

МИНИСТРЕСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЁЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
“Харьковский авиационный институт”

Николаев А. Г.

**ОБОБЩЁННЫЙ МЕТОД ФУРЬЕ В
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Харьков, 2013

Оглавление

Введение	2
1. Математический аппарат обобщенного метода Фурье	8
1.1. Теоремы сложения базисных гармонических функций в цилиндрических, сферических, вытянутых и сжатых сфероидальных системах координат со сдвинутыми началами	8
1.2. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в вытянутых сфероидальных координатах	17
1.3. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в сферических координатах	25
1.4. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в цилиндрических координатах	27
2. Модели НДС упругого пространства с двумя цилиндрическими неоднородностями	31
2.1. Упругое состояние пространства с двумя цилиндрическими полостями	31
3. Модели НДС упругого пространства с несколькими цилиндрическими неоднородностями	32
3.1. Упругое состояние пространства с несколькими цилиндрическими полостями	32

Введение

Современный уровень развития техники и технологии в высокотехнологических областях накладывает повышенные требования на точность и эффективность моделей материалов, которые широко используются в авиации и ракетостроении. Одной из наиболее важных характеристик материалов, которые здесь применяются, является такая комплексная характеристика, как малая масса и одновременно высокая прочность материала. Такой характеристикой обладают материалы типа композитов, в которых присутствуют конструктивно заложенные неоднородности. При современном уровне моделирования появляется возможность конструирования материалов с заранее заданными свойствами вначале на уровне модели, определяя оптимальную структуру, геометрические размеры и механические характеристики неоднородностей. И только после этого, полученные в результате моделирования данные, можно воплощать в реальном материале.

Обзор литературы. Определение интегральных упругих характеристик композиционных материалов проводилось различными методами в работах: Ванина Г. А. [8, 9], Власова А. Н., Гаришина О. К., Головина А. В., Головчана В. Т. [1, 11], Гузя И. А., Ефименко А. В., Киселёва С. П., Копысова С. П., Кувыркина Г. Н., Куца В. И. [15], Маслова Б. П., Мошева В. В., Панькова А. А., Подильчука Ю. Н. [27], Полякова В. В., Рущицкого Я. Я., Федотова А. Ф. [29], Фомина В. М., Хорошуна Л. П. [2, 3], и других.

В работе [29] предложен метод расчета эффективных упругих модулей зернистых композитов, основанный на модели упругого деформирования пористых материалов. Отличительная особенность метода заключается в осреднении микроскопических напряжений и деформаций не по полному, а по эффективному объему фаз. Получены расчетные зависимости эффективных объемов осреднения от упругих модулей и объемного содержания фаз. Проведено сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными при различном сочетании упругих модулей и произвольной объемной концентрации фаз.

В статьях [2, 3] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных

модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, т.к. уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В работе [1] проанализировано термонапряженное состояние в окрестности сферических включений в керамическом композите. Была строго решена краевая задача, которая соответствует приближенному моделированию механики композита парой включений. Численные результаты качественно согласуются с известными экспериментальными зависимостями.

В статье [5] получено явное аналитическое решение задачи с жестким сфероидальным включением в трансверсально изотропном упругом пространстве, где включению заданы контактные перемещения в направлении, перпендикулярном к оси симметрии материала. Для решения задачи использовано представление потенциала перемещений для равновесия трехмерного трансверсально изотропного тела. В работе [4] исследован трансверсально изотропный стержень с цилиндрическим включением с осесимметричными собственными деформациями. Получено аналитическое упругое решение для перемещений, напряжений и энергии упругой деформации стержня.

В монографии [8] разработаны методы микромеханики композиционных сред с дискретной структурой и трещинами и некоторые их приложения к конкретным материалам. Рассмотрено влияние свойств компонентов и вида структуры неоднородных сред на их эффективные (интегральные) параметры и распределение внутренних полей. Наряду с задачами теории упругости исследуются другие физические свойства материалов.

В статье [10] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, т.е. учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В работе [31] построена математическая модель расчета эффективного модуля упругости полиминеральных горных пород. Суть исследований заключается в расчете эффективного упругого модуля характерного объема материала

путем осреднения по всем реализациям случайного поля неоднородностей с учетом их концентрации и пространственной ориентации. В работе были использованы методы: теории обобщенных функций, тензорного исчисления, теории уравнений математической физики и интегро-дифференциальных уравнений.

В работе [14] дано построение модели межфазного слоя материала, содержащего жесткую частицу под действием растягивающей нагрузки. Предлагается вариант чисто конструктивной расчетной модели. Основанием для построения такой модели являются результаты исследований, где показано, что в окрестности границ включения возникает дополнительная межфазная зона, механические свойства которой являются переменными, изменяясь по экспоненциальному закону от жесткости включения до жесткости матрицы. В рамках полученной расчетной модели учитываются размеры включения и протяженность межфазной зоны. Учитываются также изменение модулей упругости при повороте частицы по отношению действующей нагрузки и влияние соседних частиц на свойства межфазного слоя. Приведены примеры расчета.

В статье [30] представлены исследования по моделированию структуры пористых материалов с малой объемной долей содержания твердой фазы. В качестве моделей рассматриваются главным образом стержневые и оболочечные конструкции. Предложена классификация моделей по степени упорядоченности структурных единиц. Представляется, что наиболее адекватной с точки зрения морфологии и деформационных свойств является модель, состоящая из хаотически ориентированных 14-гранных ячеек. Для анализа представленной модели предлагается метод выделения структурного элемента.

В работе [6] методом конечных элементов исследовано влияние начального растяжения на концентрацию напряжений вокруг круговых отверстий в пластине-полосе, подверженной изгибу. Математическая формулировка соответствующей краевой задачи дается в рамках трехмерной линеаризованной теории упругости при плоском деформированном состоянии. Материал пластины-полосы линейно-упругий, однородный и ортотропный. Представлены численные результаты, оценивающие влияние предварительного растяжения и взаимного расположения отверстий на концентрацию напряжений. Установлено, что начальное растяжение существенно уменьшает концентрацию напряжений в некоторых характерных точках на контуре отверстий.

В статье [32] разработана численно-аналитическая методика моделирования нелинейно-наследственного поведения композитов, имеющих пространственно-ориентированную структуру (пространственно-армированных композитов), позволяющая в дискретные моменты времени рассматривать такую композицию как нелинейно-упругую. Применение итерационного процесса типа метода переменных параметров упругости позволило линеаризовать определяющие соотношения и свести задачу расчета механического поведения рассматриваемого композита в дискретные моменты времени к серии линейно-упругих задач ме-

ханики композитов.

В статье [12] исследованы зернистые композитные материалы с эластомерной матрицей, наполненной твердыми частицами диаметром 10-1000 . Рассмотрен один из возможных механизмов реологического поведения наполненных систем, связанный с возникновением и развитием вакуолей около жестких включений в вязкоупругой матрице. Для моделирования такого механизма формирования реологических свойств наполненного эластомера использована структурная ячейка в виде эластомерного цилиндра, высота которого равна диаметру, с жестким сферическим включением в центре цилиндра. Деформирование ячеек исследовали при соблюдении граничных условий, обеспечивающих сохранение их плотной упаковки при деформировании. Принято, что включение является жестким, а свойства матрицы описываются уравнениями линейной наследственной теории вязкоупругости. Для описания процесса роста вакуоли использован подход, согласно которому изначальное отслоение начинает распространяться, когда энергия, накопленная в матрице при растяжении, достигает величины, достаточной для создания новой поверхности раздела. Структурную неоднородность композита моделировали путем учета непостоянства локальной концентрации наполнителя. Рассчитаны кривые ползучести для композитов с разным содержанием твердой фазы. Проведено сравнение с экспериментальными данными, показавшее удовлетворительное согласование результатов.

В работе [13] предлагается алгоритм оценки свойств волокнистого композита при растяжении, основанный на процедуре В. З. Власова; дается оценка эффективных свойств эквивалентного гомогенного материала; приводится сравнение результатов расчета эффективного модуля Юнга с результатами других авторов.

В статье [7] предлагается корректная модель сред с микроструктурой (по определению Миндлина), которая определяется наличием свободных деформаций и обобщает известные модели Миндлина, Коссера и Аэро-Кувшинского. Корректность формулировки модели определяется использованием «кинематического» вариационного принципа, основанного на последовательном формальном описании кинематики сред, формулировке кинематических связей для сред разной сложности и построении соответствующей потенциальной энергии деформации с использованием процедуры множителей Лагранжа. Устанавливается система определяющих соотношений и формулируется согласованная постановка краевой задачи. Показывается, что исследуемая модель среды не только отражает масштабные эффекты, аналогичные когезионным взаимодействиям, но также является основой для описания широкого спектра адгезионных взаимодействий. В связи с анализом физической стороны модели предлагается трактовка физических характеристик, ответственных за неклассические эффекты, дается описание спектра адгезионных механических параметров.

