространственные модели напряженного состояния указанных выше материалов не являются достаточно точными. Они учитывают неоднородную структуру материала или усредненно, или локально в окрестности только одного концентратора напряжений. При моделировании подобных материалов также используются разные типы стохастических моделей, которые, как правило, не являются полностью адекватными. Однако аэрокосмическая отрасль накладывает повышенные требования на прочностные характеристики материалов, управление которыми зависит от точности определения напряжений в теле. Создание более точных моделей указанных материалов позволит не только уточнить расчеты на прочность (коэффициенты концентрации напряжений на границе раздела фаз могут отличаться в 1.5–2 раза), но и на основе этих моделей проводить оптимальное проектирование материалов с заданными прочностью и массой. Обзор литературы показывает, что напряженное состояние в пористом и композиционном материалах традиционно моделируется напряженным состоянием представительской ячейки, содержащей одну неоднородность. Подобные модели используются при определении эффективных упругих модулей материалов с порами и включениями. Очевидно, эти модели заведомо не обладают высокой точностью. Основным их недостатком является тот факт, что они не вполне адекватны в локальных зонах концентрации напряжений в телах из пористых и композиционных материалов.

В монографии приводятся результаты исследований по моделированию напряженно-деформированного состояния упругого пористого и композиционного

материалов с порами или включениями цилиндрической, сферической, вытянутой или сжатой сфероидальной формы. Пористый или композиционный материал моделируется упругой средой с конечным числом полостей или включений указанной выше формы. Число неоднородностей варьируется в широком диапазоне (от 2 до 30). Также рассматриваются задачи для упругого пространства с бесконечным числом полостей или включений, образующих периодическую структуру. Модели НДС указанных тел строятся на основе точных базисных решений уравнения Ламе в канонических пространственных областях [62, 63, 65]. Для определения параметров модели используется обобщенный метод Фурье. Аппарат обобщенного метода Фурье был развит в работах [62–65, 68].

Остановимся кратко на содержании отчета.

В разделе 1 приведен аппарат обобщенного метода Фурье. Кроме известных теорем сложения базисных решений уравнения Ламе в цилиндрических, сферических, вытянутых и сжатых сфероидальных системах координат, начала которых произвольно сдвинуты друг относительно друга, впервые получены теоремы сложения для модифицированных базисных решений уравнения Ламе в указанных системах координат. Эти теоремы наиболее приспособлены для класса задач, который был исследован на третьем этапе научно-исследовательской работы, и впервые были получены в работах [78, 79].

В разделе 2 изучены краевые задачи для уравнения Ламе в областях с бесконечным числом полостей или включений, которые образуют периодическую структуру. Рассмотрено пространство с полостями или включениями в форме сфер, вытянутых или сжатых сфероидов под действием одноосного, двuosного или всестороннего растяжений, приложенных на бесконечности. Приведен анализ распределения напряжений в представительской ячейке в зависимости от механических и геометрических характеристик матрицы и включений. Дано сравнение напряжений для разных типов моделей (локальные, глобальные и периодические).

Раздел 3 посвящен определению эффективных упругих модулей некоторых типов пористых и композиционных материалов. Построенные в разделе 2 модели позволяют с любой степенью точности восстанавливать напряженно-деформированное состояние в представительской ячейке пористого или композиционного материала, который находится под действием однородного поля напряжений, приложенных на бесконечности. Последнее обстоятельство дало возможность предложить метод определения эффективных упругих характеристик пористых и композиционных материалов, основанный на осреднении компонент тензоров напряжений и деформаций по объему представительской ячейки или по ее поверхности. Для примера получены формулы для расчета эффективных объемных модулей пористых и композиционных материалов с периодической системой сферических полостей или включений. Проведен численный анализ зависимости объемных модулей от объемного содержания полостей

или включений в представительской ячейке материала. Приводится сравнение полученных результатов с известными, которые были вычислены на основании упрощенных моделей.

В разделе 4 исследованы стохастические модели зернистых и композиционных материалов, в которых радиусы неоднородностей представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины. Исследована величина разброса нормальных компонент тензора напряжений в зависимости от среднеквадратичного отклонения радиусов неоднородностей. Получены аналитические формулы для приближенных решений краевых задач пространственной теории упругости с произвольным конечным числом полостей или включений, центры которых расположены в узлах кубической решетки, а радиусы являются одинаково распределенными независимыми случайными величинами. Получены формулы для величин первых двух моментов компонент тензора напряжений. Приводится сравнение полученных результатов с результатами для точной детерминированной модели и приближенной детерминированной модели.

Создано программное обеспечение для численной реализации построенных моделей. На его основе проведен численный анализ и дана визуализация распределения напряжений в некоторых телах в зонах их максимальной концентрации. Исследована скорость сходимости приближенных методов решения операторных уравнений для определения параметров моделей. Проведено сравнение полученных результатов с результатами локальных и глобальных моделей, исследованных на первом и втором этапах работы.

Результаты исследований по первому и второму этапам данной научно-исследовательской работы были приведены в отчетах:

Новые методы исследования линейных и нелинейных деформируемых тел из композиционных материалов. Построение локальных линейных моделей материалов с порами и композиционных материалов. ИН НТП: 0713U002822 (2012 г.);

Новые методы исследования линейных и нелинейных деформируемых тел из композиционных материалов. Построение глобальных линейных моделей материалов с порами и композиционных материалов. ИН НТП: 07140005344 (2013 г.).

1 РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ФУРЬЕ

В рамках первого и второго этапов бюджетной темы были получены результаты, приведенные в параграфах 1.1, 1.2, 1.4. В параграфах 1.3, 1.5 дано развитие математического аппарата обобщенного метода Фурье. С этой целью вводятся модифицированные базисные решения уравнения Ламе в сферических, вытянутых и сжатых сфероидальных системах координат. Для этих решений, отнесенных к сдвинутым системам координат, доказываются новые теоремы сложения. Построенные решения оказываются более удобными для реализации метода в телах с бесконечным числом полостей или включений, которые имеют периодическую структуру.

1.1 Теоремы сложения базисных гармонических функций в цилиндрических, сферических, вытянутых и сжатых сфероидальных системах координат со сдвинутыми началами

Рассмотрим пары ($i = 1, 2$) однотипных одинаково направленных систем координат: декартовых (x_i, y_i, z_i) , цилиндрических (ρ_i, z_i, φ_i) , сферических $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$, вытянутых $(\xi_i, \eta_i, \varphi_i)$ и сжатых $(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, \varphi_i)$ сфероидальных. Их начала отнесены к точкам O_i , которые произвольно сдвинуты друг относительно друга. Будем считать, что декартовые координаты точки O_2 в декартовой системе координат с началом в точке O_1 задаются тройкой чисел (x_{12}, y_{12}, z_{12}) . Тогда между декартовыми координатами справедливы соотношения

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_{12}, \\ y_1 = y_2 + y_{12}, \\ z_1 = z_2 + z_{12}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Связь между различными криволинейными координатами определяется формулами:

$$\begin{aligned} x_i &= \rho_i \cos \varphi_i = r_i \sin \theta_i \cos \varphi_i = c_i \operatorname{sh} \xi_i \sin \eta_i \cos \varphi_i = \tilde{c}_i \operatorname{ch} \tilde{\xi}_i \sin \tilde{\eta}_i \cos \varphi_i, \\ y_i &= \rho_i \sin \varphi_i = r_i \sin \theta_i \sin \varphi_i = c_i \operatorname{sh} \xi_i \sin \eta_i \sin \varphi_i = \tilde{c}_i \operatorname{ch} \tilde{\xi}_i \sin \tilde{\eta}_i \sin \varphi_i, \\ z_i &= r_i \cos \theta_i = c_i \operatorname{ch} \xi_i \cos \eta_i = \tilde{c}_i \operatorname{sh} \tilde{\xi}_i \cos \tilde{\eta}_i, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $x_i, y_i, z_i \in (-\infty; \infty)$; $\rho_i, r_i, \xi_i \in [0; \infty)$; $\eta_i \in [0; \pi]$; $\tilde{\xi}_i \in (-\infty, \infty)$; $\tilde{\eta}_i \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $\varphi \in [0; 2\pi]$; c_i, \tilde{c}_i ($c_i, \tilde{c}_i > 0$) — параметры сфероидальных систем координат.

В дальнейшем понадобятся базисные решения уравнения Лапласа

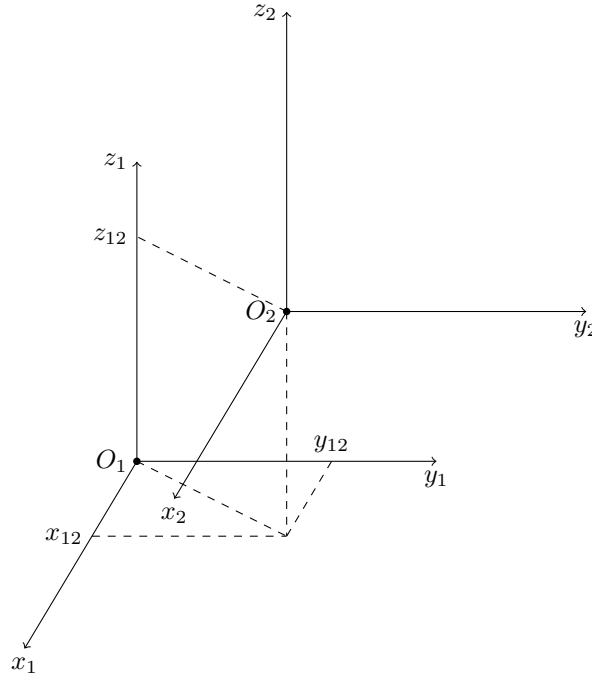


Рис. 1.1. Декартовые системы координат, произвольно сдвинутые друг относительно друга

$$\Delta u = 0, \quad (1.3)$$

регулярные вне (знак “+” в верхнем индексе), внутри (знак “−” в верхнем индексе) цилиндра Ω_3^\pm , шара Ω_4^\pm , вытянутого Ω_5^\pm и сжатого Ω_6^\pm сфероидов:

$$u_{\lambda, m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = e^{i\lambda z + im\varphi} \begin{Bmatrix} \tilde{K}_m(\lambda\rho) \\ I_m(\lambda\rho) \end{Bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad (1.4)$$

$$u_{n, m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = \begin{Bmatrix} (n-m)!/r^{n+1} \\ r^n/(n+m)! \end{Bmatrix} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}; \quad (1.5)$$

$$n, m \in \mathbb{Z}, n \geq 0, |m| \leq n;$$

$$u_{n, m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = \begin{Bmatrix} Q_n^{-m}(\text{ch}\xi) \\ P_n^{-m}(\text{ch}\xi) \end{Bmatrix} P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}; \quad (1.6)$$

$$n, m \in \mathbb{Z}, n \geq 0, |m| \leq n;$$

$$u_{n, m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = \begin{Bmatrix} Q_n^{-m}(\text{ish}\tilde{\xi}) \\ P_n^{-m}(\text{ish}\tilde{\xi}) \end{Bmatrix} P_n^m(\cos \tilde{\eta}) e^{im\varphi}; \quad (1.7)$$

$$n, m \in \mathbb{Z}, n \geq 0, |m| \leq n;$$

где $I_m(x)$ — модифицированная функция Бесселя,

$$\tilde{K}_m(x) = (\operatorname{sign} x)^m K_m(|x|),$$

$K_m(x)$ — функция Макдональда, $P_n^m(x)$, $Q_n^m(x)$ — функции Лежандра первого и второго рода. Верхний (нижний) множитель в фигурных скобках соответствует верхнему (нижнему) знаку индекса $\{\pm\}$.

В дальнейшем важную роль играют теоремы сложения решений (1.4) – (1.7) в парах однотипных систем координат, описанных выше.

Теорема 1.1. При $\rho_2 < \rho_{12}$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) &= \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l u_{m-l,\lambda}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}) u_{l,\lambda}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2). \end{aligned} \quad (1.8)$$

При $\rho_1 < \rho_{12}$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) &= \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^m u_{m-l,\lambda}^{+(3)}(\rho_{12}, -z_{12}, \varphi_{12}) u_{l,\lambda}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Теорема 1.2. При $r_2 < r_{12}$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k (-1)^{k+l} u_{n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}) u_{k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2). \end{aligned} \quad (1.10)$$

При $r_1 < r_{12}$

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{+(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k (-1)^{n+l} u_{n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}) u_{k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Теорема 1.3. При $\xi_2 \in (0; \gamma_2)$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l+m} u_{s,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) \times \\ &\times \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{q! \Gamma(n+q+\frac{3}{2})} \left(\frac{c_1}{2}\right)^{2q+n+1} \sum_{k=s}^{\infty} (-1)^k g_{k,l}^{-(45)s}(c_2) \times \\ &\times u_{2q+n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

При $\xi_1 \in (0; \gamma_1)$ справедливо разложение

$$\begin{aligned}
u_{n,m}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l+m} u_{s,l}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) \times \\
&\times \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{q! \Gamma(n+q+\frac{3}{2})} \left(\frac{c_2}{2}\right)^{2q+n+1} \sum_{k=s}^{\infty} (-1)^n g_{k,l}^{-(45)s}(c_1) \times \\
&\times u_{2q+n+k, m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}). \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Выше использованы обозначения

$$\gamma_j = \text{Arsh} \left[\frac{t_j^2 + \rho_{12}^2 - c_j^2 + \sqrt{(t_j^2 + \rho_{12}^2 - c_j^2)^2 + 4\rho_{12}^2 c_j^2}}{2c_j^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.14)$$

$$t_j = \max(|z_{12}| - c_{3-j}, 0),$$

$$g_{k,l}^{-(45)s}(c_j) = \sqrt{\pi} \varepsilon_{ks} \left(\frac{c_j}{2}\right)^k \frac{s + \frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} - \frac{s}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{s}{2} + \frac{3}{2}\right)}, \quad (1.15)$$

$$\varepsilon_{ks} = \begin{cases} 1, & k - s = 2p, \quad p \in \mathbb{Z}, \\ 0, & k - s = 2p + 1, \quad p \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.16)$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Теорема 1.4. При $\tilde{\xi}_2 \in [0, \tilde{\gamma}_2)$ справедливо разложение

$$\begin{aligned}
u_{n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l+m} u_{s,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) \times \\
&\times \sqrt{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (-i)^{n+1}}{q! \Gamma(n+q+\frac{3}{2})} \left(\frac{\tilde{c}_1}{2}\right)^{2q+n+1} \times \\
&\times \sum_{k=s}^{\infty} (-1)^k g_{k,l}^{-(46)s}(c_2) u_{2q+n+k, m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}). \quad (1.17)
\end{aligned}$$

При $\tilde{\xi}_1 \in [0, \tilde{\gamma}_1)$ справедливо разложение

$$\begin{aligned}
u_{n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l+m} u_{s,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) \times \\
&\times \sqrt{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (-i)^{n+1}}{q! \Gamma(n+q+\frac{3}{2})} \left(\frac{\tilde{c}_2}{2}\right)^{2q+n+1} \times
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{k=s}^{\infty} (-1)^n g_{k,l}^{-(46)s}(c_1) u_{2q+n+k, m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}). \quad (1.18)$$

Здесь использованы обозначения

$$\tilde{\gamma}_j = \text{Arsh} \left[\frac{z_{12}^2 + \rho_{12}^2 - \tilde{c}_j^2 + \sqrt{(z_{12}^2 + \rho_{12}^2 - \tilde{c}_j^2)^2 + 4z_{12}^2 \tilde{c}_j^2}}{2\tilde{c}_j^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.19)$$

$$g_{k,l}^{-(46)s}(c_j) = \sqrt{\pi} \varepsilon_{ks} (-i)^k \left(\frac{\tilde{c}_j}{2} \right)^k \frac{s + \frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} - \frac{s}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{s}{2} + \frac{3}{2}\right)}, \quad (1.20)$$

1.2 Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в сфероидальных координатах

Приведенные в предыдущем параграфе свойства гармонических функций играют существенную роль при моделировании напряженно-деформированного состояния многосвязного упругого тела.

Будем рассматривать однородную изотропную упругую среду. Вектор перемещений \mathbf{U} точек среды, как известно, описывается уравнением Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \text{div} \mathbf{U} = 0, \quad (1.21)$$

где σ — коэффициент Пуассона; ∇ — оператор “набла”.

В работах [62, 63] были введены следующие частные решения уравнения (1.21) во внешности (внутренности) вытянутого сфероида $\Omega_5^\pm = \{(\xi, \eta, \varphi) : \xi \gtrless \xi_0\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) &= \\ &= \frac{c}{2n+1} \mathbf{D}_s \left[u_{n-1,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) - u_{n+1,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) \right]; \quad s = 1, 3; \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) - c \text{sh}^2 \xi_0 \mathbf{D}_1 u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi), \quad (1.23)$$

где $n = 0, 1, \dots; |m| \leq n+1$; $u_{n,m}^{\pm(5)}$ определены в (1.6);

$$\mathbf{D}_1 = \nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi\mathbf{e}_z; \quad \mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z]; \quad (1.24)$$

$\chi = 3 - 4\sigma$, $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ — орты декартовой системы координат.

В развернутой координатной форме формулы (1.22) – (1.23) имеют вид:

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{n,m-1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{\pm(5)}\mathbf{e}_0; \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = qu_{1,n,m-1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_{-1} - qu_{1,n,m+1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_1 - \left[qu_{1,n,m}^{\pm(5)} + \chi u_{n,m}^{\pm(5)}\right]\mathbf{e}_0 + \\ + c(q^2 - q_0^2)\nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}; \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(5)} = -u_{n,m-1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_1. \quad (1.27)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} u_{1,n,m}^{\pm(5)} &= u_{1,n,m}^{\pm}(\xi)P_n^m(\cos\eta)e^{im\varphi}; \\ u_{1,n,m}^{\pm}(\xi) &= \left\{ \begin{array}{l} (n+m+1)Q_{n+1}^{-m}(q) \\ -(n-m)P_{n-1}^{-m}(q) \end{array} \right\}; \\ q &= \operatorname{ch}\xi, \quad q_0 = \operatorname{ch}\xi_0, \quad \mathbf{e}_{\mp 1} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y), \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1.28)$$

В работе [65] введено понятие базисности системы решений уравнения Ламе в односвязной канонической области и доказана базисность решений (1.22) – (1.24) в соответствующих областях Ω_5^{\pm} .

В дальнейшем нам понадобятся теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в одинаково направленных вытянутых сфероидальных системах координат, начала которых сдвинуты согласно соотношениям (1.1).

Теорема 1.5. При $\xi_2, \xi_{20} \in (0; \gamma_2)$ справедливы разложения

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{+(55)k,l} \mathbf{U}_{s,k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2), \quad s = 1, 3; \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f_{n,m}^{+(55)k,l} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{n,m}^{+(55)k,l} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) \right], \end{aligned} \quad (1.30)$$

где

$$f_{n,m}^{+(55)k,l} = \sum_{j=n}^{\infty} g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) f_{j,m}^{(45)k,l}(c_2); \quad (1.31)$$

$$g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) = (-1)^m \sqrt{\pi} \left(\frac{c_1}{2}\right)^{j+1} \frac{\varepsilon_{jn}}{\Gamma\left(\frac{j-n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{j+n}{2} + \frac{3}{2}\right)}; \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} f_{j,m}^{(45)k,l}(c_2) = \\ = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l} \sqrt{\pi} \left(\frac{c_2}{2}\right)^{p\varepsilon_{pk}} \frac{u_{j+p,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p-k}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + \frac{3}{2}\right)}; \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n,m}^{+(55)k,l} = \sum_{j=n}^{\infty} \left[c_2 q_{20}^2 \frac{2k+1}{2k+3} g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) f_{j+1,m}^{(45)k+1,l}(c_2) + \right. \\ \left. + z_{12} g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) f_{j+1,m}^{(45)k,l}(c_2) - c_1 q_{10}^2 g_{n+1,m}^{+(54)j-1}(c_1) f_{j,m}^{(45)k,l}(c_2) \right]. \end{aligned} \quad (1.34)$$

При $\xi_1, \xi_{10} \in (0; \gamma_1)$ справедливы разложения

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{-(55)k,l} \mathbf{U}_{s,k,l}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1), \quad s = 1, 3; \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f_{n,m}^{-(55)k,l} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{n,m}^{-(55)k,l} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) \right], \end{aligned} \quad (1.36)$$

где

$$f_{n,m}^{-(55)k,l} = \sum_{j=k}^{\infty} f_{n,m}^{(54)j,l}(c_2) g_{j,l}^{-(45)k}(c_1); \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} f_{n,m}^{(54)j,l}(c_2) = \\ = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l+m} \sqrt{\pi} \left(\frac{c_2}{2}\right)^{p+1} \frac{\varepsilon_{pn} u_{p+j,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p-n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p+n}{2} + \frac{3}{2}\right)}; \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n,m}^{-(55)k,l} = \sum_{j=k}^{\infty} \left[c_2 q_{20}^2 f_{n+1,m}^{(54)j+1,l}(c_2) g_{j,l}^{-(45)k}(c_1) + \right. \\ \left. + z_{12} f_{n,m}^{(54)j+1,l}(c_2) g_{j,l}^{-(45)k}(c_1) - \right. \\ \left. - c_1 q_{10}^2 \frac{2k+1}{2k+3} f_{n,m}^{(54)j,l}(c_2) g_{j-1,l}^{-(45)k+1}(c_1) \right], \end{aligned} \quad (1.39)$$

$g_{j,l}^{-(45)k}(c_1)$ описано формулой (1.15).

Теперь рассмотрим частные решения уравнения Ламе для сжатого сфероида $\Omega_6^\pm = \left\{ (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) : \tilde{\xi} \gtrless \tilde{\xi}_0 \right\}$ [63]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) &= \\ &= \frac{-i\tilde{c}}{2n+1} \mathbf{D}_s \left[u_{n-1,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) - u_{n+1,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \right]; \quad s = 1, 3; \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) - i\tilde{c} \operatorname{sh}^2 \tilde{\xi}_0 \mathbf{D}_1 u_{n\pm 1,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi), \quad (1.41)$$

где $n = 0, 1, \dots; |m| \leq n+1; m, n \in \mathbb{Z}$, $u_{n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi)$; \mathbf{D}_s определены в (1.7), (1.24).

Приведем координатную форму перемещений (1.40), (1.41)

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) &= u_{n,m-1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \mathbf{e}_1 - \\ &\quad - u_{n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \mathbf{e}_0; \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) &= \tilde{q} u_{1,n,m-1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \mathbf{e}_{-1} - \tilde{q} u_{1,n,m+1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \mathbf{e}_1 - \\ &\quad - \left[\tilde{q} u_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) + \chi u_{n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \right] \mathbf{e}_0 + \\ &\quad + i\tilde{c} \left(\tilde{q}^2 - \tilde{q}_0^2 \right) \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi); \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = -u_{n,m-1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \mathbf{e}_1; \quad (1.44)$$

$$\tilde{q} = \operatorname{sh} \tilde{\xi}, \quad \tilde{q}_0 = \operatorname{sh} \tilde{\xi}_0,$$

$$u_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = \tilde{u}_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}) P_n^m(\cos \tilde{\eta}) e^{im\varphi}, \quad (1.45)$$

$$\tilde{u}_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}) = \left\{ \begin{array}{l} (n+m+1) Q_{n+1}^{-m}(\tilde{q}) \\ -(n-m) P_{n-1}^{-m}(\tilde{q}) \end{array} \right\}. \quad (1.46)$$

В работе [65] установлена базисность решений (1.40), (1.41) в областях Ω_6^\pm .

Теорема 1.6. При $\tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_{20} \in [0; \tilde{\gamma}_2)$ справедливы разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{+(66)k,l} \mathbf{U}_{s,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2), \quad s = 1, 3; \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f_{n,m}^{+(66)k,l} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{f}_{n,m}^{+(66)k,l} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) \right], \quad (1.48) \end{aligned}$$

зде

$$f_{n,m}^{+(66)k,l} = \sum_{j=n}^{\infty} g_{n,m}^{+(64)j}(\tilde{c}_1) f_{j,m}^{(46)k,l}(\tilde{c}_2); \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} g_{n,m}^{+(64)j}(\tilde{c}_1) &= \\ &= (-1)^m \sqrt{\pi} (-i)^{j+1} \left(\frac{\tilde{c}_1}{2} \right)^{j+1} \frac{\varepsilon_{jn}}{\Gamma\left(\frac{j-n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{j+n}{2} + \frac{3}{2}\right)}; \quad (1.50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{j,m}^{(46)k,l}(\tilde{c}_2) &= \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l} \sqrt{\pi} (-i)^p \left(\frac{\tilde{c}_2}{2} \right)^p \frac{\varepsilon_{pk} \left(k + \frac{1}{2}\right) u_{j+p,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p-k}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + \frac{3}{2}\right)}; \quad (1.51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n,m}^{+(66)k,l} &= \sum_{j=n}^{\infty} \left[i \tilde{c}_2 \tilde{q}_{20}^2 \frac{2k+1}{2k+3} g_{n,m}^{+(64)j} f_{j+1,m}^{(46)k+1,l} + z_{12} g_{n,m}^{+(64)j} f_{j+1,m}^{(46)k,l} - \right. \\ &\quad \left. - i \tilde{c}_1 \tilde{q}_{10}^2 g_{n+1,m}^{+(64)j-1} f_{j,m}^{(46)k,l} \right], \quad (1.52) \end{aligned}$$

$$\bar{q}_{j0} = \text{sh} \tilde{\xi}_{j0}.$$

При $\xi_1, \tilde{\xi}_{10} \in [0; \tilde{\gamma}_1)$ справедливы разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{-(66)k,l} \mathbf{U}_{s,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1), \quad s = 1, 3; \quad (1.53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f_{n,m}^{-(66)k,l} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{f}_{n,m}^{-(66)k,l} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) \right], \quad (1.54) \end{aligned}$$

зде

$$f_{n,m}^{-(66)k,l} = \sum_{j=k}^{\infty} f_{n,m}^{(64)j,l}(\tilde{c}_2) g_{j,l}^{-(46)k}(\tilde{c}_1); \quad (1.55)$$

$$f_{n,m}^{(64)j,l}(\tilde{c}_2) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l+m} \sqrt{\pi} (-i)^{p+1} \left(\frac{\tilde{c}_2}{2} \right)^{p+1} \frac{\varepsilon_{pn} u_{p+j,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p-n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p+n}{2} + \frac{3}{2}\right)}; \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n,m}^{-(66)k,l} = \sum_{j=k}^{\infty} & \left[i\tilde{c}_2 \tilde{q}_{20}^2 f_{n+1,m}^{(64)j+1,l}(\tilde{c}_2) g_{j,l}^{-(46)k}(\tilde{c}_1) + \right. \\ & + z_{12} f_{n,m}^{(64)j+1,l}(\tilde{c}_2) g_{j,l}^{-(46)k}(\tilde{c}_1) - \\ & \left. - i\tilde{c}_1 \tilde{q}_{10}^2 \frac{2k+1}{2k+3} f_{n,m}^{(64)j,l}(\tilde{c}_2) g_{j-1,l}^{-(46)k+1}(\tilde{c}_1) \right], \quad (1.57) \end{aligned}$$

$g_{j,l}^{-(46)k}$ описано формулой (1.20).

1.3 Теоремы сложения решений уравнения Ламе в сфероидальных координатах для модифицированного базиса

Приведенные в предыдущем параграфе внешние решения уравнения Ламе не при всех значениях параметров n и m регулярны, а система внутренних решений не является линейно независимой. В работе [63] были построены такие системы решений уравнения (1.21) в областях Ω_5^\pm , которые являются линейными комбинациями решений (1.22), (1.23) и удовлетворяют всем свойствам базисности [65]. Положим

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(5)} = \mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(5)}; \quad s = \overline{1,3}; \quad n = 1, 2, \dots, |m| \leq n-1; \quad (1.58)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{+(5)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{+(5)} \mp \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{+(5)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.59)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,0,0}^{+(5)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,1}^{+(5)} + (1 + \chi) \mathbf{U}_{3,0,1}^{+(5)} + \mathbf{U}_{2,0,1}^{+(5)}; \quad (1.60)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{+(5)} = \mathbf{U}_{2,n,\pm n}^{+(5)}; \quad n = 0, 1, \dots; \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{+(5)} = -\chi \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{+(5)} \pm (1 + \chi) \mathbf{U}_{3,n,\pm(n+1)}^{+(5)} + \\ + \mathbf{U}_{2,n,\pm(n+1)}^{+(5)}; \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{+(5)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,-1}^{+(5)} - (1 + \chi) \mathbf{U}_{3,0,-1}^{+(5)} + \mathbf{U}_{2,0,-1}^{+(5)}; \quad (1.63)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{-(5)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{-(5)}; \quad n = 0, 1, \dots; \quad (1.64)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{-(5)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{-(5)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.65)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{-(5)} = \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{-(5)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.66)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(5)} = \mathbf{U}_{1,0,1}^{-(5)}; \quad (1.67)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(5)} = \mathbf{U}_{1,0,-1}^{-(5)}. \quad (1.68)$$

В работе [78] получены теоремы сложения для решений (1.58) — (1.68).

Теорема 1.7. *Справедливы разложения внешних модифицированных базисных решений уравнения Ламе в вытянутой сфероидальной системе координат с началом в точке O_j по внутренним модифицированным решениям в вытянутой сфероидальной системе координат с началом в точке O_α при $\xi_\alpha \in (0, \beta_{j\alpha})$:*

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{U}_{t,k,l}^{-(5)}(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.69)$$

где

$$\beta_{j\alpha} = \text{Arsh} \frac{\sqrt{t_{j\alpha}^2 + \rho_{j\alpha}^2 - c_\alpha^2} + \sqrt{(t_{j\alpha}^2 + \rho_{j\alpha}^2 - c_\alpha^2)^2 + 4c_\alpha^2 \rho_{j\alpha}^2}}{c_\alpha \sqrt{2}},$$

$$t_{j\alpha} = \max(|z_{j\alpha}| - c_j, 0);$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha}, \quad k \geq 1, |\ell| \leq k-1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,k+1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,k,k+1,\alpha}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} + (1 + \chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,-k-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,k,-k-1,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} - (1 + \chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,0,0,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,0,-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,0,-1,\alpha};$$

$$T_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \delta_{st} f_{1,n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{s2} \delta_{t1} g_{1,n,m,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (n \geq 1) \wedge (|m| \leq n-1);$$

$$T_{1,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (\delta_{t1} - \delta_{t3}) f_{1,n,n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1);$$

$$\begin{aligned}
T_{1,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= 0, \quad n \geq 1; \\
T_{1,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= (\delta_{t1} + \delta_{t3})f1_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (-k-1 \leq \ell \leq k) \wedge (n \geq 1); \\
T_{1,0,0,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= \tilde{\delta}_t f1_{0,1,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g1_{0,1,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad 1-k \leq \ell \leq k+1; \\
T_{1,0,0,j}^{t,k,-k,\alpha} &= \delta_{t1} g1_{0,1,j}^{k,-k,\alpha}; \\
T_{1,0,0,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= \delta_{t1} g2_{0,1,j}^{k,-k-1,\alpha}; \\
T_{2,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= \delta_{t2} f1_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g1_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad -k \leq \ell \leq k; \\
T_{2,n,n,j}^{t,k,k+1,\alpha} &= \delta_{t1} g1_{n,n,j}^{k,k+1,\alpha}; \\
T_{2,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= \delta_{t1} g1_{n,n,j}^{k,-k-1,\alpha}; \\
T_{2,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= \delta_{t2} f1_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g1_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad -k \leq \ell \leq k; \\
T_{2,n,-n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= \delta_{t,1} g1_{n,-n,j}^{k,-k-1,\alpha}; \\
T_{2,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} &= \delta_{t,1} g1_{n,-n,j}^{k,k+1,\alpha}; \\
T_{3,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= \tilde{\delta}_t f1_{n,n+1,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g1_{n,n+1,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (1-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1); \\
T_{3,n,n,j}^{t,k,-k,\alpha} &= \delta_{t1} g1_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha}, \quad n \geq 1; \\
T_{3,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= \delta_{t1} g2_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha}, \quad n \geq 1; \\
T_{3,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= \hat{\delta}_t f1_{n,-n-1,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g1_{n,-n-1,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad -k-1 \leq \ell \leq k-1; \\
T_{3,n,-n,j}^{t,k,k,\alpha} &= \delta_{t1} g1_{n,-n-1,j}^{k,k,\alpha}; \\
T_{3,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} &= \delta_{t1} g3_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha}; \\
g1_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} &= q_{j0}^2 f2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + q_{\alpha 0}^2 f3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + z_{j\alpha} f4_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha}; \\
g2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} &= q_{j0}^2 f2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + q_{\alpha 0}^2 f3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + f5_{n,j}^{k,\alpha}; \\
g3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} &= q_{j0}^2 f2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + q_{\alpha 0}^2 f3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + f6_{n,j}^{k,\alpha}; \\
\tilde{\delta}_t &= -\chi \delta_{t1} + (\chi + 1) \delta_{t3} + \delta_{t2}; \\
\hat{\delta}_t &= -\chi \delta_{t1} - (\chi + 1) \delta_{t3} + \delta_{t2}; \\
f1_{n,m,j}^{k,l,\alpha} &= (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha};
\end{aligned}$$

$$f2_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n+2}^{\infty} (n-r) \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha};$$

$$f3_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k+2}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} (k-p) \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha};$$

$$f4_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r+1,m-\ell}^{+(4)j,\alpha};$$

$$f5_{n,j}^{k,\alpha} = (-1)^{n-k} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} v_{p+r,n,k}^{j,\alpha};$$

$$f6_{n,j}^{k,\alpha} = (-1)^{k-n} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} w_{p+r,n,k}^{j,\alpha};$$

$$\Gamma_{nrj}^{kp\alpha} = \frac{1}{\gamma_{kp} \gamma_{nr}} (-1)^p \varepsilon_{kp} \varepsilon_{nr} \left(\frac{c_j}{2} \right)^{r+1} \left(\frac{c_\alpha}{2} \right)^p;$$

$$\gamma_{kp} = \Gamma \left(\frac{p-k}{2} + 1 \right) \Gamma \left(\frac{k+p}{2} + \frac{3}{2} \right);$$

$$v_{\nu,n,k}^{j,\alpha} = \begin{cases} u_{\nu,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{\nu+1,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \geq n+k+2, \\ \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \leq n+k+1, \end{cases}$$

$$w_{\nu,n,k}^{j,\alpha} = \begin{cases} u_{\nu,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{\nu+1,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \geq n+k+2, \\ \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \leq n+k+1, \end{cases}$$

$$u_{n,m}^{+(4)j,\alpha} = \begin{cases} \frac{(n-m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}} P_n^m(\cos \theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n \geq m, \\ \frac{(-1)^m (n+m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}} P_n^{-m}(\cos \theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n < m, \end{cases}$$

$(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$ — сферические координаты точки O_α в системе координат с началом в точке O_j .

