

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”

На правах рукописи

УДК 539.3

Танчик Евгений Андреевич

**Пространственные задачи теории
упругости для некоторых классов
неосесимметричных многосвязных тел**

01.02.04 — Механика деформированного твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Николаев Алексей Георгиевич

Харьков — 2015

Оглавление

Введение	5
1. Математический аппарат обобщенного метода Фурье	17
1.1. Теоремы сложения базисных гармонических функций в цилиндрических, сферических, вытянутых и сжатых сфероидальных системах координат со сдвинутыми началами	17
1.2. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в сфероидальных координатах	20
1.3. Теоремы сложения решений уравнения Ламе в сфероидальных координатах для модифицированного базиса	25
1.4. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в сферических координатах	37
1.5. Теоремы сложения решений уравнения Ламе для модифицированного базиса в сферических координатах	39
1.6. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в цилиндрических координатах	46
2. Механика упругого деформирования волокнистых пористых и композиционных материалов	48
2.1. Структура среды с линейными неоднородностями	48
2.2. Упругое состояние пористого материала с линейной регулярной структурой	49
2.3. Анализ разрешающей системы	56
2.4. Анализ напряженного состояния пористого материала	59
2.4.1. Тетрагональная структура расположения полостей в цилиндрическом образце	62
2.4.2. Тетрагональная объемно центрированная структура расположения полостей в цилиндрическом образце	65

2.4.3. Гексагональная структура расположения полостей в цилиндрическом образце	66
2.4.4. Гексагональная центрированная структура расположения полостей в цилиндрическом образце	72
2.5. Упругое состояние композита с линейной регулярной структурой .	75
2.6. Анализ численных результатов моделирования напряженно-деформированного состояния волокнистого композита	80
2.6.1. Цилиндрический образец волокнистого композита с тетрагональной структурой	80
2.6.2. Сравнение различных структур для волокнистого композита с низкомодульными волокнами	87
2.6.3. Цилиндрический образец волокнистого композита с тетрагональной объемно центрированной структурой	88
2.6.4. Цилиндрический образец волокнистого композита с гексагональной структурой	93
2.6.5. Цилиндрический образец волокнистого композита с гексагональной объемно центрированной структурой	98
3. Механика упругого деформирования зернистых композитов со сферическими зернами	103
3.1. Структура среды с зернистыми неоднородностями	103
3.2. Упругое состояние пространства с несколькими сферическими полостями	105
3.3. Анализ разрешающей системы	111
3.4. Анализ напряженного состояния пористого материала со сферическими полостями	113
3.4.1. Тетрагональная структура расположения сферических полостей в материале	113
3.4.2. Тетрагональная центрированная структура расположения сферических полостей в материале	117
3.4.3. Гексагональная центрированная структура расположения сферических полостей в материале	120

3.5. Упругое состояние пространства с несколькими сферическими включениями	124
3.6. Анализ напряженного состояния композита со сферическими включениями	127
3.6.1. Тетрагональная структура расположения сферических включений в композите	127
3.6.2. Тетрагональная гранецентрированная структура расположения сферических включений в композите	129
3.6.3. Тетрагональная центрированная структура расположения сферических включений в композите	133
3.6.4. Гексагональная центрированная структура расположения сферических включений в композите	136
4. Механика упругого деформирования зернистых композитов с вытянутыми сфероидальными зернами	141
4.1. Упругое состояние пространства с несколькими вытянутыми сфероидальными полостями	141
4.2. Анализ разрешающей системы	147
4.3. Анализ напряженного состояния пористого материала с вытянутыми сфероидальными полостями	149
4.3.1. Тетрагональная структура расположения сфероидальных полостей в материале	149
4.3.2. Тетрагональная центрированная структура расположения сфероидальных полостей в материале	157
4.3.3. Гексагональная центрированная структура расположения сфероидальных полостей в материале	159
4.4. Упругое состояние пространства с несколькими вытянутыми сфероидальными включениями	165
4.5. Анализ напряженного состояния зернистого композита с вытянутыми сфероидальными включениями	167
4.5.1. Тетрагональная структура расположения сфероидальных включений в композите	167

4.5.2. Тетрагональная центрированная структура расположения сфероидальных включений в композите	172
4.5.3. Гексагональная центрированная структура расположения сфероидальных включений в композите	173
Выводы	178
Список литературы	180