В работе [9] разработаны модели структур многоуровневых волокнистых композитов с упрочняющими частицами в матрице и методы решения задач о плоском напряженном состоянии и разрушении. Предложен новый критерий хрупкого разрушения на основе интегралов не зависящих от пути интегрирования. Найдены обобщенные равновесные термодинамические потенциалы неоднородных сред. Предложены методы определения поправок в состоянии материалов, возникающих от градиентных эффектов вблизи свободных и межфазных поверхностей, кончиков трещин, при высокочастотных волновых процессах. Указанные результаты оригинальны и пока не известны аналоги в литературе. Соотношения теории описывают состояние тел на выбранном масштабном уровне и связывают его с состоянием и процессами, протекающими на других масштабных уровнях неоднородных сред. Отмеченное представляет интерес в теории разрушения материалов, в задачах нанотехнологии и др.

Напряженно-деформированное состояние кусочно-однородных тел исследовано при помощи обобщенного метода Фурье в работах [17 – 26, 28].

Приведенный обзор литературы показывает, что одной из актуальных проблем современной механики деформированного твердого тела является построение и анализ моделей напряженного состояния пористых и композиционных материалов, которые находят широкое применение в высокотехнологических областях техники, в частности, в авиации и ракетостроении. Известные пространственные модели напряженного состояния указанных выше материалов не являются достаточно точными. Они учитывают неоднородную структуру материала или усреднено, или локально в окрестности только одного концентратора напряжений. При моделировании подобных материалов также используются разные типы стохастических моделей, которые, как правило, не являются полностью адекватными. Однако аэрокосмическая отрасль накладывает повышенные требования на прочностные характеристики материалов, управление которыми зависит от точности определения напряжений в теле. Создание более точных моделей указанных материалов позволит не только уточнить расчеты на прочность (коэффициенты концентрации напряжений на границе раздела фаз могут отличаться в 1,5-2 раза), но и на основе этих моделей проводить оптимальное проектирование материалов с заданными прочностью и массой.

В отчете приводятся результаты исследований по моделированию напряженно-деформированного состояния упругого тела с полостями или включениями цилиндрической, сферической, вытянутой или сжатой сфероидальной формы.

Объектом исследования настоящей работы является многосвязный кусочно-однородный упругий материал. Предметом исследования являются модели НДС многосвязного кусочно-однородного упругого материала.

Целью и задачами данного исследования является построение аналитико-численных моделей НДС упругих тел с полостями и включениями, указанной

выше формы. Важной составной частью исследования является строгий анализ полученных моделей, определение областей их эффективности, численный анализ полей напряжений и деформаций на основе построенных моделей, проверка адекватности предлагаемых моделей.

Модели НДС указанных тел строятся на основе точных базисных решений уравнения Ламе в канонических пространственных областях [23]. Для определения параметров модели используется обобщенный метод Фурье [26].

В рамках первого этапа бюджетной темы были построены и исследованы локальные модели НДС в телах с неоднородностями, которые описывают поля напряжений и деформаций реального пористого или композиционного материала лишь в ограниченных областях в окрестности двух концентраторов напряжений в упругом теле. Рассматриваются неоднородности в виде двух цилиндров, двух шаров, двух вытянутых или сжатых сфероидов. Проведен строгий аналитический анализ построенных моделей и определены области их эффективности. Созданы пакеты прикладных программ для численной реализации построенных моделей. Проведен численный и качественный анализ распределения напряжений в некоторых рассматриваемых телах.

Для проверки достоверности построенных моделей дано сравнение полученных результатов в случае осесимметрично расположенных полостей с результатами численного моделирования на основе МКЭ.

Глава 1

Математический аппарат обобщенного метода Фурье

1.1. Теоремы сложения базисных гармонических функций в цилиндрических, сферических, вытянутых и сжатых сфероидальных системах координат со сдвинутыми началами

Рассмотрим пары ($i = 1, 2$) однотипных одинаково направленных систем координат: декартовых (x_i, y_i, z_i) , цилиндрических (ρ_i, z_i, φ_i) , сферических $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$, вытянутых $(\xi_i, \eta_i, \varphi_i)$ и сжатых $(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, \varphi_i)$ сфероидальных. Их начала отнесены к точкам O_i , которые произвольно сдвинуты друг относительно друга. Будем считать, что декартовые координаты точки O_2 в декартовой системе координат с началом в точке O_1 задаются тройкой чисел (x_{12}, y_{12}, z_{12}) . Тогда между декартовыми координатами справедливы соотношения:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_{12}, \\ y_1 = y_2 + y_{12}, \\ z_1 = z_2 + z_{12}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Связь между различными криволинейными координатами определяется формулами:

$$\begin{aligned} x_i &= \rho_i \cos \varphi_i = r_i \sin \theta_i \cos \varphi_i = c_i \operatorname{sh} \xi_i \sin \eta_i \cos \varphi_i = \tilde{c}_i \operatorname{ch} \tilde{\xi}_i \sin \tilde{\eta}_i \cos \varphi_i, \\ y_i &= \rho_i \sin \varphi_i = r_i \sin \theta_i \sin \varphi_i = c_i \operatorname{sh} \xi_i \sin \eta_i \sin \varphi_i = \tilde{c}_i \operatorname{ch} \tilde{\xi}_i \sin \tilde{\eta}_i \sin \varphi_i, \\ z_i &= r_i \cos \theta_i = c_i \operatorname{ch} \xi_i \cos \eta_i = \tilde{c}_i \operatorname{sh} \tilde{\xi}_i \cos \tilde{\eta}_i, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $x_i, y_i, z_i \in (-\infty; \infty)$; $\rho_i, r_i, \xi_i \in [0; \infty)$; $\eta_i \in [0; \pi]$; $\tilde{\xi}_i \in (-\infty, \infty)$; $\tilde{\eta}_i \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $\varphi \in [0; 2\pi]$; c_i, \tilde{c}_i ($c_i, \tilde{c}_i > 0$) — параметры сфероидальных систем координат.

В дальнейшем понадобятся следующие базисные решения уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (1.3)$$

регулярные вне (знак “+” в верхнем индексе), внутри (знак “−” в верхнем индексе) цилиндра Ω_3^\pm , шара Ω_4^\pm , вытянутого Ω_5^\pm и сжатого Ω_6^\pm сфероидов:

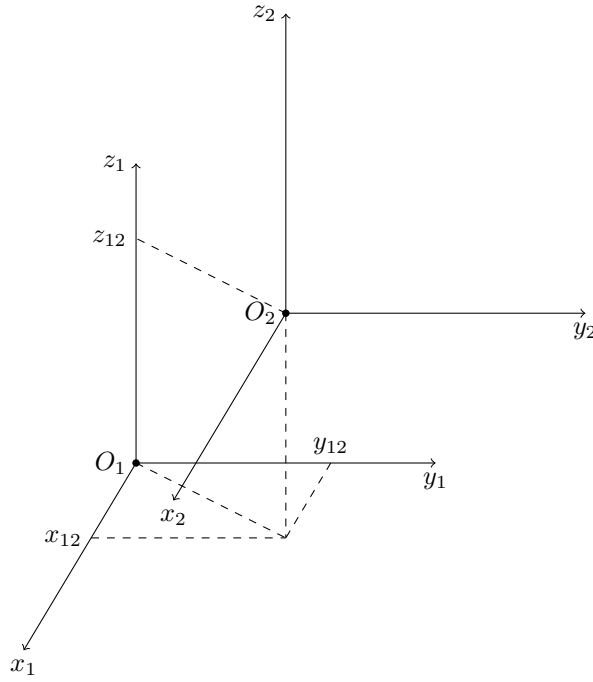


Рис. 1.1. Декартовые системы координат, произвольно сдвинутые друг относительно друга

$$u_{\lambda, m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = e^{i\lambda z + im\varphi} \begin{Bmatrix} \tilde{K}_m(\lambda\rho) \\ I_m(\lambda\rho) \end{Bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad (1.4)$$

$$u_{n, m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = \begin{Bmatrix} (n-m)!/r^{n+1} \\ r^n/(n+m)! \end{Bmatrix} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, |m| \leq n; \quad (1.5)$$

$$u_{n, m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = \begin{Bmatrix} Q_n^{-m}(\text{ch}\xi) \\ P_n^{-m}(\text{ch}\xi) \end{Bmatrix} P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, |m| \leq n; \quad (1.6)$$

$$u_{n, m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = \begin{Bmatrix} Q_n^{-m}(i\text{sh}\tilde{\xi}) \\ P_n^{-m}(i\text{sh}\tilde{\xi}) \end{Bmatrix} P_n^m(\cos \tilde{\eta}) e^{im\varphi}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, |m| \leq n; \quad (1.7)$$

где $I_m(x)$ — модифицированная функция Бесселя,

$$\tilde{K}_m(x) = (\text{sign } x)^m K_m(|x|),$$

$K_m(x)$ — функция Макдональда, $P_n^m(x)$, $Q_n^m(x)$ — функции Лежандра первого и второго рода. Верхний (нижний) множитель в фигурных скобках соответствует верхнему (нижнему) знаку индекса $\{\pm\}$.