Доказательство. Формулы (1.29), (1.30) из параграфа 1.2 могут быть записаны в виде одной формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} \left\{ \delta_{st} f1_{n,m,j}^{k,l,\alpha} + \delta_{t1} \delta_{s2} \left[q_{j0}^2 f2_{n,m,j}^{k,l,\alpha} + \right. \right. \\ \left. \left. + q_{\alpha 0}^2 f3_{n,m,j}^{k,l,\alpha} + z_{j\alpha} f4_{n,m,j}^{k,l,\alpha} \right] \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)}(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \varphi_\alpha). \quad (1.70) \end{aligned}$$

Преобразуем вектор-функцию $\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,n}^{+(5)}$, используя формулу (1.70):

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,n}^{+(5)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} f1_{n,n,j}^{k,l,\alpha} \left[\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)} - \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(5)} \right]. \quad (1.71)$$

Учитывая, что справедливо соотношение

$$\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)} - \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(5)} = 2u_{k,l-1}^{-(5)} \mathbf{e}_{-1} - u_{k,l}^{-(5)} \mathbf{e}_0 = \begin{cases} 0, & l = -k - 1, \\ -u_{k,-k}^{-(5)} \mathbf{e}_0, & l = -k, \end{cases}$$

разложение (1.71) можно представить в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,n}^{+(5)} = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k+1} (\delta_{t1} - \delta_{t3}) f1_{n,n,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)}, \quad n \geq 1. \quad (1.72)$$

Аналогично вектор-функция $\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,-n}^{+(5)}$ с учетом соотношения

$$\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)} + \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(5)} = -2u_{k,l+1}^{-(5)} \mathbf{e}_1 - u_{k,l}^{-(5)} \mathbf{e}_0 = \begin{cases} 0, & l = k + 1, \\ -u_{k,k}^{-(5)} \mathbf{e}_0, & l = k, \end{cases}$$

представима разложением

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,-n}^{+(5)} = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^k (\delta_{t1} + \delta_{t3}) f1_{n,-n,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)}. \quad (1.73)$$

Запишем разложение перемещения $\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(5)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(5)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} \left\{ -\chi f1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)} + (1 + \chi) f1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(5)} + \right. \\ \left. + f1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(5)} + g1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)} \right\}. \quad (1.74) \end{aligned}$$

Заметим, что выполняется равенство

$$-\chi \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)} + (1 + \chi) \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(5)} + \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(5)} = \begin{cases} -u_{k,-k}^{-(5)} \mathbf{e}_1, & l = -k - 1; \\ 0, & l = -k. \end{cases} \quad (1.75)$$

Теперь можно перегруппировать слагаемые в формуле (1.74) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(5)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k+1} \left\{ \left[-\chi\delta_{t1} + (1+\chi)\delta_{t3} + \delta_{t2} \right] f1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} + \right. \\
& \left. + \delta_{t1} g1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[f1_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} + g1_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} \right] \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(5)} + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} g1_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k}^{-(5)}. \quad (1.76)
\end{aligned}$$

С помощью рекуррентных формул для функций Лежандра преобразуем сумму

$$\begin{aligned}
f1_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} + z_{j\alpha} f4_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} = & (-1)^{n-k} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \times \\
& \times \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} \left[u_{p+r,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{p+r+1,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} \right]. \quad (1.77)
\end{aligned}$$

Так как справедливо соотношение

$$u_{n+k,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{n+k+1,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} = \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,n+k+2}^{+(4)j,\alpha},$$

то равенство (1.77) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
f1_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} + z_{j\alpha} f4_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} = \\
= (-1)^{n-k} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} v_{r+p,n,k}^{j,\alpha} \equiv f5_{n,j}^{k,\alpha},
\end{aligned}$$

где $v_{r+p,n,k}^{j,\alpha}$ определено в условии теоремы. Подставляя эту формулу в разложение (1.76), получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(5)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k+1} \left\{ \left[-\chi\delta_{t1} + (1+\chi)\delta_{t3} + \delta_{t2} \right] f1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} + \right. \\
& \left. + \delta_{t1} g1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} g2_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} g1_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k}^{-(5)}. \quad (1.78)
\end{aligned}$$

Подобным образом можно записать

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,-n}^{+(5)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k-1} \left\{ \left[-\chi\delta_{t1} - (1+\chi)\delta_{t3} + \delta_{t2} \right] f1_{n,-n-1,j}^{k,l,\alpha} + \right. \\
& \left. + \delta_{t1} g1_{n,-n-1,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[f1_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha} + g1_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha} \right] \mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(5)} +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} g1_{n,-n-1,j}^{k,k,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k}^{-(5)}, \quad (1.79)$$

причем

$$\begin{aligned} f1_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha} + z_{j\alpha} f4_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha} &= \\ &= (-1)^{k-n} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} w_{r+p,n,k}^{j,\alpha} \equiv f6_{n,j}^{k,\alpha}, \end{aligned}$$

где $w_{r+p,n,k}^{j,\alpha}$ приведено в условии теоремы. Используя этот результат, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{3,n,-n}^{+(5)} &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k-1} \left\{ \left[-\chi \delta_{t1} - (1+\chi) \delta_{t3} + \delta_{t2} \right] f1_{n,-n-1,j}^{k,l,\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{t1} g1_{n,-n-1,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} g3_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} g1_{n,-n-1,j}^{k,k,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k}^{-(5)}. \quad (1.80) \end{aligned}$$

Заметим, что перемещения $\mathbf{U}_{2,k,l}^{-(5)} = 0$ при $l = \pm(k+1)$. Поэтому из (1.70) следует разложение

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{2,n,n}^{+(5)} &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \left\{ \delta_{t2} f1_{n,n,j}^{k,l,\alpha} + \delta_{t1} g1_{n,n,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)} + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} g1_{n,n,j}^{k,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} g1_{n,n,j}^{k,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(5)}. \quad (1.81) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{2,n,-n}^{+(5)} &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \left\{ \delta_{t2} f1_{n,-n,j}^{k,l,\alpha} + \delta_{t1} g1_{n,-n,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)} + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} g1_{n,-n,j}^{k,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} g1_{n,-n,j}^{k,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(5)}. \quad (1.82) \end{aligned}$$

Таким образом, доказана формула

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)}(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.83)$$

где коэффициенты $T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha}$ описаны в условии теоремы.

Из формул (1.64) — (1.68) следуют соотношения

$$\mathbf{U}_{2,k,k}^{-(5)} = \chi \tilde{\mathbf{U}}_{1,k,k}^{-(5)} + (1 + \chi) \tilde{\mathbf{U}}_{3,k,k}^{-(5)}; \quad (1.84)$$

$$\mathbf{U}_{2,k,-k}^{-(5)} = \chi \tilde{\mathbf{U}}_{1,k,-k}^{-(5)} - (1 + \chi) \tilde{\mathbf{U}}_{3,k,-k}^{-(5)}; \quad (1.85)$$

$$\mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(5)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,k,k}^{-(5)}, \quad \mathbf{U}_{2,k,k+1}^{-(5)} = 0, \quad \mathbf{U}_{3,k,k+1}^{-(5)} = -\tilde{\mathbf{U}}_{2,k,k}^{-(5)}; \quad (1.86)$$

$$\mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(5)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,k,-k}^{-(5)}, \quad \mathbf{U}_{2,k,-k-1}^{-(5)} = 0, \quad \mathbf{U}_{3,k,-k-1}^{-(5)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,k,-k}^{-(5)}; \quad (1.87)$$

$$\mathbf{U}_{1,0,1}^{-(5)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(5)}, \quad \mathbf{U}_{1,0,-1}^{-(5)} = \tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(5)}, \quad \mathbf{U}_{2,0,\pm 1}^{-(5)} = 0; \quad (1.88)$$

$$\mathbf{U}_{3,0,1}^{-(5)} = -\tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(5)}, \quad \mathbf{U}_{3,0,-1}^{-(5)} = \tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(5)}, \quad \mathbf{U}_{2,0,0}^{-(5)} = \chi \tilde{\mathbf{U}}_{1,0,0}^{-(5)}, \quad \mathbf{U}_{3,0,0}^{-(5)} = 0. \quad (1.89)$$

Преобразуем разложение (1.83), учитывая равенства (1.84) – (1.89):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(5)} &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k-1} T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,l}^{-(5)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,k,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,k}^{-(5)} + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,k+1}^{-(5)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,-k,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,-k}^{-(5)} + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,-k-1}^{-(5)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 T_{s,n,m,j}^{t,0,-1,\alpha} \mathbf{U}_{t,0,-1}^{-(5)} + \sum_{t=1}^3 T_{s,n,m,j}^{t,0,0,\alpha} \mathbf{U}_{t,0,0}^{-(5)} + \sum_{t=1}^3 T_{s,n,m,j}^{t,0,1,\alpha} \mathbf{U}_{t,0,1}^{-(5)} = \\ &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k-1} T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,l}^{-(5)} + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \delta_{t1} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} \right] + \right. \\ &\quad + \delta_{t2} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,k+1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,k,k+1,\alpha} \right] + \delta_{t3} \left[T_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} + (1 + \chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} \right] \left. \right\} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,k}^{-(5)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \delta_{t1} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} \right] + \delta_{t2} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,-k-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,k,-k-1,\alpha} \right] + \right. \\ &\quad + \delta_{t3} \left[T_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} - (1 + \chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} \right] \left. \right\} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,-k}^{-(5)} + \sum_{t=1}^3 \left\{ \delta_{t1} \left[T_{s,n,m,j}^{1,0,0,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,0,0,\alpha} \right] + \right. \\ &\quad + \delta_{t2} \left[T_{s,n,m,j}^{1,0,1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,0,1,\alpha} \right] + \delta_{t3} \left[T_{s,n,m,j}^{1,0,-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,0,-1,\alpha} \right] \left. \right\} \tilde{\mathbf{U}}_{t,0,0}^{-(5)}. \quad (1.90) \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,l}^{-(5)}(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.91)$$

где коэффициенты $\tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha}$ приведены в формулировке теоремы. Теорема доказана.

Приведенные в предыдущем параграфе внешние решения уравнения Ламе не при всех значениях параметров n и m регулярны, а система внутренних решений не является линейно независимой. В работе [63] были построены такие системы решений уравнения (1.21) в областях Ω_6^\pm , которые являются линейными комбинациями решений (1.40), (1.41) и удовлетворяют всем свойствам базисности [65]. Положим

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(6)} = \mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(6)}; \quad s = \overline{1,3}; \quad n = 1, 2, \dots, |m| \leq n-1; \quad (1.92)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{+(6)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{\pm(6)} \mp \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{\pm(6)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.93)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,0,0}^{+(6)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,1}^{+(6)} + (1 + \chi) \mathbf{U}_{3,0,1}^{+(6)} + \mathbf{U}_{2,0,1}^{+(6)}; \quad (1.94)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{+(6)} = \mathbf{U}_{2,n,\pm n}^{+(6)}; \quad n = 0, 1, \dots; \quad (1.95)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{+(6)} = & -\chi \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{+(6)} \pm (1 + \chi) \mathbf{U}_{3,n,\pm(n+1)}^{+(6)} + \\ & + \mathbf{U}_{2,n,\pm(n+1)}^{+(6)}; \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (1.96)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{+(6)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,-1}^{+(6)} - (1 + \chi) \mathbf{U}_{3,0,-1}^{+(6)} + \mathbf{U}_{2,0,-1}^{+(6)}; \quad (1.97)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{-(6)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{-(6)}; \quad n = 0, 1, \dots; \quad (1.98)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{-(6)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{-(6)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.99)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{-(6)} = \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{-(6)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.100)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(6)} = \mathbf{U}_{1,0,1}^{-(6)}; \quad (1.101)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(6)} = \mathbf{U}_{1,0,-1}^{-(6)}. \quad (1.102)$$

В работе [78] получены теоремы сложения для решений (1.92) — (1.102).

Теорема 1.8. *Справедливы разложения внешних модифицированных базисных решений уравнения Ламе в сжатой сфероидальной системе координат с началом в точке O_j по внутренним модифицированным решениям в сжатой сфероидальной системе координат с началом в точке O_α при $\tilde{\xi}_\alpha \in (0, \beta_{j\alpha})$:*

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{U}_{t,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_\alpha, \tilde{\eta}_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.103)$$

2de

$$\beta_{j\alpha} = \text{Arsh} \frac{\sqrt{t_{j\alpha}^2 + \rho_{j\alpha}^2 - c_\alpha^2} + \sqrt{(t_{j\alpha}^2 + \rho_{j\alpha}^2 - c_\alpha^2)^2 + 4c_\alpha^2 \rho_{j\alpha}^2}}{c_\alpha \sqrt{2}},$$

$$t_{j\alpha} = \max(|z_{j\alpha}| - c_j, 0);$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha}, \quad k \geq 1, |\ell| \leq k-1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,k+1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,k,k+1,\alpha}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} + (1 + \chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,-k-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,k,-k-1,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} - (1 + \chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,0,0,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,0,-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,0,-1,\alpha};$$

$$T_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \delta_{st} f_{1,n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{s2} \delta_{t1} g_{1,n,m,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (n \geq 1) \wedge (|m| \leq n-1);$$

$$T_{1,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (\delta_{t1} - \delta_{t3}) f_{1,n,n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1);$$

$$T_{1,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = 0, \quad n \geq 1;$$

$$T_{1,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (\delta_{t1} + \delta_{t3}) f_{1,n,-n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (-k-1 \leq \ell \leq k) \wedge (n \geq 1);$$

$$T_{1,0,0,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \tilde{\delta}_t f_{1,0,1,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g_{1,0,1,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad 1-k \leq \ell \leq k+1;$$

$$T_{1,0,0,j}^{t,k,-k,\alpha} = \delta_{t1} g_{1,0,1,j}^{k,-k,\alpha};$$

$$T_{1,0,0,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = \delta_{t1} g_{1,0,1,j}^{k,-k-1,\alpha};$$

$$T_{2,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \delta_{t2} f_{1,n,n,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g_{1,n,n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad -k \leq \ell \leq k;$$

$$T_{2,n,n,j}^{t,k,k+1,\alpha} = \delta_{t1} g_{1,n,n,j}^{k,k+1,\alpha};$$

$$T_{2,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = \delta_{t1} g_{1,n,n,j}^{k,-k-1,\alpha};$$

$$\begin{aligned}
T_{2,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= \delta_{t2} f1_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g1_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad -k \leq \ell \leq k; \\
T_{2,n,-n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= \delta_{t1} g1_{n,-n,j}^{k,-k-1,\alpha}; \\
T_{2,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} &= \delta_{t1} g1_{n,-n,j}^{k,k+1,\alpha}; \\
T_{3,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= \tilde{\delta}_t f1_{n,n+1,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g1_{n,n+1,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (1-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1); \\
T_{3,n,n,j}^{t,k,-k,\alpha} &= \delta_{t1} g1_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha}, \quad n \geq 1; \\
T_{3,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= \delta_{t1} g2_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha}, \quad n \geq 1; \\
T_{3,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= \hat{\delta}_t f1_{n,-n-1,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g1_{n,-n-1,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad -k-1 \leq \ell \leq k-1; \\
T_{3,n,-n,j}^{t,k,k,\alpha} &= \delta_{t1} g1_{n,-n-1,j}^{k,k,\alpha}; \\
T_{3,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} &= \delta_{t1} g3_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha}; \\
g1_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} &= -\bar{q}_{j0}^2 f2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} - \bar{q}_{\alpha 0}^2 f3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + z_{j\alpha} f4_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha}; \\
g2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} &= -\bar{q}_{j0}^2 f2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} - \bar{q}_{\alpha 0}^2 f3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + f5_{n,j}^{k,\alpha}; \\
g3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} &= -\bar{q}_{j0}^2 f2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} - \bar{q}_{\alpha 0}^2 f3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + f6_{n,j}^{k,\alpha}; \\
\tilde{\delta}_t &= -\chi \delta_{t1} + (\chi + 1) \delta_{t3} + \delta_{t2}; \\
\hat{\delta}_t &= -\chi \delta_{t1} - (\chi + 1) \delta_{t3} + \delta_{t2}; \\
f1_{n,m,j}^{k,l,\alpha} &= (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha}; \\
f2_{n,m,j}^{k,l,\alpha} &= (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n+2}^{\infty} (n-r) \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha}; \\
f3_{n,m,j}^{k,l,\alpha} &= (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k+2}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} (k-p) \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha}; \\
f4_{n,m,j}^{k,l,\alpha} &= (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r+1,m-\ell}^{+(4)j,\alpha}; \\
f5_{n,j}^{k,\alpha} &= (-1)^{n-k} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} v_{p+r,n,k}^{j,\alpha};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f6_{n,j}^{k,\alpha} &= (-1)^{k-n} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} w_{p+r,n,k}^{j,\alpha}; \\
\Gamma_{nrj}^{kp\alpha} &= \frac{1}{\gamma_{kp} \gamma_{nr}} (-1)^p (-i)^{p+r+1} \varepsilon_{kp} \varepsilon_{nr} \left(\frac{c_j}{2} \right)^{r+1} \left(\frac{c_\alpha}{2} \right)^p; \\
\gamma_{kp} &= \Gamma \left(\frac{p-k}{2} + 1 \right) \Gamma \left(\frac{k+p}{2} + \frac{3}{2} \right); \\
v_{\nu,n,k}^{j,\alpha} &= \begin{cases} u_{\nu,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{\nu+1,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \geq n+k+2, \\ \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \leq n+k+1, \end{cases} \\
w_{\nu,n,k}^{j,\alpha} &= \begin{cases} u_{\nu,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{\nu+1,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \geq n+k+2, \\ \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \leq n+k+1, \end{cases} \\
u_{n,m}^{+(4)j,\alpha} &= \begin{cases} \frac{(n-m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}} P_n^m(\cos \theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n \geq m, \\ \frac{(-1)^m (n+m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}} P_n^{-m}(\cos \theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n < m, \end{cases}
\end{aligned}$$

$(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$ — сферические координаты точки O_α в системе координат с началом в точке O_j .

Теорема 1.8 может быть доказана аналогично теореме 1.7.

1.4 Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в сферических координатах

В работе [62] были введены следующие частные решения уравнения Ламе (1.21) во внешности (внутренности) шара $\Omega_4^\pm = \{(r, \theta, \varphi) : r \gtrless r_0\}$:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{D}_s u_{n\mp 1, m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi); \quad s = 1, 3; \quad (1.104)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) &= \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) - \\
&\quad - \frac{r_0^2}{2(n \pm 1) + 1} \mathbf{D}_1 u_{n\pm 1, m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi), \quad (1.105)
\end{aligned}$$

где $n = 0, 1, \dots; |m| \leq n+1; m, n \in \mathbb{Z}$, $u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi)$; \mathbf{D}_s определены формулами (1.5), (1.24).

Приведем координатную форму перемещений (1.104), (1.105):

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) &= -u_{n,m-1}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_{-1} + u_{n,m+1}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_1 \mp \\
&\quad \mp u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_0; \quad (1.106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) = & \frac{1}{2n+3} \left\{ -(n-m+2)(n+m)u_{n,m-1}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ & + (n-m)(n+m+2)u_{n,m+1}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_1 - \\ & - [(n-m+1)(n+m+1) + \chi(2n+3)] \times \\ & \left. \times u_{n,m}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_0 + (r^2 - r_0^2) \nabla u_{n+1,m}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) \right\}; \quad (1.107) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) = & \frac{1}{2n-1} \left\{ -(n-m+1)(n+m-1)u_{n,m-1}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ & + (n-m-1)(n+m+1)u_{n,m+1}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_1 + \\ & + [(n-m)(n+m) - \chi(2n-1)]u_{n,m}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_0 + \\ & \left. + (r^2 - r_0^2) \nabla u_{n-1,m}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) \right\}; \quad (1.108) \end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = u_{n,m-1}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_{-1} + u_{n,m+1}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_1. \quad (1.109)$$

В работе [65] доказана базисность решений (1.104), (1.105) в областях Ω_4^\pm .

Теорема 1.9. При $r_2, r_{20} < r_{12}$ справедливы разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+l+1} f_{n,m}^{(44)k,l} \mathbf{U}_{s,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2), \quad s = 1, 3; \quad (1.110) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+l} \left[f_{n,m}^{(44)k,l} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) + \right. \\ & \left. + \tilde{f}_{n,m}^{+(44)k,l} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) \right], \quad (1.111) \end{aligned}$$

где

$$f_{n,m}^{(44)k,l} = u_{n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}); \quad (1.112)$$

$$\tilde{f}_{n,m}^{+(44)k,l} = \frac{r_{20}^2}{2k+3} f_{n,m}^{(44)k+2,l} - z_{12} f_{n,m}^{(44)k+1,l} + \frac{r_{10}^2}{2n+3} f_{n+1,m}^{(44)k+1,l}. \quad (1.113)$$

При $r_1, r_{10} < r_{12}$ справедливы разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+l+1} f_{n,m}^{(44)k,l} \mathbf{U}_{s,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1); \quad s = 1, 3; \end{aligned} \quad (1.114)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+l} \left[f_{n,m}^{(44)k,l} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{n,m}^{-(44)k,l} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) \right], \end{aligned} \quad (1.115)$$

где

$$\tilde{f}_{n,m}^{-(44)k,l} = \frac{r_{10}^2}{2k+3} f_{n,m}^{(44)k+2,l} - z_{12} f_{n,m}^{(44)k+1,l} + \frac{r_{20}^2}{2n+3} f_{n+1,m}^{(44)k+1,l}. \quad (1.116)$$

1.5 Теоремы сложения решений уравнения Ламе для модифицированного базиса в сферических координатах

Приведенные в предыдущем параграфе внешние решения уравнения Ламе не при всех значениях параметров n и m регулярны, а система внутренних решений не является линейно независимой. В работе [63] были построены такие системы решений уравнения (1.21) в областях Ω_4^{\pm} , которые являются линейными комбинациями решений (1.104), (1.105) и удовлетворяют всем свойствам базисности [65]. Положим

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)} = \mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(4)}; \quad s = \overline{1,3}; \quad n = 1, 2, \dots, |m| \leq n-1; \quad (1.117)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{+(4)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{+(4)} \mp \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{+(4)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.118)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,0,0}^{+(4)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,1}^{+(4)} + (1+\chi) \mathbf{U}_{3,0,1}^{+(4)} + \mathbf{U}_{2,0,1}^{+(4)}; \quad (1.119)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{+(4)} = \mathbf{U}_{2,n,\pm n}^{+(4)}; \quad n = 0, 1, \dots; \quad (1.120)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{+(4)} = -\chi \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{+(4)} \pm (1+\chi) \mathbf{U}_{3,n,\pm(n+1)}^{+(4)} + \\ + \mathbf{U}_{2,n,\pm(n+1)}^{+(4)}; \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (1.121)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{+(4)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,-1}^{+(4)} - (1+\chi) \mathbf{U}_{3,0,-1}^{+(4)} + \mathbf{U}_{2,0,-1}^{+(4)}; \quad (1.122)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{-(4)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{-(4)}; \quad n = 0, 1, \dots; \quad (1.123)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{-(4)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{-(4)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.124)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{-(4)} = \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{-(4)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.125)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(4)} = \mathbf{U}_{1,0,1}^{-(4)}; \quad (1.126)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(4)} = \mathbf{U}_{1,0,-1}^{-(4)}. \quad (1.127)$$

Теорема 1.10. *Справедливы разложения внешних модифицированных базисных решений уравнения Ламе в сферической системе координат с началом в точке O_j по внутренним модифицированным решениям в сферической системе координат с началом в точке O_α при $r_\alpha < r_{j\alpha}$:*

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,l}^{-(4)}(r_\alpha, \theta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.128)$$

где

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha}, \quad k \geq 1, |\ell| \leq k-1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} - \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,k+1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,k,k+1,\alpha}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} - (1 + \chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} - \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,-k-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,k,-k-1,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} + (1 + \chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,0,0,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,0,-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,0,-1,\alpha};$$

$$T_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (-1)^{k+l+s} \left\{ \delta_{st} f_{n,m,j}^{k,l,\alpha} + \delta_{s2} \delta_{t1} g_{n,m,j}^{k,l,\alpha} \right\}, \quad (n \geq 1, |m| \leq n-1);$$

$$T_{1,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (-1)^{k+l+1} (\delta_{t1} - \delta_{t3}) f_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1);$$

$$T_{1,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = 0, \quad n \geq 1;$$

$$T_{1,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (-1)^{k+l+1} (\delta_{t1} + \delta_{t3}) f_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (-k-1 \leq \ell \leq k) \wedge (n \geq 1);$$

$$T_{1,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} = 0, \quad n \geq 1;$$

$$T_{1,0,0,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (-1)^{k+l+1} (\tilde{\delta}_t f_{0,1,j}^{k,\ell,\alpha} - \delta_{t1} g_{0,1,j}^{k,\ell,\alpha}), \quad 1-k \leq \ell \leq k+1;$$

$$\begin{aligned}
T_{1,0,0,j}^{t,k,-k,\alpha} &= \delta_{t1} g_{0,1,j}^{k,-k,\alpha}; \\
T_{1,0,0,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= \delta_{t1} \tilde{g}_{0,1,j}^{k,-k-1,\alpha}; \\
T_{2,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= (-1)^{k+l} (\delta_{t2} f_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha}), \quad -k \leq \ell \leq k; \\
T_{2,n,n,j}^{t,k,k+1,\alpha} &= -\delta_{t1} g_{n,n,j}^{k,k+1,\alpha}; \\
T_{2,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= -\delta_{t1} g_{n,n,j}^{k,-k-1,\alpha}; \\
T_{2,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= (-1)^{k+l} (\delta_{t2} f_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha}), \quad (-k \leq \ell \leq k) \wedge (n \geq 1); \\
T_{2,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} &= -\delta_{t1} g_{n,-n,j}^{k,k+1,\alpha}, \quad n \geq 1; \\
T_{2,n,-n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= -\delta_{t1} g_{n,-n,j}^{k,-k-1,\alpha}, \quad n \geq 1; \\
T_{3,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= (-1)^{k+l+1} (\tilde{\delta}_t f_{n,n+1,j}^{k,\ell,\alpha} - \delta_{t1} g_{n,n+1,j}^{k,\ell,\alpha}), \quad (1-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1); \\
T_{3,n,n,j}^{t,k,-k,\alpha} &= \delta_{t1} g_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha}, \quad n \geq 1; \\
T_{3,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= \delta_{t1} \tilde{g}_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha}, \quad n \geq 1; \\
T_{3,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= (-1)^{k+l+1} (\hat{\delta}_t f_{n,-n-1,j}^{k,\ell,\alpha} - \delta_{t1} g_{n,-n-1,j}^{k,\ell,\alpha}), \quad -k-1 \leq \ell \leq k-1; \\
T_{3,n,-n,j}^{t,k,k,\alpha} &= \delta_{t1} g_{n,-n-1,j}^{k,k,\alpha}; \\
T_{3,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} &= \delta_{t1} \tilde{g}_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha}; \\
g_{n,m,j}^{k,l,\alpha} &= \left(\frac{r_{j0}^2}{2n+3} + \frac{r_{\alpha 0}^2}{2k+3} \right) f_{n,m,j}^{k+2,l,\alpha} - z_{j\alpha} f_{n,m,j}^{k+1,l,\alpha}; \\
\tilde{g}_{n,m,j}^{k,l,\alpha} &= \left(\frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} - \frac{r_{j0}^2}{2n+3} - \frac{r_{\alpha 0}^2}{2k+3} \right) f_{n+1,m,j}^{k+1,l,\alpha}; \\
\tilde{\delta}_t &= -\chi \delta_{t1} + (\chi+1) \delta_{t3} - \delta_{t2}; \\
\hat{\delta}_t &= -\chi \delta_{t1} - (\chi+1) \delta_{t3} - \delta_{t2}; \\
f_{n,m,j}^{k,l,\alpha} &= u_{n+k,m-\ell}^{+(4)j,\alpha}; \\
u_{n,m}^{+(4)j,\alpha} &= \begin{cases} \frac{(n-m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}} P_n^m(\cos \theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n \geq m, \\ \frac{(-1)^m (n+m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}} P_n^{-m}(\cos \theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n < m; \end{cases}
\end{aligned}$$

$(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$ — сферические координаты точки O_α в системе координат с началом в точке O_j .

Доказательство. Формулы (1.110), (1.111) из параграфа 1.4 могут быть записаны в виде одной формулы

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)} = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+l+s} \left\{ \delta_{st} f_{n,m,j}^{k,l,\alpha} + \right. \\ \left. + \delta_{t1} \delta_{s2} \left[\left(\frac{r_{j0}^2}{2n+3} + \frac{r_{\alpha 0}^2}{2k+3} \right) f_{n,m,j}^{k+2,l,\alpha} - z_{j\alpha} f_{n,m,j}^{k+1,l,\alpha} \right] \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)}. \quad (1.129)$$

Преобразуем вектор-функцию $\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,n}^{+(4)}$, используя формулу (1.129):

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,n}^{+(4)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} f_{n,n,j}^{k,l,\alpha} \left[\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)} - \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(4)} \right]. \quad (1.130)$$

Учитывая, что справедливо соотношение

$$\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)} - \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(4)} = -2u_{k,l-1}^{-(4)} \mathbf{e}_{-1} + u_{k,l}^{-(4)} \mathbf{e}_0 = \begin{cases} 0, & l = -k-1, \\ u_{k,-k}^{-(4)} \mathbf{e}_0, & l = -k, \end{cases}$$

разложение (1.130) можно представить в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,n}^{+(4)} = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k+1} (-1)^{k+l+1} (\delta_{t1} - \delta_{t3}) f_{n,n,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)}, \quad n \geq 1. \quad (1.131)$$

Аналогично вектор-функция $\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,-n}^{+(4)}$ с учетом соотношения

$$\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)} + \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(4)} = 2u_{k,l+1}^{-(4)} \mathbf{e}_1 + u_{k,l}^{-(4)} \mathbf{e}_0 = \begin{cases} 0, & l = k+1, \\ u_{k,k}^{-(4)} \mathbf{e}_0, & l = k, \end{cases}$$

представима разложением

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,-n}^{+(4)} = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^k (-1)^{k+l+1} (\delta_{t1} + \delta_{t3}) f_{n,-n,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)}. \quad (1.132)$$

Запишем разложение перемещения $\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(4)}$:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(4)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+l+1} \left\{ -\chi f_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)} + (1+\chi) f_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(4)} - \right. \\ \left. - f_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(4)} - g_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)} \right\}. \quad (1.133)$$

Заметим, что выполняется равенство

$$-\chi \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)} + (1+\chi) \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(4)} - \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(4)} = \begin{cases} u_{k,-k}^{-(4)} \mathbf{e}_1, & l = -k-1; \\ 0, & l = -k. \end{cases} \quad (1.134)$$

Теперь можно перегруппировать слагаемые в формуле (1.133) следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(4)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k+1} (-1)^{k+l+1} \left\{ \left[-\chi \delta_{t1} + (1+\chi) \delta_{t3} - \delta_{t2} \right] f_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} - \right. \\ & \left. - \delta_{t1} g_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[f_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} - g_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} \right] \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(4)} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k}^{-(4)}. \end{aligned} \quad (1.135)$$

С помощью рекуррентных формул для функций Лежандра преобразуем сумму

$$f_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} + z_{j\alpha} f_{n,n+1,j}^{k+1,-k-1,\alpha} = u_{n+k,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{n+k+1,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}. \quad (1.136)$$

Так как справедливо соотношение

$$u_{n+k,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{n+k+1,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} = \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,n+k+2}^{+(4)j,\alpha},$$

то равенство (1.136) может быть записано в виде

$$f_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} + z_{j\alpha} f_{n,n+1,j}^{k+1,-k-1,\alpha} = \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}.$$

Подставляя эту формулу в разложение (1.135), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(4)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k+1} (-1)^{k+l+1} \left\{ \left[-\chi \delta_{t1} + (1+\chi) \delta_{t3} - \delta_{t2} \right] f_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} - \right. \\ & \left. - \delta_{t1} g_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)} + \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k}^{-(4)} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} - \frac{r_{j0}^2}{2n+3} - \frac{r_{\alpha 0}^2}{2k+3} \right) f_{n,n+1,j}^{k+2,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(4)}. \end{aligned} \quad (1.137)$$

Подобным образом можно записать

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,-n}^{+(4)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k-1} (-1)^{k+l+1} \left\{ \left[-\chi \delta_{t1} - (1+\chi) \delta_{t3} - \delta_{t2} \right] f_{n,-n-1,j}^{k,l,\alpha} - \right. \\
& \left. - \delta_{t1} g_{n,-n-1,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)} + \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,-n-1,j}^{k,k,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k}^{-(4)} + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} - \frac{r_{j0}^2}{2n+3} - \frac{r_{\alpha 0}^2}{2k+3} \right) f_{n,-n-1,j}^{k+2,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(4)}. \quad (1.138)
\end{aligned}$$

Заметим, что перемещение $\mathbf{U}_{2,k,l}^{-(4)} = 0$ при $l = \pm(k+1)$. Поэтому из (1.129) следует разложение

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,n}^{+(4)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k (-1)^{k+l} \left\{ \delta_{t2} f_{n,n,j}^{k,l,\alpha} + \delta_{t1} g_{n,n,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)} - \\
& - \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,n,j}^{k,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(4)} - \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,n,j}^{k,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(4)}. \quad (1.139)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,-n}^{+(4)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k (-1)^{k+l} \left\{ \delta_{t2} f_{n,-n,j}^{k,l,\alpha} + \delta_{t1} g_{n,-n,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)} - \\
& - \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,-n,j}^{k,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(4)} - \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,-n,j}^{k,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(4)}. \quad (1.140)
\end{aligned}$$

Таким образом, доказана формула

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)}(r_\alpha, \theta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.141)$$

где коэффициенты $T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha}$ описаны в условии теоремы.

Из формул (1.123) – (1.127) следуют соотношения

$$\mathbf{U}_{2,k,k}^{-(4)} = -\chi \tilde{\mathbf{U}}_{1,k,k}^{-(4)} - (1+\chi) \tilde{\mathbf{U}}_{3,k,k}^{-(4)}; \quad (1.142)$$

$$\mathbf{U}_{2,k,-k}^{-(4)} = -\chi \tilde{\mathbf{U}}_{1,k,-k}^{-(4)} + (1+\chi) \tilde{\mathbf{U}}_{3,k,-k}^{-(4)}; \quad (1.143)$$

$$\mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(4)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,k,k}^{-(4)}, \quad \mathbf{U}_{2,k,k+1}^{-(4)} = 0, \quad \mathbf{U}_{3,k,k+1}^{-(4)} = -\tilde{\mathbf{U}}_{2,k,k}^{-(4)}; \quad (1.144)$$

$$\mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(4)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,k,-k}^{-(4)}, \quad \mathbf{U}_{2,k,-k-1}^{-(4)} = 0, \quad \mathbf{U}_{3,k,-k-1}^{-(4)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,k,-k}^{-(4)}; \quad (1.145)$$

$$\mathbf{U}_{1,0,1}^{-(4)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(4)}, \quad \mathbf{U}_{1,0,-1}^{-(4)} = \tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(4)}, \quad \mathbf{U}_{2,0,\pm 1}^{-(4)} = 0, \quad \mathbf{U}_{3,0,0}^{-(4)} = 0; \quad (1.146)$$

$$\mathbf{U}_{3,0,1}^{-(4)} = -\tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(4)}, \quad \mathbf{U}_{3,0,-1}^{-(4)} = \tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(4)}, \quad \mathbf{U}_{2,0,0}^{-(4)} = -\chi \tilde{\mathbf{U}}_{1,0,0}^{-(4)}. \quad (1.147)$$

Преобразуем разложение (1.141), учитывая равенства (1.142) — (1.147):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)} &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k-1} T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,l}^{-(4)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,k,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,k}^{-(4)} + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,k+1}^{-(4)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,-k,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,-k}^{-(4)} + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,-k-1}^{-(4)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 T_{s,n,m,j}^{t,0,-1,\alpha} \mathbf{U}_{t,0,-1}^{-(4)} + \sum_{t=1}^3 T_{s,n,m,j}^{t,0,0,\alpha} \mathbf{U}_{t,0,0}^{-(4)} + \sum_{t=1}^3 T_{s,n,m,j}^{t,0,1,\alpha} \mathbf{U}_{t,0,1}^{-(4)} = \\ &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k-1} T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,l}^{-(4)} + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \delta_{t1} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} - \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} \right] + \right. \\ &\quad + \delta_{t2} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,k+1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,k,k+1,\alpha} \right] + \delta_{t3} \left[T_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} - (1+\chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} \right] \left. \right\} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,k}^{-(4)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \delta_{t1} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} - \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} \right] + \delta_{t2} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,-k-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,k,-k-1,\alpha} \right] + \right. \\ &\quad + \delta_{t3} \left[T_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} + (1+\chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} \right] \left. \right\} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,-k}^{-(4)} + \sum_{t=1}^3 \left\{ \delta_{t1} \left[T_{s,n,m,j}^{1,0,0,\alpha} - \chi T_{s,n,m,j}^{2,0,0,\alpha} \right] + \right. \\ &\quad + \delta_{t2} \left[T_{s,n,m,j}^{1,0,1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,0,1,\alpha} \right] + \delta_{t3} \left[T_{s,n,m,j}^{1,0,-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,0,-1,\alpha} \right] \left. \right\} \tilde{\mathbf{U}}_{t,0,0}^{-(4)}. \quad (1.148) \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,l}^{-(4)}(r_\alpha, \theta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.149)$$

где коэффициенты $\tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha}$ приведены в формулировке теоремы. Теорема доказана.

2 МЕХАНИКА УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПОЛОСТЕЙ ИЛИ ВКЛЮЧЕНИЙ

2.1 Упругое пространство с периодической системой сферических полостей

Рассматривается упругое пространство Ω и бесконечная система сферических полостей $\{\omega_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$, центры которых расположены в узлах $\{O_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$ кубической периодической решетки со стороной a . Декартовыми координатами узлов решетки будут упорядоченные наборы чисел $\{(\alpha a, \beta a, \gamma a); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}\}$. Радиусы полостей обозначим через R . Применим линейное упорядочение к узлам решетки, перенумеровав их согласно правилу

$$n(O_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1}) > n(O_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2}),$$

если

$$\left\{ |\alpha_1| + |\beta_1| + |\gamma_1| > |\alpha_2| + |\beta_2| + |\gamma_2| \right\} \vee \\ \vee \left\{ \left(|\alpha_1| + |\beta_1| + |\gamma_1| = |\alpha_2| + |\beta_2| + |\gamma_2| \right) \wedge \left((\alpha_1 > \alpha_2) \vee \right. \right. \\ \left. \left. \vee (\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 > \beta_2) \vee (\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 > \gamma_2) \right) \right\}. \quad (2.1)$$

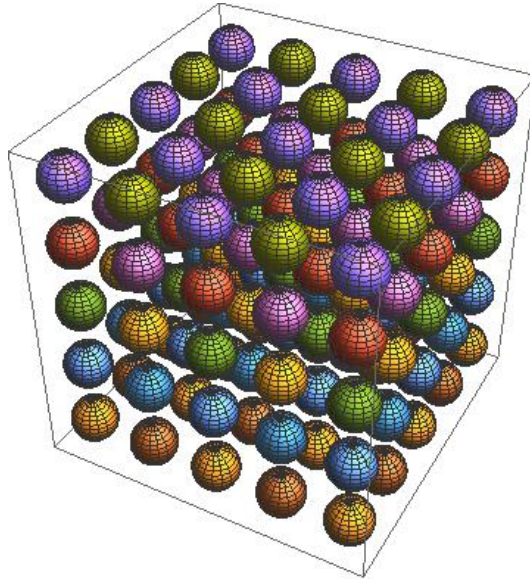


Рис. 2.1. Периодическая система сферических полостей в упругом пространстве

Выше обозначен через $n(O_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1})$ — номер узла $O_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1}$. В новой нумерации точка $O_{\alpha, \beta, \gamma}$ обозначается через O_j (рис. 2.2).