Введение

Актуальность темы. Современный уровень развития техники и технологии в высокотехнологических областях накладывает повышенные требования на точность и эффективность моделей материалов, которые широко используются в авиации и ракетостроении. Одной из наиболее важных характеристик материалов, которые здесь применяются, является такая комплексная характеристика, как малая удельная масса и одновременно высокая прочность материала. Такой характеристикой обладают материалы типа композитов, в которых присутствуют конструктивно заложенные неоднородности. При современном уровне моделирования появляется возможность конструирования материалов с заранее заданными свойствами вначале на уровне модели, определяя оптимальную структуру, геометрические размеры и механические характеристики неоднородностей. И только после этого полученные в результате моделирования данные можно воплощать в реальном материале.

По самому названию композиционный материал — это составной материал, обладающий гетерогенной структурой. Разнородные компоненты композита имеют различные физико-механические свойства. Особое сочетание этих свойств и геометрии неоднородностей приводит к качественно новым характеристикам композита, отличным от характеристик составляющих его фаз. Двухфазный композит — это однородный материал, армированный волокнами или зернами из другого материала. В зависимости от технологии изготовления армирующие элементы тем или иным способом пропитываются связующим веществом (матрицей), которое после застывания обеспечивает сплошность композиционной среды и идеальный механический и тепловой контакт между разнородными фазами. В качестве армирующих элементов обычно применяют материалы с кристаллической или аморфной микроструктурой, такие, как полимеры, стекла, металлы и др. К материалам заполнителя относятся полимеры, металлы, керамика. Свойства композита существенно зависят от физико-механических характеристик арматуры и матрицы, геометрии арматуры, структуры армирующих элементов, характера их упаковки, объемного со-

держания элементов, углов армирования и др. Укажем на те основные физико-механические характеристики композиционного материала, которые приводятся в нормативных документах и должны контролироваться в процессе его изготовления. Это модули упругости и пределы прочности на растяжение, сжатие и поперечный сдвиг, коэффициенты Пуассона и линейного температурного расширения вдоль и поперек волокон, удельная теплоемкость и др.

В настоящей работе будут рассмотрены композиционные и пористые материалы, обладающие регулярной структурой. Под регулярной структурой понимается периодическое расположение слоев, зерен или волокон в материале. Считается, что физико-механические характеристики включений одинаковые, но отличаются от характеристик матрицы. Далее будут рассмотрены только упругие модели деформирования этих материалов.

До настоящего времени многие важные задачи механики композиционных материалов остаются неизученными или недостаточно изученными. К ним относятся задачи определения напряженно-деформированного состояния образца из пористого и композиционного материалов в зависимости от приложенной внешней нагрузки, задачи выявления зон концентрации упругих напряжений как областей, в первую очередь подверженных разрушению, задачи анализа напряжений и деформаций в композиционном материале с отслоившимися включениями, задачи с межфазными и внутрифазными трещинами и др. Актуальной остается задача теоретического определения эффективных упругих модулей композиционных и пористых материалов. Все эти задачи в общей постановке относятся к классу весьма сложных задач механики деформированного твердого тела с многосвязной неоднородной структурой. До последнего времени эффективных методов решения подобных задач не существовало.

Связь работы с научными программами. Исследования по теме диссертации проводились в рамках госбюджетной научной темы “Новые методы исследования линейно и нелинейно деформируемых тел из композиционных материалов”, номер государственной регистрации № 0112U002135.

Цель и задачи исследования. Целью исследования является развитие обобщенного метода Фурье на решение неосесимметричных многосвязных задач теории упругости с большим числом компонент связности для канониче-

ских тел, ограниченных поверхностями цилиндра, сферы, вытянутого и сжатого сфероидов.

Объектом исследования являются изотропные упругие тела под действием одноосного и двуосного растяжения.

Предметом исследования является неосесимметричное напряженное состояние многосвязных или гетерогенных тел.

Методы исследования. Для достижения поставленной цели в работе развит обобщенный метод Фурье, получены теоремы сложения (переразложения) для модифицированных базисных частных решений уравнения Ламе для сферы, вытянутого и сжатого сфероидов. Данные теоремы позволяют представить общее решение задачи в системе координат, связанной с каждой из граничных поверхностей и обеспечить точное удовлетворение граничных условий.

Научная новизна полученных результатов состоит в развитии обобщенного метода Фурье для решения неосесимметричных многосвязных задач теории упругости для канонических тел, ограниченных координатными поверхностями цилиндра, сферы, вытянутого и сжатого сфероидов.