В дальнейшем важную роль играют теоремы сложения решений (1.4) – (1.7) в парах однотипных систем координат, описанных выше.

Теорема 1.1. При $\rho_2 < \rho_{12}$ справедливо разложение

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l u_{m-l,\lambda}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}) u_{l,\lambda}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2). \quad (1.8)$$

При $\rho_1 < \rho_{12}$ справедливо разложение

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^m u_{m-l,\lambda}^{+(3)}(\rho_{12}, -z_{12}, \varphi_{12}) u_{l,\lambda}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1). \quad (1.9)$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное представление функции [17]

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) = (\text{sign } \lambda)^m \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|\lambda|[iz_1 - \rho_1 \text{ch}(t - i\varphi_1)] + mt} dt, \quad (1.10)$$

$\lambda \neq 0$, $\rho_1 > 0$, $\varphi_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. С учетом формул (1.1) запишем

$$\begin{aligned} iz_1 - \rho_1 \text{ch}(t - i\varphi_1) &= iz_1 - \rho_1 \cos(\varphi_1 + it) = iz_1 - \rho_1 \cos \varphi_1 \text{cht} - \\ &- i\rho_1 \sin \varphi_1 \text{sht} = iz_1 - x_1 \text{cht} - iy_1 \text{sht} = iz_2 - x_2 \text{cht} - iy_2 \text{sht} + \\ &+ iz_{12} - x_{12} \text{cht} - iy_{12} \text{sht} = iz_2 - \rho_2 \text{ch}(t - i\varphi_2) + iz_{12} - \rho_{12} \text{ch}(t - i\varphi_{12}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Подставим выражение (1.11) в интегральное представление (1.10) и преобразуем один из подынтегральных множителей $e^{-|\lambda|\rho_2 \text{ch}(t - i\varphi_2)}$. Для этого воспользуемся производящей функцией для функции Бесселя [16]

$$e^{\frac{u}{2}(s - \frac{1}{s})} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} s^l J_l(u). \quad (1.12)$$

Подставим в тождество (1.2) $s = ie^{t - i\varphi_2}$, $u = i|\lambda|\rho_2$. В результате получаем

$$e^{-|\lambda|\rho_2 \text{ch}(t - i\varphi_2)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^l e^{tl - il\varphi_2} i^l I_l(|\lambda|\rho_2).$$

После замены индекса суммирования l на $-l$ в последней формуле имеем разложение

$$e^{-|\lambda|\rho_2 \text{ch}(t-i\varphi_2)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l e^{-tl+il\varphi_2} I_l(|\lambda|\rho_2) \quad (1.13)$$

Подстановка (1.11) и (1.13) в (1.10) приводит к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) &= (\text{sign } \lambda)^m \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z_{12} - |\lambda|\rho_{12} \text{ch}(t-i\varphi_{12}) + mt} \times \\ &\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l e^{-tl+il\varphi_2 + i\lambda z_2} I_l(|\lambda|\rho_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l u_{\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) \times \\ &\times (\text{sign } \lambda)^{m-l} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z_{12} - |\lambda|\rho_{12} \text{ch}(t-i\varphi_{12}) + (m-l)t} dt = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}) u_{\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Разложение (1.9) доказывается аналогично.

Теорема 1.2. При $r_2 < r_{12}$ справедливо разложение

$$u_{n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k (-1)^{k+l} u_{n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}) u_{k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2). \quad (1.15)$$

При $r_1 < r_{12}$

$$u_{n,m}^{+(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k (-1)^{n+l} u_{n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}) u_{k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1). \quad (1.16)$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное представление функции [17]

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{mt} \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi m}{2}}}{[z_1 - i\rho_1 \text{ch}(t - i\varphi_1)]^{n+1}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-i\frac{\pi m}{2}}}{[z_1 + i\rho_1 \text{ch}(t - i\varphi_1)]^{n+1}} \right\} dt, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$r_1 > 0, \quad \theta_1 \in (0; \pi), \quad \varphi_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq |m|.$$

Аналогично равенству (1.11) получаем

$$z_1 \pm i\rho_1 \operatorname{ch}(t - i\varphi_1) = z_2 \pm i\rho_2 \operatorname{ch}(t - i\varphi_2) + z_{12} \pm i\rho_{12} \operatorname{ch}(t - i\varphi_{12}). \quad (1.18)$$

Разложим функцию $[z_1 \pm i\rho_1 \operatorname{ch}(t - i\varphi_1)]^{-n-1}$ в степенной ряд по степеням $z_2 \pm i\rho_2 \operatorname{ch}(t - i\varphi_2)$

$$\begin{aligned} [z_1 \pm i\rho_1 \operatorname{ch}(t - i\varphi_1)]^{-n-1} &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n+k)!}{n!k!} \frac{[z_2 \pm i\rho_2 \operatorname{ch}(t - i\varphi_2)]^k}{[z_{12} \pm i\rho_{12} \operatorname{ch}(t - i\varphi_{12})]^{n+k+1}} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Разложение сходится при условии

$$|z_2 \pm i\rho_2 \operatorname{ch}(t - i\varphi_2)| < |z_{12} \pm i\rho_{12} \operatorname{ch}(t - i\varphi_{12})|.$$

Ряд (1.9) подставим в интегральное представление (1.17). В результате получаем

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) &= \frac{n!}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n+k)!}{n!k!} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{mt} \left\{ \frac{[z_2 \pm i\rho_2 \operatorname{ch}(t - i\varphi_2)]^k}{[z_{12} \pm i\rho_{12} \operatorname{ch}(t - i\varphi_{12})]^{n+k+1}} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\frac{\pi m}{2}} \frac{[z_2 \pm i\rho_2 \operatorname{ch}(t - i\varphi_2)]^k}{[z_{12} \pm i\rho_{12} \operatorname{ch}(t - i\varphi_{12})]^{n+k+1}} \right\} dt. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Запишем функцию $[z_2 \pm i\rho_2 \operatorname{ch}(t - i\varphi_2)]^k$ рядом Фурье по угловой координате [16]

$$\begin{aligned} [z_2 \pm i\rho_2 \operatorname{ch}(t - i\varphi_2)]^k &= r_2^k [\cos \theta_2 \pm i \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 + it)]^k = \\ &= r_2^k \sum_{l=-k}^k \frac{k!}{(k+l)!} e^{\mp i\frac{\pi l}{2}} P_k^l(\cos \theta_2) e^{il\varphi_2 - lt}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Подстановка (1.21) в формулу (1.20) приводит к следующему равенству

$$\begin{aligned}
u_{n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (n+k)! \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+l)!} r_2^k P_k^l(\cos \theta_2) e^{il\varphi_2} \times \\
&\times \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(m-l)t} \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(m+l)}}{[z_{12} - i\rho_{12} \operatorname{ch}(t - i\varphi_{12})]^{n+k+1}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(m+l)}}{[z_{12} + i\rho_{12} \operatorname{ch}(t - i\varphi_{12})]^{n+k+1}} \right\} dt
\end{aligned}$$

В силу интегрального представления (1.17)

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+k)!}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(m-l)t} \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(m+l)}}{[z_{12} - i\rho_{12} \operatorname{ch}(t - i\varphi_{12})]^{n+k+1}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(m+l)}}{[z_{12} + i\rho_{12} \operatorname{ch}(t - i\varphi_{12})]^{n+k+1}} \right\} dt == e^{i\pi l} u_{n+k, m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}).
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующее разложение базисного решения уравнения Лапласа:

$$u_{n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+l} u_{n+k, m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}) u_{k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2).$$

Теорема сложения (1.16) получается аналогично.