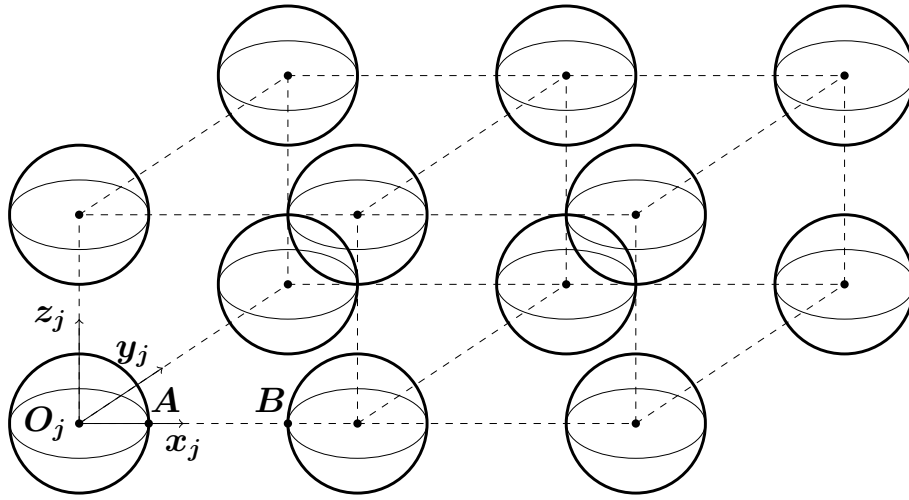


Рис. 2.2. Схематическое представление задачи

С каждой точкой O_j свяжем локальные декартовую (x_j, y_j, z_j) и сонаправленную с ней сферическую систему координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$. Считается, что декартовые системы координат с началами в точках O_j сонаправлены.

Будем рассматривать задачу упругого деформирования пространства со сферическими полостями $\Omega \setminus \left\{ \bigcup_{\alpha, \beta, \gamma} \omega_{\alpha\beta\gamma} \right\}$ под действием нагрузки, приложенной на бесконечности (одноосное, двуосное или всестороннее растяжение упругого пространства). Сферические полости считаются свободными от нагрузки.

Соотношения между координатами можно описать формулами:

$$\begin{aligned} x_i &= r_i \sin \theta_i \cos \varphi_i, \\ y_i &= r_i \sin \theta_i \sin \varphi_i, \\ z_i &= r_i \cos \theta_i, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} x_j = x_\alpha + x_{j\alpha}, \\ y_j = y_\alpha + y_{j\alpha}, \\ z_j = z_\alpha + z_{j\alpha}, \end{cases} \quad j \neq \alpha, \quad j, \alpha = \overline{1, N}, \tag{2.3}$$

где $\overrightarrow{O_j O_\alpha} = (x_{j\alpha}, y_{j\alpha}, z_{j\alpha}) = (r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$.

Для определения НДС в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе относительно неизвестного вектора перемещения \mathbf{U} с граничными условиями

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = 0 \tag{2.4}$$

и условиями на бесконечности одного из трех типов

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{z=\pm\infty} = \pm T\mathbf{e}_z \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\rho=\infty} = T\mathbf{e}_\rho \quad (\text{двуосное растяжение}), \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{r=\infty} = T\mathbf{e}_r \quad (\text{всестороннее растяжение}), \quad (2.7)$$

где $\mathbf{F}\mathbf{U}$ — отвечающий перемещению \mathbf{U} вектор усилий на соответствующей граничной поверхности, $\Gamma_j = \{(r_j, \theta_j, \varphi_j) : r_j = R_j\}$.

Решение задачи будем искать в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0, \quad (2.8)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \left(-\frac{\sigma}{1+\sigma} \rho \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{1+\sigma} z \mathbf{e}_z \right) \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma} \rho \mathbf{e}_\rho - \frac{2\sigma}{1+\sigma} z \mathbf{e}_z \right) \quad (\text{двуосное растяжение}), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \frac{1-2\sigma}{1+\sigma} (\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z) \quad (\text{всестороннее растяжение}), \quad (2.12)$$

где G , σ — модуль сдвига и коэффициент Пуассона упругого пространства, $a_{s,n,m}^{(j)}$ — неизвестные коэффициенты, перемещения $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}$ приведены в формулах (1.117) — (1.122).

Относительно перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ граничные условия записываются следующим образом

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\Gamma_j} = -\mathbf{F}\mathbf{U}_0|_{\Gamma_j}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{z=\pm\infty} = 0 \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\rho=\infty} = 0 \quad (\text{двуосное растяжение}), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{r=\infty} = 0 \quad (\text{всестороннее растяжение}). \quad (2.16)$$

Вспомогательным перемещениям \mathbf{U}_0 отвечают следующие напряжения на поверхностях Γ_j ($\mathbf{n}_j = \mathbf{e}_{r_j}$ — вектор нормали на поверхности Γ_j):

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = TP_1(\cos \theta_j) \mathbf{e}_z \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (2.17)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = -TP_1^{(1)}(\cos \theta_j) \mathbf{e}_{\rho_j} \quad (\text{двуосное растяжение}). \quad (2.18)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = T \left[-P_1^{(1)}(\cos \theta_j) \mathbf{e}_{\rho_j} + P_1(\cos \theta_j) \mathbf{e}_z \right] \text{ (всестор. растяжение)}. \quad (2.19)$$

Используя теоремы сложения (1.128) перемещение $\tilde{\mathbf{U}}$ можно записать полностью в системе координат с началом в точке O_j

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) + \\ & + \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} a_{t,k,l}^{(\alpha)}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

В силу периодичности задачи вклад каждого слагаемого в формуле (2.9) будет одинаковым, поэтому можно считать, что $a_{s,n,m}^{(j)} = a_{s,n,m}$.

После перехода в формуле (2.20) к напряжениям и удовлетворения граничным условиям относительно неизвестных $a_{s,n,m}$ получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{s=1}^3 a_{s,n,m} \tilde{F}_{s,n,m}^{+(k)} + \tilde{F}_{s,n,m}^{-(k)} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l} \sum_{\alpha \neq j} \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} = F_{n,m}^{(k)}; \quad (2.21)$$

$$n, m \in \mathbb{Z}: \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n, \quad k = -1, 0, 1; \quad j = \overline{1, \infty},$$

где $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ — компоненты вектора напряжений на поверхности $r_j = R$, отвечающего вектору перемещения $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)}$:

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)} = \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(-1)} S_n^{m-1} \mathbf{e}_{-1} + \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(1)} S_n^{m+1} \mathbf{e}_1 + \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(0)} S_n^m \mathbf{e}_0;$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{T}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \delta_{k0} \quad (\text{одноосное растяжение}),$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{T}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} (2\delta_{k,-1} - \delta_{k1}) \quad (\text{двуосное растяжение}),$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{T}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} (\delta_{k0} + 2\delta_{k,-1} - \delta_{k1}) \quad (\text{всестороннее растяжение}).$$

Явный вид компонент $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ не приводится ввиду их громоздкости. Они получаются из формул (1.117) — (1.127), (4.19) — (4.24).

На рис. 2.3 — 2.8 приведены нормальные напряжения на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства с периодической системой сферических полостей.

При одноосном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_z/T . Областью их концентрации являются границы полостей. С приближением полостей друг к другу напряжения σ_z/T возрастают.

При двuosном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_y/T . Областью их концентрации являются границы полостей. С приближением полостей друг к другу напряжения σ_y/T возрастают.

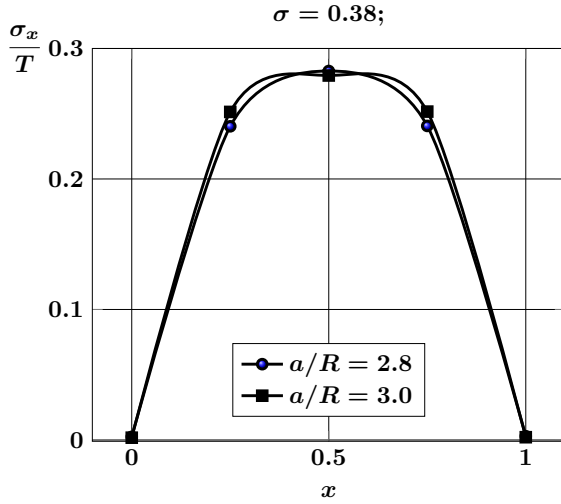


Рис. 2.3. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

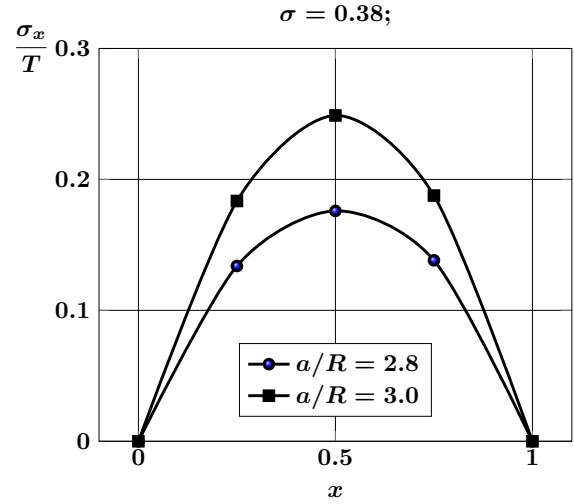


Рис. 2.4. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении

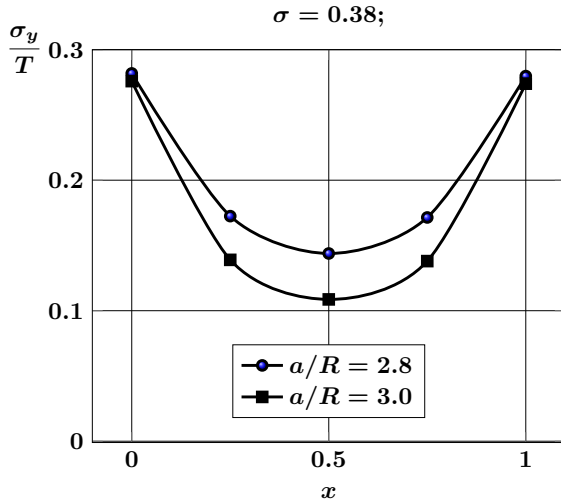


Рис. 2.5. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

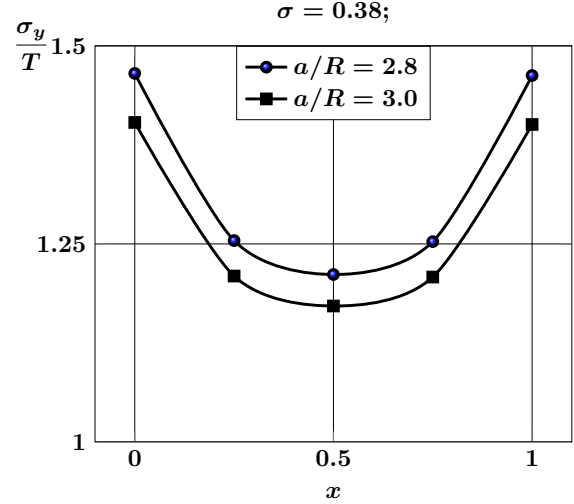


Рис. 2.6. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении

В таблице 2.1 приведено сравнение нормальных напряжений в средней точке отрезка AB для разного количества (27 и 125) полостей периодической структуры. Из таблицы видно, что увеличение числа полостей практически не меняет

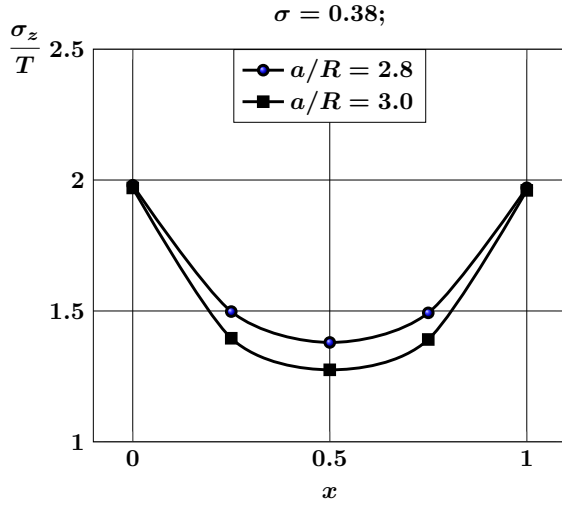


Рис. 2.7. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

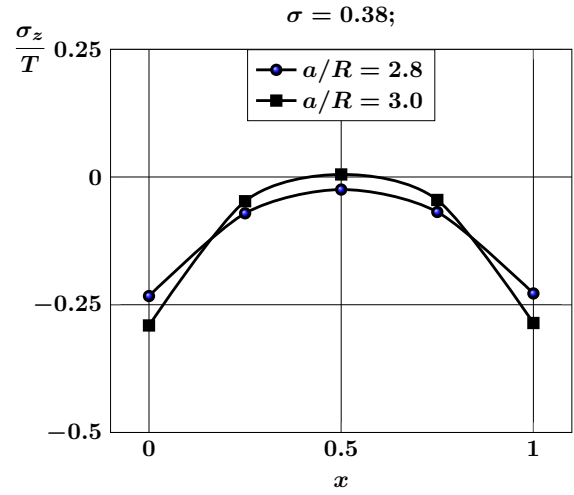


Рис. 2.8. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении

Таблица 2.1. Сравнение напряжений для разного количества полостей периодической структуры

Кол-во полостей	σ_x/T	σ_y/T	σ_z/T
27	0.27904	0.10871	1.27536
125	0.27934	0.11061	1.27775

значения напряжений.

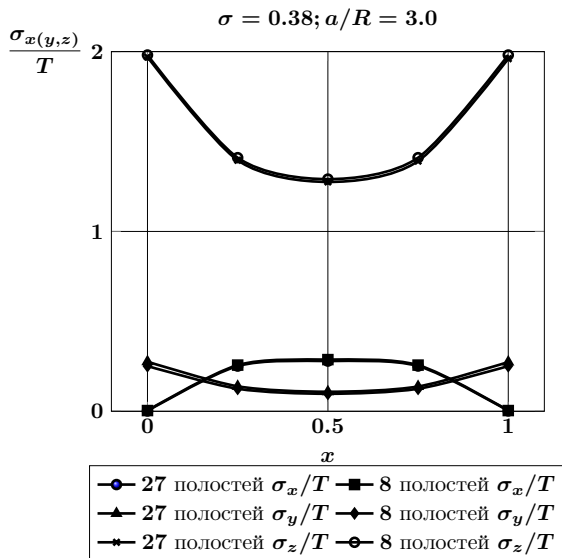


Рис. 2.9. Сравнение напряжения на линии AB для периодической и тетрагональной структур при одноосном растяжении

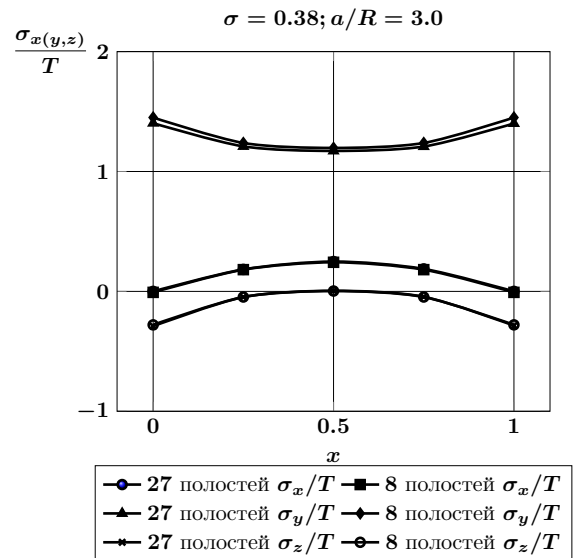


Рис. 2.10. Сравнение напряжения на линии AB для периодической и тетрагональной структур при двuosном растяжении

На рис. 2.9, 2.10 приведено сравнение нормальных напряжений на линии AB для периодической (27 полостей) и тетрагональной (8 полостей) структур при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства. Графики показывают, что все рассмотренные пары напряжений практически не отличаются друг от друга.

2.2 Упругое пространство с периодической системой сферических включений

Рассматривается упругое пространство Ω и бесконечная система сферических включений $\{\omega_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$, центры которых расположены в узлах $\{O_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$ кубической периодической решетки со стороной a . Декартовыми координатами узлов решетки будут упорядоченные наборы чисел $\{(\alpha a, \beta a, \gamma a); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}\}$. Радиусы полостей обозначим через R . Выполним линейное упорядочение узлов таким же образом, как в предыдущем параграфе.

В новой нумерации точка $O_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначается через O_j (рис. 2.2). С каждой точкой O_j свяжем локальную декартовую (x_j, y_j, z_j) и сонаправленную с ней сферическую систему координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$. Считается, что декартовые системы координат с началами в точках O_j сонаправлены.

Будем рассматривать задачу упругого деформирования пространства со сферическими включениями под действием нагрузки, приложенной на бесконечности (одноосное, двуосное или всестороннее растяжение упругого пространства).

Соотношения между координатами можно описать формулами (2.2), (2.3).

Предполагается, что упругие постоянные включений равны (σ_j, G_j) . Упругие постоянные матрицы будем считать равными (σ, G) .

Граничные условия в рассматриваемой задаче представляют собой условия сопряжения полей перемещений и напряжений на поверхностях Γ_j . Для того, чтобы их записать, представим вектор перемещений в упругом пространстве в виде

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_j^-, & (x, y, z) \in \omega_j, \\ \tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{U}_0, & (x, y, z) \in \Omega \setminus \bigcup_j \omega_j, \end{cases} \quad (2.22)$$

где $\omega_j = \{(r_j, \theta_j, \varphi_j) : r_j < R_j\}$. Тогда условия сопряжения принимают следующий вид

$$(\tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{U}_0)|_{\Gamma_j} = \tilde{\mathbf{U}}_j^-|_{\Gamma_j}, \quad (2.23)$$

$$\left(\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{F}\mathbf{U}_0\right)|_{\Gamma_j} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_j^-|_{\Gamma_j}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Условия на бесконечности задаются формулами (2.32) — (2.34).

Решение задачи будем искать в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}^+ = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad (2.25)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_j^- = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad (2.26)$$

где G , σ — модуль сдвига и коэффициент Пуассона упругого пространства, $a_{s,n,m}^{(j)}$, $b_{s,n,m}^{(j)}$ — неизвестные коэффициенты, перемещения $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)}$ приведены в формулах (1.117) — (1.127).

Для представления вектора перемещений $\tilde{\mathbf{U}}^+$ в системах координат с началами O_j можем использовать формулу (2.20).

В силу периодичности задачи вклад каждого слагаемого в формулах (2.38), (2.39) будет одинаковым, поэтому можно считать, что $a_{s,n,m}^{(j)} = a_{s,n,m}$, $b_{s,n,m}^{(j)} = b_{s,n,m}$.

После удовлетворения условиям (2.23), (2.37) получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_{s,n,m}$, $b_{s,n,m}$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m} \tilde{E}_{s,n,m}^{+(k)}(\sigma) + \tilde{E}_{s,n,m}^{-(k)}(\sigma) \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l} \sum_{\alpha \neq j} \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} = \\ = -E_{n,m}^{(k)} + \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m} \tilde{E}_{s,n,m}^{-(k)}(\sigma_j); \quad (2.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m} \tilde{F}_{s,n,m}^{+(k)}(\sigma) + \tilde{F}_{s,n,m}^{-(k)}(\sigma) \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l} \sum_{\alpha \neq j} \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} = \\ = F_{n,m}^{(k)} + \frac{G_j}{G} \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m} \tilde{F}_{s,n,m}^{-(k)}(\sigma_j); \quad (2.28) \end{aligned}$$

$$n, m \in \mathbb{Z}: \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n, \quad k = -1, 0, 1,$$

где $\tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ — компоненты вектора перемещений на поверхности $r_j = R$; $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ — компоненты вектора напряжений на поверхности $r_j = R$, отвечающего вектору перемещения $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)}$:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)} = \tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(-1)} S_n^{m-1} \mathbf{e}_{-1} + \tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(1)} S_n^{m+1} \mathbf{e}_1 + \tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(0)} S_n^m \mathbf{e}_0;$$

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)} = \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(-1)} S_n^{m-1} \mathbf{e}_{-1} + \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(1)} S_n^{m+1} \mathbf{e}_1 + \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(0)} S_n^m \mathbf{e}_0;$$

$$E_{n,m}^{(k)} = \frac{TR}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \left[-\frac{2\sigma}{1+\sigma} \delta_{k,-1} + \frac{\sigma}{1+\sigma} \delta_{k1} + \frac{1}{1+\sigma} \delta_{k0} \right],$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{T}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \delta_{k0} \quad (\text{одноосное растяжение});$$

$$E_{n,m}^{(k)} = \frac{TR}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \left[\frac{2-2\sigma}{1+\sigma} \delta_{k,-1} - \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \delta_{k1} - \frac{2\sigma}{1+\sigma} \delta_{k0} \right],$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{T}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} (2\delta_{k,-1} - \delta_{k1}) \quad (\text{двуосное растяжение});$$

$$E_{n,m}^{(k)} = \frac{TR}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \frac{1-2\sigma}{1+\sigma} \left[2\delta_{k,-1} - \delta_{k1} + \delta_{k0} \right],$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{T}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} (\delta_{k0} + 2\delta_{k,-1} - \delta_{k1}) \quad (\text{всестороннее растяжение}).$$

Явный вид компонент $\tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ и $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ не приводится ввиду их громоздкости. Они получаются из формул (1.106) – (1.109), (1.117) – (1.127), (4.19) – (4.24).

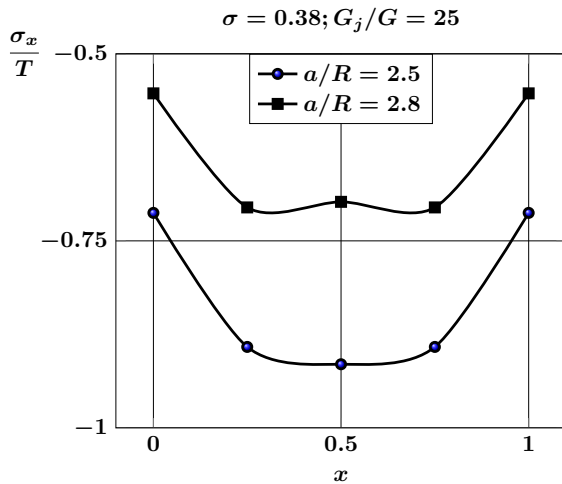


Рис. 2.11. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при одноосном растяжении

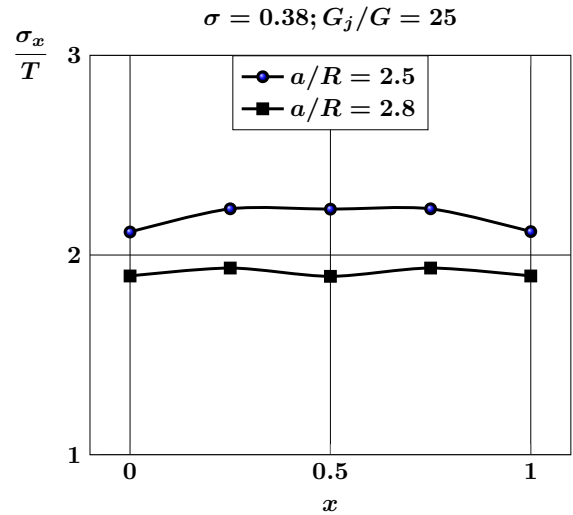


Рис. 2.12. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при двуосном растяжении

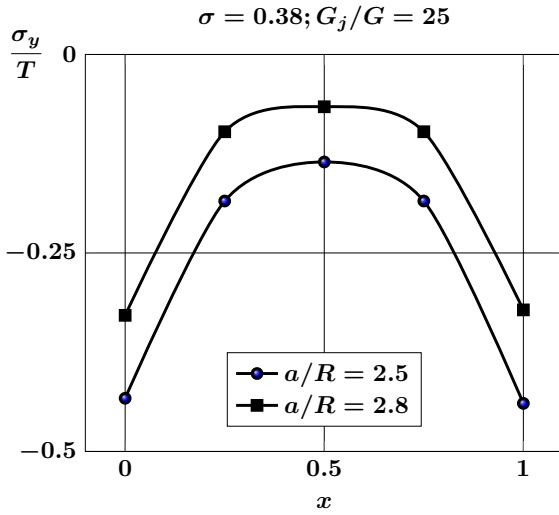


Рис. 2.13. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при одноосном растяжении

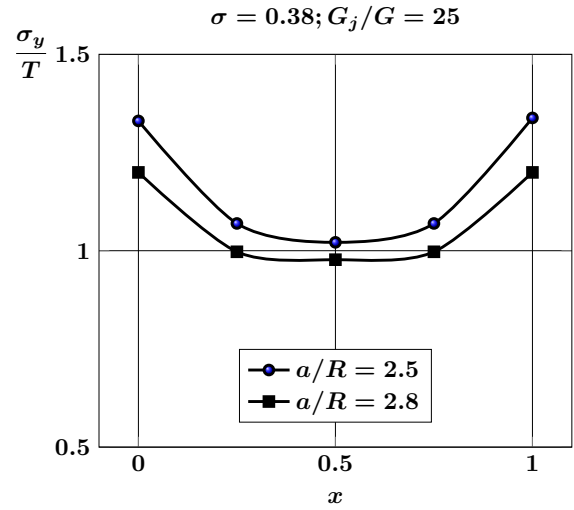


Рис. 2.14. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при двuosном растяжении

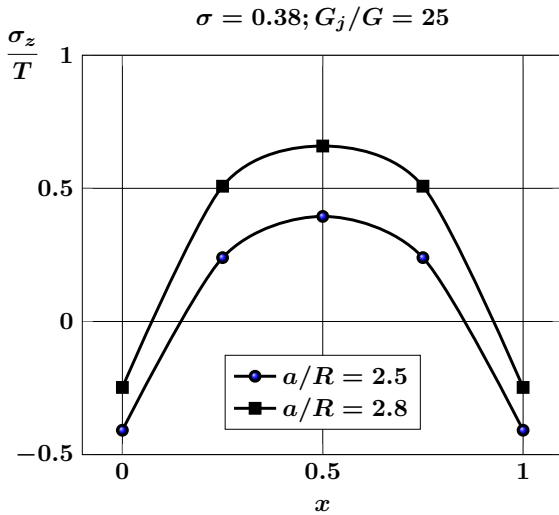


Рис. 2.15. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при одноосном растяжении

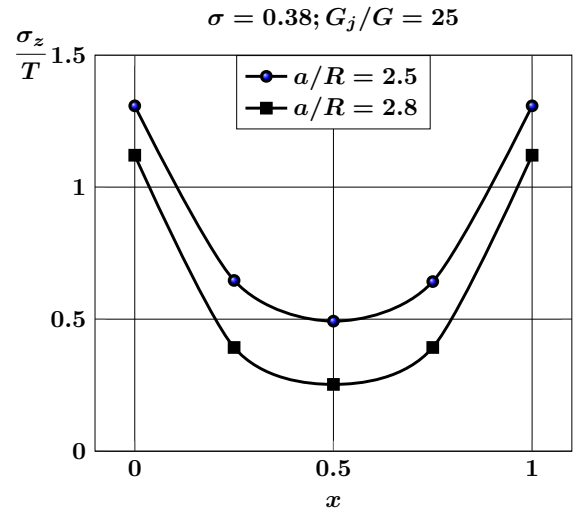


Рис. 2.16. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при двuosном растяжении

На рис. 2.11 — 2.16 приведены нормальные напряжения на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при одноосном и двuosном растяжении упругого пространства с периодической системой сферических включений.

При одноосном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T и σ_z/T . Областью их концентрации является середина отрезка AB , где напряжения σ_z/T — растягивающие, а σ_x/T — сжимающие. С приближением включений друг к другу напряжения σ_x/T и σ_z/T убывают.

При двусосном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T , при этом напряжения σ_y/T и σ_z/T тоже значимы. С приближением включений друг к другу напряжения все нормальные напряжения возрастают.

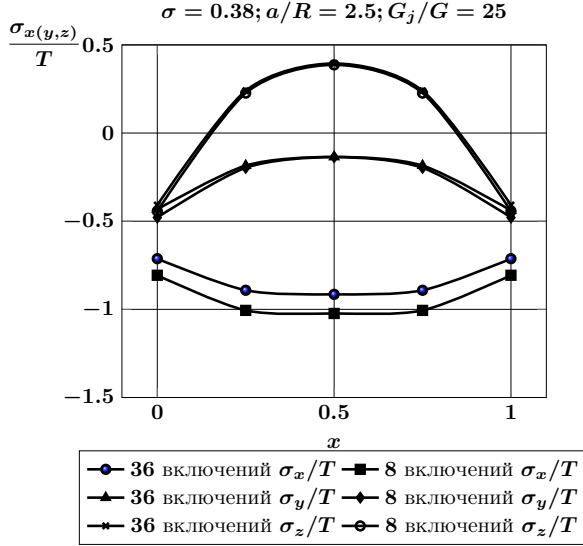


Рис. 2.17. Сравнение напряжения на линии AB для периодической и тетрагональной структур при одноосном растяжении

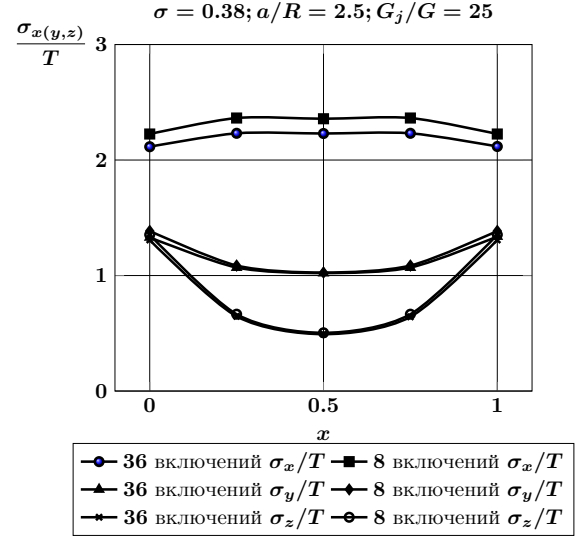


Рис. 2.18. Сравнение напряжения на линии AB для периодической и тетрагональной структур при двусосном растяжении

На рис. 2.17, 2.18 приведено сравнение нормальных напряжений на линии AB для периодической (36 включений) и тетрагональной (8 включений) структур при одноосном и двусосном растяжении упругого пространства. Графики показывают, что напряжения σ_y/T и σ_z/T практически совпадают. Небольшое отличие наблюдается в значениях напряжений σ_x/T при сохранении общего характера в их распределении.

2.3 Упругое пространство с периодической системой вытянутых сфероидальных полостей

Рассматривается упругое пространство Ω и бесконечная система вытянутых сфероидальных полостей $\{\omega_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$, центры которых расположены в узлах $\{O_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$ кубической периодической решетки со стороной a . Декартовыми координатами узлов решетки будут упорядоченные наборы чисел $\{(\alpha a, \beta a, \gamma a); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}\}$. Полуоси полостей обозначим через d_1 и d_2 ($d_1 > d_2$). Выполним линейное упорядочение узлов таким же образом, как в параграфе 6.1.

В новой нумерации точка $O_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначается через O_j (рис. 2.19).

С каждой точкой O_j свяжем локальную декартовую (x_j, y_j, z_j) и сонаправленную с ней вытянутую сфероидальную систему координат $(\xi_j, \eta_j, \varphi_j)$. Счита-

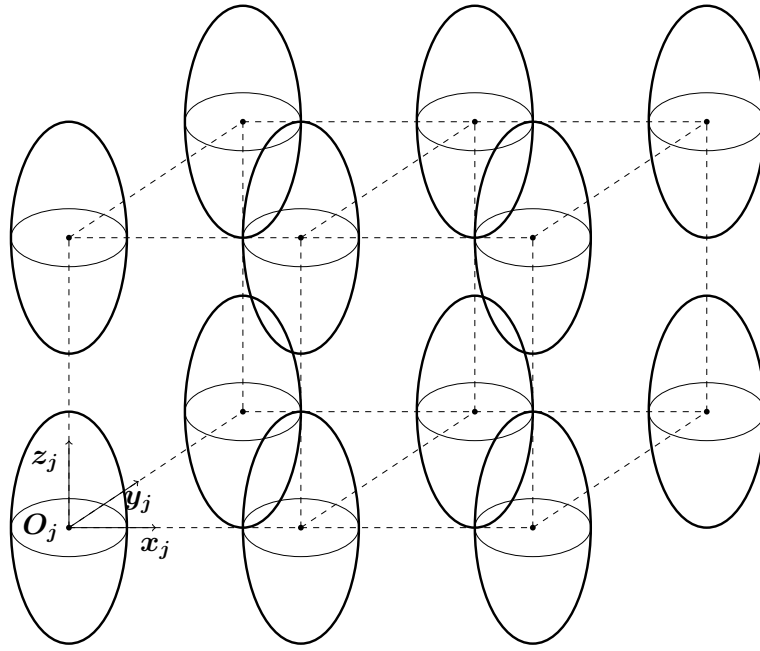


Рис. 2.19. Периодическая система сфероидальных полостей в упругом пространстве

ется, что декартовые системы координат с началами в точках O_j сонаправлены.

Будем рассматривать задачу упругого деформирования пространства с вытянутыми сфероидальными полостями $\Omega \setminus \left\{ \bigcup_{\alpha, \beta, \gamma} \omega_{\alpha\beta\gamma} \right\}$ под действием нагрузки, приложенной на бесконечности (одноосное, двуосное или всестороннее растяжение упругого пространства). Сфероидальные полости считаются свободными от нагрузки.

Соотношения между координатами можно описать формулами:

$$\begin{aligned} x_i &= c \operatorname{sh} \xi_j \sin \eta_i \cos \varphi_i, \\ y_i &= c \operatorname{sh} \xi_j \sin \eta_i \sin \varphi_i, \\ z_i &= c \operatorname{ch} \xi_j \cos \eta_i, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} x_j = x_\alpha + x_{j\alpha}, \\ y_j = y_\alpha + y_{j\alpha}, \\ z_j = z_\alpha + z_{j\alpha}, \end{cases} \quad j \neq \alpha, \quad j, \alpha = \overline{1, N}, \quad (2.30)$$

где $\overrightarrow{O_j O_\alpha} = (x_{j\alpha}, y_{j\alpha}, z_{j\alpha}) = (r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$.

Для определения НДС в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе относительно неизвестного вектора перемещения \mathbf{U} с граничными условиями

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = 0 \quad (2.31)$$

и условиями на бесконечности одного из трех типов

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{z=\pm\infty} = \pm T\mathbf{e}_z \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (2.32)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\rho=\infty} = T\mathbf{e}_\rho \quad (\text{двуосное растяжение}), \quad (2.33)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{r=\infty} = T\mathbf{e}_r \quad (\text{всестороннее растяжение}), \quad (2.34)$$

где $\mathbf{F}\mathbf{U}$ — отвечающий перемещению \mathbf{U} вектор усилий на соответствующей граничной поверхности, $\Gamma_j = \{(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) : \xi_j = \xi_{0j}\}$.

Решение задачи будем искать в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0, \quad (2.35)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (2.36)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \left(-\frac{\sigma}{1+\sigma} \rho \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{1+\sigma} z \mathbf{e}_z \right) \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (2.37)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma} \rho \mathbf{e}_\rho - \frac{2\sigma}{1+\sigma} z \mathbf{e}_z \right) \quad (\text{двуосное растяжение}), \quad (2.38)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \frac{1-2\sigma}{1+\sigma} (\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z) \quad (\text{всестороннее растяжение}), \quad (2.39)$$

где G , σ — модуль сдвига и коэффициент Пуассона упругого пространства, $a_{s,n,m}^{(j)}$ — неизвестные коэффициенты, перемещения $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(5)}$ приведены в формулах (1.58) — (1.63).