Практическое значение полученных результатов состоит в том, что развитый в диссертации метод позволяет вычислять напряженно-деформированное состояние в любых неосесимметричных телах описанной геометрии с большим числом компонент связности под действием одноосного, двуосного или всестороннего растяжения или сжатия упругого пространства.

Полученные результаты также использованы для вычисления упругих модулей пористых и зернистых композиционных материалов.

Личный вклад соискателя. Основные результаты получены соискателем самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты исследований докладывались и обговаривались на VIII и IX международных научных конференциях “Математические проблемы механики неоднородных структур” (Львов, 2010, 2014), “Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений” (Одесса, 2013), международной математической конференции им. В. Я. Скоробогатка (Дрогобыч, 2011), XVI International Conference “Dynamical System Modelling and Stability

Investigation” (Киев, 2013), (Запорожье, 2012), “Человек и Космос” (Днепропетровск, 2010), “Интегрированные компьютерные технологии в машиностроении” (Харьков, 2010).

Публикации. Основные научные результаты опубликованы в 21 статье в научных журналах и сборниках трудов, которые соответствуют требованиям ВАК Украины к опубликованию результатов диссертации в профильных изданиях.

Структура работы. Диссертация состоит из вступления, 4 глав, выводов, списка литературы из 140 наименований. Общий объем работы — N страниц.

Обзор литературы. Приведем обзор научных исследований, связанных с тематикой данной работы. Исследованию пространственных задач теории упругости для односвязных цилиндра, шара и сфероида посвящены работы [1, 5–7, 13, 20, 21, 28, 31–34, 45, 47, 56, 88–90, 96, 97, 110, 111, 114, 124, 137, 139, 140]. В них краевые задачи для указанных областей решены методом Фурье.

В работах А. Я. Александрова [3, 4] получил развитие метод интегральных наложений, позволивший связать пространственное напряженное состояние с плоским и, как следствие, выразить решения ряда пространственных задач для односвязных и многосвязных тел через аналитические функции комплексного переменного.

Г. Н. Положий на основе построенной им теории p -аналитических функций предложил метод решения осесимметричных задач теории упругости, аналогичный методу Колосова — Мусхелишвили для плоских задач. В дальнейшем этот метод был распространен на двусвязные тела в работах А. А. Капшивого, Л. Н. Ломоноса [43, 55].

Важный подход к решению пространственных задач теории упругости основан на применении методов теории потенциала. В работах В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегели, О. М. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе [11, 50] путём исследования сингулярных интегральных уравнений различных классов краевых задач теории упругости были установлены условия существования и единственности их решений. Параллельно были созданы алгоритмы численного решения задач методами теории потенциала [4]. Численные возможности трех последних методов в многосвязных неосесимметричных телах весьма ограничены.

Методы теории потенциала в пространственных задачах теории трещин были развиты в монографии [46].

В монографии [36] описан метод решения краевых задач теории упругости для областей, близких к каноническим, путем возмущения формы границы.

Приведем анализ методов решения пространственных задач для многосвязных тел. Прежде всего, заметим, что в этой области отсутствуют методы, близкие по общности и эффективности к методам решения плоских задач. Используемые здесь методы либо носят частный характер и предназначены для областей специального вида, не допуская распространения на более сложные области, либо, в виду своей общности, недостаточно эффективны при решении конкретных задач [111, 125, 130, 132].

Многие задачи решаются численными методами [39, 57]. Однако в телах с большим количеством неоднородностей эти методы неэффективны.

Остановимся на методах исследования механики композиционных материалов. Определение интегральных упругих характеристик композиционных материалов проводилось различными методами в работах: Н. С. Бахвалова [8], Л. Браутмана [48], А. С. Вавакина [12], Ван Фо Фы [14, 15], Г. А. Ванина [16–19, 58], А. Н. Власова, О. К. Гаришина [22], А. В. Головина, В. Т. Головчана [24–26, 116], В. Т. Гринченко [31–34], А. Н. Гузя [35], А. В. Дыскина [38], А. В. Ефименко, С. П. Киселёва, С. П. Копысова, Р. Кристенсен [49], Г. Н. Кувыркина, В. И. Куца [51], В. М. Левина [53], Б. П. Маслова, В. В. Мошева, А. А. Панькова, Б. Е. Победри [87], Ю. Н. Подильчука [88, 89], В. В. Полякова, Я. Я. Рущицкого, Р. Л. Салганик [92], К. Б. Устинова [98], А. Ф. Федотова [99], В. М. Фомина, Л. П. Хорошуна [101, 122, 123], Т. Д. Шермергора [104], Дж. Эшелби [105, 115], B. Budiansky [109], S. Boucher [108], R. M. Christensen [112, 113], Z. Hashin [117–120], M. Kachanov [121], S. Nemat-Nasser, M. Taya [127], A. S. Sangini, W. Lu [129], S. Torquato [133], R. W. Zimmerman [138] и др.