Теорема 1.3. При $\xi_2 \in (0; \gamma_2)$ справедливо разложение

$$\begin{aligned}
u_{n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l+m} u_{s,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) \times \\
&\times \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{q! \Gamma(n+q+\frac{3}{2})} \left(\frac{c_1}{2}\right)^{2q+n+1} \sum_{k=s}^{\infty} (-1)^k g_{k,l}^{-(45)s}(c_2) \times \\
&\times u_{2q+n+k, m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}). \quad (1.22)
\end{aligned}$$

При $\xi_1 \in (0; \gamma_1)$ справедливо разложение

$$\begin{aligned}
u_{n,m}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l+m} u_{s,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) \times \\
&\times \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{q! \Gamma(n+q+\frac{3}{2})} \left(\frac{c_2}{2}\right)^{2q+n+1} \sum_{k=s}^{\infty} (-1)^n g_{k,l}^{-(45)s}(c_1) \times
\end{aligned}$$

$$\times u_{2q+n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}). \quad (1.23)$$

Выше использованы обозначения

$$\gamma_j = \text{Arsh} \left[\frac{z_{12}^2 + \rho_{12}^2 - c_j^2 + \sqrt{(z_{12}^2 + \rho_{12}^2 - c_j^2) + 4\rho_{12}^2 c_j^2}}{2c_j^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.24)$$

$$g_{k,l}^{-(45)s}(c_j) = \sqrt{\pi} \varepsilon_{ks} \left(\frac{c_j}{2} \right)^k \frac{s + \frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} - \frac{s}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{s}{2} + \frac{3}{2}\right)}, \quad (1.25)$$

$$\begin{cases} 1, & k - s = 2p, \quad p \in \mathbb{Z}, \\ 0, & k - s = 2p + 1, \quad p \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.26)$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Рассмотрим интегральное представление [17]:

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) = & \frac{i^{m+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{mt} \left\{ Q_n \left[\frac{z_1 + i\rho_1 \text{ch}(t - i\varphi_1)}{c_1} \right] + \right. \\ & \left. + (-1)^{n+m} Q_n \left[\frac{-z_1 + i\rho_1 \text{ch}(t - i\varphi_1)}{c_1} \right] \right\} dt. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Разложим функцию Лежандра второго рода в гипергеометрический ряд по степеням ее аргумента [16]

$$Q_n(u) = \sqrt{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(n+2q)!}{q! \Gamma(n+q+\frac{3}{2})} \left(\frac{1}{2n} \right)^{2q+n+1}. \quad (1.28)$$

В качестве аргумента в последней формуле выберем выражение

$$\frac{z_1 \pm i\rho_1 \text{ch}(t - i\varphi_1)}{c_1},$$

которое представим формулой (1.19). В результате получим

$$Q_n \left[\frac{\pm z_1 + i\rho_1 \operatorname{ch}(t - i\varphi_1)}{c_1} \right] = \sqrt{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{n+1}}{q! \Gamma(n + q + \frac{3}{2})} \left(\frac{c_1}{2} \right)^{2q+n+1} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2q + n + k)!}{k!} \frac{[z_2 \pm i\rho_2 \operatorname{ch}(t - i\varphi_2)]^k}{[z_{12} \pm i\rho_{12} \operatorname{ch}(t - i\varphi_{12})]^{2q+n+k+1}}. \quad (1.29)$$

Используем совместно формулу (1.21) и теорему сложения гармонических функций в сферических и вытянутых сфероидальных системах координат с общим началом [20]:

$$u_{k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{s=0}^k g_{k,l}^{-(45)s}(c_2) u_{s,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2), \quad (1.30)$$

где $g_{k,l}^{-(45)s}(c_2)$ описано в (1.25). При этом получаем разложение

$$\frac{[z_2 \pm i\rho_2 \operatorname{ch}(t - i\varphi_2)]^k}{k!} =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\mp i)^l e^{-lt} \sum_{s=0}^k g_{k,l}^{-(45)s}(c_2) u_{s,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2). \quad (1.31)$$

Формулы (1.29) и (1.31) подставим в интегральное представление (1.27)

$$u_{n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) = \frac{i^{m+1}}{2\pi} \sqrt{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q! \Gamma(n + q + \frac{3}{2})} \left(\frac{c_1}{2} \right)^{2q+n+1} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2q + n + k)! \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{k,l}^{-(45)s}(c_2) u_{s,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{(m-l)t} \left\{ \frac{(-i)^l}{[z_{12} + i\rho_{12} \operatorname{ch}(t - i\varphi_{12})]^{2q+n+k+1}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{n+m} (-1)^{n+1} \frac{i^l}{[z_{12} - i\rho_{12} \operatorname{ch}(t - i\varphi_{12})]^{2q+n+k+1}} \right\} dt. \quad (1.32)$$

Интеграл в последней формуле может быть записан так

$$(-1)^l i^m \int_{-\infty}^{\infty} e^{(m-l)t} \left\{ \frac{(-i)^{m-l}}{[z_{12} + i\rho_{12} \operatorname{ch}(t - i\varphi_{12})]^{2q+n+k+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{i^{m-l}}{[z_{12} - i\rho_{12} \operatorname{ch}(t - i\varphi_{12})]^{2q+n+k+1}} \right\} dt.$$

Следовательно, в силу формулы (1.17) он равен

$$\frac{2\pi}{(2q+n+k)!} (-1)^{l+1} i^{m+1} u_{2q+n+k, m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}).$$

Подстановка последнего выражения в формулу (1.32) и замена порядка суммирования доказывает разложение (1.22). Теорема сложения (1.23) доказывается аналогично.

Теорема 1.4. При $\tilde{\xi}_2 \in [0, \tilde{\gamma}_2)$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l+m} u_{s,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) \times \\ &\times \sqrt{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (-i)^{n+1}}{q! \Gamma(n+q+\frac{3}{2})} \left(\frac{\tilde{c}_1}{2}\right)^{2q+n+1} \times \\ &\times \sum_{k=s}^{\infty} (-1)^k g_{k,l}^{-(46)s}(c_2) u_{2q+n+k, m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}). \quad (1.33) \end{aligned}$$

При $\tilde{\xi}_1 \in [0, \tilde{\gamma}_1)$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l+m} u_{s,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) \times \\ &\times \sqrt{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (-i)^{n+1}}{q! \Gamma(n+q+\frac{3}{2})} \left(\frac{\tilde{c}_2}{2}\right)^{2q+n+1} \times \\ &\times \sum_{k=s}^{\infty} (-1)^n g_{k,l}^{-(46)s}(c_1) u_{2q+n+k, m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}). \quad (1.34) \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения

$$\tilde{\gamma}_j = \text{Arsh} \left[\frac{z_{12}^2 + \rho_{12}^2 - \tilde{c}_j^2 + \sqrt{(z_{12}^2 + \rho_{12}^2 - \tilde{c}_j^2) + 4z_{12}^2 \tilde{c}_j^2}}{2\tilde{c}_j^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.35)$$

$$g_{k,l}^{-(46)s}(c_j) = \sqrt{\pi} \varepsilon_{ks} (-i)^k \left(\frac{\tilde{c}_j}{2}\right)^k \frac{s + \frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} - \frac{s}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{s}{2} + \frac{3}{2}\right)}, \quad (1.36)$$

Доказательство. Вывод формул (1.33) и (1.34) основан на интегральном представлении [17]

$$u_{n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) = \frac{(-i)^{m+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{mt} \left\{ Q_n \left[\frac{iz_1 + \rho_1 \operatorname{ch}(t - i\varphi_1)}{\tilde{c}_1} \right] + \right. \\ \left. + (-1)^{n+m} Q_n \left[\frac{-iz_1 + \rho_1 \operatorname{ch}(t - i\varphi_1)}{\tilde{c}_1} \right] \right\} dt, \quad (1.37)$$

$\tilde{\xi}_1 > 0$, $\tilde{\eta}_1 \in (0, \pi)$, $x_1 > \tilde{c}$, $n \geq |m|$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Он может быть произведен так же, как в теореме 1.1.3.

1.2. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в вытянутых сфероидальных координатах

Приведенные в предыдущем параграфе свойства гармонических функций играют существенную роль при моделировании напряженно-деформированного состояния многосвязного упругого тела.

Будем рассматривать однородную изотропную упругую среду. Вектор перемещений \mathbf{U} точек среды, как известно, описывается уравнением Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (1.38)$$

где σ — коэффициент Пуассона, ∇ — оператор “набла”.

В работе [20] были введены следующие частные решения уравнения (1.38) во внешности (внутренности) вытянутого сфероида $\Omega_5^\pm \{(\xi, \eta, \varphi) : \xi \gtrless \xi_0\}$:

$$U_{s,n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = \\ = \frac{c}{2n+1} D_s \left[u_{n-1,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) - u_{n+1,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) \right]; \quad s = 1, 3; \quad (1.39)$$

$$U_{2,n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = D_2 u_{n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) - cch^2 \xi_0 D_1 u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi), \quad (1.40)$$

где $n = 0, 1, \dots$; $|m| \leq n+1$; $u_{n,m}^{\pm(5)}$ определены в (1.6),

$$D_1 = \nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z}; \quad D_2 = z \nabla - \chi e_z; \quad D_3 = i [\nabla \times e_z]; \quad (1.41)$$

$\chi = 3 - 4\sigma$, $\{e_x, e_y, e_z\}$ — орты декартовой системы координат.