Относительно перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ граничные условия записываются следующим образом

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\Gamma_j} = -\mathbf{F}\mathbf{U}_0|_{\Gamma_j}, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{z=\pm\infty} = 0 \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (2.41)$$

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\rho=\infty} = 0 \quad (\text{двуосное растяжение}), \quad (2.42)$$

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{r=\infty} = 0 \quad (\text{всестороннее растяжение}). \quad (2.43)$$

Вспомогательным перемещениям \mathbf{U}_0 отвечают следующие напряжения на поверхностях Γ_j ($\mathbf{n}_j = \mathbf{e}_{\xi_j}$ — вектор нормали на поверхности Γ_j):

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = TH_j \operatorname{sh} \xi_j P_1(\cos \eta_j) \mathbf{e}_z \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (2.44)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = -TH_j \operatorname{ch} \xi_j P_1^{(1)}(\cos \eta_j) \mathbf{e}_{\rho_j} \quad (\text{двуосное растяжение}). \quad (2.45)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = TH_j \left[-\operatorname{ch}\xi_j P_1^{(1)}(\cos \eta_j) \mathbf{e}_{\rho_j} + \right. \\ \left. + \operatorname{sh}\xi_j P_1(\cos \eta_j) \mathbf{e}_z \right] \text{ (всестороннее растяжение)}. \quad (2.46)$$

Используя теоремы сложения (1.69) перемещение $\tilde{\mathbf{U}}$ можно записать полностью в системе координат с началом в точке O_j

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) + \\ + \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} a_{t,k,l}^{(\alpha)}. \quad (2.47)$$

В силу периодичности задачи вклад каждого слагаемого в формуле (2.36) будет одинаковым, поэтому можно считать, что $a_{s,n,m}^{(j)} = a_{s,n,m}$.

После перехода в формуле (2.47) к напряжениям и удовлетворения граничным условиям относительно неизвестных $a_{s,n,m}$ получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{s=1}^3 a_{s,n,m} \tilde{F}_{s,n,m}^{+(k)} + \tilde{F}_{s,n,m}^{-(k)} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l} \sum_{\alpha \neq j} \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} = F_{n,m}^{(k)}; \quad (2.48)$$

$$n, m \in \mathbb{Z}: \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n, \quad k = -1, 0, 1; \quad j = \overline{1, \infty},$$

где $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ — компоненты вектора напряжений на поверхности $\xi_j = \xi_{j0}$, отвечающего вектору перемещения $\tilde{U}_{s,n,m}^{\pm(5)}$:

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(5)} = \frac{H_j}{c} \left(\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(-1)} S_n^{m-1} \mathbf{e}_{-1} + \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(1)} S_n^{m+1} \mathbf{e}_1 + \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(0)} S_n^m \mathbf{e}_0 \right);$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{Td_2}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \delta_{k0} \quad (\text{одноосное растяжение}),$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{Td_1}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} (2\delta_{k,-1} - \delta_{k1}) \quad (\text{двуосное растяжение}),$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{T}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} (\delta_{k0} d_2 + 2\delta_{k,-1} d_1 - \delta_{k1} d_1) \quad (\text{всестороннее растяжение}).$$

Явный вид компонент $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ не приводится ввиду их громоздкости. Они получаются из формул (1.58) — (1.68), (??) — (??).

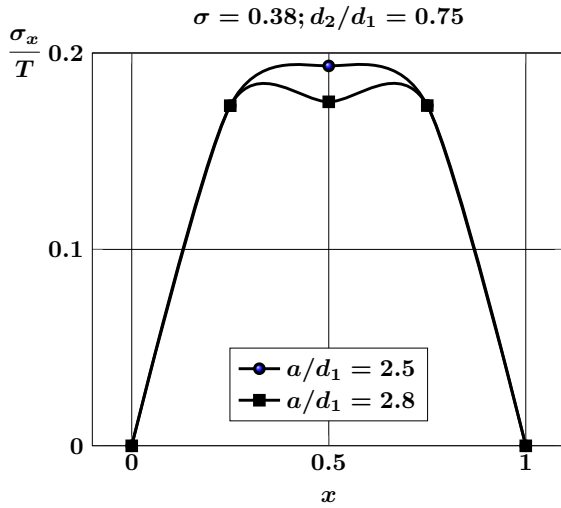


Рис. 2.20. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

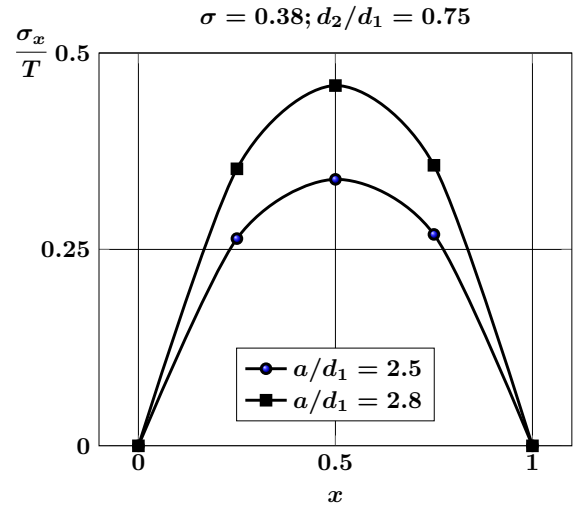


Рис. 2.21. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении

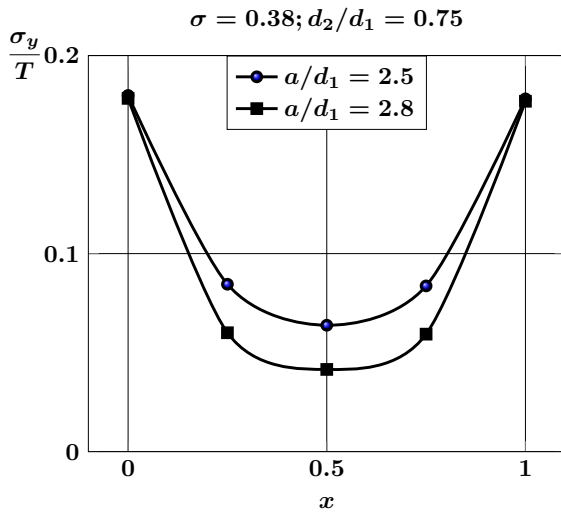


Рис. 2.22. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

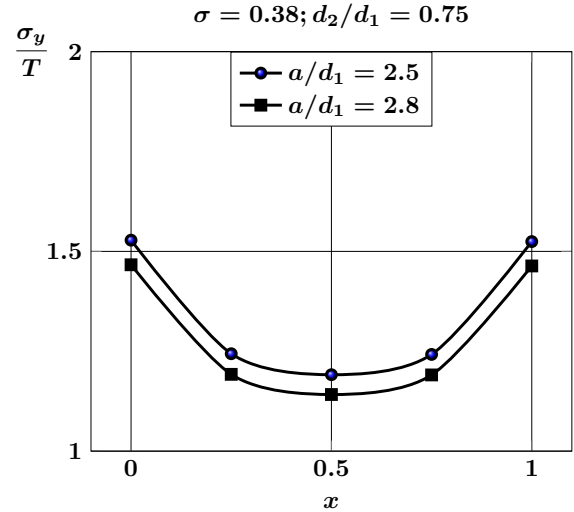


Рис. 2.23. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении

На рис. 2.20 — 2.28 приведены нормальные напряжения на линии AB в зависимости от относительного расстояния a/d_1 между полостями при одноосном и двuosном растяжении упругого пространства при $\sigma = 0.38$ и $d_2/d_1 = 0.75$.

При одноосном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_z/T . Областью их концентрации являются границы полостей. С приближением полостей друг к другу эти напряжения возрастают.

При двuosном растяжении подобным поведением характеризуются напряжения σ_y/T .

На рис. 2.26, 2.27 приводится сравнение нормальных напряжений на линии

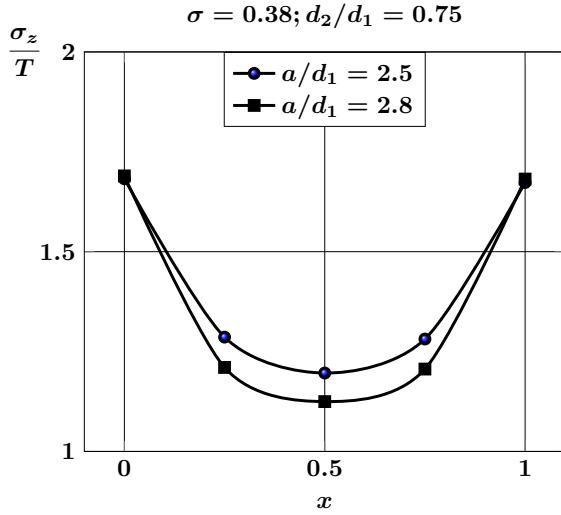


Рис. 2.24. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

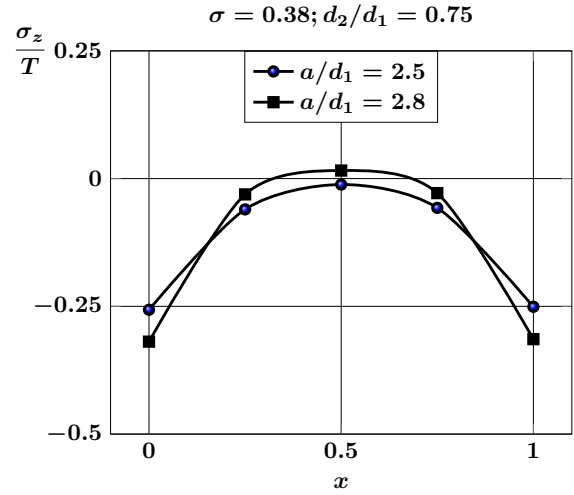


Рис. 2.25. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении

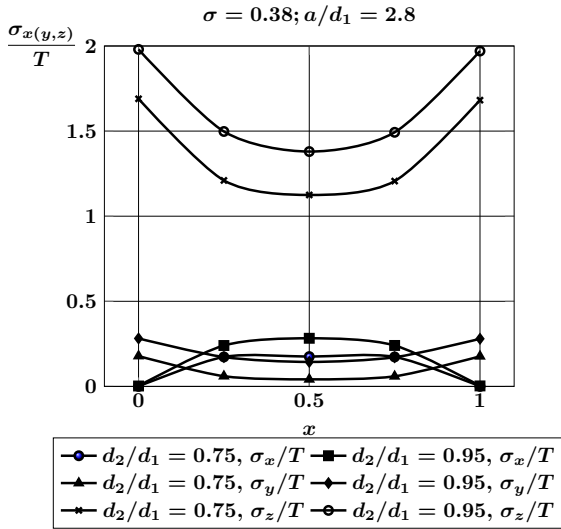


Рис. 2.26. Сравнение напряжений на линии AB в зависимости от формы сфероидальной полости при одноосном растяжении

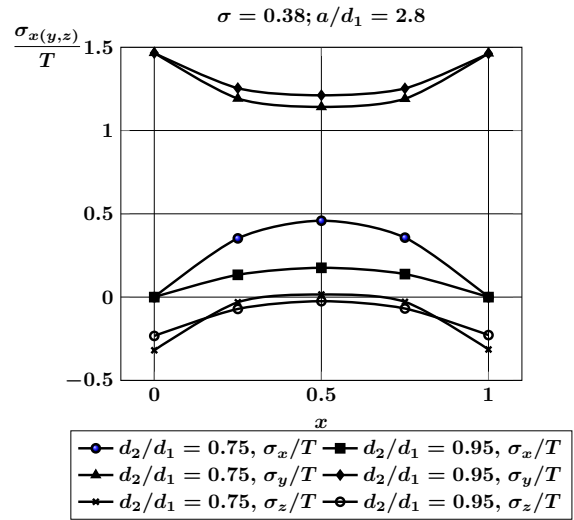


Рис. 2.27. Сравнение напряжений на линии AB в зависимости от формы сфероидальной полости при двuosном растяжении

AB в зависимости от формы сфероидальных полостей при одноосном и двuosном растяжении упругого пространства.

Заметное отличие наблюдается в значениях напряжений σ_z/T при одноосном растяжении и σ_x/T — при двuosном. В случае одноосного растяжения для полости, близкой по форме к сферической, все приведенные напряжения больше, чем для вытянутой сфероидальной полости. В случае двuosного растяжения для напряжения σ_x/T наблюдается обратная картина.

В таблице 2.2 приведено сравнение нормальных напряжений в средней точ-

Таблица 2.2. Сравнение напряжений для разного количества полостей периодической структуры

Кол-во полостей	σ_x/T	σ_y/T	σ_z/T
27	0.1751	0.04153	1.1248
125	0.1752	0.04261	1.1261

ке отрезка AB для разного количества (27 и 125) сфероидальных полостей периодической структуры. Из таблицы видно, что увеличение числа полостей практически не меняет значения напряжений.

2.4 Упругое пространство с периодической системой вытянутых сфероидальных включений

Рассматривается упругое пространство Ω и бесконечная система вытянутых сфероидальных включений $\{\omega_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$, центры которых расположены в узлах $\{O_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$ кубической периодической решетки со стороной a . Декартовыми координатами узлов решетки будут упорядоченные наборы чисел $\{(\alpha a, \beta a, \gamma a); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}\}$. Полуоси включений обозначим через d_1 и d_2 ($d_1 > d_2$). Выполним линейное упорядочение узлов таким же образом, как в параграфе 6.1.

В новой нумерации точка $O_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначается через O_j (рис. 2.19). С каждой точкой O_j свяжем локальные декартову (x_j, y_j, z_j) и сонаправленную с ней вытянутую сфероидальную систему координат $(\xi_j, \eta_j, \varphi_j)$. Считается, что декартовые системы координат с началами в точках O_j сонаправлены.

Будем рассматривать задачу упругого деформирования пространства с вытянутыми сфероидальными включениями под действием нагрузки, приложенной на бесконечности (одноосное, двуосное или всестороннее растяжение упругого пространства).

Соотношения между координатами можно описать формулами (2.29), (2.30).

Предполагается, что упругие постоянные включений равны (σ_j, G_j) . Упругие постоянные матрицы будем считать равными (σ, G) .

Граничные условия в рассматриваемой задаче представляют собой условия сопряжения полей перемещений и напряжений на поверхностях Γ_j . Для того, чтобы их записать, представим вектор перемещений в упругом пространстве в виде

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_j^-, & (x, y, z) \in \omega_j, \\ \tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{U}_0, & (x, y, z) \in \Omega \setminus \bigcup_j \omega_j, \end{cases} \quad (2.49)$$

где $\omega_j = \{(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) : \xi_j < \xi_{0j}\}$. Тогда условия сопряжения принимают следу-

ющий вид

$$\left(\tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{U}_0\right)|_{\Gamma_j} = \tilde{\mathbf{U}}_j^-|_{\Gamma_j}, \quad (2.50)$$

$$\left(\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{F}\mathbf{U}_0\right)|_{\Gamma_j} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_j^-|_{\Gamma_j}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.51)$$

Условия на бесконечности задаются формулами (2.44) — (2.46).

Решение задачи будем искать в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}^+ = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (2.52)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_j^- = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (2.53)$$

где G , σ — модуль сдвига и коэффициент Пуассона упругого пространства, $a_{s,n,m}^{(j)}$, $b_{s,n,m}^{(j)}$ — неизвестные коэффициенты, перемещения $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(5)}$ приведены в формулах (1.58) — (1.68).

Для представления вектора перемещений $\tilde{\mathbf{U}}^+$ в системах координат с началами O_j можем использовать формулу (2.47).

В силу периодичности задачи вклад каждого слагаемого в формулах (2.52), (2.53) будет одинаковым, поэтому можно считать, что $a_{s,n,m}^{(j)} = a_{s,n,m}$, $b_{s,n,m}^{(j)} = b_{s,n,m}$.

После перехода к напряжениям в формуле (2.47) и удовлетворения условиям (2.50), (2.51) получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_{s,n,m}$, $b_{s,n,m}$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m} \tilde{E}_{s,n,m}^{+(k)}(\sigma) + \tilde{E}_{s,n,m}^{-(k)}(\sigma) \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l} \sum_{\alpha \neq j} \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} = \\ = -E_{n,m}^{(k)} + \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m} \tilde{E}_{s,n,m}^{-(k)}(\sigma_j); \quad (2.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m} \tilde{F}_{s,n,m}^{+(k)}(\sigma) + \tilde{F}_{s,n,m}^{-(k)}(\sigma) \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l} \sum_{\alpha \neq j} \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} = \\ = F_{n,m}^{(k)} + \frac{G_j}{G} \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m} \tilde{F}_{s,n,m}^{-(k)}(\sigma_j); \quad (2.55) \end{aligned}$$

$$n, m \in \mathbb{Z}: \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n, \quad k = -1, 0, 1, \quad (2.56)$$

где $\tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ — компоненты вектора перемещений на поверхности $\xi_j = \xi_{0j}$; $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ — компоненты вектора напряжений на поверхности $\xi_j = \xi_{0j}$, отвечающего вектору перемещения $\tilde{U}_{s,n,m}^{\pm(5)}$:

$$\tilde{U}_{s,n,m}^{\pm(5)} = \tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(-1)} S_n^{m-1} \mathbf{e}_{-1} + \tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(1)} S_n^{m+1} \mathbf{e}_1 + \tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(0)} S_n^m \mathbf{e}_0;$$

$$\mathbf{F} \tilde{U}_{s,n,m}^{\pm(5)} = \frac{H_j}{c} \left(\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(-1)} S_n^{m-1} \mathbf{e}_{-1} + \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(1)} S_n^{m+1} \mathbf{e}_1 + \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(0)} S_n^m \mathbf{e}_0 \right);$$

$$E_{n,m}^{(k)} = \frac{Tc}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \left[-\frac{2\sigma}{1+\sigma} \operatorname{sh} \xi_{0j} \delta_{k,-1} + \frac{\sigma}{1+\sigma} \operatorname{sh} \xi_{0j} \delta_{k1} + \frac{1}{1+\sigma} \operatorname{ch} \xi_{0j} \delta_{k0} \right],$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{Td_2}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \delta_{k0} \quad (\text{одноосное растяжение});$$

$$E_{n,m}^{(k)} = \frac{Tc}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \left[\frac{2-2\sigma}{1+\sigma} \operatorname{sh} \xi_{0j} \delta_{k,-1} - \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \operatorname{sh} \xi_{0j} \delta_{k1} - \frac{2\sigma}{1+\sigma} \operatorname{ch} \xi_{0j} \delta_{k0} \right],$$

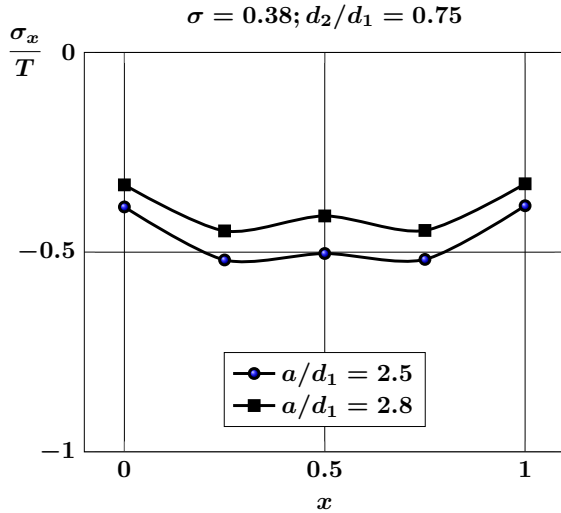


Рис. 2.28. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при одноосном растяжении

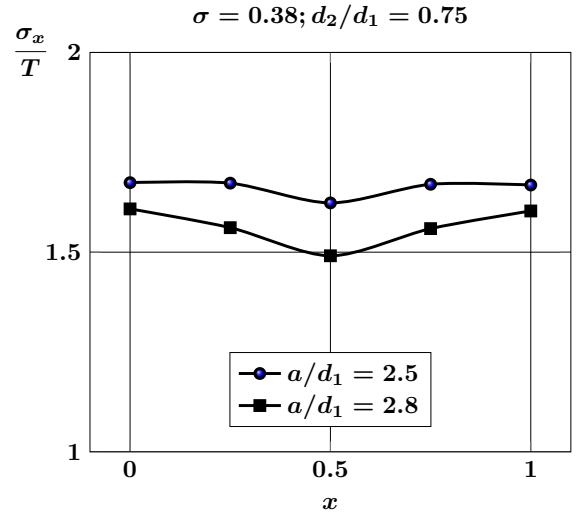


Рис. 2.29. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при двuosном растяжении

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{Td_1}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} (2\delta_{k,-1} - \delta_{k1}) \quad (\text{двuosное растяжение});$$

$$E_{n,m}^{(k)} = \frac{Tc}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \frac{1-2\sigma}{1+\sigma} \left[2 \operatorname{sh} \xi_{0j} \delta_{k,-1} - \operatorname{sh} \xi_{0j} \delta_{k1} + \operatorname{ch} \xi_{0j} \delta_{k0} \right],$$

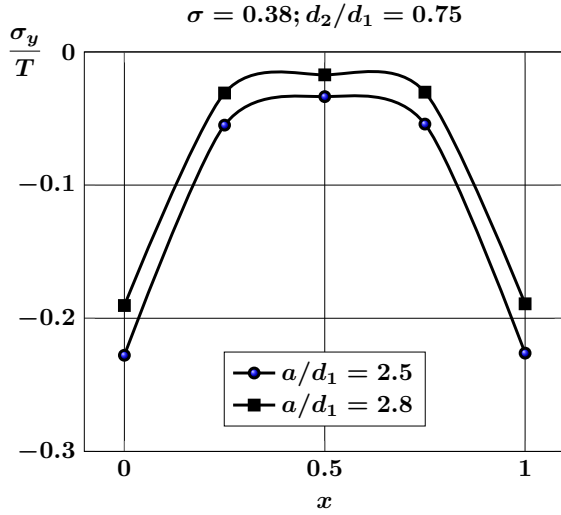


Рис. 2.30. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при одноосном растяжении

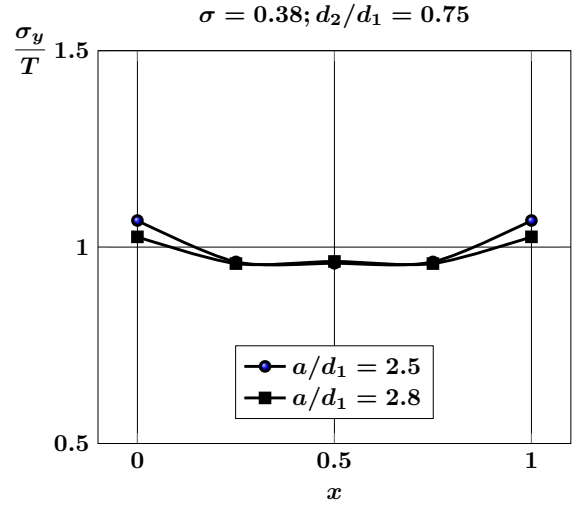


Рис. 2.31. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при двуосном растяжении

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{T}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} (d_2 \delta_{k0} + 2d_1 \delta_{k,-1} - d_1 \delta_{k1}) \quad (\text{всестороннее растяжение}).$$

Явный вид компонент $\tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ и $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ не приводится ввиду их громоздкости. Они получаются из формул (1.25) — (1.27), (1.58) — (1.68), (??) — (??).

На рис. 2.28 — 2.33 приведены нормальные напряжения на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства при $\sigma = 0.38$, $\sigma_j = 0.21$, $G_j/G = 25$, $d_2/d_1 = 0.75$.

При одноосном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_z/T . Напряжения σ_x/T тоже значимы. Характерно, что они являются сжимающими. Область концентрации напряжений σ_z/T совпадает с серединой отрезка AB . С приближением включений друг к другу эти напряжения убывают.

При двуосном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T , однако, напряжения σ_y/T и σ_z/T тоже значимы. Напряжения σ_x/T и σ_y/T незначительно меняются в пределах отрезка AB и возрастают с приближением полостей друг к другу. Наблюдается сильная концентрация напряжений σ_z/T на границе включений.

На рис. 2.34, 2.35 приводится сравнение нормальных напряжений на линии AB в зависимости от формы сфероидальных включений при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства.

Графики показывают, что в случае и одноосного, и двуосного растяжений упругого пространства при изменении формы сфероидального включения сохраняется общий характер в распределении напряжений, однако, численные

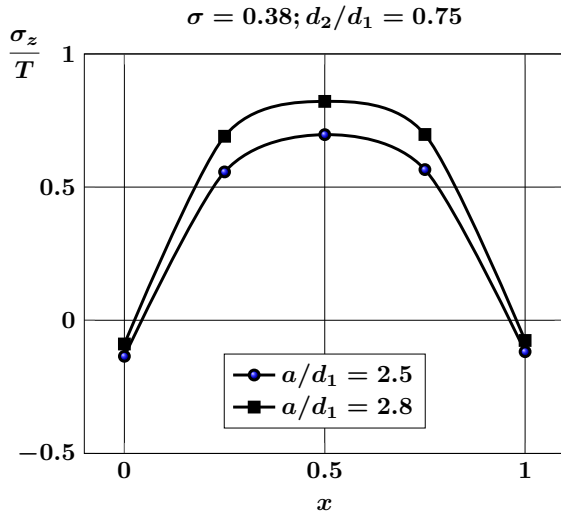


Рис. 2.32. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при одноосном растяжении

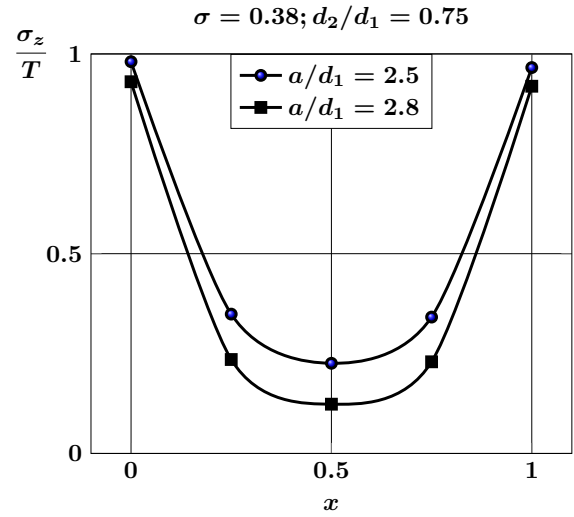


Рис. 2.33. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при двuosном растяжении

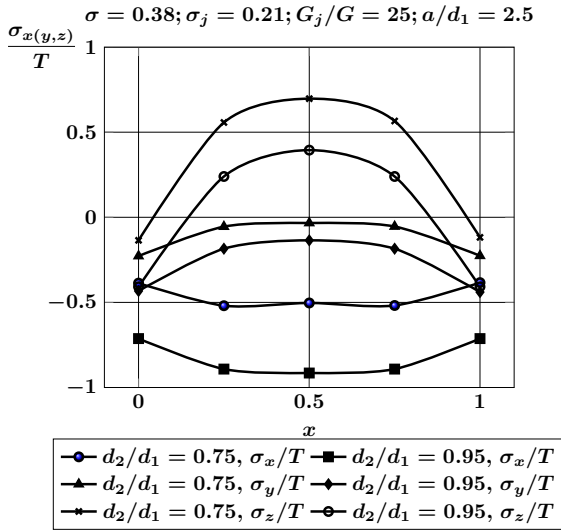


Рис. 2.34. Сравнение напряжений на линии AB в зависимости от формы сфероидального включения при одноосном растяжении

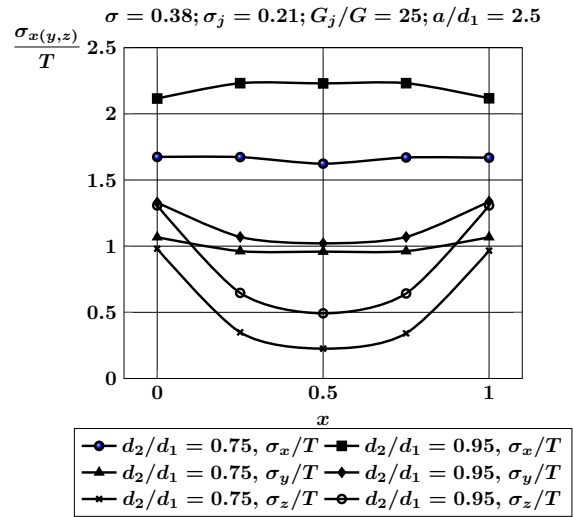


Рис. 2.35. Сравнение напряжений на линии AB в зависимости от формы сфероидального включения при двuosном растяжении

значения напряжений существенно отличаются.

2.5 Упругое пространство с периодической системой сжатых сфероидальных полостей

Рассматривается упругое пространство Ω и бесконечная система сжатых сфероидальных полостей $\{\omega_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$, центры которых расположены в узлах $\{O_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$ кубической периодической решетки со стороной a . Декартовыми координатами узлов решетки будут упорядоченные наборы чисел $\{(\alpha a, \beta a, \gamma a); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}\}$. Полуоси полостей обозначим через d_1 и d_2 ($d_2 > d_1$). Выполним линейное упорядочение узлов таким же образом, как в параграфе 6.1.

В новой нумерации точка $O_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначается через O_j (рис. 2.36).

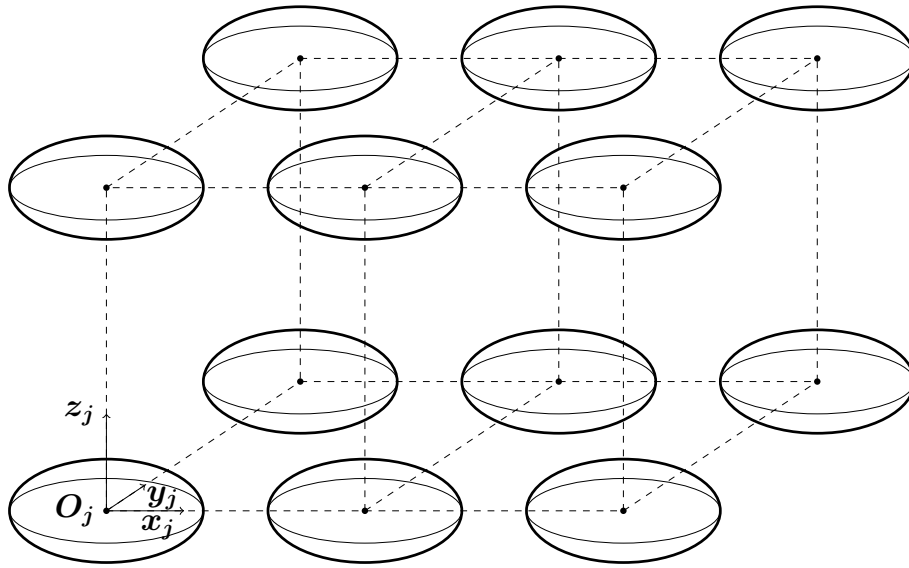


Рис. 2.36. Периодическая система сжатых сфероидальных полостей в упругом пространстве

С каждой точкой O_j свяжем локальную декартовую (x_j, y_j, z_j) и сонаправленную с ней сжатую сфероидальную систему координат $(\xi_j, \tilde{\eta}_j, \varphi_j)$. Считается, что декартовые системы координат с началами в точках O_j сонаправлены.

Будем рассматривать задачу упругого деформирования пространства с сжатыми сфероидальными полостями $\Omega \setminus \left\{ \bigcup_{\alpha,\beta,\gamma} \omega_{\alpha\beta\gamma} \right\}$ под действием нагрузки, приложенной на бесконечности (одноосное, двуосное или всестороннее растяжение упругого пространства). Сфероидальные полости считаются свободными от нагрузки.

Соотношения между координатами можно описать формулами:

$$\begin{aligned} x_i &= \tilde{c} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_j \sin \tilde{\eta}_i \cos \varphi_i, \\ y_i &= \tilde{c} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_j \sin \tilde{\eta}_i \sin \varphi_i, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$z_i = \tilde{c} \operatorname{sh} \tilde{\xi}_j \cos \tilde{\eta}_i,$$

$$\begin{cases} x_j = x_\alpha + x_{j\alpha}, \\ y_j = y_\alpha + y_{j\alpha}, \\ z_j = z_\alpha + z_{j\alpha}, \end{cases} \quad j \neq \alpha, \quad j, \alpha = \overline{1, N}, \quad (2.58)$$

где $\overrightarrow{O_j O_\alpha} = (x_{j\alpha}, y_{j\alpha}, z_{j\alpha}) = (r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$.

Для определения НДС в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе относительно неизвестного вектора перемещения \mathbf{U} с граничными условиями

$$\mathbf{FU}|_{\Gamma_j} = 0 \quad (2.59)$$

и условиями на бесконечности одного из трех типов

$$\mathbf{FU}|_{z=\pm\infty} = \pm T \mathbf{e}_z \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (2.60)$$

$$\mathbf{FU}|_{\rho=\infty} = T \mathbf{e}_\rho \quad (\text{двуосное растяжение}), \quad (2.61)$$

$$\mathbf{FU}|_{r=\infty} = T \mathbf{e}_r \quad (\text{всестороннее растяжение}), \quad (2.62)$$

где \mathbf{FU} — отвечающий перемещению \mathbf{U} вектор усилий на соответствующей граничной поверхности, $\Gamma_j = \left\{ \left(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi_j \right) : \tilde{\xi}_j = \tilde{\xi}_{0j} \right\}$.

Решение задачи будем искать в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0, \quad (2.63)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(6)} \left(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi_j \right), \quad (2.64)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \left(-\frac{\sigma}{1+\sigma} \rho \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{1+\sigma} z \mathbf{e}_z \right) \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (2.65)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma} \rho \mathbf{e}_\rho - \frac{2\sigma}{1+\sigma} z \mathbf{e}_z \right) \quad (\text{двуосное растяжение}), \quad (2.66)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \frac{1-2\sigma}{1+\sigma} (\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z) \quad (\text{всестороннее растяжение}), \quad (2.67)$$

где G , σ — модуль сдвига и коэффициент Пуассона упругого пространства, $a_{s,n,m}^{(j)}$ — неизвестные коэффициенты, перемещения $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(6)}$ приведены в формулах (1.92) — (1.97).

Относительно перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ граничные условия записываются следующим образом

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\Gamma_j} = -\mathbf{F}\mathbf{U}_0|_{\Gamma_j}, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{z=\pm\infty} = 0 \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (2.69)$$

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\rho=\infty} = 0 \quad (\text{двуосное растяжение}), \quad (2.70)$$

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{r=\infty} = 0 \quad (\text{всестороннее растяжение}), \quad (2.71)$$

Вспомогательным перемещениям \mathbf{U}_0 отвечают следующие напряжения на поверхностях Γ_j ($\mathbf{n}_j = \mathbf{e}_{\tilde{\xi}_j}$ — вектор нормали на поверхности Γ_j):

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = T\tilde{H}_j \operatorname{ch}\tilde{\xi}_j P_1(\cos \tilde{\eta}_j) \mathbf{e}_z \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (2.72)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = -T\tilde{H}_j \operatorname{sh}\tilde{\xi}_j P_1^{(1)}(\cos \tilde{\eta}_j) \mathbf{e}_{\rho_j} \quad (\text{двуосное растяжение}). \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{U}_0 = T\tilde{H}_j \left[-\operatorname{sh}\tilde{\xi}_j P_1^{(1)}(\cos \tilde{\eta}_j) \mathbf{e}_{\rho_j} + \right. \\ \left. + \operatorname{ch}\tilde{\xi}_j P_1(\cos \tilde{\eta}_j) \mathbf{e}_z \right] \quad (\text{всестороннее растяжение}). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Используя теоремы сложения (1.103) перемещение $\tilde{\mathbf{U}}$ можно записать полностью в системе координат с началом в точке O_j

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi_j) + \\ + \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{-(6)}(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi_j) \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} a_{t,k,l}^{(\alpha)}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

В силу периодичности задачи вклад каждого слагаемого в формуле (2.64) будет одинаковым, поэтому можно считать, что $a_{s,n,m}^{(j)} = a_{s,n,m}$.