Один из первых подходов к определению эффективных упругих модулей был предложен в работах Дж. Эшелби [105, 115]. Он основан на решении задачи об одиночном включении в форме эллипсоида. Метод предполагает пренебрежение взаимодействием между включениями.

В работе [121] при анализе эффективных упругих свойств тела с трещи-

нами использовался метод эффективного поля, в котором предполагается, что включения находятся в поле напряжений, соответствующему среднему полю напряжений в матрице.

В ряде работ [113] использовался метод самосогласования, в котором каждое включение находится в эквивалентной упругой среде, соответствующей матрице и остальным включениям, а также дифференциальный вариант метода самосогласования [12, 92, 138].

В работе [99] предложен метод расчета эффективных упругих модулей зернистых композитов, основанный на модели упругого деформирования пористых материалов. Отличительная особенность метода заключается в осреднении микроскопических напряжений и деформаций не по полному, а по эффективному объему фаз. Получены расчетные зависимости эффективных объемов осреднения от упругих модулей и объемного содержания фаз. Проведено сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными при различном сочетании упругих модулей и произвольной объемной концентрации фаз.

Модели многослойных материалов и конструкций исследовались в монографии [10].

В книге [23] рассматривается моделирование перколяционных кластеров фаз внутренних границ композиционных материалов.

В монографиях [30, 91] решаются плоские задачи для многосвязных тел с отверстиями.

В книге [39] метод конечных элементов применен при анализе напряжений в двухсвязных телах.

В статье [40] исследовано напряженно-деформированное состояние дисперсно наполненного полимерного композита с использованием объемных моделей.

В статьях [122, 123, 131, 134] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математи-

ческие трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако поскольку уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В работе [116] проанализировано термонапряженное состояние в окрестности сферических включений в керамическом композите. Была строго решена краевая задача, которая соответствует приближенному моделированию механики композита парой включений. Численные результаты качественно согласуются с известными экспериментальными зависимостями.

В статье [140] получено явное аналитическое решение задачи с жестким сфероидальным включением в трансверсально изотропном упругом пространстве, где включению заданы контактные перемещения в направлении, перпендикулярном к оси симметрии материала. Для решения задачи использовано представление потенциала перемещений для равновесия трехмерного трансверсально изотропного тела.

В работе [137] исследован трансверсально изотропный стержень с цилиндрическим включением с осесимметричными собственными деформациями. Получено аналитическое упругое решение для перемещений, напряжений и энергии упругой деформации стержня.

В монографии [16] разработаны методы микромеханики композиционных сред с дискретной структурой и трещинами и некоторые их приложения к конкретным материалам. Рассмотрено влияние свойств компонентов и вида структуры неоднородных сред на их эффективные (интегральные) параметры и распределение внутренних полей. Наряду с задачами теории упругости исследуются другие физические свойства материалов.

В работе [103] построена математическая модель расчета эффективного модуля упругости полиминеральных горных пород. Суть исследований заключается в расчете эффективного упругого модуля характерного объема материала путем осреднения по всем реализациям случайного поля неоднородностей с уче-

том их концентрации и пространственной ориентации. В работе были использованы методы: теории обобщенных функций, тензорного исчисления, теории уравнений математической физики и интегро-дифференциальных уравнений.

В работе [37] дано построение модели межфазного слоя материала, содержащего жесткую частицу под действием растягивающей нагрузки. Предлагается вариант чисто конструктивной расчетной модели. Основанием для построения такой модели являются результаты исследований, где показано, что в окрестности границ включения возникает дополнительная межфазная зона, механические свойства которой являются переменными, изменяясь по экспоненциальному закону от жесткости включения до жесткости матрицы. В рамках полученной расчетной модели учитываются размеры включения и протяженность межфазной зоны. Учитываются также изменение модулей упругости при повороте частицы по отношению к действующей нагрузке и влияние соседних частиц на свойства межфазного слоя. Приведены примеры расчета.