В развернутой координатной форме формулы (1.39) – (1.40) имеют вид:

$$U_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{n,m-1}^{\pm(5)} e_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)} e_1 - u_{n,m}^{\pm(5)} e_0; \quad (1.42)$$

$$U_{2,n,m}^{\pm(5)} = qu_{1,n,m-1}^{\pm(5)} e_{-1} - qu_{1,n,m+1}^{\pm(5)} e_1 - \left[qu_{1,n,m}^{\pm(5)} + \chi u_{n,m}^{\pm(5)} \right] e_0 + \\ + c (q^2 - q_0^2) \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}; \quad (1.43)$$

$$U_{3,n,m}^{\pm(5)} = -u_{n,m-1}^{\pm(5)} e_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)} e_1. \quad (1.44)$$

Здесь использованы обозначения

$$u_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{1,n,m}^{\pm}(\xi) P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}; \\ u_{1,n,m}^{\pm}(\xi) = \left\{ \begin{array}{l} (n+m+1) Q_{n+1}^{-m}(q) \\ -(n-m) P_{n-1}^{-m}(q) \end{array} \right\}; \\ q = \operatorname{ch} \xi, \quad q_0 = \operatorname{ch} \xi_0, \quad e_{\mp 1} = \frac{1}{2} (e_x \pm i e_y), \quad e_0 = e_z. \quad (1.45)$$

В работе [21] введено понятие базисности системы решений уравнения Ламе в односвязной канонической области и доказана базисность решений (1.39) – (1.41) в соответствующих областях Ω_5^{\pm} .

В дальнейшем нам понадобятся теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в одинаково направленных вытянутых сфероидальных системах координат, начала которых сдвинуты согласно соотношениям (1.1).

Теорема 1.5. При $\xi_2, \xi_{20} \in (0; \gamma_2)$ справедливы разложения

$$U_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{+(55)k,l} U_{s,k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2), \quad s = 1, 3; \quad (1.46)$$

$$U_{2,n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f_{n,m}^{+(55)k,l} U_{2,k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{n,m}^{+(55)k,l} U_{1,k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) \right], \quad (1.47)$$

где

$$f_{n,m}^{+(55)k,l} = \sum_{j=n}^{\infty} g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) f_{j,m}^{(45)k,l}(c_2), \quad (1.48)$$

$$g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) = (-1)^m \sqrt{\pi} \left(\frac{c_1}{2} \right)^{j+1} \frac{\varepsilon_{jn}}{\Gamma\left(\frac{j-n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{j+n}{2} + \frac{3}{2}\right)}, \quad (1.49)$$

$$f_{j,m}^{(45)k,l}(c_2) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l} \sqrt{\pi} \left(\frac{c_2}{2} \right)^p \frac{\varepsilon_{pk} \left(k + \frac{1}{2} \right) u_{j+p,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma \left(\frac{p-k}{2} + 1 \right) \Gamma \left(\frac{p+k}{2} + \frac{3}{2} \right)} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n,m}^{+(55)k,l} = \sum_{j=n}^{\infty} & \left[c_2 q_{20}^2 \frac{2k+1}{2k+3} g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) f_{j+1,m}^{(45)k+1,l}(c_2) + \right. \\ & \left. + z_{12} g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) f_{j+1,m}^{(45)k,l}(c_2) - c_1 q_{10}^2 g_{n+1,m}^{+(54)j-1}(c_1) f_{j,m}^{(45)k,l}(c_2) \right]. \end{aligned} \quad (1.51)$$

При $\xi_1, \xi_{10} \in (0; \gamma_1)$ справедливы разложения

$$U_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{-(55)k,l} U_{s,k,l}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1), \quad s = 1, 3; \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} U_{2,n,m}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} & \left[f_{n,m}^{-(55)k,l} U_{2,k,l}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) + \right. \\ & \left. + \tilde{f}_{n,m}^{-(55)k,l} U_{1,k,l}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) \right], \end{aligned} \quad (1.53)$$

где

$$f_{n,m}^{-(55)k,l} = \sum_{j=k}^{\infty} f_{n,m}^{(54)j,l}(c_2) g_{j,l}^{-(45)k}(c_1), \quad (1.54)$$

$$f_{n,m}^{(54)j,l}(c_2) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l+m} \sqrt{\pi} \left(\frac{c_2}{2} \right)^{p+1} \frac{\varepsilon_{pn} u_{p+j,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma \left(\frac{p-n}{2} + 1 \right) \Gamma \left(\frac{p+n}{2} + \frac{3}{2} \right)} \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n,m}^{-(55)k,l} = \sum_{j=k}^{\infty} & \left[c_2 q_{20}^2 f_{n+1,m}^{(54)j+1,l}(c_2) g_{j,l}^{-(45)k}(c_1) + \right. \\ & \left. + z_{12} f_{n,m}^{(54)j+1,l}(c_2) g_{j,l}^{-(45)k}(c_1) - c_1 q_{10}^2 \frac{2k+1}{2k+3} f_{n,m}^{(54)j,l}(c_2) g_{j-1,l}^{-(45)k+1}(c_1) \right], \end{aligned} \quad (1.56)$$

$g_{j,l}^{-(45)k}(c_1)$ описано формулой (1.25).

Доказательство. Теорему сложения (1.22) можно записать в виде

$$u_{n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{+(55)k,l} u_{k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2). \quad (1.57)$$

Используя формулу (1.57) преобразуем выражение

$$\begin{aligned} u_{n-1,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) - u_{n+1,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f_{n-1,m}^{+(55)k,l} - f_{n+1,m}^{+(55)k,l} \right] u_{k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Заметим, что переходные коэффициенты теоремы сложения (1.57) подчиняются следующему рекуррентному соотношению

$$f_{n-1,m}^{+(55)k,l} - f_{n+1,m}^{+(55)k,l} = \frac{2n+1}{c_1} \frac{c_2}{2} \left[\frac{f_{n,m}^{+(55)k+1,l}}{k + \frac{3}{2}} - \frac{f_{n,m}^{+(55)k-1,l}}{k - \frac{1}{2}} \right]. \quad (1.59)$$

Действительно, нетрудно проверить, что

$$g_{n-1,m}^{+(54)j}(c_1) - g_{n+1,m}^{+(54)j}(c_1) = \frac{2n+1}{c_1} g_{n,m}^{+(54)j+1}(c_1). \quad (1.60)$$

Преобразуем разность

$$\begin{aligned} \frac{f_{n,m}^{+(55)k+1,l}(c_2)}{k + \frac{3}{2}} - \frac{f_{n,m}^{+(55)k-1,l}(c_2)}{k - \frac{1}{2}} &= \sum_{p=k+1}^{\infty} (-1)^{p+l} \sqrt{\pi} \left(\frac{c_2}{2} \right)^p \times \\ &\times \frac{\varepsilon_{p,k+1} u_{j+p,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{k}{2} + 2\right)} - \sum_{p=k-1}^{\infty} (-1)^{p+l} \sqrt{\pi} \left(\frac{c_2}{2} \right)^p \times \\ &\times \frac{\varepsilon_{p,k-1} u_{j+p,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{k}{2} + 2\right)} = \sum_{p=k-1}^{\infty} (-1)^{p+l} \sqrt{\pi} \left(\frac{c_2}{2} \right)^p \times \\ &\times \frac{\varepsilon_{p,k-1} u_{j+p,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{k}{2} + 2\right)} \left(-k - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.61)$$

После изменения индекса суммирования p на $p-1$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{f_{n,m}^{+(55)k+1,l}(c_2)}{k + \frac{3}{2}} - \frac{f_{n,m}^{+(55)k-1,l}(c_2)}{k - \frac{1}{2}} &= \frac{2}{c_2} \sum_{p=k}^{\infty} (-1)^{p+l} \sqrt{\pi} \left(\frac{c_2}{2} \right)^p \times \\ &\times \frac{\varepsilon_{pk} u_{j+p-1,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{k}{2} + \frac{3}{2}\right)} \left(k + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{c_2} f_{j-1,m}^{(45)k,l}(c_2). \end{aligned} \quad (1.62)$$

Теперь преобразуем разность, стоящую в левой части равенства (1.59).

$$\begin{aligned}
f_{n-1,m}^{+(55)k,l} - f_{n+1,m}^{+(55)k,l} &= \sum_{j=n-1}^{\infty} g_{n-1,m}^{+(54)j}(c_1) f_{j,m}^{(45)k,l}(c_2) - \\
&- \sum_{j=n+1}^{\infty} g_{n+1,m}^{+(54)j}(c_1) f_{j,m}^{(45)k,l}(c_2) = \sum_{j=n-1}^{\infty} \left[g_{n-1,m}^{+(54)j}(c_1) - \right. \\
&\quad \left. - g_{n+1,m}^{+(54)j}(c_1) \right] f_{j,m}^{(45)k,l}(c_2). \quad (1.63)
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой (1.60), после чего изменим индекс суммирования j в сумме (1.63) на $j - 1$. В результате получаем

$$\begin{aligned}
f_{n-1,m}^{+(55)k,l} - f_{n+1,m}^{+(55)k,l} &= \sum_{j=n-1}^{\infty} \frac{2n+1}{c_1} g_{n,m}^{+(54)j+1}(c_1) f_{j,m}^{(45)k,l}(c_2) = \\
&= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{2n+1}{c_1} g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) f_{j-1,m}^{(45)k,l}(c_2).
\end{aligned}$$