После перехода в формуле (2.75) к напряжениям и удовлетворения граничным условиям относительно неизвестных $a_{s,n,m}$ получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{s=1}^3 a_{s,n,m} \tilde{F}_{s,n,m}^{+(k)} + \tilde{F}_{s,n,m}^{-(k)} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l} \sum_{\alpha \neq j} \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} = F_{n,m}^{(k)}; \quad (2.76)$$

$$n, m \in \mathbb{Z} : \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n, \quad k = -1, 0, 1; \quad j = \overline{1, \infty},$$

где $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ — компоненты вектора напряжений на поверхности $\tilde{\xi}_j = \tilde{\xi}_{j0}$, отвечающего вектору перемещения $\tilde{U}_{s,n,m}^{\pm(6)}$:

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(6)} = \frac{\tilde{H}_j}{\tilde{c}} \left(\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(-1)} S_n^{m-1} \mathbf{e}_{-1} + \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(1)} S_n^{m+1} \mathbf{e}_1 + \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(0)} S_n^m \mathbf{e}_0 \right);$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{Td_2}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \delta_{k0} \quad (\text{одноосное растяжение}),$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{Td_1}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} (2\delta_{k,-1} - \delta_{k1}) \quad (\text{двуосное растяжение}),$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{T}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} (\delta_{k0} d_2 + 2\delta_{k,-1} d_1 - \delta_{k1} d_1) \quad (\text{всестороннее растяжение}).$$

Явный вид компонент $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ не приводится ввиду их громоздкости. Они получаются из формул (1.92) — (1.102), (??) — (??).

На рис. 2.37 — 2.42 приведены нормальные напряжения на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства при $\sigma = 0.38$, $d_1/d_2 = 0.5$.

При одноосном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_z/T . Областью их концентрации являются границы полостей, и с приближением полостей друг к другу эти напряжения растут. Подобным свойством обладают напряжения σ_x/T и σ_y/T .

При двуосном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_y/T . Эти напряжения изменяются несущественно на отрезке AB , и с приближением полостей друг к другу возрастают. Напряжения σ_z/T меняют знак на отрезке AB , оставаясь сжимающими вблизи его концов, и растягивающими — вблизи середины отрезка.

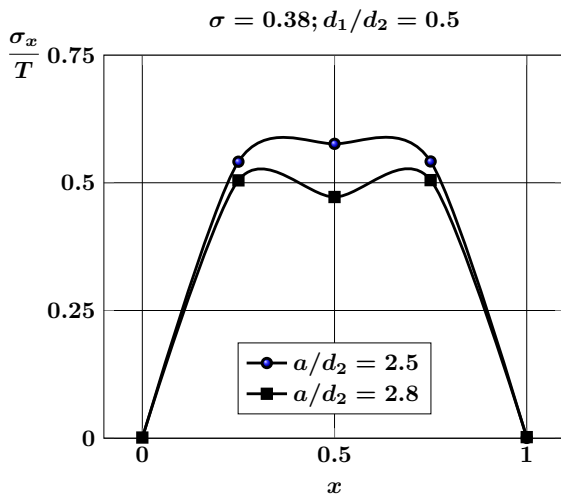


Рис. 2.37. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

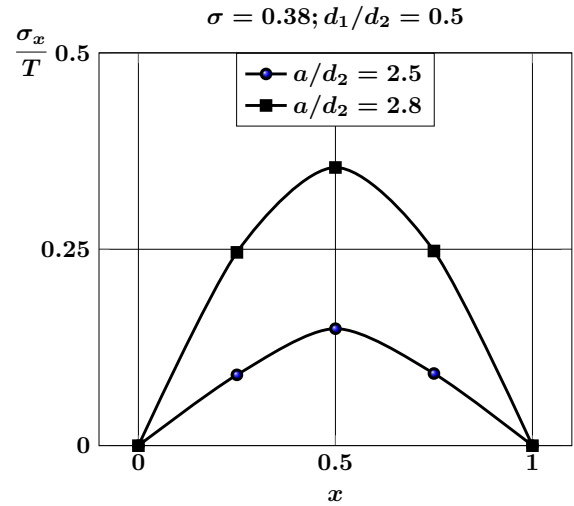


Рис. 2.38. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при двуосном растяжении

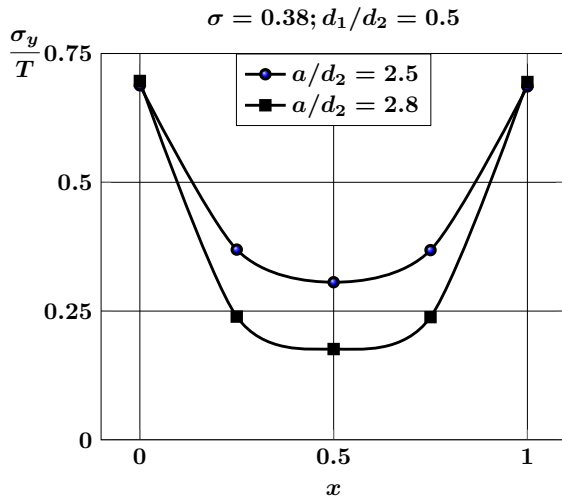


Рис. 2.39. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

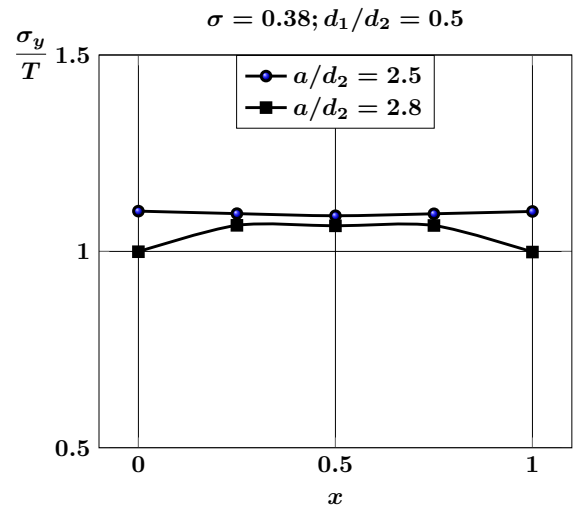


Рис. 2.40. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении

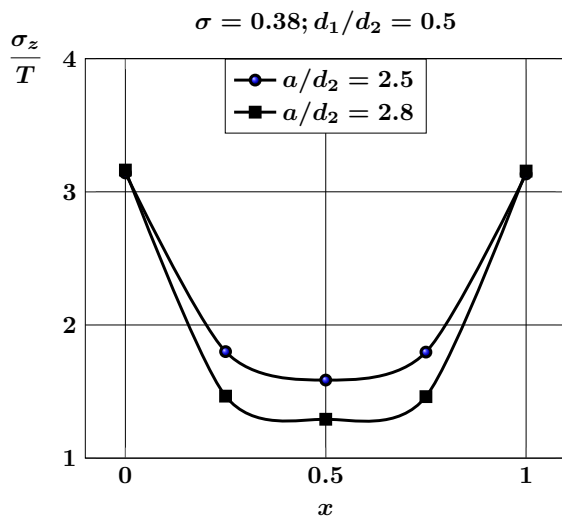


Рис. 2.41. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

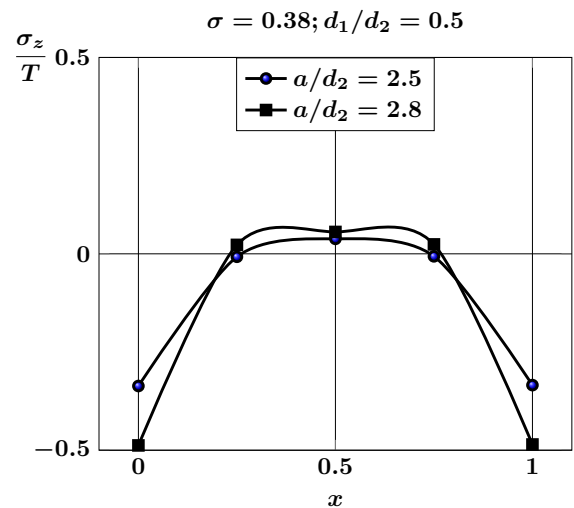


Рис. 2.42. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении

На рис. 2.43, 2.44 приведено сравнение нормальных напряжений на линии AB в зависимости от формы сжатой сфероидальной полости при одноосном и двuosном растяжении упругого пространства при $a/d_2 = 2.5$. При одноосном растяжении в наибольшей степени зависят от формы полости напряжения σ_z/T и σ_y/T , причем различия в значениях напряжений особенно заметны на границах полостей. С уменьшением отношения d_1/d_2 наблюдается резкая концентрация этих напряжений.

При двuosном растяжении зависимость от формы полости не столь существенна, как при одноосном растяжении. Уменьшение отношения d_1/d_2 не при-

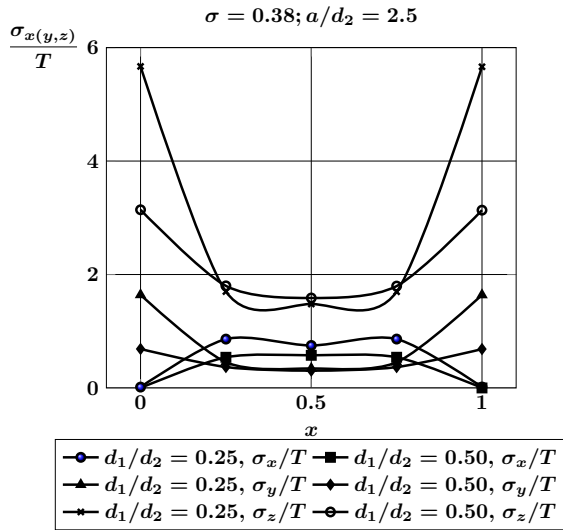


Рис. 2.43. Сравнение напряжений на линии AB в зависимости от формы сфероидальной полости при одноосном растяжении

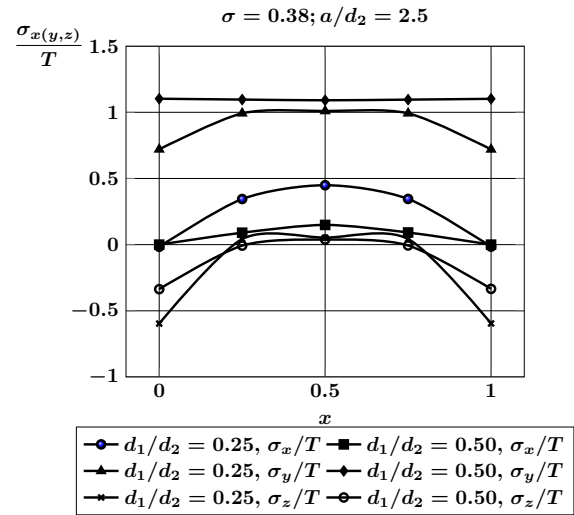


Рис. 2.44. Сравнение напряжений на линии AB в зависимости от формы сфероидальной полости при двuosном растяжении

водит к резкой концентрации напряжений.

Таблица 2.3. Сравнение напряжений для разного количества полостей периодической структуры

Кол-во полостей	σ_x/T	σ_y/T	σ_z/T
27	0.47211	0.17632	1.2920
125	0.47208	0.17857	1.2947

В таблице 2.3 приведено сравнение нормальных напряжений в средней точке отрезка AB для разного количества (27 и 125) сжатых сфероидальных полостей периодической структуры при $a/d_2 = 2.8$, $d_1/d_2 = 0.5$ и при одноосном растяжении упругого пространства. Из таблицы видно, что увеличение числа полостей практически не меняет значения напряжений.

2.6 Упругое пространство с периодической системой сжатых сфероидальных включений

Рассматривается упругое пространство Ω и бесконечная система сжатых сфероидальных включений $\{\omega_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$, центры которых расположены в узлах $\{O_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$ кубической периодической решетки со стороной a . Декартовыми координатами узлов решетки будут упорядоченные наборы чисел $\{(\alpha a, \beta a, \gamma a); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}\}$. Полуоси включений обозначим через d_1 и d_2 ($d_2 > d_1$). Выполним линейное упорядочение узлов таким же образом, как в параграфе 6.1.

В новой нумерации точка $O_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначается через O_j (рис. 2.36). С каждой точкой O_j свяжем локальные декартовую (x_j, y_j, z_j) и сонаправленную с ней сжатую сфероидальную систему координат $(\xi_j, \tilde{\eta}_j, \varphi_j)$. Считается, что декартовые системы координат с началами в точках O_j сонаправлены.

Будем рассматривать задачу упругого деформирования пространства с сжатыми сфероидальными включениями под действием нагрузки, приложенной на бесконечности (одноосное, двуосное или всестороннее растяжение упругого пространства).

Соотношения между координатами можно описать формулами (2.57), (2.58).

Предполагается, что упругие постоянные включений равны (σ_j, G_j) . Упругие постоянные матрицы будем считать равными (σ, G) .

Граничные условия в рассматриваемой задаче представляют собой условия сопряжения полей перемещений и напряжений на поверхностях Γ_j . Для того, чтобы их записать, представим вектор перемещений в упругом пространстве в виде

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_j^-, & (x, y, z) \in \omega_j, \\ \tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{U}_0, & (x, y, z) \in \Omega \setminus \bigcup_j \omega_j, \end{cases} \quad (2.77)$$

где $\omega_j = \left\{ (\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi_j) : \tilde{\xi}_j < \tilde{\xi}_{0j} \right\}$. Тогда условия сопряжения принимают следующий вид

$$\left(\tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{U}_0 \right) |_{\Gamma_j} = \tilde{\mathbf{U}}_j^- |_{\Gamma_j}, \quad (2.78)$$

$$\left(\mathbf{F} \tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{F} \mathbf{U}_0 \right) |_{\Gamma_j} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{U}}_j^- |_{\Gamma_j}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.79)$$

Условия на бесконечности задаются формулами (2.60) — (2.62).

Решение задачи будем искать в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}^+ = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(6)} \left(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi_j \right), \quad (2.80)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_j^- = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{-(6)} \left(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi_j \right), \quad (2.81)$$

где G, σ — модуль сдвига и коэффициент Пуассона упругого пространства, $a_{s,n,m}^{(j)}, b_{s,n,m}^{(j)}$ — неизвестные коэффициенты, перемещения $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(6)}$ приведены в формулах (1.92) — (1.102).

Для представления вектора перемещений $\tilde{\mathbf{U}}^+$ в системах координат с началами O_j можем использовать формулу (2.75).

В силу периодичности задачи вклад каждого слагаемого в формулах (2.80), (2.81) будет одинаковым, поэтому можно считать, что $a_{s,n,m}^{(j)} = a_{s,n,m}$, $b_{s,n,m}^{(j)} = b_{s,n,m}$.

После перехода к напряжениям в формуле (2.75) и удовлетворения условиям (2.78), (2.79) получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_{s,n,m}$, $b_{s,n,m}$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m} \tilde{E}_{s,n,m}^{+(k)}(\sigma) + \tilde{E}_{s,n,m}^{-(k)}(\sigma) \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l} \sum_{\alpha \neq j} \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} = \\ = -E_{n,m}^{(k)} + \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m} \tilde{E}_{s,n,m}^{-(k)}(\sigma_j); \quad (2.82) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m} \tilde{F}_{s,n,m}^{+(k)}(\sigma) + \tilde{F}_{s,n,m}^{-(k)}(\sigma) \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l} \sum_{\alpha \neq j} \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} = \\ = F_{n,m}^{(k)} + \frac{G_j}{G} \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m} \tilde{F}_{s,n,m}^{-(k)}(\sigma_j); \quad (2.83) \end{aligned}$$

$$n, m \in \mathbb{Z}: \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n, \quad k = -1, 0, 1, \quad (2.84)$$

где $\tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ — компоненты вектора перемещений $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(6)}$ на поверхности $\tilde{\xi}_j = \tilde{\xi}_{0j}$; $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ — компоненты вектора напряжений на поверхности $\tilde{\xi}_j = \tilde{\xi}_{0j}$, отвечающего вектору перемещения $\tilde{U}_{s,n,m}^{\pm(6)}$:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(6)} = \tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(-1)} S_n^{m-1} \mathbf{e}_{-1} + \tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(1)} S_n^{m+1} \mathbf{e}_1 + \tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(0)} S_n^m \mathbf{e}_0;$$

$$\mathbf{F} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(6)} = \frac{\tilde{H}_j}{\tilde{c}} \left(\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(-1)} S_n^{m-1} \mathbf{e}_{-1} + \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(1)} S_n^{m+1} \mathbf{e}_1 + \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(0)} S_n^m \mathbf{e}_0 \right);$$

$$E_{n,m}^{(k)} = \frac{T\tilde{c}}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \left[-\frac{2\sigma}{1+\sigma} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{0j} \delta_{k,-1} + \frac{\sigma}{1+\sigma} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{0j} \delta_{k1} + \frac{1}{1+\sigma} \operatorname{sh} \tilde{\xi}_{0j} \delta_{k0} \right],$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{Td_2}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \delta_{k0} \quad (\text{одноосное растяжение});$$

$$E_{n,m}^{(k)} = \frac{T\tilde{c}}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \left[\frac{2-2\sigma}{1+\sigma} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{0j} \delta_{k,-1} - \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{0j} \delta_{k1} - \frac{2\sigma}{1+\sigma} \operatorname{sh} \tilde{\xi}_{0j} \delta_{k0} \right],$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{Td_1}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} (2\delta_{k,-1} - \delta_{k1}) \quad (\text{двуосное растяжение});$$

$$E_{n,m}^{(k)} = \frac{T\tilde{c}}{2G}\delta_{n1}\delta_{m0}\frac{1-2\sigma}{1+\sigma}\left[2\operatorname{ch}\tilde{\xi}_{0j}\delta_{k,-1} - \operatorname{ch}\tilde{\xi}_{0j}\delta_{k1} + \operatorname{sh}\tilde{\xi}_{0j}\delta_{k0}\right],$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -\frac{T}{2G}\delta_{n1}\delta_{m0}(d_2\delta_{k0} + 2d_1\delta_{k,-1} - d_1\delta_{k1}) \quad (\text{всестороннее растяжение}).$$

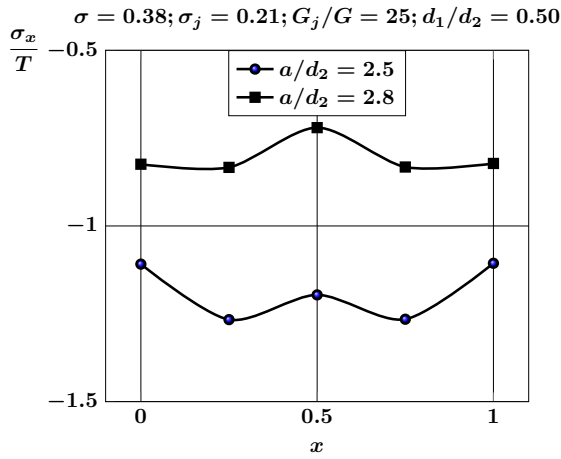


Рис. 2.45. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при одноосном растяжении

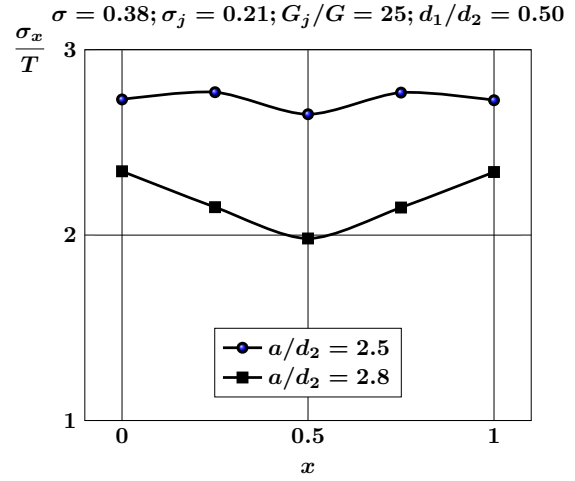


Рис. 2.46. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при двуосном растяжении

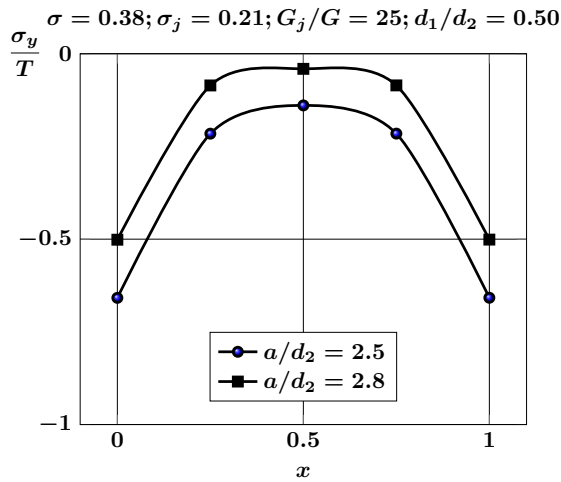


Рис. 2.47. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при одноосном растяжении

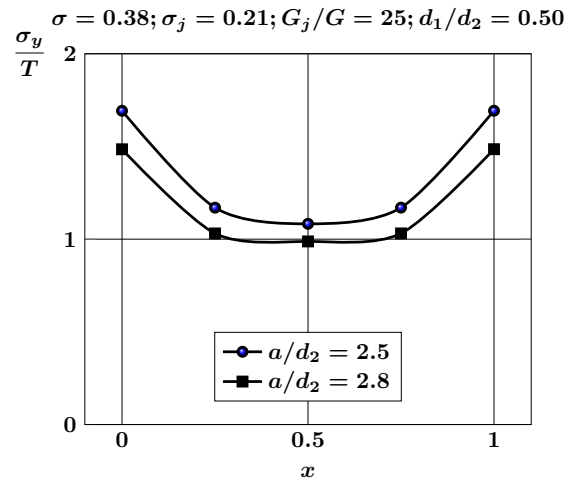


Рис. 2.48. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при двуосном растяжении

Явный вид компонент $\tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ и $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ не приводится ввиду их громоздкости. Они получаются из формул (1.42) — (1.44), (1.92) — (1.102).

На рис. 2.45 — 2.50 приведены нормальные напряжения на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при одноосном и двуосном растяжении.

жении упругого пространства при $d_1/d_2 = 0.5$, $\sigma = 0.38$, $\sigma_j = 0.21$, $G_j/G = 25$. При одноосном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T и σ_z/T . Напряжения σ_x/T и σ_y/T являются сжимающими на отрезке AB . Их модуль растет с приближением включений друг к другу. Напряжения σ_z/T меняют знак на отрезке AB .

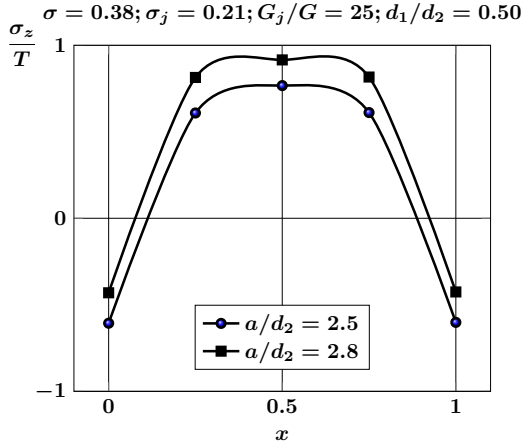


Рис. 2.49. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при одноосном растяжении

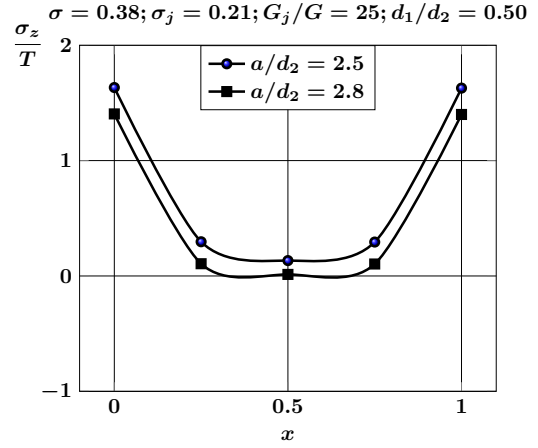


Рис. 2.50. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от расстояния между включениями при двуосном растяжении

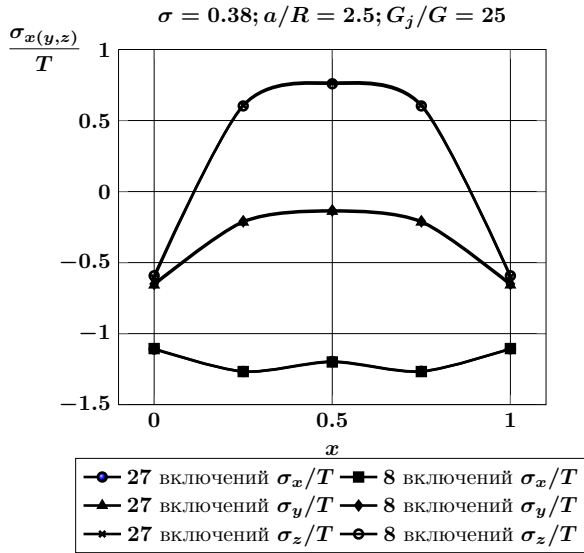


Рис. 2.51. Сравнение напряжений на линии AB для периодической и тетрагональной структур при одноосном растяжении

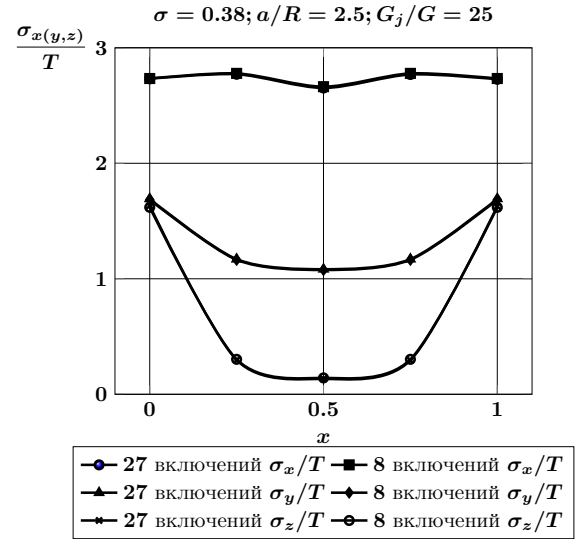


Рис. 2.52. Сравнение напряжений на линии AB для периодической и тетрагональной структур при двуосном растяжении

При двуосном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T , однако, напряжения σ_y/T и σ_z/T являются значимыми. Для напряжений σ_y/T и σ_z/T область концентрации находится вблизи границы

включений. При приближении включений друг к другу все напряжения возрастают.

На рис. 2.51, 2.52 приведено сравнение нормальных напряжений на линии AB для периодической (27 включений) и тетрагональной (8 включений) структур при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства. Графики показывают, что напряжения σ_y/T и σ_z/T практически совпадают.

3 ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ МОДУЛИ ПОРИСТЫХ И КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ЗЕРНИСТОЙ СТРУКТУРЫ

3.1 Эффективные упругие модули материалов со сферическими порами

Будем рассматривать пористый материал как упругое пространство Ω с бесконечной системой сферических полостей $\{\omega_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$, центры которых расположены в узлах $\{O_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$ кубической периодической решетки со стороной a . Декартовыми координатами узлов решетки будут упорядоченные наборы чисел $\{(\alpha a, \beta a, \gamma a); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}\}$. Радиусы полостей обозначим через R . Выделим отдельную представительскую ячейку пористого материала (рис. 3.1)

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma} = \left\{ (x_{\alpha}, y_{\beta}, z_{\gamma}) : |x_{\alpha}| \leq \frac{a}{2}, |y_{\beta}| \leq \frac{a}{2}, |z_{\gamma}| \leq \frac{a}{2} \right\}.$$

Здесь $(x_{\alpha}, y_{\beta}, z_{\gamma})$ — локальная декартова система координат с началом в точке $O_{\alpha\beta\gamma}$.

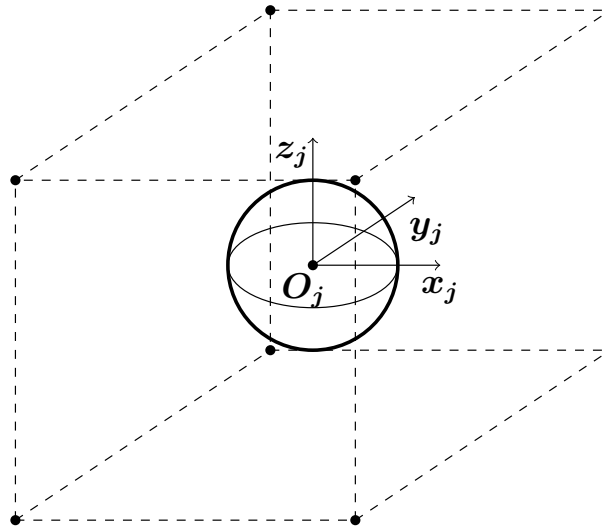


Рис. 3.1. Представительская ячейка пористого материала со сферическими порами

Удельную упругую энергию представительской ячейки можно записать в виде

$$W = \frac{1}{2V} \int_{\Omega_k} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv, \quad (3.1)$$

где Ω_k — представительская ячейка, V — объем этой ячейки, σ_{ij} , ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно. Здесь и далее принято правило суммирования по повторяющимся индексам. Используя формулу

Гаусса-Остроградского, объемный интеграл в формуле (3.1) можно преобразовать к поверхностному

$$W = \frac{1}{2V} \int_S \sigma_{ij} u_i n_j ds, \quad (3.2)$$

где S — поверхность ячейки Ω_k , $(n_j)_{j=1}^3$ — направляющие косинусы вектора нормали к поверхности. Заметим, что интеграл по поверхности полости обращается в ноль, так как нормальные напряжения на границе полости равны нулю.

В монографии [17] в предположении, что троякопериодичное двухфазное упругое тело находится в однородном поле напряжений, получены два представления удельной энергии деформации через компоненты усредненных напряжений и деформаций в виде

$$W = \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad (3.3)$$

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle \langle \sigma_{ij} \rangle, \quad (3.4)$$

где c_{ijkl} — эффективные упругие постоянные.

Будем использовать результаты задачи упругого деформирования пространства с периодической системой сферических полостей $\Omega \setminus \left\{ \bigcup_{\alpha, \beta, \gamma} \omega_{\alpha\beta\gamma} \right\}$ под действием нагрузки, приложенной на бесконечности (одноосное, двуосное или всестороннее растяжение упругого пространства), приведенные в параграфе 6.1, для вычисления эффективных упругих модулей пористого материала со сферическими пора́ми. В силу того, что напряженно-деформированное состояние упругого пространства с периодической системой полостей является однородным, можно считать, что материал с периодической системой пор является изотропным. Как известно, изотропный материал характеризуется двумя независимыми упругими модулями. Для эффективных упругих модулей пористого материала будем использовать следующие обозначения: K_0 — объемный модуль, E_0 — модуль Юнга, G_0 — модуль сдвига, σ_0 — коэффициент Пуассона.

При вычислении эффективных упругих модулей используем подход, предложенный в работе [17].

Пусть упругое пространство с периодической системой полостей подвергается всестороннему растяжению $\sigma_r^\infty = T$, приложенному на бесконечности. При всестороннем растяжении упругого пространства в силу однородности напряженного состояния при вычислении удельной энергии деформации фактически остается одно слагаемое в формуле (3.2)

$$W = \frac{1}{2V} \int_S \sigma_r u_r ds. \quad (3.5)$$

Аналогичная ситуация имеет место в формуле (3.3) [17]

$$W = \frac{3}{2} \langle \sigma \rangle \langle \varepsilon \rangle, \quad (3.6)$$

где $\langle \sigma \rangle$ — среднее всестороннее растяжение, $\langle \varepsilon \rangle$ — средняя деформация рассматриваемого материала при всестороннем растяжении. Приведенные величины связаны соотношением $\langle \sigma \rangle = 3K_0 \langle \varepsilon \rangle$.

Деформируем представительскую ячейку в равновеликий шар. В данном случае S — поверхность этого шара. Предполагается, что поверхность S не пересекает границ полостей $\omega_{\alpha\beta\gamma}$. Заменяя под интегралом в формуле (3.5) напряжения σ_r на средние напряжения

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{S} \int_S \sigma_r ds,$$

с учетом соотношения между средними напряжениями и деформациями получаем формулу для вычисления эффективного объемного модуля

$$K_0 = \frac{\langle \sigma \rangle}{\frac{1}{V} \int_S u_r ds}. \quad (3.7)$$

Вычислим значение интеграла

$$\int_S u_r ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_r R_1^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (3.8)$$

где R_1 — радиус сферы S . Для вычисления интеграла (3.8) используем результат решения краевой задачи для периодической системы сферических полостей в упругом пространстве (2.8)

$$u_r = \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{e}_r + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \cdot \mathbf{e}_r. \quad (3.9)$$

Представим перемещения $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ через $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ при помощи теоремы сложения (1.128).

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \\
= \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[a_{s,n,m} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) + \right. \\
\left. + \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l} \tilde{T}_{t,k,l,j}^{s,n,m,1} \right], \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Для вычисления $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)} \cdot \mathbf{e}_r$ заметим, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{-1} \cdot \mathbf{e}_r &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \cdot (\mathbf{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \theta) = \frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi}, \\
\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_r &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \cdot (\mathbf{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \theta) = \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\varphi}, \\
\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_r &= \cos \theta.
\end{aligned}$$

Справедливы следующие формулы

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(4)} \cdot \mathbf{e}_r = -u_{n,m-1}^{\pm(4)} \frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi} + u_{n,m+1}^{\pm(4)} \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\varphi} \mp u_{n,m}^{\pm(4)} \cos \theta, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{2,n,m}^{+(4)} \cdot \mathbf{e}_r &= \frac{1}{2n+3} \left\{ - (n-m+2)(n+m) u_{n,m-1}^{+(4)} \frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi} + \right. \\
&\quad + (n-m)(n+m+2) u_{n,m+1}^{+(4)} \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\varphi} - \\
&\quad - \left[(n-m+1)(n+m+1) + \chi(2n+3) \right] u_{n,m}^{+(4)} \cos \theta + \\
&\quad + (r^2 - R^2) \left(- u_{n+2,m-1}^{+(4)} \frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi} + \right. \\
&\quad \left. \left. + u_{n+2,m+1}^{+(4)} \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\varphi} - u_{n+2,m}^{+(4)} \cos \theta \right) \right\}, \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{2,n,m}^{-(4)} \cdot \mathbf{e}_r &= \frac{1}{2n-1} \left\{ - (n-m+1)(n+m-1) u_{n,m-1}^{-(4)} \frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi} + \right. \\
&\quad + (n-m-1)(n+m+1) u_{n,m+1}^{-(4)} \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\varphi} + \\
&\quad + \left[(n-m)(n+m) - \chi(2n-1) \right] u_{n,m}^{-(4)} \cos \theta + \\
&\quad + (r^2 - R^2) \left(- u_{n-2,m-1}^{-(4)} \frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi} + \right. \\
&\quad \left. \left. + u_{n-2,m+1}^{-(4)} \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\varphi} + u_{n-2,m}^{-(4)} \cos \theta \right) \right\}, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(4)} \cdot \mathbf{e}_r = u_{n,m-1}^{\pm(4)} \frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi} + u_{n,m+1}^{\pm(4)} \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\varphi}, \quad (3.14)$$

Из приведенных формул вытекает

$$\frac{1}{V} \int_S \mathbf{U}_{1,n,m}^{+(4)} \cdot \mathbf{e}_r ds = -\frac{4\pi}{V} \delta_{n1} \delta_{m0}, \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{V} \int_S \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(4)} \cdot \mathbf{e}_r ds = -\frac{4\pi(2+\chi)}{3V} \delta_{n1} \delta_{m0}, \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{V} \int_S \mathbf{U}_{3,n,m}^{+(4)} \cdot \mathbf{e}_r ds = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{V} \int_S \mathbf{U}_{1,n,m}^{-(4)} \cdot \mathbf{e}_r ds = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{V} \int_S \mathbf{U}_{2,n,m}^{-(4)} \cdot \mathbf{e}_r ds = -\frac{4\pi(-1+\chi)R_1^3}{3V} \delta_{n1} \delta_{m0}, \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{V} \int_S \mathbf{U}_{3,n,m}^{-(4)} \cdot \mathbf{e}_r ds = 0. \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{S} \int_S \mathbf{F} \mathbf{U}_{1,n,m}^{+(4)} \cdot \mathbf{e}_r ds = 2G \frac{8\pi}{R_1 S} \delta_{n1} \delta_{m0}, \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{S} \int_S \mathbf{F} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(4)} \cdot \mathbf{e}_r ds = 2G \frac{8\pi(2+\chi)}{3R_1 S} \delta_{n1} \delta_{m0}, \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{S} \int_S \mathbf{F} \mathbf{U}_{3,n,m}^{+(4)} \cdot \mathbf{e}_r ds = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{S} \int_S \mathbf{F} \mathbf{U}_{1,n,m}^{-(4)} \cdot \mathbf{e}_r ds = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{S} \int_S \mathbf{F} \mathbf{U}_{2,n,m}^{-(4)} \cdot \mathbf{e}_r ds = -2G \frac{8\pi(1+\sigma)}{3R_1 S} \delta_{n1} \delta_{m0}, \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{S} \int_S \mathbf{F} \mathbf{U}_{3,n,m}^{-(4)} \cdot \mathbf{e}_r ds = 0, \quad (3.26)$$

где $\mathbf{F} \mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(4)}$ — напряжения, отвечающие перемещениям $\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(4)}$ на поверхности $r_1 = R_1$.