В работе [2] методом конечных элементов исследовано влияние начального растяжения на концентрацию напряжений вокруг круговых отверстий в пластине-полосе, подверженной изгибу. Математическая формулировка соответствующей краевой задачи дается в рамках трехмерной линеаризованной теории упругости при плоском деформированном состоянии. Материал пластины-полосы — линейно-упругий, однородный и ортотропный. Представлены численные результаты, оценивающие влияние предварительного растяжения и взаимного расположения отверстий на концентрацию напряжений. Установлено, что начальное растяжение существенно уменьшает концентрацию напряжений в некоторых характерных точках на контуре отверстий.

В статье [106] разработана численно-аналитическая методика моделирования нелинейно-наследственного поведения композитов, имеющих пространственно-ориентированную структуру (пространственно-армированных композитов), позволяющая в дискретные моменты времени рассматривать такую композицию как нелинейно-упругую. Применение итерационного процесса типа метода переменных параметров упругости позволило линеаризовать определяющие соотношения и свести задачу расчета механического поведения рассматриваемого композита в дискретные моменты времени к серии линейно-упругих

задач механики композитов.

В статье [9] предлагается корректная модель сред с микроструктурой (по определению Миндлина), которая определяется наличием свободных деформаций и обобщает известные модели Миндлина, Коссера и Аэро-Кувшинского. Корректность формулировки модели определяется использованием “кинематического” вариационного принципа, основанного на последовательном формальном описании кинематики сред, формулировке кинематических связей для сред разной сложности и построении соответствующей потенциальной энергии деформации с использованием процедуры множителей Лагранжа. Устанавливается система определяющих соотношений и формулируется согласованная постановка краевой задачи. Показывается, что исследуемая модель среды не только отражает масштабные эффекты, аналогичные когезионным взаимодействиям, но и является основой для описания широкого спектра адгезионных взаимодействий. В связи с анализом физической стороны модели предлагается трактовка физических характеристик, ответственных за неклассические эффекты, дается описание спектра адгезионных механических параметров.

В работе [22] разработаны модели структур многоуровневых волокнистых композитов с упрочняющими частицами в матрице и методы решения задач о плоском напряженном состоянии и разрушении. Предложен новый критерий хрупкого разрушения на основе интегралов, не зависящих от пути интегрирования. Найдены обобщенные равновесные термодинамические потенциалы неоднородных сред. Предложены методы определения поправок в состоянии материалов, возникающих от градиентных эффектов вблизи свободных и межфазных поверхностей, кончиков трещин, при высокочастотных волновых процессах. Указанные результаты оригинальны, и пока не известны их аналоги в литературе. Соотношения теории описывают состояние тел на выбранном масштабном уровне и связывают его с состоянием и процессами, протекающими на других масштабных уровнях неоднородных сред. Отмеченное представляет интерес в теории разрушения материалов, в задачах нанотехнологии и др.

Исследование напряженного состояния тела с однопериодической системой сферических полостей (осесимметричная задача) проводилось в работе [86].

Двусвязные осесимметричные задачи рассмотрены в работах [95, 107, 126,

135, 136]. Напряженно-деформированное состояние кусочно-однородных тел исследовано с помощью обобщенного метода Фурье в работах [63–85].

Приведенный обзор литературы показывает, что одной из актуальных проблем современной механики деформированного твердого тела является построение и анализ моделей напряженного состояния пористых и композиционных материалов, которые находят широкое применение в высокотехнологических областях техники, в частности в авиации и ракетостроении. Известные пространственные модели напряженного состояния указанных выше материалов не являются достаточно точными. Они учитывают неоднородную структуру материала или усредненно, или локально в окрестности только одного концентратора напряжений. При моделировании подобных материалов также используются разные типы стохастических моделей, которые, как правило, не являются полностью адекватными. Однако аэрокосмическая отрасль накладывает повышенные требования на прочностные характеристики материалов, управление которыми зависит от точности определения напряжений в теле. Создание более точных моделей указанных материалов позволит не только уточнить расчеты на прочность (коэффициенты концентрации напряжений на границе раздела фаз могут отличаться в 1.5–2 раза), но и на основе этих моделей проводить оптимальное проектирование материалов с заданными прочностью и массой. Обзор литературы показывает, что напряженное состояние в пористом и композиционном материалах традиционно моделируется напряженным состоянием представительской ячейки, содержащей одну неоднородность. Подобные модели используются при определении эффективных упругих модулей материалов с порами и включениями. Очевидно, эти модели заведомо не обладают высокой точностью. Основным их недостатком является тот факт, что они не вполне адекватны в локальных зонах концентрации напряжений в телах из пористых и композиционных материалов.