Преобразуя последнее выражение с использованием формулы (1.62), окончательно получаем равенство (1.59). Теперь подставим (1.59) в (1.58)

$$\begin{aligned}
u_{n-1}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) - u_{n+1,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) &= \frac{2n+1}{c_1} \frac{c_2}{2} \times \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\frac{f_{n,m}^{+(55)k+1,l}}{k + \frac{3}{2}} - \frac{f_{n,m}^{+(55)k-1,l}}{k - \frac{1}{2}} \right] u_{k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) = \\
&= \frac{2n+1}{c_1} \frac{c_2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{f_{n,m}^{+(55)k+1,l}}{k + \frac{3}{2}} u_{k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) - \frac{2n+1}{c_1} \frac{c_2}{2} \times \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{f_{n,m}^{+(55)k-1,l}}{k - \frac{1}{2}} u_{k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2). \quad (1.64)
\end{aligned}$$

Применим к обеим частям равенства (1.64) дифференциальный оператор D_s . После изменения индекса суммирования в первом выражении k на $k + 1$, а во втором — k на $k - 1$, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{c_1}{2n+1} D_s \left[u_{n-1,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) - u_{n+1,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) \right] &= \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{+(55)k,l} \frac{c_2}{2k+1} D_s \left[u_{k-1,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) - u_{k+1,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) \right],
\end{aligned}$$

что доказывает формулу (1.46).

Теперь докажем формулу (1.47). Для этого применим дифференциальный оператор (1.40) к формуле (1.57)

$$\begin{aligned}
U_{2,n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{+(55)k,l} [z_1 \nabla - \chi e_z] u_{k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) - \\
&- c_1 q_{10}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n+1,m}^{+(55)k,l} \nabla u_{k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{+(55)k,l} \left\{ [z_2 \nabla - \chi e_z] u_{k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) - \right. \\
&\quad \left. - c_2 q_{20}^2 \nabla u_{k-1,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) \right\} + \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{+(55)k,l} \left[z_{12} \nabla u_{k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) + c_2 q_{20}^2 \nabla u_{k-1,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) \right] - \\
&- c_1 q_{10}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n+1,m}^{+(55)k,l} \nabla u_{k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2). \quad (1.65)
\end{aligned}$$

Преобразуем коэффициенты при помощи рекуррентного соотношения (1.62)

$$f_{n,m}^{+(55)k,l} = \sum_{j=n}^{\infty} g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) \frac{c_2}{2} \left[\frac{f_{j+1,m}^{(45)k+1,l}(c_2)}{k + \frac{3}{2}} - \frac{f_{j+1,m}^{(45)k-1,l}(c_2)}{k - \frac{1}{2}} \right]. \quad (1.66)$$

С учетом последней формулы получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{+(55)k,l} z_{12} \nabla u_{k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) \frac{c_2}{2} \times \\
&\times \left[\frac{f_{j+1,m}^{(45)k+1,l}(c_2)}{k + \frac{3}{2}} - \frac{f_{j+1,m}^{(45)k-1,l}(c_2)}{k - \frac{1}{2}} \right] \nabla u_{k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) f_{j+1,m}^{(45)k,l}(c_2) \frac{c_2}{2k+1} \nabla u_{k-1,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) - \\
&- \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) f_{j+1,m}^{(45)k,l}(c_2) \frac{c_2}{2k+1} \nabla u_{k+1,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2). \quad (1.67)
\end{aligned}$$

Аналогично могут быть преобразованы остальные слагаемые в (1.65). Таким образом, доказано разложение (1.47). Подобным образом доказываются разложения (1.52), (1.53). При этом используются рекуррентные соотношения

$$f_{n-1,m}^{(54)j,l}(c_2) - f_{n+1,m}^{(54)j,l}(c_2) = -\frac{2n+1}{c_2} f_{n,m}^{(54)j-1,l}(c_2), \quad (1.68)$$

$$\frac{g_{j,l}^{-(45)k-1}(c_1)}{k - \frac{1}{2}} - \frac{g_{j,l}^{-(45)k+1}(c_1)}{k + \frac{3}{2}} = \frac{2}{c_1} g_{j+1,l}^{-(45)k}(c_1), \quad (1.69)$$

$$f_{n-1,m}^{-(55)k,l} - f_{n+1,m}^{-(55)k,l} = -\frac{2n+1}{c_2} \frac{c_1}{2} \left[\frac{f_{n,m}^{-(55)k-1,l}}{k - \frac{1}{2}} - \frac{f_{n,m}^{-(55)k+1,l}}{k + \frac{3}{2}} \right]. \quad (1.70)$$

Теперь рассмотрим частные решения уравнения Ламе для сжатого сферо-ида $\Omega_6^\pm \left\{ (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) : \tilde{\xi} \geq \tilde{\xi}_0 \right\}$:

$$\begin{aligned} U_{s,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) &= \\ &= \frac{-i\tilde{c}}{2n+1} D_s \left[u_{n-1,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) - u_{n+1,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \right]; \quad s = 1, 3; \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$U_{2,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = D_2 u_{n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) - i\tilde{c} \text{sh}^2 \tilde{\xi}_0 D_1 u_{n\pm 1,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi), \quad (1.72)$$

где $n = 0, 1, \dots; |m| \leq n+1; m, n \in \mathbb{Z}$, $u_{n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi)$, D_s определены в (1.7), (1.41).

Приведем координатную форму перемещений (1.71), (1.72)

$$\begin{aligned} U_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) &= u_{n,m-1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) e_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) e_1 - \\ &\quad - u_{n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) e_0; \end{aligned} \quad (1.73)$$

$$\begin{aligned} U_{2,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) &= \bar{i}q u_{1,n,m-1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) e_{-1} - \bar{i}q u_{1,n,m+1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) e_1 - \\ &\quad - \left[\bar{i}q u_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) + \chi u_{n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \right] e_0 + \\ &\quad + i\tilde{c} (\tilde{q}^2 - \tilde{q}_0^2) \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi); \end{aligned} \quad (1.74)$$

$$U_{3,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = -u_{n,m-1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) e_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) e_1; \quad (1.75)$$

$$\bar{i}q = \text{sh} \tilde{\xi}, \bar{i}q_0 = \text{sh} \tilde{\xi}_0,$$

$$u_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = \tilde{u}_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}) P_n^m(\cos \tilde{\eta}) e^{im\varphi}, \quad (1.76)$$

$$\tilde{u}_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}) = \left\{ \begin{array}{l} (n+m+1) Q_{n+1}^{-m}(\bar{i}q) \\ -(n-m) P_{n-1}^{-m}(\bar{i}q) \end{array} \right\}. \quad (1.77)$$

В работе [21] установлена базисность решений (1.71), (1.72) в областях Ω_6^\pm .

Теорема 1.6. При $\tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_{20} \in [0; \tilde{\gamma}_2)$ справедливы разложения

$$U_{s,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{+(66)k,l} U_{s,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2), \quad s = 1, 3; \quad (1.78)$$

$$U_{2,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f_{n,m}^{+(66)k,l} U_{2,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{n,m}^{+(66)k,l} U_{1,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) \right], \quad (1.79)$$

где

$$f_{n,m}^{+(66)k,l} = \sum_{j=n}^{\infty} g_{n,m}^{+(64)j}(\tilde{c}_1) f_{j,m}^{(46)k,l}(\tilde{c}_2), \quad (1.80)$$

$$g_{n,m}^{+(64)j}(\tilde{c}_1) = (-1)^m \sqrt{\pi} (-i)^{j+1} \left(\frac{\tilde{c}_1}{2} \right)^{j+1} \frac{\varepsilon_{jn}}{\Gamma\left(\frac{j-n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{j+n}{2} + \frac{3}{2}\right)}, \quad (1.81)$$

$$f_{j,m}^{(46)k,l}(\tilde{c}_2) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l} \sqrt{\pi} (-i)^p \left(\frac{\tilde{c}_2}{2} \right)^p \frac{\varepsilon_{pk} \left(k + \frac{1}{2}\right) u_{j+p,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p-k}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + \frac{3}{2}\right)} \quad (1.82)$$

$$\tilde{f}_{n,m}^{+(66)k,l} = \sum_{j=n}^{\infty} \left[i \tilde{c}_2 \tilde{q}_{20}^2 \frac{2k+1}{2k+3} g_{n,m}^{+(64)j} f_{j+1,m}^{(46)k+1,l} + z_{12} g_{n,m}^{+(64)j} f_{j+1,m}^{(46)k,l} - \right. \\ \left. + i \tilde{c}_1 \tilde{q}_{10}^2 g_{n+1,m}^{+(64)j-1} f_{j,m}^{(46)k,l} \right], \quad (1.83)$$

$$\tilde{q}_{j0} = \text{sh} \tilde{\xi}_{j0}.$$

При $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_{10} \in [0; \tilde{\gamma}_1)$ справедливы разложения

$$U_{s,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{-(66)k,l} U_{s,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1), \quad s = 1, 3; \quad (1.84)$$

$$U_{2,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f_{n,m}^{-(66)k,l} U_{2,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{n,m}^{-(66)k,l} U_{1,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) \right], \quad (1.85)$$