Теперь из соотношения (3.7) получаем формулу для эффективного объемного модуля

$$\frac{K_0}{K} = \frac{1 + \zeta \left(2\tilde{a}_{1,1,0} + \frac{2(5-4\sigma)}{3} \tilde{a}_{2,1,0} - \frac{2(1+\sigma)}{3} \Gamma \right)}{1 - (1+\sigma) \zeta \left(\frac{1}{1-2\sigma} \tilde{a}_{1,1,0} + \frac{(5-4\sigma)}{3(1-2\sigma)} \tilde{a}_{2,1,0} + \frac{2}{3} \Gamma \right)}, \quad (3.27)$$

$$\Gamma = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{a}_{t,k,l} \sum_{j=2}^{\infty} \tilde{T}_{t,k,l,j}^{2,1,0,1},$$

где $\tilde{a}_{t,k,l} = \frac{2G}{TR^3} a_{t,k,l}$, $a_{t,k,l}$ — решения линейной системы (2.48), ζ — объемное содержание полостей в материале.

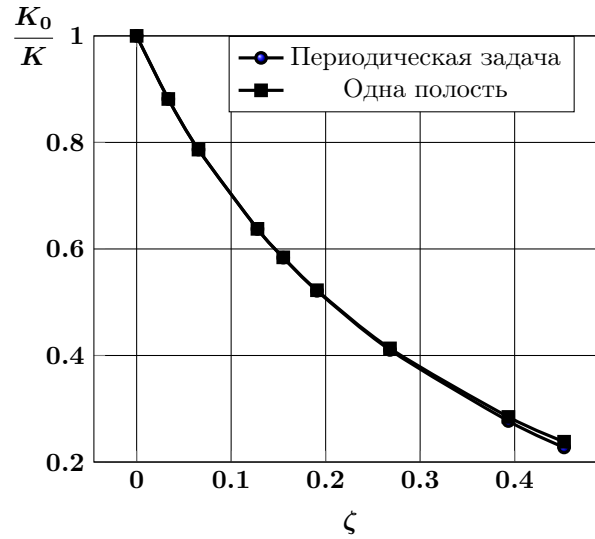


Рис. 3.2. Зависимость объемного модуля от объемного содержания полостей в материале

Если решаемую периодическую задачу заменить задачей об определении напряжений и деформаций в упругом пространстве с одной сферической полостью, находящимся под действием всестороннего растяжения, то нужно принять $\Gamma = 0$, $\tilde{a}_{1,1,0} = -1/2$, $\tilde{a}_{2,1,0} = 0$. Тогда формула (3.27) превращается в соотношение

$$\frac{K_0}{K} = \frac{(1 - \zeta)(2 - 4\sigma)}{2 - 4\sigma + (1 + \sigma)\zeta}, \quad (3.28)$$

которое совпадает с известным результатом, приведенным в монографии [17].

Таким образом, формула (3.27) дает обобщение соотношения (3.28), учитывающее периодическую структуру полостей в материале.

На рис. 3.2 приведены зависимости объемного упругого модуля от объемного содержания полостей в материале. Представлены графики в случаях одной полости в материале и периодической системы полостей в материале. Отличия значений объемных модулей для этих случаев становятся заметными с увеличением объемного содержания полостей. Максимальное отличие достигает 5% при объемном содержании полостей $\zeta = 0.45$. Таким же образом могут быть вычислены остальные эффективные упругие модули.

3.2 Эффективные упругие модули материалов со сферическими включениями

Будем рассматривать композиционный материал как упругое пространство Ω с бесконечной системой сферических включений $\{\omega_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$, центры которых расположены в узлах $\{O_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma=-\infty}^{\infty}$ кубической периодической решетки со стороной a . Декартовыми координатами узлов решетки будут упорядоченные наборы чисел $\{(\alpha a, \beta a, \gamma a); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}\}$. Радиусы включений обозначим через R . Считаем, что материалы матрицы и включений имеют упругие постоянные (σ, G) и (σ_1, G_1) . Выделим отдельную представительскую ячейку зернистого композита (рис. 3.1)

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma} = \left\{ (x_\alpha, y_\beta, z_\gamma) : |x_\alpha| \leq \frac{a}{2}, |y_\beta| \leq \frac{a}{2}, |z_\gamma| \leq \frac{a}{2} \right\}.$$

Здесь $(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma)$ — локальная декартова система координат с началом в точке $O_{\alpha\beta\gamma}$. Предполагается, что включения находятся в условиях идеального контакта с матрицей.

Удельную упругую энергию представительской ячейки можно записать в виде

$$W = \frac{1}{2V} \int_{\Omega_k} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv, \quad (3.29)$$

где Ω_k — представительская ячейка, V — объем этой ячейки, σ_{ij} , ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно. Здесь и далее принято правило суммирования по повторяющимся индексам. Используя формулу Гаусса-Остроградского, объемный интеграл в формуле (3.29) можно преобразовать к поверхностному

$$W = \frac{1}{2V} \int_S \sigma_{ij} u_i n_j ds, \quad (3.30)$$

где S — поверхность ячейки Ω_k , $(n_j)_{j=1}^3$ — направляющие косинусы вектора нормали к поверхности. Заметим, что интеграл по поверхности включения отсутствует в формуле (3.30), так как два таких интеграла для включения и для матрицы взаимно уничтожаются.

При вычислении упругих модулей применим подход, предложенный в монографии [17] и формулы для удельной упругой энергии (3.3), (3.4).

Будем использовать результаты задачи упругого деформирования пространства с периодической системой сферических включений под действием нагрузки, приложенной на бесконечности (одноосное, двуосное или всестороннее растяжение упругого пространства), приведенные в параграфе 6.2, для вычисления эффективных упругих модулей зернистого композита со сферическими зернами. В силу того, что напряженно-деформированное состояние упругого пространства с периодической системой включений является однородным, можно считать, что материал с периодической системой включений является изотропным. Для эффективных упругих модулей композиционного материала будем использовать следующие обозначения: K_0 — объемный модуль, E_0 — модуль Юнга, G_0 — модуль сдвига, σ_0 — коэффициент Пуассона.

Пусть упругое пространство с периодической системой включений подвергается всестороннему растяжению $\sigma_r^\infty = T$, приложенному на бесконечности. Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, получаем для эффективного объемного модуля формулу

$$\frac{K_0}{K} = \frac{1 + \zeta \left(2\tilde{a}_{1,1,0} + \frac{2(5-4\sigma)}{3} \tilde{a}_{2,1,0} - \frac{2(1+\sigma)}{3} \Gamma \right)}{1 - (1+\sigma) \zeta \left(\frac{1}{1-2\sigma} \tilde{a}_{1,1,0} + \frac{(5-4\sigma)}{3(1-2\sigma)} \tilde{a}_{2,1,0} + \frac{2}{3} \Gamma \right)}, \quad (3.31)$$

$$\Gamma = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{a}_{t,k,l} \sum_{j=2}^{\infty} \tilde{T}_{t,k,l,j}^{2,1,0,1},$$

где $\tilde{a}_{t,k,l} = \frac{2G}{TR^3} a_{t,k,l}$, $a_{t,k,l}$ — решения линейной системы (2.27), (2.28), ζ — объемное содержание полостей в материале.

Если решаемую периодическую задачу заменить задачей об определении напряжений и деформаций в упругом пространстве с одним сферическим включением, находящимся под действием всестороннего растяжения, то нужно принять $\Gamma = 0$, $\tilde{a}_{2,1,0} = 0$,

$$\tilde{a}_{1,1,0} = \frac{G_1(1+\sigma_1)(1-2\sigma) - G(1+\sigma)(1-2\sigma_1)}{(1+\sigma) \left[G_1(1+\sigma_1) + G(2-4\sigma_1) \right]}.$$

Тогда формула (3.31) превращается в соотношение

$$\frac{K_0}{K} = \frac{1 - 2\sigma}{1 + \sigma} \times \frac{G(1 - 2\sigma_1)(1 - \zeta)(2 + 2\sigma) + G_1(1 + \sigma_1)(\zeta(2 - 4\sigma) + 1 + \sigma)}{G(1 - 2\sigma_1)(\zeta(1 + \sigma) + 2 - 4\sigma) + G_1(1 + \sigma_1)(1 - \zeta)(1 - 2\sigma)}, \quad (3.32)$$

которое совпадает с известным результатом, приведенным в монографии [17].

Таким образом, формула (3.31) дает обобщение соотношения (3.32), учитывающее периодическую структуру включений в материале.

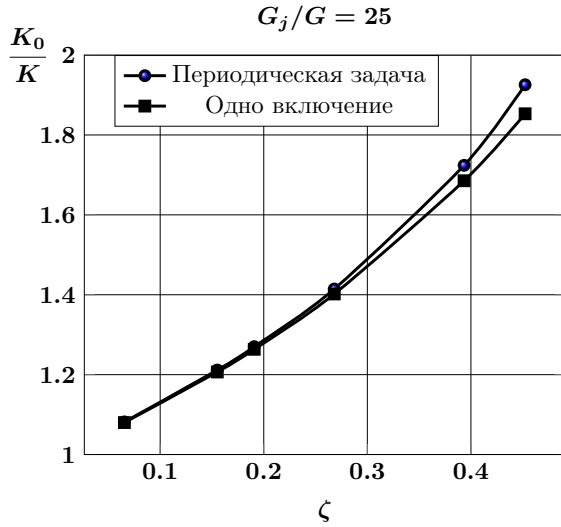


Рис. 3.3. Зависимость объемного модуля от объемного содержания включений в композите при $G_j/G = 25$

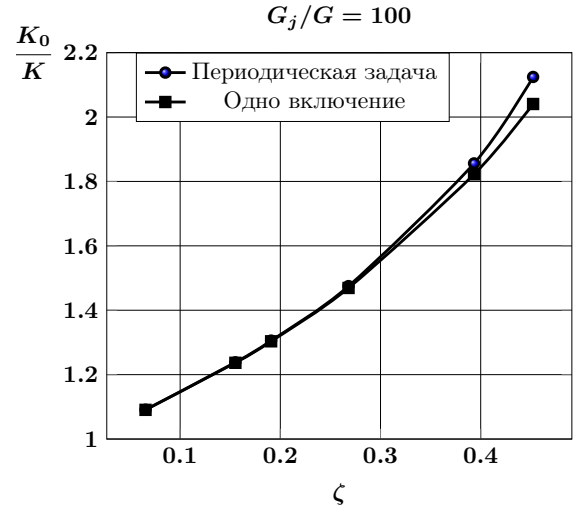


Рис. 3.4. Зависимость объемного модуля от объемного содержания включений в композите при $G_j/G = 100$

На рис. 3.3, 3.4 приведены зависимости объемного упругого модуля от объемного содержания включений в композиционном материале при $G_j/G = 25$ и $G_j/G = 100$. Представлены графики в случаях одного включения в материале и периодической системы включений в материале. Отличия значений объемных модулей для этих случаев становятся заметными с увеличением объемного содержания включений. Максимальное отличие достигает 3.5% при $G_j/G = 25$ и 4% при $G_j/G = 100$ в случае объемного содержания включений $\zeta = 0.45$. Таким же образом могут быть вычислены остальные эффективные упругие модули.

4 МЕХАНИКА УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЗЕРНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ РАЗМЕРАМИ ЗЕРЕН

4.1 Упругое состояние пространства с несколькими сферическими полостями со случайными размерами

Рассмотрим упругое пространство с N сферическими полостями, центры которых O_j расположены в узлах кубической решетки со стороной $2a$ (см. рис. 4.1). Радиусы полостей будем обозначать через R_j . Предполагается, что $\{R_j\}_{j=1}^N$ — случайный вектор, принадлежащий пространству \mathbb{R}^N , с одинаково распределенными независимыми случайными компонентами с плотностью распределения $\nu(x)$. Считается, что полости свободны от нагрузки, а на бесконечности приложено однородное напряженное состояние.

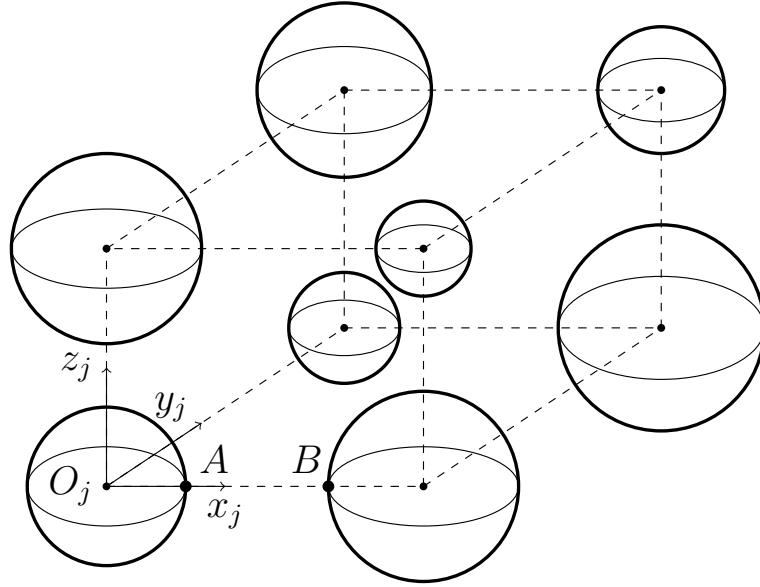


Рис. 4.1. Схематическое представление задачи

Введем сферические системы координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ с началами в точках O_j , оси которых одинаково направлены.

Соотношения между координатами можно описать формулами

$$\begin{aligned} x_i &= r_i \sin \theta_i \cos \varphi_i, \\ y_i &= r_i \sin \theta_i \sin \varphi_i, \\ z_i &= r_i \cos \theta_i, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} x_j = x_\alpha + x_{j\alpha}, \\ y_j = y_\alpha + y_{j\alpha}, \\ z_j = z_\alpha + z_{j\alpha}, \end{cases} \quad j \neq \alpha, \quad j, \alpha = \overline{1, N}, \tag{4.2}$$

где $\overrightarrow{O_j O_\alpha} = (x_{j\alpha}, y_{j\alpha}, z_{j\alpha}) = (r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$.

Для определения НДС в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе относительно неизвестного вектора перемещения \mathbf{U} с граничными условиями

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = 0 \quad (4.3)$$

и условиями на бесконечности одного из двух типов

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{z=\pm\infty} = \pm T\mathbf{e}_z \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\rho=\infty} = T\mathbf{e}_\rho \quad (\text{двуосное растяжение}), \quad (4.5)$$

где $\mathbf{F}\mathbf{U}$ — отвечающий перемещению \mathbf{U} вектор усилий на соответствующей граничной поверхности, $\Gamma_j = \{(r_j, \theta_j, \varphi_j) : r_j = R_j\}$.

Решение задачи будем искать в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0, \quad (4.6)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad (4.7)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \left(-\frac{\sigma}{1+\sigma} \rho_1 \mathbf{e}_{\rho_1} + \frac{1}{1+\sigma} z_1 \mathbf{e}_z \right) \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (4.8)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma} \rho_1 \mathbf{e}_{\rho_1} - \frac{2\sigma}{1+\sigma} z_1 \mathbf{e}_z \right) \quad (\text{двуосное растяжение}), \quad (4.9)$$

где G , σ — модуль сдвига и коэффициент Пуассона упругого пространства; $a_{s,n,m}^{(j)}$ — неизвестные коэффициенты. Здесь и далее $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ — наборы внешних и внутренних модифицированных базисных решений уравнения Ламе в сферической системе координат. При помощи соотношений (1.117) — (1.127) они связаны с со следующими частными решениями уравнения Ламе для внешности (внутренности) шара $\Omega_4^\pm = \{(r, \theta, \varphi) : r \gtrless r_0\}$, построенными в работе [62]:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{D}_s u_{n\mp 1, m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi); \quad s = 1, 3; \quad (4.10)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) - \frac{r_0^2}{2(n \pm 1) + 1} \mathbf{D}_1 u_{n\pm 1, m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi), \quad (4.11)$$

где $n = 0, 1, \dots$, $|m| \leq n + 1$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

$$u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = \left\{ \frac{(n-m)!}{r^n} / \frac{(n+m)!}{r^{n+1}} \right\} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad |m| \leq n; \quad (4.12)$$

$$\mathbf{D}_1 = \nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}; \mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi\mathbf{e}_z; \mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z],$$

где $\chi = 3 - 4\sigma$; $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ — орты декартовой системы координат.

Относительно перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ граничные условия можно записать следующим образом:

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\Gamma_j} = -\mathbf{F}\mathbf{U}_0|_{\Gamma_j}; \quad (4.13)$$

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{z=\pm\infty} = 0 \quad (\text{одноосное растяжение}); \quad (4.14)$$

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\rho=\infty} = 0 \quad (\text{двуосное растяжение}). \quad (4.15)$$

Вспомогательным перемещениям \mathbf{U}_0 отвечают следующие напряжения на поверхностях Γ_j ($\mathbf{n}_j = \mathbf{e}_{r_j}$ — вектор нормали на поверхности Γ_j):

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = TP_1(\cos\theta_j)\mathbf{e}_z \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (4.16)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = -TP_1^{(1)}(\cos\theta_j)\mathbf{e}_{\rho_j} \quad (\text{двуосное растяжение}). \quad (4.17)$$

Используя теоремы сложения, перемещение $\tilde{\mathbf{U}}$ можно записать полностью в системе координат с началом в точке O_j :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) + \\ & + \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} a_{t,k,l}^{(\alpha)}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где $\tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j}$ введены в формуле (1.128).

Формулы для напряжений, отвечающих базисным функциям перемещений $\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ на сферических поверхностях Γ_j ($\mathbf{n}_j = \mathbf{e}_{\rho_j}$, \mathbf{n}_j — нормаль к поверхности Γ_j):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{U}_{1,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & -\frac{2G}{r_j}(n+1) \left[-u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ & \left. + u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right]; \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{FU}_{2,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & \frac{2G}{r_j} \left\{ (n+m) \left[\frac{(n+3)(n-m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] \times \right. \\
& \times u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} - \\
& - (n-m) \left[\frac{(n+3)(n+m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 + \\
& + \left[\frac{(n+3)(n-m+1)(n+m+1)}{2n+3} - (n+1)(2\sigma-1) \right] \times \\
& \left. \times u_{n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right\}; \quad (4.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{FU}_{3,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & -\frac{2G}{r_j} \left[(n-m+2)u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\
& \left. + (n+m+2)u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 - mu_{n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right]; \quad (4.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{FU}_{1,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & \frac{2G}{r_j} n \left[-u_{n,m-1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\
& \left. + u_{n,m+1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 + u_{n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right]; \quad (4.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{FU}_{2,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & \frac{2G}{r_j} \left\{ -(n-m+1) \left[\frac{(n-2)(n+m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \times \right. \\
& \times u_{n,m-1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + (n+m+1) \left[\frac{(n-2)(n-m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \times \\
& \times u_{n,m+1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 + \\
& \left. + \left[\frac{(n-2)(n-m)(n+m)}{2n-1} + n(2\sigma-1) \right] u_{n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right\}; \quad (4.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{FU}_{3,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & \frac{2G}{r_j} \left[(n+m-1)u_{n,m-1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\
& \left. + (n-m-1)u_{n,m+1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 - mu_{n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right]. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

После перехода в формулах (4.14), (4.15) к напряжениям и удовлетворения граничным условиям относительно неизвестных $a_{s,n,m}^{(j)}$ получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{s=1}^3 \left\{ a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{F}_{s,n,m}^{+(p)} + F_{s,n,m}^{-(p)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} \right\} + F_{n,m}^{0(p)} = 0; \quad (4.25)$$

$$n, m \in \mathbb{Z} : \quad n \geq 1, \quad |m| \leq n-1, \quad p = 1, 2, 3; \quad j = \overline{1, N},$$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,n,n}^{(j)} \tilde{F}_{s,n,n}^{+(1)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,n,n}^{-(1)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n,j} + F_{n,n}^{0(1)} = 0; \quad (4.26)$$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,n,n}^{(j)} \tilde{F}_{s,n,n}^{+(3)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,n,n}^{-(3)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n,j} + F_{n,n}^{0(3)} = 0; \quad (4.27)$$

$$a_{3,n,n}^{(j)} \tilde{F}_{3,n,n}^{+(1)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,n,n+1}^{-(1)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n+1,j} + F_{n,n+1}^{0(1)} = 0; \quad (4.28)$$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,n,-n}^{(j)} \tilde{F}_{s,n,-n}^{+(2)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,n,-n}^{-(2)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n,j} + F_{n,-n}^{0(2)} = 0; \quad (4.29)$$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,n,-n}^{(j)} \tilde{F}_{s,n,-n}^{+(3)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,n,-n}^{-(3)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n,j} + F_{n,-n}^{0(3)} = 0; \quad (4.30)$$

$$a_{3,n,-n}^{(j)} \tilde{F}_{3,n,-n}^{+(2)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,n,-n-1}^{-(2)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n-1,j} + F_{n,-n-1}^{0(2)} = 0; \quad (4.31)$$

$$n \geq 1; \quad j = \overline{1, N};$$

$$a_{1,0,0}^{(j)} \tilde{F}_{1,0,0}^{+(1)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,0,1}^{-(1)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,0,1,j} + F_{0,1}^{0(1)} = 0; \quad (4.32)$$

$$a_{2,0,0}^{(j)} \tilde{F}_{2,0,0}^{+(3)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,0,0}^{-(3)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,0,0,j} + F_{0,0}^{0(3)} = 0; \quad (4.33)$$

$$a_{3,0,0}^{(j)} \tilde{F}_{3,0,0}^{+(2)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,0,-1}^{-(2)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,0,-1,j} + F_{0,-1}^{0(2)} = 0; \quad (4.34)$$

где $\tilde{F}_{s,n,m}^{+(p)}$ — радиальные части компонент вектора напряжений $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}$ на поверхности $r_j = R_j$, отвечающего перемещению $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}$ (выражается через $F_{s,n,m}^{+(p)}$ согласно формулам (1.117) — (1.127));

$$F_{1,n,m}^{+(2)}(R_j) = \frac{2G}{R_j^{n+2}}(n+1)(n-m+1)!; \quad (4.35)$$

$$F_{1,n,m}^{+(2)}(R_j) = -\frac{2G}{R_j^{n+2}}(n+1)(n-m-1)!; \quad (4.36)$$

$$F_{1,n,m}^{+(3)}(R_j) = \frac{2G}{R_j^{n+2}}(n+1)(n-m)!; \quad (4.37)$$

$$F_{1,n,m}^{+(1)}(R_j) = \frac{2G}{R_j^{n+2}}(n+1) \left[\frac{(n+3)(n-m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] (n-m+1)!; \quad (4.38)$$

$$F_{2,n,m}^{+(2)}(R_j) = -\frac{2G}{R_j^{n+2}}(n-m) \left[\frac{(n+3)(n+m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] (n-m-1)!; \quad (4.39)$$

$$F_{2,n,m}^{+(3)} = \frac{2G}{R_j^{n+2}} \left[\frac{(n+3)(n-m+1)(n+m+1)}{2n+3} - (n+1)(2\sigma-1) \right] (n-m)!; \quad (4.40)$$

$$F_{3,n,m}^{+(1)}(R_j) = -\frac{G}{R_j^{n+2}}(n-m+2)(n-m+1)!; \quad (4.41)$$

$$F_{3,n,m}^{+(2)}(R_j) = -\frac{2G}{R_j^{n+2}}(n+m+2)(n-m-1)!; \quad (4.42)$$

$$F_{3,n,m}^{+(3)}(R_j) = \frac{G}{R_j^{n+2}}m(n-m)!; \quad (4.43)$$

$$F_{1,n,m}^{-(1)}(R_j) = -2GR_j^{n-1} \frac{n}{(n+m-1)!}; \quad (4.44)$$

$$F_{1,n,m}^{-(2)}(R_j) = 2GR_j^{n-1} \frac{n}{(n+m+1)!}; \quad (4.45)$$

$$F_{1,n,m}^{-(3)}(R_j) = 2GR_j^{n-1} \frac{n}{(n+m)!}; \quad (4.46)$$

$$F_{2,n,m}^{-(1)}(R_j) = -2GR_j^{n-1}(n-m+1) \times \left[\frac{(n-2)(n+m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \frac{1}{(n+m-1)!}; \quad (4.47)$$

$$F_{2,n,m}^{-(2)}(R_j) = 2GR_j^{n-1}(n+m+1) \times \left[\frac{(n-2)(n-m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \frac{1}{(n+m+1)!}; \quad (4.48)$$

$$F_{2,n,m}^{-(3)}(R_j) = 2GR_j^{n-1} \times \left[\frac{(n-2)(n-m)(n+m)}{2n-1} + n(2\sigma-1) \right] \frac{1}{(n+m)!}; \quad (4.49)$$

$$F_{n,m}^{0(k)} = -T\delta_{n1}\delta_{m0}\delta_{k3} \quad (\text{одноосное растяжение}); \quad (4.50)$$

$$F_{n,m}^{0(k)} = -T\delta_{n1}\delta_{m0}(2\delta_{k1} - \delta_{k2}) \quad (\text{двуосное растяжение}). \quad (4.51)$$

Введем следующие нормировки

$$\frac{a_{s,n,m}^{(j)}}{R_j^{n+1}} = \tilde{a}_{s,n,m}^{(j)}; \quad \tilde{F}_{s,n,m}^{+(p)}(R_j)R_j^{n+2} = \tilde{F}_{s,n,m}^{+(p)}; \quad \frac{F_{s,n,m}^{-(p)}(R_j)}{R_j^{n-1}} = F_{s,n,m}^{-(p)}.$$

Введем обозначения

$$\tilde{F}(n, m) = \left(\tilde{F}_{s,n,m}^{+(p)} \right)_{p,s=1}^3; \quad F(n, m) = \left(F_{s,n,m}^{-(p)} \right)_{p,s=1}^3; \quad n \geq 1, |m| \leq n-1;$$

$$\tilde{F}(n, n) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{1,n,n}^{+(1)} & \tilde{F}_{2,n,n}^{+(1)} & 0 \\ \tilde{F}_{1,n,n}^{+(3)} & \tilde{F}_{2,n,n}^{+(3)} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{F}_{3,n,n}^{+(1)} \end{pmatrix}; \quad \tilde{F}(n, -n) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{1,n,-n}^{+(2)} & \tilde{F}_{2,n,-n}^{+(2)} & 0 \\ \tilde{F}_{1,n,-n}^{+(3)} & \tilde{F}_{2,n,-n}^{+(3)} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{F}_{3,n,-n}^{+(2)} \end{pmatrix};$$

$$\tilde{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{1,0,0}^{+(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{F}_{2,0,0}^{+(3)} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{F}_{3,0,0}^{+(2)} \end{pmatrix}; \quad F^0(n, m) = \left(F_{n,m}^{0(p)} \right)_{p=1}^3; \quad n \geq 1, |m| \leq n-1;$$

$$F^0(n, n) = \begin{pmatrix} F_{n,n}^{0(1)} \\ F_{n,n}^{0(3)} \\ F_{n,n+1}^{0(1)} \end{pmatrix}; \quad F^0(n, -n) = \begin{pmatrix} F_{n,-n}^{0(2)} \\ F_{n,-n}^{0(3)} \\ F_{n,-n-1}^{0(2)} \end{pmatrix}; \quad F^0(0, 0) = \begin{pmatrix} F_{0,1}^{0(1)} \\ F_{0,0}^{0(3)} \\ F_{0,-1}^{0(2)} \end{pmatrix};$$

$$FT_{k,l,\alpha}^{n,m,j} = \left(FT_{t,k,l,\alpha}^{p,n,m,j} \right)_{p,t=1}^3; \quad \hat{T}_{k,l,\alpha}^{n,m,j} = \left(\hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} \right)_{s,t=1}^3; \quad \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} = T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} a^{n+k+1};$$

$$FT_{k,l,\alpha}^{n,m,j} = F(n, m) \hat{T}_{k,l,\alpha}^{n,m,j}; \quad n \geq 1, |m| \leq n-1;$$

$$FT_{t,k,l,\alpha}^{p,n,j} = \delta_{p1} \sum_{s=1}^3 F_{s,n}^{-(1)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n,j} + \delta_{p2} \sum_{s=1}^3 F_{s,n}^{-(3)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n,j} + \delta_{p3} \sum_{s=1}^3 F_{s,n+1}^{-(1)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n+1,j};$$

$$FT_{t,k,l,\alpha}^{p,n,-n,j} = \delta_{p1} \sum_{s=1}^3 F_{s,n,-n}^{-(2)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n,j} + \delta_{p2} \sum_{s=1}^3 F_{s,n,-n}^{-(3)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n,j} + \delta_{p3} \sum_{s=1}^3 F_{s,n,-n-1}^{-(2)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n-1,j};$$

$$FT_{t,k,l,\alpha}^{p,0,0,j} = \delta_{p1} \sum_{s=1}^3 F_{s,0,1}^{-(1)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,0,1,j} + \delta_{p2} \sum_{s=1}^3 F_{s,0,0}^{-(3)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,0,0,j} + \delta_{p3} \sum_{s=1}^3 F_{s,0,-1}^{-(2)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,0,-1,j},$$

$$\tilde{A}^{(j)}(n, m) = \left(\tilde{a}_{s,n,m}^{(j)} \right)_{s=1}^3; \quad \frac{R_j}{a} = \mu_j.$$

Тогда разрешающую систему (4.25) — (4.34) можно записать в матричной форме

$$\begin{aligned} \tilde{F}(n, m) \tilde{A}^{(j)}(n, m) + \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k FT_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{A}^{(\alpha)}(k, l) \mu_j^n \mu_{\alpha}^{k+1} + \\ + \mu_j a F^0(n, m) = 0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Откуда

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(j)}(n, m) = -\mu_j a \tilde{F}^{-1}(n, m) F^0(n, m) - \\ - \mu_j^n \tilde{F}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k FT_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{A}^{(\alpha)}(k, l) \mu_{\alpha}^{k+1}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Считая, что μ_j является малым параметром, запишем итерационное решение разрешающей системы (4.53)

$$\tilde{A}_0^{(j)}(n, m) = -\mu_j a \tilde{F}^{-1}(n, m) F^0(n, m); \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i^{(j)}(n, m) = -\mu_j a \tilde{F}^{-1}(n, m) F^0(n, m) - \\ - \mu_j^n \tilde{F}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k FT_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{A}_{i-1}^{(\alpha)}(k, l) \mu_{\alpha}^{k+1}, \quad i = \overline{1, \infty}; \end{aligned} \quad (4.55)$$

Для последовательных шагов итерации имеем

$$\tilde{A}_0^{(j)}(n, m) = -\mu_j a \tilde{F}^{-1}(n, m) F^0(n, m); \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(j)}(n, m) = -\mu_j a \tilde{F}^{-1}(n, m) F^0(n, m) + \\ + a \mu_j^n \tilde{F}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k FT_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{F}^{-1}(k, l) F^0(k, l) \mu_{\alpha}^{k+2}; \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_2^{(j)}(n, m) = & -\mu_j a \tilde{F}^{-1}(n, m) F^0(n, m) + \\
& + a \mu_j^n \tilde{F}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k F T_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{F}^{-1}(k, l) F^0(k, l) \mu_{\alpha}^{k+2} - \\
& - a \mu_j^n \tilde{F}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k F T_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{F}^{-1}(k, l) \mu_{\alpha}^{2k+1} \times \\
& \times \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i=-r}^r F T_{r,i,\beta}^{k,l,\alpha} \tilde{F}^{-1}(r, i) F^0(r, i) \mu_{\beta}^{r+2}; \quad \dots; \quad (4.58)
\end{aligned}$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем

$$\begin{aligned}
A_1^{(j)}(n, m) = & -\mu_j^{n+2} a^{n+2} \tilde{F}^{-1}(n, m) F^0(n, m) + \\
& + a^{n+2} \mu_j^{2n+1} \tilde{F}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k F T_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{F}^{-1}(k, l) F^0(k, l) \mu_{\alpha}^{k+2}. \quad (4.59)
\end{aligned}$$

Сперва будем предполагать, что плотность распределения случайного размера сферической полости является гауссовской, т. е.

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-R)^2}{2\sigma^2}},$$

где R — математическое ожидание $E[R_j]$ ($R \in [0, a]$), σ — среднеквадратичное отклонение случайной величины R_j (выбирается таким образом, чтобы $\frac{a-R}{3} < \sigma < \frac{R}{3}$). Вычислим первый момент первого приближения к решению разрешающей системы (4.53)

$$\begin{aligned}
E \left[A_1^{(j)}(n, m) \right] = & -E \left[\mu_j^{n+2} \right] a^{n+2} \tilde{F}^{-1}(n, m) F^0(n, m) + \\
& + a^{n+2} E \left[\mu_j^{2n+1} \right] \tilde{F}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k F T_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{F}^{-1}(k, l) F^0(k, l) E \left[\mu_{\alpha}^{k+2} \right]. \quad (4.60)
\end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что случайные величины μ_j и μ_{α} независимы. Аналогично вычислим второй момент случайного вектора $A_1^{(j)}(n, m)$

$$\begin{aligned}
E \left[A_1^{(j)}(n, m) \left(A_1^{(i)}(q, p) \right)^* \right] = & \\
= & E \left[\mu_j^{n+2} \mu_i^{q+2} \right] a^{n+q+4} \tilde{F}^{-1}(n, m) F^0(n, m) \left(F^0(q, p) \right)^* \left(\tilde{F}^{-1}(q, p) \right)^* - \\
& - a^{n+q+4} \tilde{F}^{-1}(n, m) F^0(n, m) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{\beta \neq i} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=-u}^u \left(F^0(u, v) \right)^* \left(\tilde{F}^{-1}(u, v) \right)^* \left(FT_{u,v,\beta}^{q,p,i} \right)^* E \left[\mu_j^{n+2} \mu_i^{2q+1} \mu_{\beta}^{u+2} \right] \left(\tilde{F}^{-1}(q, p) \right)^* - \\
& \quad - a^{n+q+4} \tilde{F}^{-1}(n, m) \times \\
& \times \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k FT_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{F}^{-1}(k, l) F^0(k, l) E \left[\mu_j^{2n+1} \mu_i^{q+2} \mu_{\alpha}^{k+2} \right] \left(F^0(q, p) \right)^* \left(\tilde{F}^{-1}(q, p) \right)^* + \\
& \quad + a^{n+q+4} \tilde{F}^{-1}(n, m) \times \\
& \times \sum_{\alpha \neq j} \sum_{\beta \neq i} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=-u}^u FT_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{F}^{-1}(k, l) F^0(k, l) \left(F^0(u, v) \right)^* \times \\
& \quad \times \left(\tilde{F}^{-1}(u, v) \right)^* \left(FT_{u,v,\beta}^{q,p,i} \right)^* E \left[\mu_j^{2n+1} \mu_i^{2q+1} \mu_{\alpha}^{k+2} \mu_{\beta}^{u+2} \right] \left(\tilde{F}^{-1}(q, p) \right)^*. \quad (4.61)
\end{aligned}$$

При определении моментов нормального распределения используем характеристическую функцию

$$\varphi(\lambda) = e^{i\lambda R - \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - \frac{(x-R)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Если продифференцировать обе части последнего тождества n раз по λ , то получим

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} \left[e^{i\lambda R - \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^n e^{i\lambda x - \frac{(x-R)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

откуда n -й момент нормального закона равен

$$E \left[R_j^n \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{(x-R)^2}{2\sigma^2}} dx = (-i)^n \left\{ \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[e^{i\lambda R - \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma^2} \right] \right\}_{\lambda=0}.$$

Рассмотрим производящую функцию для многочленов Эрмита

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

Тогда, подставляя $\lambda = \frac{\sqrt{2}t}{\sigma}$ в функцию $e^{i\lambda R - \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma^2}$, получаем

$$e^{i\frac{R}{\sigma}\sqrt{2}t-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n\left(i\frac{R}{\sqrt{2}\sigma}\right)}{n!} t^n,$$

откуда

$$\left\{ \frac{d^n}{dt^n} \left[e^{i \frac{R}{\sigma} \sqrt{2} t - t^2} \right] \right\}_{t=0} = H_n \left(\frac{R}{\sqrt{2}\sigma} i \right).$$

Учитывая, что $\frac{d}{d\lambda} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \frac{d}{dt}$, приходим к соотношению

$$\left\{ \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[e^{i\lambda R - \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma^2} \right] \right\}_{\lambda=0} = \frac{\sigma^n}{2^{\frac{n}{2}}} H_n \left(\frac{R}{\sqrt{2}\sigma} i \right),$$

т. е.

$$E[R_j^n] = \frac{(-i)^n \sigma^n}{2^{\frac{n}{2}}} H_n \left(\frac{R}{\sqrt{2}\sigma} i \right).$$

Заметим, что при условии $\sigma \rightarrow 0$ из асимптотической формулы

$$H_n(iz) \sim (2iz)^n, \quad z \rightarrow \infty$$

следует, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} E[R_j^n] = R^n.$$

Окончательно получаем

$$E[\mu_j^n] = \frac{(-i)^n \sigma^n}{a^n 2^{\frac{n}{2}}} H_n \left(\frac{R}{\sqrt{2}\sigma} i \right).$$

Подставляя этот результат в формулу (4.60), находим первый момент случайного вектора коэффициентов при базисных решениях в формуле (4.7)

$$\begin{aligned} E[A_1^{(j)}(n, m)] &= -\frac{(-i)^{n+2} \sigma^{n+2}}{2^{\frac{n+2}{2}}} H_{n+2} \left(\frac{R}{\sqrt{2}\sigma} i \right) \tilde{F}^{-1}(n, m) F^0(n, m) + \\ &\quad + \frac{(-i)^{2n+1} \sigma^{2n+1}}{a^{n-1} 2^{\frac{2n+1}{2}}} H_{2n+1} \left(\frac{R}{\sqrt{2}\sigma} i \right) \tilde{F}^{-1}(n, m) \times \\ &\quad \times \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k F T_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{F}^{-1}(k, l) F^0(k, l) \frac{(-i)^{k+2} \sigma^{k+2}}{a^{k+2} 2^{\frac{k+2}{2}}} H_{k+2} \left(\frac{R}{\sqrt{2}\sigma} i \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Аналогичная подстановка в формулу (4.61) приводит ко второму моменту случайного вектора коэффициентов при базисных решениях в формуле (4.7). Однако ввиду ее громоздкости мы ее не приводим.