В диссертации приводятся результаты исследований по моделированию напряженно-деформированного состояния упругого пористого и композиционного материалов с порами или включениями цилиндрической, сферической, вытянутой или сжатой сфероидальной формы. Пористый или композиционный материал моделируется упругой средой с конечным числом полостей или включений

указанной выше формы. Число неоднородностей варьируется в широком диапазоне (от 2 до 30). Модели НДС указанных тел строятся на основе точных базисных решений уравнения Ламе в канонических пространственных областях [59, 60, 62]. Для определения параметров модели используется обобщенный метод Фурье. Аппарат обобщенного метода Фурье был развит в работах [59–62, 65].

Остановимся кратко на содержании диссертации.

В главе 1 приведен аппарат обобщенного метода Фурье. Кроме известных теорем сложения базисных решений уравнения Ламе в цилиндрических, сферических, вытянутых и сжатых сфероидальных системах координат, начала которых произвольно сдвинуты друг относительно друга, впервые получены теоремы сложения для модифицированных базисных решений уравнения Ламе в указанных системах координат. Эти теоремы впервые были получены в работах [75, 76].

В главе 2 исследована механика упругого деформирования волокнистых пористых и композиционных материалов. Волокна моделируются параллельно расположенными цилиндрическими полостями или включениями. Рассмотрены локальные модели, в которых напряженно-деформированное состояние определяется цилиндрической неоднородностью и ее ближайшими соседями. Изучены также глобальные модели, которые учитывают всю структуру материала. Основное внимание уделяется количественному и качественному анализу в распределении напряжений в представительской ячейке в зависимости от механических и геометрических характеристик матрицы и включений, а также от типа упаковки полостей или включений. Приведены сравнения разных типов моделей. Результаты этой главы получены в работах [71, 72, 74, 77, 84].

Глава 3 посвящена механике упругого деформирования зернистых композиционных и пористых материалов со сферическими зёрнами. Рассмотрены локальные модели, в которых напряженно-деформированное состояние определяется сферической неоднородностью и ее ближайшими соседями. Изучены также глобальные модели, которые учитывают всю структуру материала. Основное внимание уделяется количественному и качественному анализу в распределении напряжений в представительской ячейке в зависимости от механических

и геометрических характеристик матрицы и включений, а также от типа упаковки полостей или включений. Рассмотрены тетрагональная и гексагональная типы упаковок неоднородностей в случаях отсутствия или наличия объемного центрирования. Приведены сравнения этих типов моделей. Результаты этой главы получены в работах [68, 78, 81, 83].

В главе 4 рассмотрены модели упругого деформирования пористых и композиционных материалов с вытянутыми сфероидальными полостями или включениями. Указанные материалы моделируются упругим пространством с конечным или бесконечным числом неоднородностей, центры которых расположены в узлах периодической решетки, обладающей определенной трансляционной симметрией. Предполагается, что оси симметрии включений одинаково направлены. Рассмотрены локальные модели, в которых напряженно-деформированное состояние определяется неоднородностью и ее ближайшими соседями. Изучены также глобальные модели, которые учитывают всю структуру материала. Приведен количественный и качественный анализ распределения напряжений в представительской ячейке в зависимости от механических и геометрических характеристик матрицы и включений, а также от типа упаковки неоднородностей. Рассмотрены тетрагональная и гексагональная типы упаковок неоднородностей в случаях отсутствия или наличия объемного центрирования. Приведены сравнения этих типов моделей. Результаты этой главы получены в работах [67, 69, 70, 75, 76, 79, 80, 82].