где

$$f_{n,m}^{-(66)k,l} = \sum_{j=k}^{\infty} f_{n,m}^{(64)j,l}(\tilde{c}_2) g_{j,l}^{-(46)k}(\tilde{c}_1), \quad (1.86)$$

$$f_{n,m}^{(64)j,l}(\tilde{c}_2) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l+m} \sqrt{\pi} (-i)^{p+1} \left(\frac{\tilde{c}_2}{2} \right)^{p+1} \frac{\varepsilon_{pn} u_{p+j,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p-n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p+n}{2} + \frac{3}{2}\right)} \quad (1.87)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n,m}^{-(66)k,l} = \sum_{j=k}^{\infty} & \left[i\tilde{c}_2 \tilde{q}_{20}^2 f_{n+1,m}^{(64)j+1,l}(\tilde{c}_2) g_{j,l}^{-(46)k}(\tilde{c}_1) + z_{12} f_{n,m}^{(64)j+1,l}(\tilde{c}_2) g_{j,l}^{-(46)k}(\tilde{c}_1) - \right. \\ & \left. i\tilde{c}_1 \tilde{q}_{10}^2 \frac{2k+1}{2k+3} f_{n,m}^{(64)j,l}(\tilde{c}_2) g_{j-1,l}^{-(46)k+1}(\tilde{c}_1) \right], \quad (1.88) \end{aligned}$$

$g_{j,l}^{-(46)k}$ описано формулой (1.36).

1.3. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в сферических координатах

В работе [26] были введены следующие частные решения уравнения Ламе (1.38) во внешности (внутренности) шара $\Omega_4^{\pm} = \{(r, \theta, \varphi) : r \gtrless r_0\}$:

$$U_{s,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = D_s u_{n \mp 1, m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi); \quad s = 1, 3; \quad (1.89)$$

$$U_{2,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = D_2 u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) - \frac{r_0^2}{2(n \pm 1) + 1} D_1 u_{n \pm 1, m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi), \quad (1.90)$$

где $n = 0, 1, \dots; |m| \leq n + 1; m, n \in \mathbb{Z}$, $u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi)$, D_s определены формулами (1.5), (1.41).

Приведем координатную форму перемещений (1.89), (1.90)

$$\begin{aligned} U_{1,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = & -u_{n,m-1}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) e_{-1} + u_{n,m+1}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) e_1 \mp \\ & \mp u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) e_0; \quad (1.91) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{2,n,m}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) = & \frac{1}{2n+3} \left\{ -(n-m+2)(n+m) u_{n,m-1}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) e_{-1} + \right. \\ & + (n-m)(n+m+2) u_{n,m+1}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) e_1 - \\ & - [(n-m+1)(n+m+1) + \chi(2n+3)] \times \\ & \left. \times u_{n,m}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) e_0 + (r^2 - r_0^2) \nabla u_{n+1,m}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) \right\}; \quad (1.92) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{2,n,m}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2n-1} \left\{ -(n-m+1)(n+m-1)u_{n,m-1}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) e_{-1} + \right. \\ \left. + (n-m-1)(n+m+1)u_{n,m+1}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) e_1 + [(n-m)(n+m) - \chi(2n-1)] \times \right. \\ \left. \times u_{n,m}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) e_0 + (r^2 - r_0^2) \nabla u_{n-1,m}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) \right\}; \quad (1.93) \end{aligned}$$

$$U_{3,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = -u_{n,m-1}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) e_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) e_1 \quad (1.94)$$

В работе [21] доказана базисность решений (1.89), (1.90) в областях Ω_4^{\pm} .

Теорема 1.7. При $r_2, r_{20} < r_{12}$ справедливы разложения

$$U_{s,n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+l+1} f_{n,m}^{(44)k,l} U_{s,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2); \quad s = 1, 3; \quad (1.95)$$

$$\begin{aligned} U_{2,n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+l} \left[f_{n,m}^{(44)k,l} U_{2,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{n,m}^{+(44)k,l} U_{1,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) \right], \quad (1.96) \end{aligned}$$

где

$$f_{n,m}^{(44)k,l} = u_{n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}), \quad (1.97)$$

$$\tilde{f}_{n,m}^{+(44)k,l} = \frac{r_{20}^2}{2k+3} f_{n,m}^{(44)k+2,l} - z_{12} f_{n,m}^{(44)k+1,l} + \frac{r_{10}^2}{2n+3} f_{n+1,m}^{(44)k+1,l}. \quad (1.98)$$

При $r_1, r_{10} < r_{12}$ справедливы разложения

$$U_{s,n,m}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+l+1} f_{n,m}^{(44)k,l} U_{s,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1); \quad s = 1, 3; \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned} U_{2,n,m}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+l} \left[f_{n,m}^{(44)k,l} U_{2,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{n,m}^{-(44)k,l} U_{1,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) \right], \quad (1.100) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{f}_{n,m}^{-(44)k,l} = \frac{r_{10}^2}{2k+3} f_{n,m}^{(44)k+2,l} - z_{12} f_{n,m}^{(44)k+1,l} + \frac{r_{20}^2}{2n+3} f_{n+1,m}^{(44)k+1,l}. \quad (1.101)$$

Доказательство. Разложения (1.95) и (1.99) получаются непосредственным применением дифференциального оператора к теоремам сложения гармонических функций (1.15), (?). В случае формулы (1.96) из теоремы сложения (1.15) получаем

$$\begin{aligned}
U_{2,n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) &= [z_1 \nabla - \chi e_z] u_{n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) - \\
&\quad - \frac{r_{10}^2}{2n+3} \nabla u_{n+1,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+l} \left\{ f_{n,m}^{(44)k,l} \times \right. \\
&\quad \times [z_1 \nabla - \chi e_z] u_{k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) - \frac{r_{10}^2}{2n+3} f_{n+1,m}^{(44)k,l} \nabla u_{k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) \Big\} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+l} \left\{ f_{n,m}^{(44)k,l} \left[(z_2 \nabla - \chi e_z) u_{k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) - \frac{r_{20}^2}{2k-1} \times \right. \right. \\
&\quad \times \nabla u_{k-1,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) \Big] + z_{12} f_{n,m}^{(44)k,l} \nabla u_{k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) + \\
&\quad + \frac{r_{20}^2}{2k-1} \nabla u_{k-1,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) - \frac{r_{10}^2}{2n+3} f_{n+1,m}^{(44)k,l} \nabla u_{k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) \Big\} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+l} \left\{ f_{n,m}^{(44)k,l} U_{2,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) + \right. \\
&\quad + z_{12} f_{n,m}^{(44)k,l} U_{1,k-1,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) + \frac{r_{20}^2}{2k-1} f_{n,m}^{(44)k,l} U_{1,k-2,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) - \\
&\quad \left. - \frac{r_{10}^2}{2n+3} f_{n+1,m}^{(44)k,l} U_{1,k-1,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) \right\}. \quad (1.102)
\end{aligned}$$

Разбивая выражение (1.102) на четыре отдельные суммы и сдвигая индекс суммирования \mathbf{k} в трех последних из них, получаем разложение (1.95).

Формула (1.100) может быть доказана аналогично.

1.4. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в цилиндрических координатах

В работе [24] были введены следующие частные решения уравнения Ламе (1.38) во внешности (внутренности) цилиндра $\Omega_3^{\pm} = \{(\rho, z, \varphi) : \rho \gtrless \rho_0\}$:

$$U_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \lambda^{-1} D_s u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi); \quad s = 1, 3; \quad (1.103)$$

$$U_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \lambda^{-1} B_2 u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi), \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad m \in \mathbb{Z}; \quad (1.104)$$

где

$$\mathbf{B}_2 = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla - \chi [\mathbf{e}_z \times [\nabla \times \mathbf{e}_z]], \quad (1.105)$$

функции $u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi)$ определены в (1.4).

Приведем координатную форму перемещений (1.103), (1.104)

$$\begin{aligned} U_{1,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \mp u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_1 + \\ + i u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_0, \end{aligned} \quad (1.106)$$

$$\begin{aligned} U_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \mp (D - \chi) \left[u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_{-1} + u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_1 \right] + \\ + i D u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_0, \end{aligned} \quad (1.107)$$

$$U_{3,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \pm u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_1, \quad (1.108)$$

где $D = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$.