Полученные результаты можно использовать для определения математического ожидания и дисперсии компонент тензора напряжений

$$E \left[\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \right] = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n F_j(n, m) E[A^{(j)}(n, m)]; \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned}
E \left[\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} (\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z) \right] = \\
= \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{i=1}^N \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=-q}^q F_j(n, m) E \left[A^{(j)}(n, m) \left(A^{(i)}(q, p) \right)^* \right] \left(F_i(q, p) \right)^*,
\end{aligned} \tag{4.64}$$

где

$$F_j(n, m) = \begin{pmatrix} F_{1x}^{(j)}(n, m) & F_{2x}^{(j)}(n, m) & F_{3x}^{(j)}(n, m) \\ F_{1y}^{(j)}(n, m) & F_{2y}^{(j)}(n, m) & F_{3y}^{(j)}(n, m) \\ F_{1z}^{(j)}(n, m) & F_{2z}^{(j)}(n, m) & F_{3z}^{(j)}(n, m) \end{pmatrix};$$

F_{sx}, F_{sy}, F_{sz} — x -я, y -я, z -я составляющие вектора напряжений на исследуемой площадке, отвечающего перемещению $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}$.

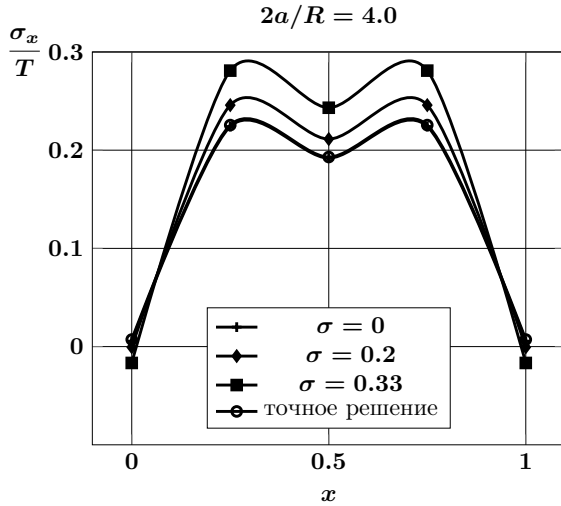


Рис. 4.2. Распределение напряжений σ_x/T на отрезке AB в зависимости от среднеквадратичного отклонения радиуса полости при одноосном растяжении

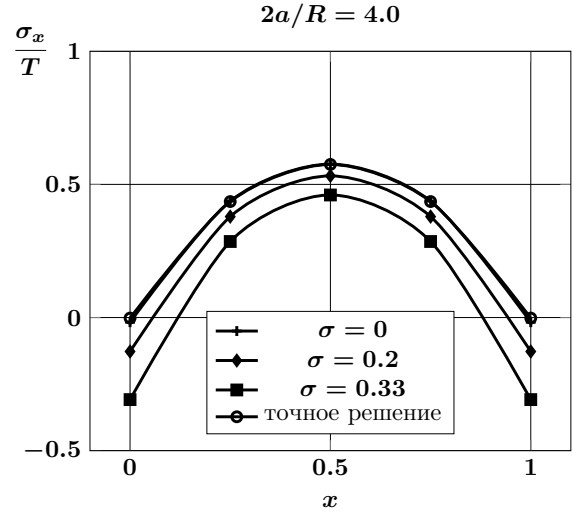


Рис. 4.3. Распределение напряжений σ_x/T на отрезке AB в зависимости от среднеквадратичного отклонения радиуса полости при двuosном растяжении

На рис. 4.2 — 4.7 представлены напряжения σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на отрезке AB в зависимости от среднеквадратичного отклонения радиуса полости при одноосном и двuosном растяжении упругого пространства. При расчетах предполагалось, что $2a/R = 4.0$, число полостей $N = 8$, они образуют тетрагональную упаковку, коэффициент Пуассона материала 0.38.

Среднеквадратичное отклонение радиуса полостей σ варьировалось в пределах от 0 до 0.33 так, что случайное изменение радиуса R_j с учетом правила 3σ не выводило его за пределы отрезка $[0; a]$. Значению $\sigma = 0$ отвечает случай детерминированного приближенного решения.

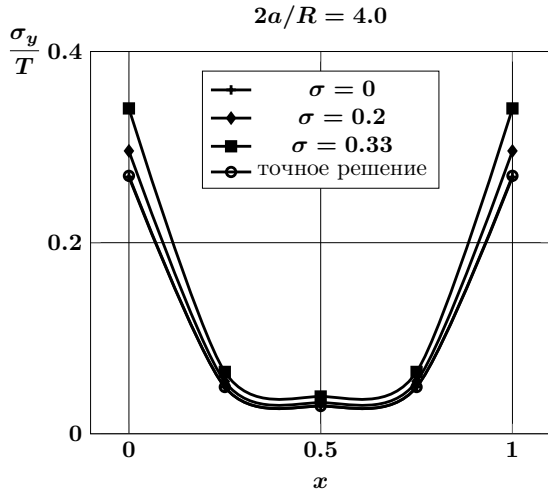


Рис. 4.4. Распределение напряжений σ_y/T на отрезке AB в зависимости от среднеквадратичного отклонения радиуса полости при одноосном растяжении

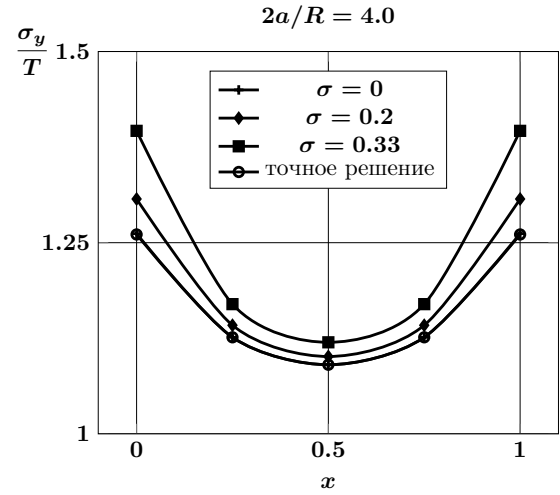


Рис. 4.5. Распределение напряжений σ_y/T на отрезке AB в зависимости от среднеквадратичного отклонения радиуса полости при двuosном растяжении

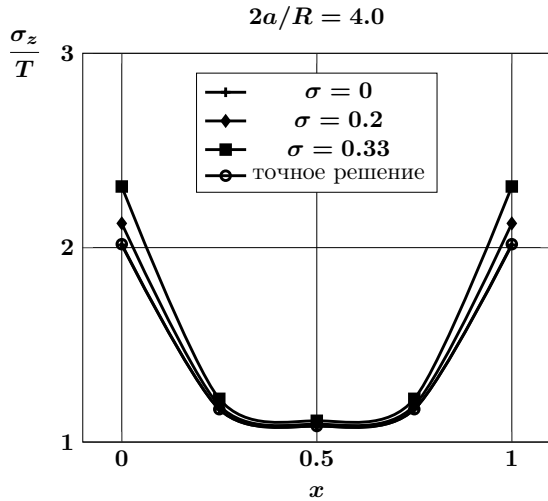


Рис. 4.6. Распределение напряжений σ_z/T на отрезке AB в зависимости от среднеквадратичного отклонения радиуса полости при одноосном растяжении

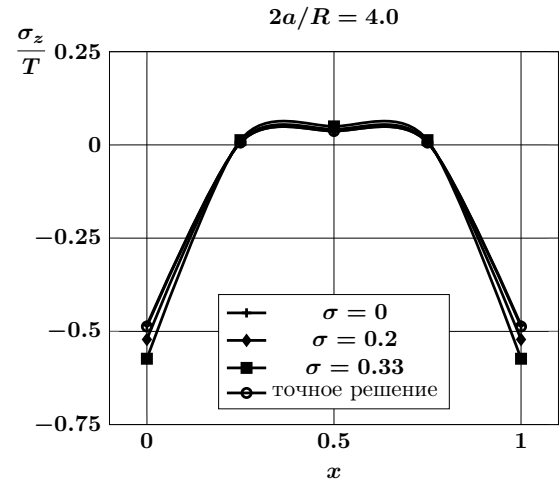


Рис. 4.7. Распределение напряжений σ_z/T на отрезке AB в зависимости от среднеквадратичного отклонения радиуса полости при двuosном растяжении

На всех графиках приближенное детерминированное решение достаточно хорошо совпадает с точным. В случае $\sigma \neq 0$ наблюдается отличие в распределении напряжений стохастического и детерминированного решений. Это различие тем больше, чем больше величина σ . Наибольший разброс в значениях напряжений наблюдается при $\sigma = 0.33$ и составляет 20 % при одноосном растяжении для σ_x/T , 12 % при двuosном растяжении для σ_y/T , 15 % при одноосном растяжении для σ_z/T .

4.2 Упругое состояние пространства с несколькими сферическими включениями со случайными размерами

Рассмотрим упругое пространство с N сферическими включениями, центры которых O_j расположены в узлах кубической решетки со стороной $2a$ (см. рис. 4.1). Радиусы включений будем обозначать через R_j . Предполагается, что $\{R_j\}_{j=1}^N$ — случайный вектор, принадлежащий пространству \mathbb{R}^N , с одинаково распределенными независимыми случайными компонентами с плотностью распределения $\nu(x)$. Считается, что включения находятся в условиях идеального контакта с матрицей, а на бесконечности приложено однородное напряженное состояние.

Введем сферические системы координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ с началами в точках O_j , оси которых одинаково направлены.

Соотношения между координатами можно описать формулами

$$\begin{aligned} x_i &= r_i \sin \theta_i \cos \varphi_i, \\ y_i &= r_i \sin \theta_i \sin \varphi_i, \\ z_i &= r_i \cos \theta_i, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{cases} x_j = x_\alpha + x_{j\alpha}, \\ y_j = y_\alpha + y_{j\alpha}, \\ z_j = z_\alpha + z_{j\alpha}, \end{cases} \quad j \neq \alpha, \quad j, \alpha = \overline{1, N}, \quad (4.66)$$

где $\overrightarrow{O_j O_\alpha} = (x_{j\alpha}, y_{j\alpha}, z_{j\alpha}) = (r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$.

Предполагается, что упругие постоянные включений равны (σ_j, G_j) . Упругие постоянные матрицы будем считать равными (σ, G) .

Граничные условия (4.13) нужно заменить условиями сопряжения полей перемещений и напряжений на поверхностях Γ_j . Для того, чтобы их записать, представим вектор перемещений в упругом пространстве в виде

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_j^-, & (x, y, z) \in \Omega_j, \\ \tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{U}_0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_j \Omega_j, \end{cases} \quad (4.67)$$

где $\Omega_j = \{(r_j, \theta_j, \varphi_j) : r_j < R_j\}$. Тогда условия сопряжения принимают следующий вид:

$$(\tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{U}_0)|_{\Gamma_j} = \tilde{\mathbf{U}}_j^-|_{\Gamma_j}, \quad (4.68)$$

$$(\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{F}\mathbf{U}_0)|_{\Gamma_j} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_j^-|_{\Gamma_j}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.69)$$

В формулах (4.67), (4.68) вектор \mathbf{U}_0 определен в (4.8), (4.9). Вектор-функции $\tilde{\mathbf{U}}^+$, $\tilde{\mathbf{U}}_j^-$ будем искать в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}^+ = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad (4.70)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_j^- = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad (4.71)$$

где $a_{s,n,m}^{(j)}$, $b_{s,n,m}^{(j)}$ — неизвестные коэффициенты.

Для представления вектора перемещений $\tilde{\mathbf{U}}^+$ в системах координат с началами O_j можем использовать формулы (4.18).

После перехода в формулах (4.68), (4.69) к напряжениям и удовлетворения граничным условиям относительно неизвестных $a_{s,n,m}^{(j)}$, $b_{s,n,m}^{(j)}$ получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 \left\{ a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{F}_{s,n,m}^{+(p)} + F_{s,n,m}^{-(p)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} \right\} + F_{n,m}^{0(p)} = \\ = \frac{G_j}{G} \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m}^{(j)} \tilde{F}_{s,n,m}^{-(p)}; \quad (4.72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 a_{s,n,n}^{(j)} \tilde{F}_{s,n,n}^{+(1)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,n,n}^{-(1)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n,j} + F_{n,n}^{0(1)} = \\ = \frac{G_j}{G} \left(b_{1,n,n}^{(j)} \tilde{F}_{1,n,n}^{-(1)} + b_{3,n,n}^{(j)} \tilde{F}_{3,n,n}^{-(1)} \right); \quad (4.73) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 a_{s,n,n}^{(j)} \tilde{F}_{s,n,n}^{+(3)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,n,n}^{-(3)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n,j} + F_{n,n}^{0(3)} = \\ = \frac{G_j}{G} \left(b_{1,n,n}^{(j)} \tilde{F}_{1,n,n}^{-(3)} + b_{3,n,n}^{(j)} \tilde{F}_{3,n,n}^{-(3)} \right); \quad (4.74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{3,n,n}^{(j)} \tilde{F}_{3,n,n}^{+(1)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,n,n+1}^{-(1)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n+1,j} + F_{n,n+1}^{0(1)} = \\ = \frac{G_j}{G} b_{2,n,n}^{(j)} \tilde{F}_{2,n,n}^{-(1)}; \quad (4.75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 a_{s,n,-n}^{(j)} \tilde{F}_{s,n,-n}^{+(2)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,n,-n}^{-(2)} \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n,j} + F_{n,-n}^{0(2)} = \\ = \frac{G_j}{G} \left(b_{1,n,-n}^{(j)} \tilde{F}_{1,n,-n}^{-(2)} + b_{3,n,-n}^{(j)} \tilde{F}_{3,n,-n}^{-(2)} \right); \quad (4.76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^2 a_{s,n,-n}^{(j)} \tilde{F}_{s,n,-n}^{+(3)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,n,-n}^{-(3)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n,j} + F_{n,-n}^{0(3)} = \\
& = \frac{G_j}{G} \left(b_{1,n,-n}^{(j)} \tilde{F}_{1,n,-n}^{-(3)} + b_{3,n,-n}^{(j)} \tilde{F}_{3,n,-n}^{-(3)} \right); \quad (4.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{3,n,-n}^{(j)} \tilde{F}_{3,n,-n}^{+(2)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,n,-n-1}^{-(2)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n-1,j} + F_{n,-n-1}^{0(2)} = \\
& = \frac{G_j}{G} b_{2,n,-n}^{(j)} \tilde{F}_{2,n,-n}^{-(2)}; \quad (4.78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{1,0,0}^{(j)} \tilde{F}_{1,0,0}^{+(1)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,0,1}^{-(1)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,0,1,j} + F_{0,1}^{0(1)} = \\
& = \frac{G_j}{G} b_{2,0,0}^{(j)} \tilde{F}_{2,0,0}^{-(1)}; \quad (4.79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{2,0,0}^{(j)} \tilde{F}_{2,0,0}^{+(3)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,0,0}^{-(3)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,0,0,j} + F_{0,0}^{0(3)} = \\
& = \frac{G_j}{G} b_{1,0,0}^{(j)} \tilde{F}_{1,0,0}^{-(3)}; \quad (4.80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{3,0,0}^{(j)} \tilde{F}_{3,0,0}^{+(2)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,0,-1}^{-(2)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,0,-1,j} + F_{0,-1}^{0(2)} = \\
& = \frac{G_j}{G} b_{3,0,0}^{(j)} \tilde{F}_{3,0,0}^{-(2)}; \quad (4.81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 \left\{ a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{E}_{s,n,m}^{+(p)} + E_{s,n,m}^{-(p)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} \right\} + E_{n,m}^{0(p)} = \\
& = \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m}^{(j)} \tilde{E}_{s,n,m}^{-(p)}; \quad (4.82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^2 a_{s,n,n}^{(j)} \tilde{E}_{s,n,n}^{+(1)} + \sum_{s=1}^3 E_{s,n,n}^{-(1)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n,j} + E_{n,n}^{0(1)} = \\
& = b_{1,n,n}^{(j)} \tilde{E}_{1,n,n}^{-(1)} + b_{3,n,n}^{(j)} \tilde{E}_{3,n,n}^{-(1)}; \quad (4.83)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 a_{s,n,n}^{(j)} \tilde{E}_{s,n,n}^{+(3)} + \sum_{s=1}^3 E_{s,n,n}^{-(3)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n,j} + E_{n,n}^{0(3)} = \\ = b_{1,n,n}^{(j)} \tilde{E}_{1,n,n}^{-(3)} + b_{3,n,n}^{(j)} \tilde{E}_{3,n,n}^{-(3)}; \quad (4.84) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{3,n,n}^{(j)} \tilde{E}_{3,n,n}^{+(1)} + \sum_{s=1}^3 E_{s,n,n+1}^{-(1)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n+1,j} + E_{n,n+1}^{0(1)} = \\ = b_{2,n,n}^{(j)} \tilde{E}_{2,n,n}^{-(1)}; \quad (4.85) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 a_{s,n,-n}^{(j)} \tilde{E}_{s,n,-n}^{+(2)} + \sum_{s=1}^3 E_{s,n,-n}^{-(2)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n,j} + E_{n,-n}^{0(2)} = \\ = b_{1,n,-n}^{(j)} \tilde{E}_{1,n,-n}^{-(2)} + b_{3,n,-n}^{(j)} \tilde{E}_{3,n,-n}^{-(2)}; \quad (4.86) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 a_{s,n,-n}^{(j)} \tilde{E}_{s,n,-n}^{+(3)} + \sum_{s=1}^3 E_{s,n,-n}^{-(3)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n,j} + E_{n,-n}^{0(3)} = \\ = b_{1,n,-n}^{(j)} \tilde{E}_{1,n,-n}^{-(3)} + b_{3,n,-n}^{(j)} \tilde{E}_{3,n,-n}^{-(3)}; \quad (4.87) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{3,n,-n}^{(j)} \tilde{E}_{3,n,-n}^{+(2)} + \sum_{s=1}^3 E_{s,n,-n-1}^{-(2)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n-1,j} + E_{n,-n-1}^{0(2)} = \\ = b_{2,n,-n}^{(j)} \tilde{E}_{2,n,-n}^{-(2)}; \quad (4.88) \end{aligned}$$

$$a_{1,0,0}^{(j)} \tilde{E}_{1,0,0}^{+(1)} + \sum_{s=1}^3 E_{s,0,1}^{-(1)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,0,1,j} + E_{0,1}^{0(1)} = b_{2,0,0}^{(j)} \tilde{E}_{2,0,0}^{-(1)}; \quad (4.89)$$

$$a_{2,0,0}^{(j)} \tilde{E}_{2,0,0}^{+(3)} + \sum_{s=1}^3 E_{s,0,0}^{-(3)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,0,0,j} + E_{0,0}^{0(3)} = b_{1,0,0}^{(j)} \tilde{E}_{1,0,0}^{-(3)}; \quad (4.90)$$

$$a_{3,0,0}^{(j)} \tilde{E}_{3,0,0}^{+(2)} + \sum_{s=1}^3 E_{s,0,-1}^{-(2)} \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l,\alpha}^{s,0,-1,j} + E_{0,-1}^{0(2)} = b_{3,0,0}^{(j)} \tilde{E}_{3,0,0}^{-(2)}; \quad (4.91)$$

где $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(p)}$ — радиальные части компонент вектора напряжений $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)}$ на поверхности $r_j = R_j$, отвечающего перемещению $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)}$; $\tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(p)}$ — радиальные части компонент вектора перемещений $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)}$ на поверхности $r_j = R_j$ (выражаются через $F_{s,n,m}^{\pm(p)}$ и $E_{s,n,m}^{\pm(p)}$ согласно формулам (1.117) — (1.127)).

$$E_{1,n,m}^{\pm(1)}(R_j) = -\tilde{u}_{n,m-1}^{\pm(4)}(R_j), \quad E_{1,n,m}^{\pm(2)}(R_j) = \tilde{u}_{n,m+1}^{\pm(4)}(R_j), \quad E_{1,n,m}^{\pm(3)}(R_j) = \mp \tilde{u}_{n,m}^{\pm(4)}(R_j);$$

$$E_{2,n,m}^{+(1)}(R_j) = -\frac{(n-m+2)(n+m)}{2n+3}\tilde{u}_{n,m-1}^{+(4)}(R_j);$$

$$E_{2,n,m}^{+(2)}(R_j) = \frac{(n-m)(n+m+2)}{2n+3}\tilde{u}_{n,m+1}^{+(4)}(R_j);$$

$$E_{2,n,m}^{+(3)}(R_j) = -\left[\frac{(n-m+1)(n+m+1)}{2n+3} + \chi\right]\tilde{u}_{n,m}^{+(4)}(R_j);$$

$$E_{2,n,m}^{-(1)}(R_j) = -\frac{(n-m+1)(n+m-1)}{2n-1}\tilde{u}_{n,m-1}^{-(4)}(R_j);$$

$$E_{2,n,m}^{-(2)}(R_j) = \frac{(n-m-1)(n+m+1)}{2n-1}\tilde{u}_{n,m+1}^{-(4)}(R_j);$$

$$E_{2,n,m}^{-(3)}(R_j) = \left[\frac{(n-m)(n+m)}{2n-1} - \chi\right]\tilde{u}_{n,m}^{-(4)}(R_j);$$

$$E_{3,n,m}^{\pm(1)}(R_j) = -\tilde{u}_{n,m-1}^{\pm(4)}(R_j); \quad E_{3,n,m}^{\pm(2)}(R_j) = -\tilde{u}_{n,m+1}^{\pm(4)}(R_j); \quad E_{3,n,m}^{\pm(3)}(R_j) = 0;$$

$$\tilde{u}_{n,m}^{\pm(4)}(R) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(n-m)!}{R^{n+1}} \\ \frac{R^n}{(n+m)!} \end{array} \right\};$$

$$E_{n,m}^{0(p)} = \frac{T}{2G(\sigma+1)}\delta_{n1}\delta_{m0}(-2\sigma\delta_{p1} + \sigma\delta_{p2} + \delta_{p3}) \quad (\text{одноосное растяжение});$$

$$E_{n,m}^{0(p)} = \frac{T}{2G(\sigma+1)}\delta_{n1}\delta_{m0}((2-2\sigma)\delta_{p1} + (\sigma-1)\delta_{p2} - 2\sigma\delta_{p3}) \quad (\text{двуосное растяжение}).$$

Введем следующие нормировки

$$\frac{a_{s,n,m}^{(j)}}{R_j^{n+1}} = \tilde{a}_{s,n,m}^{(j)}; \quad b_{s,n,m}^{(j)}R_j^n = \tilde{b}_{s,n,m}^{(j)};$$

$$\tilde{F}_{s,n,m}^{+(p)}(R_j)R_j^{n+2} = \tilde{F}_{s,n,m}^{+(p)}; \quad \frac{F_{s,n,m}^{-(p)}(R_j)}{R_j^{n-1}} = F_{s,n,m}^{-(p)}; \quad \frac{\tilde{F}_{s,n,m}^{-(p)}(R_j)}{R_j^{n-1}} = \tilde{F}_{s,n,m}^{-(p)};$$

$$\tilde{E}_{s,n,m}^{+(p)}(R_j)R_j^{n+1} = \tilde{E}_{s,n,m}^{+(p)}; \quad \frac{E_{s,n,m}^{-(p)}(R_j)}{R_j^n} = E_{s,n,m}^{-(p)}; \quad \frac{\tilde{E}_{s,n,m}^{-(p)}(R_j)}{R_j^n} = \tilde{E}_{s,n,m}^{-(p)}.$$

Введем обозначения

$$\hat{F}(n, m) = \frac{G_j}{G} \left(\tilde{F}_{s,n,m}^{-(p)} \right)_{p,s=1}^3; \quad n \geq 1, |m| \leq n-1;$$

$$\hat{F}(n, n) = \frac{G_j}{G} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{1,n,n}^{-(1)} & 0 & \tilde{F}_{3,n,n}^{-(1)} \\ \tilde{F}_{1,n,n}^{-(3)} & 0 & \tilde{F}_{3,n,n}^{-(3)} \\ 0 & \tilde{F}_{2,n,n}^{-(1)} & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{F}(n, -n) = \frac{G_j}{G} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{1,n,-n}^{-(1)} & 0 & \tilde{F}_{3,n,-n}^{-(1)} \\ \tilde{F}_{1,n,-n}^{-(3)} & 0 & \tilde{F}_{3,n,-n}^{-(3)} \\ 0 & \tilde{F}_{2,n,-n}^{-(1)} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\hat{F}(0, 0) = \frac{G_j}{G} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{F}_{2,0,0}^{-(1)} & 0 \\ \tilde{F}_{1,0,0}^{-(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{F}_{3,0,0}^{-(2)} \end{pmatrix}; \quad E^0(n, m) = \left(E_{n,m}^{0(p)} \right)_{p=1}^3; \quad n \geq 1, |m| \leq n-1;$$

$$E^0(n, n) = \begin{pmatrix} E_{n,n}^{0(1)} \\ E_{n,n}^{0(3)} \\ E_{n,n+1}^{0(1)} \end{pmatrix}; \quad E^0(n, -n) = \begin{pmatrix} E_{n,-n}^{0(2)} \\ E_{n,-n}^{0(3)} \\ E_{n,-n-1}^{0(2)} \end{pmatrix}; \quad E^0(0, 0) = \begin{pmatrix} E_{0,1}^{0(1)} \\ E_{0,0}^{0(3)} \\ E_{0,-1}^{0(2)} \end{pmatrix};$$

$$\tilde{E}(n, m) = \left(\tilde{E}_{s,n,m}^{+(p)} \right)_{p,s=1}^3; \quad E(n, m) = \left(E_{s,n,m}^{-(p)} \right)_{p,s=1}^3; \quad n \geq 1, |m| \leq n-1;$$

$$\tilde{E}(n, n) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_{1,n,n}^{+(1)} & \tilde{E}_{2,n,n}^{+(1)} & 0 \\ \tilde{E}_{1,n,n}^{+(3)} & \tilde{E}_{2,n,n}^{+(3)} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{E}_{3,n,n}^{+(1)} \end{pmatrix}; \quad \tilde{E}(n, -n) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_{1,n,-n}^{+(2)} & \tilde{E}_{2,n,-n}^{+(2)} & 0 \\ \tilde{E}_{1,n,-n}^{+(3)} & \tilde{E}_{2,n,-n}^{+(3)} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{E}_{3,n,-n}^{+(2)} \end{pmatrix};$$

$$\tilde{E}(0, 0) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_{1,0,0}^{+(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{E}_{2,0,0}^{+(3)} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{E}_{3,0,0}^{+(2)} \end{pmatrix};$$

$$\hat{E}(n, m) = \left(\tilde{E}_{s,n,m}^{-(p)} \right)_{p,s=1}^3; \quad n \geq 1, |m| \leq n-1;$$

$$\hat{E}(n, n) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_{1,n,n}^{-(1)} & 0 & \tilde{E}_{3,n,n}^{-(1)} \\ \tilde{E}_{1,n,n}^{-(3)} & 0 & \tilde{E}_{3,n,n}^{-(3)} \\ 0 & \tilde{E}_{2,n,n}^{-(1)} & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{E}(n, -n) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_{1,n,-n}^{-(1)} & 0 & \tilde{E}_{3,n,-n}^{-(1)} \\ \tilde{E}_{1,n,-n}^{-(3)} & 0 & \tilde{E}_{3,n,-n}^{-(3)} \\ 0 & \tilde{E}_{2,n,-n}^{-(1)} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\hat{E}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{E}_{2,0,0}^{-(1)} & 0 \\ \tilde{E}_{1,0,0}^{-(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{E}_{3,0,0}^{-(2)} \end{pmatrix};$$

$$ET_{k,l,\alpha}^{n,m,j} = \left(ET_{t,k,l,\alpha}^{p,n,m,j} \right)_{p,t=1}^3; \quad \hat{T}_{k,l,\alpha}^{n,m,j} = \left(\hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} \right)_{s,t=1}^3; \quad \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} = T_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} a^{n+k+1},$$

$$ET_{k,l,\alpha}^{n,m,j} = E(n,m)\hat{T}_{k,l,\alpha}^{n,m,j}; \quad n \geq 1; |m| \leq n-1;$$

$$ET_{t,k,l,\alpha}^{p,n,n,j} = \delta_{p1} \sum_{s=1}^3 E_{s,n,n}^{-(1)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n,j} + \delta_{p2} \sum_{s=1}^3 E_{s,n,n}^{-(3)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n,j} + \delta_{p3} \sum_{s=1}^3 E_{s,n,n+1}^{-(1)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,n+1,j},$$

$$\begin{aligned} ET_{t,k,l,\alpha}^{p,n,-n,j} &= \\ &= \delta_{p1} \sum_{s=1}^3 E_{s,n,-n}^{-(2)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n,j} + \delta_{p2} \sum_{s=1}^3 E_{s,n,-n}^{-(3)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n,j} + \delta_{p3} \sum_{s=1}^3 E_{s,n,-n-1}^{-(2)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,-n-1,j}, \end{aligned}$$

$$ET_{t,k,l,\alpha}^{p,0,0,j} = \delta_{p1} \sum_{s=1}^3 E_{s,0,1}^{-(1)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,0,1,j} + \delta_{p2} \sum_{s=1}^3 E_{s,0,0}^{-(3)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,0,0,j} + \delta_{p3} \sum_{s=1}^3 E_{s,0,-1}^{-(2)} \hat{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,0,-1,j},$$

$$\tilde{A}^{(j)}(n,m) = \left(\tilde{a}_{s,n,m}^{(j)} \right)_{s=1}^3; \quad \tilde{B}^{(j)}(n,m) = \left(\tilde{b}_{s,n,m}^{(j)} \right)_{s=1}^3; \quad \frac{R_j}{a} = \mu_j.$$

Тогда разрешающую систему (4.72) — (4.91) можно записать в матричной форме

$$\begin{aligned} \tilde{F}(n,m)\tilde{A}^{(j)}(n,m) + \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k FT_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{A}^{(\alpha)}(k,l) \mu_j^n \mu_{\alpha}^{k+1} + \\ + \mu_j a F^0(n,m) = \hat{F}(n,m) \tilde{B}^{(j)}(n,m). \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}(n,m)\tilde{A}^{(j)}(n,m) + \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k ET_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{A}^{(\alpha)}(k,l) \mu_j^n \mu_{\alpha}^{k+1} + \\ + \mu_j a E^0(n,m) = \hat{E}(n,m) \tilde{B}^{(j)}(n,m). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Откуда

$$\begin{aligned} \tilde{F}(n,m)\tilde{A}^{(j)}(n,m) - \hat{F}(n,m)\tilde{B}^{(j)}(n,m) = \\ = -\mu_j a F^0(n,m) - \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k FT_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{A}^{(\alpha)}(k,l) \mu_j^n \mu_{\alpha}^{k+1}; \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}(n,m)\tilde{A}^{(j)}(n,m) - \hat{E}(n,m)\tilde{B}^{(j)}(n,m) = \\ = -\mu_j a E^0(n,m) - \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k ET_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{A}^{(\alpha)}(k,l) \mu_j^n \mu_{\alpha}^{k+1}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Выразим из системы (4.95) столбец $\tilde{B}^{(j)}(n,m)$

$$\begin{aligned}\tilde{B}^{(j)}(n, m) &= \hat{E}^{-1}(n, m)\tilde{E}(n, m)\tilde{A}^{(j)}(n, m) + \hat{E}^{-1}(n, m)\mu_j a E^0(n, m) + \\ &+ \hat{E}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k E T_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{A}^{(\alpha)}(k, l) \mu_j^n \mu_\alpha^{k+1}\end{aligned}\quad (4.96)$$

и подставим в систему (4.94)

$$\begin{aligned}\left[\tilde{F}(n, m) - \hat{F}(n, m)\hat{E}^{-1}(n, m)\tilde{E}(n, m) \right] \tilde{A}^{(j)}(n, m) &= \\ &= \mu_j a \left[\hat{F}(n, m)\hat{E}^{-1}(n, m)E^0(n, m) - F^0(n, m) \right] + \\ &+ \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \left[\hat{F}(n, m)\hat{E}^{-1}(n, m)E T_{k,l,\alpha}^{n,m,j} - F T_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \right] \tilde{A}^{(\alpha)}(k, l) \mu_j^n \mu_\alpha^{k+1}.\end{aligned}\quad (4.97)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(n, m) &= \tilde{F}(n, m) - \hat{F}(n, m)\hat{E}^{-1}(n, m)\tilde{E}(n, m); \\ \Phi^0(n, m) &= \hat{F}(n, m)\hat{E}^{-1}(n, m)E^0(n, m) - F^0(n, m); \\ \Psi_{k,l,\alpha}^{n,m,j} &= \hat{F}(n, m)\hat{E}^{-1}(n, m)E T_{k,l,\alpha}^{n,m,j} - F T_{k,l,\alpha}^{n,m,j},\end{aligned}$$

преобразуем систему к виду

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{(j)}(n, m) &= \mu_j a \tilde{\Phi}^{-1}(n, m)\Phi^0(n, m) + \\ &+ \mu_j^n \tilde{\Phi}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \Psi_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{A}^{(\alpha)}(k, l) \mu_\alpha^{k+1}.\end{aligned}\quad (4.98)$$

Считая, что μ_j является малым параметром, запишем итерационное решение разрешающей системы (4.98)

$$\tilde{A}_0^{(j)}(n, m) = \mu_j a \tilde{\Phi}^{-1}(n, m)\Phi^0(n, m); \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_i^{(j)}(n, m) &= \mu_j a \tilde{\Phi}^{-1}(n, m)\Phi^0(n, m) + \\ &+ \mu_j^n \tilde{\Phi}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \Psi_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{A}_{i-1}^{(\alpha)}(k, l) \mu_\alpha^{k+1}, \quad i = \overline{1, \infty};\end{aligned}\quad (4.100)$$

Для последовательных шагов итерации имеем

$$\tilde{A}_0^{(j)}(n, m) = \mu_j a \tilde{\Phi}^{-1}(n, m)\Phi^0(n, m); \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1^{(j)}(n, m) &= \mu_j a \tilde{\Phi}^{-1}(n, m) \Phi^0(n, m) + \\ &+ a \mu_j^n \tilde{\Phi}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \Psi_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{\Phi}^{-1}(k, l) \Phi^0(k, l) \mu_{\alpha}^{k+2}; \quad (4.102)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_2^{(j)}(n, m) &= \mu_j a \tilde{\Phi}^{-1}(n, m) \Phi^0(n, m) + \\ &+ a \mu_j^n \tilde{\Phi}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \Psi_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{\Phi}^{-1}(k, l) \Phi^0(k, l) \mu_{\alpha}^{k+2} + \\ &+ a \mu_j^n \tilde{\Phi}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \Psi_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{\Phi}^{-1}(k, l) \mu_{\alpha}^{2k+1} \times \\ &\times \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i=-r}^r \Psi_{r,i,\beta}^{k,l,\alpha} \tilde{\Phi}^{-1}(r, i) \Phi^0(r, i) \mu_{\beta}^{r+2}; \quad \dots; \quad (4.103)\end{aligned}$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем

$$\begin{aligned}A_1^{(j)}(n, m) &= \mu_j^{n+2} a^{n+2} \tilde{\Phi}^{-1}(n, m) \Phi^0(n, m) + \\ &+ a^{n+2} \mu_j^{2n+1} \tilde{\Phi}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \Psi_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{\Phi}^{-1}(k, l) \Phi^0(k, l) \mu_{\alpha}^{k+2}. \quad (4.104)\end{aligned}$$

Предполагаем, что плотность распределения случайного размера сферического включения является гауссовской с параметрами $R_j \sim N(R, \sigma^2)$. Вычислим первые два момента первого приближения к решению разрешающей системы (4.98)

$$\begin{aligned}E \left[A_1^{(j)}(n, m) \right] &= E \left[\mu_j^{n+2} \right] a^{n+2} \tilde{\Phi}^{-1}(n, m) \Phi^0(n, m) + \\ &+ a^{n+2} E \left[\mu_j^{2n+1} \right] \tilde{\Phi}^{-1}(n, m) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \Psi_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{\Phi}^{-1}(k, l) \Phi^0(k, l) E \left[\mu_{\alpha}^{k+2} \right]. \quad (4.105)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E \left[A_1^{(j)}(n, m) \left(A_1^{(i)}(q, p) \right)^* \right] &= \\ &= E \left[\mu_j^{n+2} \mu_i^{q+2} \right] a^{n+q+4} \tilde{\Phi}^{-1}(n, m) \Phi^0(n, m) \left(\Phi^0(q, p) \right)^* \left(\tilde{\Phi}^{-1}(q, p) \right)^* + \\ &+ a^{n+q+4} \tilde{\Phi}^{-1}(n, m) \Phi^0(n, m) \times \\ &\times \sum_{\beta \neq i} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=-u}^u \left(\Phi^0(u, v) \right)^* \left(\tilde{\Phi}^{-1}(u, v) \right)^* \left(\Psi_{u,v,\beta}^{q,p,i} \right)^* E \left[\mu_j^{n+2} \mu_i^{2q+1} \mu_{\beta}^{u+2} \right] \left(\tilde{\Phi}^{-1}(q, p) \right)^* + \\ &+ a^{n+q+4} \tilde{\Phi}^{-1}(n, m) \times\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \Psi_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{\Phi}^{-1}(k,l) \Phi^0(k,l) E \left[\mu_j^{2n+1} \mu_i^{q+2} \mu_{\alpha}^{k+2} \right] \left(\Phi^0(q,p) \right)^* \left(\tilde{\Phi}^{-1}(q,p) \right)^* + \\
& \quad + a^{n+q+4} \tilde{\Phi}^{-1}(n,m) \times \\
& \quad \times \sum_{\alpha \neq j} \sum_{\beta \neq i} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=-u}^u \Psi_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{\Phi}^{-1}(k,l) \Phi^0(k,l) \left(\Phi^0(u,v) \right)^* \times \\
& \quad \times \left(\tilde{\Phi}^{-1}(u,v) \right)^* \left(\Psi_{u,v,\beta}^{q,p,i} \right)^* E \left[\mu_j^{2n+1} \mu_i^{2q+1} \mu_{\alpha}^{k+2} \mu_{\beta}^{u+2} \right] \left(\tilde{\Phi}^{-1}(q,p) \right)^*. \quad (4.106)
\end{aligned}$$

При вычислении математических ожиданий от произведения степеней нормально распределенных случайных величин используем формулы предыдущего параграфа. Тогда для математического ожидания первого приближения столбца коэффициентов при базисных функциях получаем формулу

$$\begin{aligned}
E \left[A_1^{(j)}(n,m) \right] &= - \frac{(-i)^{n+2} \sigma^{n+2}}{2^{\frac{n+2}{2}}} H_{n+2} \left(\frac{R}{\sqrt{2}\sigma} i \right) \tilde{\Phi}^{-1}(n,m) \Phi^0(n,m) + \\
& \quad + \frac{(-i)^{2n+1} \sigma^{2n+1}}{a^{n-1} 2^{\frac{2n+1}{2}}} H_{2n+1} \left(\frac{R}{\sqrt{2}\sigma} i \right) \tilde{\Phi}^{-1}(n,m) \times \\
& \quad \times \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \Psi_{k,l,\alpha}^{n,m,j} \tilde{\Phi}^{-1}(k,l) \Phi^0(k,l) \frac{(-i)^{k+2} \sigma^{k+2}}{a^{k+2} 2^{\frac{k+2}{2}}} H_{k+2} \left(\frac{R}{\sqrt{2}\sigma} i \right). \quad (4.107)
\end{aligned}$$

Полученные результаты можно использовать для определения математического ожидания и дисперсии компонент тензора напряжений

$$E \left[\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \right] = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n F_j(n,m) E \left[A^{(j)}(n,m) \right]; \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned}
E \left[\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} (\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z) \right] &= \\
&= \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{i=1}^N \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=-q}^q F_j(n,m) E \left[A^{(j)}(n,m) \left(A^{(i)}(q,p) \right)^* \right] \left(F_i(q,p) \right)^*, \quad (4.109)
\end{aligned}$$

где

$$F_j(n,m) = \begin{pmatrix} F_{1x}^{(j)}(n,m) & F_{2x}^{(j)}(n,m) & F_{3x}^{(j)}(n,m) \\ F_{1y}^{(j)}(n,m) & F_{2y}^{(j)}(n,m) & F_{3y}^{(j)}(n,m) \\ F_{1z}^{(j)}(n,m) & F_{2z}^{(j)}(n,m) & F_{3z}^{(j)}(n,m) \end{pmatrix};$$

F_{sx}, F_{sy}, F_{sz} — x -я, y -я, z -я составляющие вектора напряжений на исследуемой площадке, отвечающего перемещению $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}$.

ВЫВОДЫ

В отчете приведены результаты исследований третьего этапа бюджетной научно-исследовательской работы, посвященной моделированию напряженно-деформированного состояния упругого материала, содержащего полости и включения. Рассмотрены периодические модели, которые описывают поля напряжений и деформаций в реальных упругих пористых и композиционных материалах в областях между бесконечным числом концентраторов напряжений, расположенных в узлах периодической решетки. В качестве таковых рассмотрены: шары, вытянутые или сжатые сфероиды. Поля описываются аналитически точно при помощи базисных решений уравнения Ламе в канонических односвязных областях. Для определения параметров моделей при помощи обобщенного метода Фурье получены операторные уравнения с оптимальными свойствами, которые допускают эффективные численные решения. Приведен строгий аналитический анализ предложенных моделей, в результате которого определена область их эффективного применения. На основании полученных моделей предложен метод вычисления эффективных упругих модулей пористых и композиционных материалов. Также исследованы стохастические модели зернистых и композиционных материалов, в которых радиусы неоднородностей представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины. Исследована величина разброса нормальных компонент тензора напряжений в зависимости от среднеквадратичного отклонения радиусов неоднородностей. Создано программное обеспечение для численной реализации построенных моделей. На его основе проведен численный анализ и дана визуализация распределения напряжений в некоторых телах в зонах их максимальной концентрации. Исследована скорость сходимости приближенных методов решения операторных уравнений для определения параметров моделей. Проведено сравнение полученных результатов с результатами локальных и глобальных моделей, исследованных на первом и втором этапах работы. По результатам исследований можно сделать следующие выводы:

1. Особенности полученных моделей являются:

- а) впервые построены модели, которые позволяют моделировать напряженно-деформированное состояние в существенно неосесимметричных и неодносвязных телах с большим числом неоднородностей (в пределах от 2 до 125 и более);
- б) модели аналитически определяют поля перемещений, напряжений и деформаций в теле;
- в) модели являются аналитически точными при удовлетворении граничных условий для произвольной нагрузки, прикладываемой к те-

- лу;
- г) предложенная структура моделей обуславливает оптимальность разрешающих операторных уравнений для определения параметров моделей;
 - д) оптимальность связана с экспоненциальным убыванием матричных коэффициентов этих уравнений;
 - е) последнее свойство обеспечивает эффективную численную реализацию моделей, а также приближенные аналитические (в замкнутой форме) описания моделей;
 - ж) исследования показали возможность эффективного развития построенных моделей на случай периодической структуры материала и материалов со случайными размерами неоднородностей;
 - и) построенные модели позволили с высокой точностью восстановить напряженно-деформированное состояние в представительской ячейке пористого и композиционного материалов;
 - к) построенные модели позволили предложить новый метод определения эффективных упругих модулей пористых и композиционных материалов, основанный на информации о полях напряжений и деформаций в неоднородном теле.
2. Для проверки адекватности проведено сравнение периодических моделей с локальными и глобальными моделями. Исследования показали, что только в определенном диапазоне изменения геометрических и механических параметров рассмотренные модели имеют близкие распределения напряжений и деформаций. Это указывает на важность всех изученных моделей.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Абрамян, Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра [Текст] / Б. Л. Абрамян // Докл. АН Арм. ССР. — 1954. — Т. 19, №1. — С. 3–12.
2. Акбаров, С. Д. Взаимодействие между двумя соседними круговыми отверстиями при изгибе предварительно растянутой шарнирно опертой ортотропной полосы [Текст] / С. Д. Акбаров, Н. Яхниоглу, У. Б. Есил // Механика композитных материалов. — Latvijas Universitates, Polimeru Mehanikas Instituts. — 2008. — Т. 44, №6. — С. 827–838.
3. Александров, А. Я. Пространственные задачи теории упругости [Текст] / А. Я. Александров, Ю. И. Соловьёв. — М.: Наука, 1978. — 464 с.
4. Александров, А. Я. Решение основных трёхмерных задач теории упругости для тел произвольной формы путём численной реализации метода интегральных уравнений [Текст] / А. Я. Александров // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 208, №2. — С. 291–294.
5. Амбарцумян, С. А. Разномодульная теория упругости [Текст] / С. А. Амбарцумян. — М.: Наука, 1967. — 266 с.
6. Определение напряжений в упругом пространстве со сферической полостью с учётом неоднородности [Текст] / В. И. Андреев, А. Б. Зотов, В. И. Прокопьев, В. Н. Сидоров // Строит. механика и расчёт сооружений. — 1980. — №6. — С. 37–40.
7. Арутюнян, Н. Х. Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболоидальными и цилиндрическими включениями или полостями [Текст] / Н. Х. Арутюнян, А. Б. Мовчан, С. А. Назаров // Успехи механики. — 1987. — Т. 10, №4. — С. 3–91.
8. Бахвалов, Н. С. Осредненные характеристики тел с периодической структурой / Н. С. Бахвалов // ДАН СССР. — 1974. — Т. 218, №5. — С. 1046–1048.
9. Белов, П. А. Континуальная модель микрогетерогенных сред [Текст] / П. А. Белов, С. А. Лурье // Прикладная математика и механика. — М.: Наука. — Т. 73, №5. — 2009. — С. 833–848.
10. Болотин, В. В. Механика многослойных конструкций [Текст] / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. — М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.
11. Большаков, В. И. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры / В. И. Большаков, И. В. Андрианов, В. В. Данишевский. — Днепропетровск: “Пороги”, 2008. — 196 с.

12. Бурчуладзе, Т. В. Развитие метода потенциала в теории упругости [Текст] / Т. В. Бурчуладзе, Т. Г. Гегелия. — Тбилиси: Мецниереба, 1985. — 226 с.
13. Вавакин, А.С. Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями / А. С. Вавакин, Р. Л. Салганик // Изв. АН СССР. МТТ. — 1978. — №2. — С. 95–107.
14. Валов, Г. М. Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины [Текст] / Г. М. Валов // Прикладная математика и механика. — 1962. — Т. 26, Вып. 4. — С. 650–667.
15. Композиционные материалы волокнистого строения [Текст] / Г. А. Ван Фо Фы, В. Н. Грошева, Е. Н. Денбновецкая, Д. Н. Карпинос. — К.: Наук. думка, 1971. — 232 с.
16. Ван Фо Фы, Г. А. Теория армированных материалов [Текст] / Г. А. Ван Фо Фы. — К.: Наук. думка, 1971. — 232 с.
17. Ванин, Г. А. Микромеханика композиционных материалов [Текст] / Г. А. Ванин. — К.: Наук. думка. — 1985. — 304 с.
18. Ванин, Г. А. Моделирование процессов деформирования и разрушения многоуровневых композитных материалов при высоких градиентных полях / Г. А. Ванин, А. В. Березин, В. С. Добрынин и др. // НИР/НИОКР РФФИ: 94-01-00523-а. — 1994.
19. Ванин, Г. А. Новый метод учета взаимодействия в теории композиционных систем [Текст] / Г. А. Ванин // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1976. — №4. — С. 321–324.
20. Ванин, Г. А. Объемное упругое расширение среды с полыми сферическими включениями [Текст] / Г. А. Ванин // Прикл. механика. — 1980. — Т. 16, №7. — С. 127–129.
21. Ванин, Г. А. Продольный сдвиг многокомпонентной упругой среды с дефектами [Текст] / Г. А. Ванин // Прикл. механика. — 1977. — Т. 13, №8. — С. 35–41.
22. Вольперт, В. С. Осесимметричное напряжённое состояние пространства, содержащего систему сферических полостей или включений [Текст] / В. С. Вольперт, И. П. Олегин // Новосиб. ин-т инж. ж.-д. транспорта. — 1977. — 19 с. — Деп. в ВИНТИ. №3266–77.
23. Вольперт, В. С. Пространственная задача теории упругости для эллипсоида вращения и эллипсоидальной полости [Текст] / В. С. Вольперт // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. — 1967. — №3. — С. 118–124.
24. Гаришин, О. К. Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя [Текст] / О. К. Га-

- ришин, Л. А. Комар // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2003. — Т. 9, №3. — С. 278–286.
25. Гергега, А. Н. Физические аспекты процессов самоорганизации в компози-
тах. 1. Моделирование перколяционных кластеров фаз внутренних границ
[Текст] / А. Н. Гергега // Механика композиционных материалов и construc-
ций. — 2013. — Т. 19, №3. — С. 406–419.
 26. Головчан, В. Т. До розв'язку граничних задач статички пружного тіла, обме-
женого сферичними поверхнями [Текст] / В. Т. Головчан // Доп. АН УРСР.
Сер. А. — 1974. — №1. — С. 61–64.
 27. Механика композитов [Текст] / В. Т. Головчан, А. Н. Гузь, Ю. В. Коханенко,
В. И. Куш. — К.: Наук. думка, 1993. — Т. 1: Статистика материалов. — 457 с.
 28. Головчан, В. Т. Анизотропия физико-механических свойств композитных
материалов. — К.: Наук. думка, 1987. — 304 с.
 29. Голотина, Л. А. Численное моделирование реологических свойств зернисто-
го композита с использованием структурного подхода [Текст] / Л. А. Голо-
тина, Л. Л. Кожевникова, Т. Б. Кошкина // Механика композитных мате-
риалов. — 2008. — Т. 44, №6. — С. 895–906.
 30. Гомилко, А. М. Однородные решения в задаче о равновесии упругого ци-
линдра конечной длины [Текст] / А. М. Гомилко, В. Т. Гринченко, В. В. Ме-
лешко // Теор. и прикл. механика. — 1989. — №20. — С. 3–9.
 31. Гордеев, А. В. Моделирование свойств композиционного материала, арми-
рованного короткими волокнами [Текст] / А. В. Гордеев // Механика ком-
позиционных материалов и конструкций. — М.: ИПМ РАН. — 2010. — Т. 16,
№1. — С. 106–116.
 32. Григолюк, Э. И. Перфорированные пластины и оболочки [Текст] /
Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. — М.: Наука, 1970. — 556 с.
 33. Гринченко, В. Т. Осесимметричная задача теории упругости для полубес-
конечного кругового цилиндра [Текст] / В. Т. Гринченко // Прикл. меха-
ника. — 1965. — Т. 1, №1. — С. 109–119.
 34. Гринченко, В. Т. Осесимметричная задача теории упругости для толсто-
стенного цилиндра конечной длины [Текст] / В. Т. Гринченко // Прикл.
механика. — 1967. — Т. 3, №8. — С. 93–103.
 35. Гринченко, В. Т. Пространственные задачи теории упругости и пластично-
сти [Текст] / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко. — Т. 3. Равновесие упругих
тел канонической формы. — К.: Наук. думка, 1985. — 280 с.
 36. Гринченко, В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел ко-
нечных размеров [Текст] / В. Т. Гринченко. — К.: Наук. думка, 1978. —
264 с.

37. Гузь, А. Н. О решении двумерных и трехмерных задач механики сплошной среды для многосвязных областей [Текст] / А. Н. Гузь // Концентрация напряжений. — К.: Наук. думка. — 1968. — Вып. 2. — С. 54–58.
38. Гузь, А. Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности [Текст] / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. — К.: Наук. думка, 1984. — Т. 2: Статика упругих тел неканонической формы. — 280 с.
39. Дудченко, А. А. Структурная модель межфазного слоя для наполненных композиционных материалов [Текст] / А. А. Дудченко, С. А. Лурье, Н. П. Шумова // Конструкции из композиционных материалов. — 2006. — №3. — С. 3–11.
40. Дыскин, А. В. К расчету эффективных деформационных характеристик материала с трещинами / А. В. Дыскин // Изв. АН СССР. МТТ. — 1985. — №4. — С. 130–135.
41. Ержанов, Ж. С. Метод конечных элементов в задачах механики горных пород [Текст] / Ж. С. Ержанов, Т. Д. Каримбаев. — Алма-Ата. — 1975. — 238 с.
42. Ильиных, А. В. Компьютерный синтез и статистический анализ распределения структурных характеристик зернистых композиционных материалов / А. В. Ильиных, М. В. Радионова, В. Э. Вильдеман // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2010. — Т. 16, №2. — С. 251–265.
43. Исследование напряженно-деформированного состояния дисперсно наполненного полимерного композита с использованием объемных моделей [Текст] / А. С. Жарков, И. И. Анисимов, А. В. Шемелинин и др. // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2012. — Т. 18, №1. — С. 16–34.
44. Канаун, С.К. Пуассоновское множество трещин в упругой сплошной среде / С.К. Канаун // ПММ. — 1980. — Т. 44, №6. — С. 1129–1139.
45. Канторович, Л. В. Функциональный анализ [Текст] / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 742 с.
46. Капшивый, А. А. Осесимметричное напряжённое состояние шара с неконцентрической шаровой полостью [Текст] / А. А. Капшивый, Н. П. Копыстра, Л. Н. Ломонос // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1980. — №9. — С. 50–55.
47. Каримбаев, Т. Д. Подходы при моделировании деформаций композиционных материалов [Текст] / Т. Д. Каримбаев // Космонавтика и ракетостроение. — 2009. — Т. 54, №1. — С. 103–122.
48. Кауфман, Р. Н. Сжатие упругого шара с неконцентрической шаровой полостью [Текст] / Р. Н. Кауфман // Прикл. математика и механика. — 1964. — Т. 28. — Вып. 4. — С. 787–790.

49. Кит, Г. С. Метод потенциалов в трёхмерных задачах термоупругости тел с трещинами [Текст] / Г. С. Кит, М. В. Хай. — К.: Наук. думка, 1989. — 288 с.
50. Концентрация напряжений в упругом шаре с неконцентрической сферической полостью [Текст] / В. С. Колесов, Н. М. Власов, Л. О. Тисовский, И. П. Шацкий // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1989. — №30. — С. 37–41.
51. Композиционные материалы / под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. — В 8 т. — М.: Мир, 1978. — Т. 2: Механика композиционных материалов. — 566 с.
52. Кристенсен, Р. Введение в механику композитов [Текст] / Р. Кристенсен. — М.: Мир, 1982. — 334 с.
53. Трёхмерные задачи математической теории упругости [Текст] / В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелия, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе — М.: Наука, 1976. — 664 с.
54. Куц, В. И. Напряжённое состояние и эффективные упругие модули среды, нормированной периодически расположенными сфероидальными включениями [Текст] / В. И. Куц // Прикл. механика. — 1995. — Т. 31, №3. — С. 32–39.
55. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения [Текст] / Н. Н. Лебедев // М.: Физ.-мат. лит, 1963. — 358 с.
56. Левин, В. М. К определению эффективных упругих модулей композиционных материалов [Текст] / В. М. Левин // ДАН СССР. Сер. мат.-физ., 1975. — Т. 220, №5. — С. 1042–1054.
57. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела [Текст] / С. Г. Лехницкий. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
58. Ломонос, Л. Н. Первая основная задача об осесимметричном напряжённом состоянии пространства с двумя сферическими полостями [Текст] / Л. Н. Ломонос // Мат. физика и нелинейная механика. — 1990. — №13. — С. 51–56.
59. Лурье, А. И. Пространственные задачи теории упругости [Текст] / А. И. Лурье — М.: Гостехиздат, 1955. — 492 с.
60. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике [Текст]. — М.: Мир, 1978. — 210 с.
61. Назаренко, Л. В. Эффективные свойства трансверсально-изотропных композитных материалов при физической нелинейности компонентов / Л. В. Назаренко // Доповіді НАН України. — 2012, №2. — С. 88–94.
62. Николаев, А. Г. Формулы переразложения векторных решений уравнения Ламе в сферической и сфероидальной системах координат [Текст] / А. Г. Николаев // Мат. методы анализа динамических систем. — Х.: ХАИ. — 1984. — Вып. 8. — С. 100–104.

63. Николаев, А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе. — Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. — 109 с. — Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, №1178 — Ук 93.
64. Николаев, А. Г. Интегральные представления гармонических функций и теоремы сложения [Текст] / А. Г. Николаев // Доп. НАН України. — 1998. №4. — С. 36–40.
65. Николаев, А. Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей [Текст] / А. Г. Николаев // Доп. НАН України. — 1998. — №2. — С. 78–83.
66. Николаев, А. Г. Температурные напряжения в упругом пространстве, содержащем периодическую систему упругих шаровых включений [Текст] / А. Г. Николаев, С. С. Куреннов // Теор. и прикл. механика. — 2003. — Вып. 37. — С. 37–41.
67. Николаев, А. Г. Термоупругие напряжения в пространстве с периодически расположенными упругими шаровыми включениями [Текст] / А. Г. Николаев, С. С. Куреннов // Проблемы машиностроения. — 2004. — №1. — С. 35–48.
68. Николаев, А. Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости [Текст]: монография / А. Г. Николаев, В. С. Проценко. — Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского “Харьк. авиац. ин-т”, 2011. — 344 с.
69. Николаев, А. Г. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 2(58). — Х.: 2009. — С. 48–58.
70. Николаев, А. Г. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вестн. Харьк. Нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 922. — С. 4–19.
71. Николаев, А. Г. Распределение напряжений в упругом пространстве с двумя параллельно расположенными сферическими полостями [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 4(72). — Х., 2012. — С. 92–99.
72. Николаев, А. Г. Трехмерная периодическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Методы решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела: сб. науч. тр. Днепропетр. нац. ун-та им. О. Гончара. — Дн.: Лира. — 2012. — Вып. 13. — С. 287–293.

73. Николаев, А. Г. Развитие локальной модели напряженного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2013. — №1(98) — С. 14–18.
74. Николаев, А. Г. Распределение напряжений в цилиндрическом образце материала с двумя параллельными цилиндрическими полостями [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 4(76). — Х., 2013. — С. 40–49.
75. Николаев, А. Г. Напряженное состояние в цилиндрическом образце с двумя параллельными цилиндрическими волокнами [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2013. — №6(103). — С. 32–38.
76. Николаев, А. Г. Хрупкое разрушение цилиндрического стержня с круговой трещиной при кручении [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик, И. С. Тарасевич // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 2(74). — Х., 2013. — С. 64–73.
77. Николаев, А. Г. Распределение напряжений в ячейке однонаправленного композиционного материала, образованного четырьмя цилиндрическими волокнами [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вісник Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. — 2013. — Т. 18. — Вип. 4(20). — С. 64–73.
78. Николаев, А. Г. Новые теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе для вытянутых сфероидов и их применение к моделированию пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2014. — №5(112). — С. 46–54.
79. Николаев, А. Г. Развитие аппарата обобщенного метода Фурье на некоторые многосвязные области и его использование для моделирования пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2014. — №6(113). — С. 48–56.
80. Ніколаєв, О. Г. Напруження в нескінченному круговому циліндрі з чотирма циліндричними порожнинами [Текст] / О. Г. Ніколаєв, Є. А. Танчік // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2014. — Т. 57, №3. — С. 51–60.
81. Николаев, А. Г. Анализ напряженного состояния в окрестности двух сферических включений в упругом пространстве [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2014. — №3(110). — С. 26–32.
82. Николаев, А. Г. Упругое пространство с четырьмя сфероидальными включениями под действием внешней нагрузки [Текст] / А. Г. Николаев,

- Е. А. Танчик // *Авиационно-космическая техника и технология*. — 2014. — №4(111). — С. 49–55.
83. Николаев, А. Г. Напряженное состояние пористого материала в области между четырьмя сфероидальными порами [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // *Вісник нац. техн. ун-ту “ХПІ”. Математичне моделювання в техніці і технологіях*. — 2014. — №6(1049). — С. 151–160.
 84. Николаев, А. Г. Модель зернистого композита со сферическими зернами [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // *Вісник нац. техн. ун-ту “ХПІ”. Математичне моделювання в техніці і технологіях*. — 2014. — №39(1082). — С. 141–152.
 85. Николаев, А. Г. Напряженное состояние в окрестности двух сфероидальных зерен в композите [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”*. — Вып. 1(77). — Х., 2014. — С. 73–86.
 86. Николаев, А. Г. Напряжения в упругом материале со сферическими порами под действием внешней нагрузки [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”*. — Вып. 2(78). — Х., 2014. — С. 99–110.
 87. Николаев, А. Г. Первая краевая задача теории упругости для цилиндра с N цилиндрическими полостями [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // *Сиб. журн. вычисл. математики, РАН. Сиб. отд-ние*. — Новосибирск. — 2015. — Т. 18, №2. — С. 177–188.
 88. Николаев, А. Г. Напряженное состояние трансверсального изотропного пространства с двумя сфероидальными полостями [Текст] / А. Г. Николаев, Ю. А. Щербакова // *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”*. — Вып. 4(51). — Х.: 2007. — С. 49–54.
 89. Олегин, И. П. Пространственное напряженное состояние тела, содержащего периодическую систему сферических полостей / И. П. Олегин // *Динамика и прочность авиац. конструкций*. — Новосибирск. — 1989. — С. 85–91.
 90. Победря, Б. Е. *Механика композиционных материалов* [Текст] / Б. Е. Победря. — М.: МГУ, 1984. — 336 с.
 91. Подильчук, Ю. Н. Деформация упругого сфероиды / Ю. Н. Подильчук // *Прикл. механика*. — 1967. — Т. 3, №12. — С. 34–42.
 92. Подильчук, Ю. Н. *Пространственные задачи теории упругости и пластичности* / Ю. Н. Подильчук — Т. 1. *Граничные задачи статики упругих тел*. — К.: Наук. думка, 1984. — 304 с.

93. Прокопов, В. К. Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра / В. К. Прокопов // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. — 1950. — №2. — С. 286–304.
94. Савин, Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. — К.: Наук. думка, 1968. — 888 с.
95. Салганик, Р. Л. Механика тел с большим числом трещин / Р. Л. Салганик // Изв. АН СССР. МТТ. — 1973. — №4. — С. 149–158.
96. Сендецки, Дж. Упругие свойства композитов [Текст] / Дж. Сендецки. — В кн.: Механика композиционных материалов: в 8 т. — М.: Мир, 1978. — Т. 2. — С. 61–101.
97. Скудра, А. М. Структурная теория армированных пластиков [Текст] / А. М. Скудра, Ф. Я. Булавс. — Рига: Зинатне, 1978. — 192 с.
98. Смирнов, Л. Г. Упругие напряжения в сфере с инородным эксцентрическим сферическим включением / Л. Г. Смирнов, И. И. Федик // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1990. — №31. — С. 79–83.
99. Токовий, Ю. В. Осесиметричні напруження в скінченному пружному циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні [Текст] / Ю. В. Токовий // Прикл. проблеми мех. та мат. — 2010. — Вип. 8. — С. 144–151.
100. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости / А. Ф. Улитко. — К.: Наук. думка, 1979. — 265 с.
101. Устинов, К. Б. Об определении эффективных упругих характеристик двухфазных сред. Случай изолированных неоднородностей в форме эллипсоидов вращения / К. Б. Устинов // Успехи механики. — 2003. — №2. — С. 126–168.
102. Федотов, А. Ф. Приложение модели деформирования пористых материалов к расчёту эффективных упругих модулей зернистых композитов [Текст] / А. Ф. Федотов // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2011. — Т. 17, №1. — С. 3–18.
103. Фудзии, Т. Механика разрушения композиционных материалов [Текст] / Т. Фудзии, М. Дзако. — М.: Мир, 1982. — 232 с.
104. Хорошун, Л. П. Зернистые материалы [Текст] / Л. П. Хорошун, Б. П. Маслов. — Механика композитных материалов и элементов конструкций: в 3 т. — К.: Наук. думка, 1982. — С. 191–284.
105. Методы расчета механических характеристик пороматериалов малой плотности (обзор) / Д. А. Черноус, Е. М. Петроковец, Д. А. Конек, С. В. Шилько // Механика композиционных материалов и конструкций. — М.: ИПМ РАН. — 2001. — Т. 7, №4. — С. 533–545.

106. Шайлиев, Р. Ш. Математическая модель расчета эффективных свойств композиционных материалов на примере полиминеральных горных пород [Текст] / Р. Ш. Шайлиев // Электронный науч. журнал “Современные проблемы науки и образования”. — 2011. — №5.
107. Шермергор, Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред [Текст] / Т. Д. Шермергор. — М.: Наука, 1977. — 400 с.
108. Эшелби, Дж. Континуальная теория дислокаций [Текст] / Дж. Эшелби. — М.: Мир, 1963. — 247 с.
109. Янковский, А. П. Моделирование механического поведения композитов с пространственной структурой армирования из нелинейно-наследственных материалов [Текст] / А. П. Янковский // Конструкции из композиционных материалов. — 2012. — №2. — С. 12–25.
110. Atsumi, A. Stresses in a transversely isotropic half space having a spherical cavity / A. Atsumi, S. Iton // Trans. ASME. E. — 1974. — V. 41, №3. — P. 708–712.
111. Boucher, S. On the effective moduli of isotropic two-phase elastic composites / S. Boucher // J. Comp. Mater. — 1974. — V. 8. — P. 82–90.
112. Budiansky, B. Elastic moduli of a cracked solid / B. Budiansky, R. J. O’Connell // Int. J. Solids Struct. — 1976. — V. 12. — P. 81–97.
113. Chen, H.-S. The effective elastic moduli of composite materials containing spherical inclusions at non-dilute concentrations / H.-S. Chen, A. Acrivos // Int. J. Solids and Structures. — 1978. — V. 14. — P. 349–360.
114. Chen, H.-S. The solution of the equations of linear elasticity for an infinite region containing two spherical inclusions / H.-S. Chen, A. Acrivos // Int. J. Solids and Structures. — 1978. — V. 14. — P. 331–348.
115. Christensen, R. M. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models / R. M. Christensen, R. H. Lo // J. Mech. and Phys. Solids, 1979. — V. 27, №4.
116. Christensen, R. M. A critical evaluation of a class of micro-mechanics models / R. M. Christensen // J. Mech. and Phys. Solids, 1990. — V. 38. — P. 379–404.
117. Duan, H. L. Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress / H. L. Duan, J. Wang, Z. P. Huang, B. L. Karihaloo // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2005. — V. 53, No 7. — P. 1574–1596.
118. Drugan W. J. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites / W. J. Drugan, J. R. Willis // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1996. — V. 44, No 4. — P. 497–524.

119. Edwards, R. H. Stress concentrations around spheroidal inclusions and cavities / R. H. Edwards // J. Appl. Mech. — 1951. — V. 18, №1. — P. 13–35.
120. Eshelby, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems / J. D. Eshelby // Proc. R. Soc. London. Ser. A. — 1957. — V. 241. — P. 376–396.
121. Golovchan, V. T. Double-particle approximation analysis of the residual thermostressed state of granular composites / V. T. Golovchan, N. V. Litoshenko // International Applied Mechanics. — 2000. — V. 36, No 12. — P. 1612–1619.
122. Hashin, Z. The elastic moduli of fiber reinforced materials / Z. Hashin, W. Rosen // J. Appl. Mech., 1964. — V. 31. — P. 223–232.
123. Hashin, Z. Analysis of composite materials — a survey / Z. Hashin // J. Appl. Mech., 1983. — V. 50. — P. 481–505.
124. Hashin, Z. The differential scheme and its application to cracked materials / Z. Hashin // J. Mech. Phys. Solids. — 1988. — V. 36. — P. 719–733.
125. Hashin, Z. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials / Z. Hashin, S. A. Shtrikman // J. Mech. Phys. Solids. — 1963. — V. 11. — P. 128–140.
126. Kachanov, M. Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts / M. Kachanov // Appl. Mech. Rev. — 1992. — V. 45. — P. 304–335.
127. Khoroshun, L. P. Theory of short-term micro damageability of granular composite materials / L. P. Khoroshun, E. N. Shikula // International Applied Mechanics. — 2000. — V. 36, No 8. — P. 1060–1066.
128. Khoroshun, L. P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites / L. P. Khoroshun // International Applied Mechanics. — 2000. — V. 36, No 10. — P. 1284–1316.
129. Meleshko, V. V. Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loading / V. V. Meleshko, Yu. V. Tokovyy // J. Eng. Math. — 2013. — V. 78. — P. 143–166.
130. Michel, J. C. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach / J. C. Michel, H. Moulinec, P. Suquet // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1999. — V. 172, No 1–4. — P. 109–143.
131. Miyamoto, H. On the problem of the theory of elasticity for a region, containing more than two spherical cavities / H. Miyamoto // Bull. JSME. — 1958. — V. 1, №2. — P. 103–115.

132. Mura, T. Two-ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method / T. Mura, Z. A. Moschovidis // *Trans. ASME. E.* — 1975. — V. 42, №4. — P. 847–852.
133. Nemat-Nasser, S. On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids: comments and corrections / S. Nemat-Nasser, M. Taya // *Quart. Appl. Math.* — 1985. — V. 43. — P. 187–188.
134. Nikolaev, A. G. On the distribution of stresses in circular infinite cylinder with cylindrical cavities / A. G. Nikolaev, E. A. Tanchik // *Visn. Khark. Nat. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mekh.* — 2014. — V. 1120, Issue 69. — P. 4–19.
135. Sangini, A. S. Elastic coefficients of composites containing sperical inclusions in a periodic array / A. S. Sangini, W. Lu // *J. Mech. Phys. Solids.* — 1987. — V. 35, №1. — P. 1–21.
136. Sheikh, M. A. Microstructural finite-element modeling of a ceramic matrix composite to predict experimental measurements of its macro thermal properties / M. A. Sheikh, S. C. Taylor, D. R. Hayhurst, R. Taylor // *Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering.* — 2001. — V. 9, No 1. — P. 7–23.
137. Scalon, J. A model-based analysis of particle size distributions in composite materials / J. Scalon, N. R. J. Fieller, E. C. Stillman, H. V. Atkinson // *Acta Materialia.* — 2003. — V. 51, No 4. — P. 997–1006.
138. Strenberg, E. On the axisymmetric problem of elasticity for an infinite region containing two spherical cavities / E. Strenberg, M. A. Sadowsky // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* — 1952. — V. 74. — P. 19–27.
139. Torquato, S. Random heterogeneous media: microstructure and improved bounds on effective properties / S. Torquato // *Appl. Mech. Rev.* — 1991. — V. 44. — P. 37–76.
140. Trias, D. Random models versus periodic models for fibre reinforced composites / D. Trias, J. Costa, J. A. Mayugo, J. E. Hurtado // *Computational Materials Science.* — 2006. — V. 38, No 2. — P. 316–324.
141. Tsuchida, E. On the asymmetric problem of elasticity theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions / E. Tsuchida, I. Nakahara, M. Kodama // *Bull. JSME.* — 1980. — V. 23, №181. — P. 1072–1080.
142. Tsuchida, E. On the asymmetric problem of elasticity theory for an infinite elastic solid containing some spherical cavities / E. Tsuchida, N. Uchiyama, I. Nakahara, M. Kodama // *Bull. JSME.* — 1979. — V. 22, №164. — P. 141–147.
143. Zhong, Z. Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains / Z. Zhong, Q. P. Sun // *Int. Journal of Solids and Structures.* — 2002. — V. 39, Issue 23. — P. 5753–5765.

144. Zimmerman, R. W. Behaviour of the Poisson ratio of a two-phase composite materials in the high-concentration limit / R. W. Zimmerman // Appl. Mech. Rev. — 1994. — V. 47. — P. 38–44.
145. Zureick, A. H. The asymmetric displacement of a rigid spheroidal inclusion embedded in transversely isotropic medium / A. H. Zureick // Acta. mech. — 1989. — V. 77, No 1-2. — P. 101–110.
146. Zureick, A. H. Transversely isotropic medium with a rigid spheroidal inclusion under an axial pull / A. H. Zureick // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1988. — V. 55, №2. — P. 495–497.