Теорема 1.8. При $\rho_2, \rho_{20} \in (0; \rho_{12})$ справедливы разложения

$$U_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l f_{\lambda,m}^{+(33)l} U_{s,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2), \quad (1.109)$$

$$\begin{aligned} U_{2,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \left[f_{\lambda,m}^{+(33)l} U_{2,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{\lambda,m}^{+(33)l} U_{1,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) \right], \end{aligned} \quad (1.110)$$

где

$$f_{\lambda,m}^{\pm(33)l} = u_{\lambda,m-l}^{\pm(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}), \quad (1.111)$$

$$\tilde{f}_{\lambda,m}^{\pm(33)l} = \rho_{12} \frac{\partial}{\partial \rho_{12}} u_{\lambda,m-l}^{\pm(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}). \quad (1.112)$$

При $\rho_1, \rho_{10} \in (0; \rho_{12})$ справедливы разложения

$$U_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^m f_{\lambda,m}^{-(33)l} U_{s,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1), \quad (1.113)$$

$$U_{2,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^m \left[f_{\lambda,m}^{-(33)l} U_{2,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{\lambda,m}^{-(33)l} U_{1,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) \right]. \quad (1.114)$$

Доказательство. Формулы (1.109), (1.113) доказываются непосредственным применением дифференциального оператора \mathbf{D}_s к теоремам сложения гармонических функций (1.8), (1.9). Докажем разложение (1.110). Для этого заметим, что операции дифференцирования по ρ в сдвинутых системах координат связаны равенством

$$\rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} = \rho_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2} + \frac{\rho_{12}}{2} \left[e^{i(\varphi_2 - \varphi_{12})} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_2} + \frac{i}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) + \right. \\ \left. + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_{12})} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_2} - \frac{i}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) \right]. \quad (1.115)$$

Дифференциальный оператор \mathbf{B}_2 , заданный в (1.105) можно представить в следующем виде

$$\mathbf{B}_2 = \nabla \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) - (\chi + 1) \left(\nabla - e_z \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (1.116)$$

Применим этот оператор к обеим частям теоремы сложения (1.8)

$$U_{2,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}) \lambda^{-1} \mathbf{B}_2 u_{\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2). \quad (1.117)$$

Преобразуем выражение

$$\nabla \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \right) u_{\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2),$$

учитывая что

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} = \rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1}$$

и применяя формулу (1.115)

$$\nabla \rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} u_{\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) = \nabla \rho_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2} u_{\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) + \nabla \frac{\rho_{12}}{2} \left[e^{i(\varphi_2 - \varphi_{12})} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial}{\partial \rho_2} + \frac{i}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_{12})} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_2} - \frac{i}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) \right] u_{\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2). \quad (1.118)$$

Далее используем легко проверяемые соотношения

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho_2} \pm \frac{i}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) u_{\lambda, l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) = \lambda e^{\mp i \varphi_2} u_{\lambda, l \pm 1}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2). \quad (1.119)$$

Подставим (1.119), (1.118) в (1.117)

$$\begin{aligned} U_{2, \lambda, m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l u_{\lambda, m-l}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}) \times \\ &\times \left\{ \lambda^{-1} \left[\nabla \left(\rho_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) - (\chi + 1) \left(\nabla - e_z \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right] u_{\lambda, l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) + \right. \\ &+ \nabla \frac{\rho_{12}}{2} \left[e^{-i \varphi_{12}} u_{\lambda, l+1}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) + e^{i \varphi_{12}} u_{\lambda, l-1}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) \right] \Big\} = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l u_{\lambda, m-l}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}) \left\{ U_{2, \lambda, l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) + \right. \\ &+ \lambda \frac{\rho_{12}}{2} \left[e^{-i \varphi_{12}} U_{1, \lambda, l+1}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) + e^{i \varphi_{12}} U_{1, \lambda, l-1}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) \right] \Big\}. \end{aligned}$$

После разбиения полученного выражения на три суммы и сдвиге индекса суммирования l в двух последних, получаем

$$\begin{aligned} U_{2, \lambda, m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l u_{\lambda, m-l}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}) U_{2, \lambda, l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) - \\ &- \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \lambda \frac{\rho_{12}}{2} \left[e^{-i \varphi_{12}} u_{\lambda, m-l+1}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}) + \right. \\ &+ e^{i \varphi_{12}} u_{\lambda, m-l-1}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}) \Big] \times U_{1, \lambda, l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2). \quad (1.120) \end{aligned}$$

Теперь заметим, что в силу рекуррентных соотношений для функции Макдональда можно записать

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\rho_{12}}{2} \left[e^{-i \varphi_{12}} u_{\lambda, m-l+1}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}) + e^{i \varphi_{12}} u_{\lambda, m-l-1}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}) \right] = \\ = -\rho_{12} \frac{\partial}{\partial \rho_{12}} u_{\lambda, m-l}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}). \quad (1.121) \end{aligned}$$

Подстановка (1.121) в (1.120) окончательно доказывает разложение (1.109).

Глава 2

Модели НДС упругого пространства с двумя цилиндрическими неоднородностями

2.1. Упругое состояние пространства с двумя цилиндрическими полостями

Рассмотрим двусное растяжение на бесконечности упругого пространства с двумя параллельными цилиндрическими полостями. Радиусы полостей считаем равными R_1 и R_2 .

Введем цилиндрические системы координат (ρ_1, z_1, φ_1) и (ρ_2, z_2, φ_2) , оси $O_i z_i$ которых совпадают с осями цилиндров. Можем считать, что начала O_i систем координат расположены в одной горизонтальной плоскости.

Координаты в введенных системах координат связаны соотношениями (1.1), (1.2), в которых $z_{12} = 0$.

Считаем, что цилиндрические полости свободны от нагрузки.

Для определения НДС в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе (1.38) с граничными условиями

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_1} = \mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_2} = 0 \quad (2.1)$$

и условием на бесконечности, которое соответствует двусному равномерному растяжению упругого пространства

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\rho=\infty} = T\mathbf{e}_\rho \quad (2.2)$$

где \mathbf{U} — вектор перемещений, $\mathbf{F}\mathbf{U}$ — отвечающий \mathbf{U} вектор усилий на соответствующей граничной поверхности, границы цилиндров Γ_i задаются уравнениями $\rho_i = R_i$ ($i = 1, 2$).

Решение задачи будем искать в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0, \quad (2.3)$$

где

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^2 \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, z_j, \varphi_j) d\lambda, \quad (2.4)$$

Глава 3

Модели НДС упругого пространства с несколькими цилиндрическими неоднородностями

3.1. Упругое состояние пространства с несколькими цилиндрическими полостями

Рассмотрим цилиндрический образец с несколькими параллельными цилиндрическими полостями. Радиусы полостей считаем равными R_j .

Введем цилиндрические системы координат (ρ_j, z_j, φ_j) , оси $O_j z_j$ которых совпадают с осями цилиндров. Можем считать, что начала O_j систем координат расположены в одной горизонтальной плоскости. Координаты в введенных системах координат связаны соотношениями $(??)$, в которых $z_{12} = 0$.

Считаем, что цилиндрические полости свободны от нагрузки. Для определения НДС в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе $(??)$ с граничными условиями

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

и кусочно-постоянными напряжениями на цилиндрическом образце

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_0} = T\mathbf{e}_\rho, \quad (3.2)$$

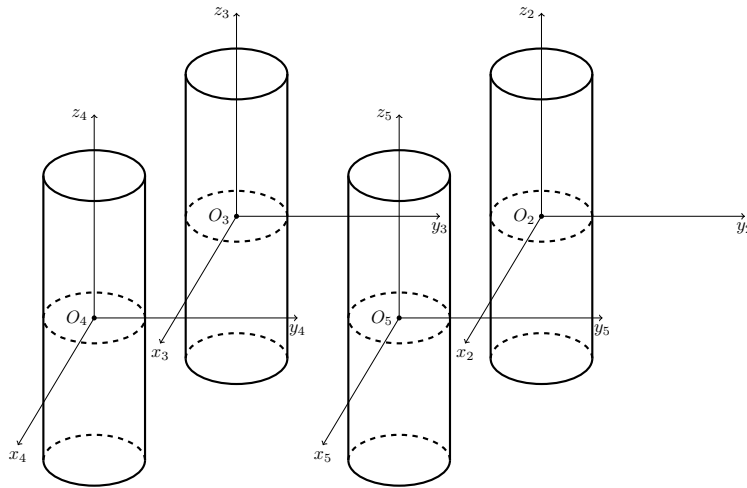


Рис. 3.1. Схематическое представление задачи

где \mathbf{U} — вектор перемещений, $\mathbf{F}\mathbf{U}$ — отвечающий \mathbf{U} вектор усилий на соответствующей граничной поверхности, границы цилиндров Γ_j задаются уравнениями $\rho_j = \mathbf{R}_j$ ($j = \overline{1, N}$).

Решение задачи будем искать в виде

$$\mathbf{U}^+ + \mathbf{U}^-, \quad (3.3)$$

где

$$\mathbf{U}^+ = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, z_j, \varphi_j) d\lambda, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{U}^- = \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) d\lambda, \quad (3.5)$$

$A_{s,m}^{(j)}(\lambda)$ — неизвестные функции, $\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi)$ — определены в (??).