Глава 1

Математический аппарат обобщенного метода Фурье

1.1. Теоремы сложения базисных гармонических функций в цилиндрических, сферических, вытянутых и сжатых сфероидальных системах координат со сдвинутыми началами

Рассмотрим пары ($i = 1, 2$) однотипных одинаково направленных систем координат: декартовых (x_i, y_i, z_i) , цилиндрических (ρ_i, z_i, φ_i) , сферических $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$, вытянутых $(\xi_i, \eta_i, \varphi_i)$ и сжатых $(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, \varphi_i)$ сфероидальных. Их начала отнесены к точкам O_i , которые произвольно сдвинуты друг относительно друга. Будем считать, что декартовы координаты точки O_2 в декартовой системе координат с началом в точке O_1 задаются тройкой чисел (x_{12}, y_{12}, z_{12}) . Тогда между декартовыми координатами справедливы соотношения

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_{12}, \\ y_1 = y_2 + y_{12}, \\ z_1 = z_2 + z_{12}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Связь между различными криволинейными координатами определяется формулами:

$$\begin{aligned} x_i &= \rho_i \cos \varphi_i = r_i \sin \theta_i \cos \varphi_i = c_i \operatorname{sh} \xi_i \sin \eta_i \cos \varphi_i = \tilde{c}_i \operatorname{ch} \tilde{\xi}_i \sin \tilde{\eta}_i \cos \varphi_i, \\ y_i &= \rho_i \sin \varphi_i = r_i \sin \theta_i \sin \varphi_i = c_i \operatorname{sh} \xi_i \sin \eta_i \sin \varphi_i = \tilde{c}_i \operatorname{ch} \tilde{\xi}_i \sin \tilde{\eta}_i \sin \varphi_i, \\ z_i &= r_i \cos \theta_i = c_i \operatorname{ch} \xi_i \cos \eta_i = \tilde{c}_i \operatorname{sh} \tilde{\xi}_i \cos \tilde{\eta}_i, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $x_i, y_i, z_i \in (-\infty; \infty)$; $\rho_i, r_i, \xi_i \in [0; \infty)$; $\eta_i \in [0; \pi]$; $\tilde{\xi}_i \in (-\infty, \infty)$; $\tilde{\eta}_i \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $\varphi \in [0; 2\pi]$; c_i, \tilde{c}_i ($c_i, \tilde{c}_i > 0$) — параметры сфероидальных систем координат.

В дальнейшем понадобятся базисные решения уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (1.3)$$

регулярные вне (знак “+” в верхнем индексе), внутри (знак “−” в верхнем индексе) цилиндра Ω_3^\pm , шара Ω_4^\pm , вытянутого Ω_5^\pm и сжатого Ω_6^\pm сфероидов:

$$u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = e^{i\lambda z + im\varphi} \begin{Bmatrix} \tilde{K}_m(\lambda\rho) \\ I_m(\lambda\rho) \end{Bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad (1.4)$$

$$u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = \begin{Bmatrix} (n-m)!/r^{n+1} \\ r^n/(n+m)! \end{Bmatrix} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}; \quad (1.5)$$

$$n, m \in \mathbb{Z}, n \geq 0, |m| \leq n;$$

$$u_{n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = \begin{Bmatrix} Q_n^{-m}(\text{ch}\xi) \\ P_n^{-m}(\text{ch}\xi) \end{Bmatrix} P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}; \quad (1.6)$$

$$n, m \in \mathbb{Z}, n \geq 0, |m| \leq n;$$

$$u_{n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = \begin{Bmatrix} Q_n^{-m}(\text{ish}\tilde{\xi}) \\ P_n^{-m}(\text{ish}\tilde{\xi}) \end{Bmatrix} P_n^m(\cos \tilde{\eta}) e^{im\varphi}; \quad (1.7)$$

$$n, m \in \mathbb{Z}, n \geq 0, |m| \leq n;$$

где $I_m(x)$ — модифицированная функция Бесселя,

$$\tilde{K}_m(x) = (\text{sign } x)^m K_m(|x|),$$

$K_m(x)$ — функция Макдональда, $P_n^m(x)$, $Q_n^m(x)$ — функции Лежандра первого и второго рода. Верхний (нижний) множитель в фигурных скобках соответствует верхнему (нижнему) знаку индекса $\{\pm\}$.

В дальнейшем важную роль играют теоремы сложения решений (1.4) – (1.7) в парах однотипных систем координат, описанных выше.

Теорема 1.1. *При $\rho_2 < \rho_{12}$ справедливо разложение*

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l u_{m-l,\lambda}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}) u_{l,\lambda}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2). \quad (1.8)$$

При $\rho_1 < \rho_{12}$ справедливо разложение

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^m u_{m-l,\lambda}^{+(3)}(\rho_{12}, -z_{12}, \varphi_{12}) u_{l,\lambda}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1). \quad (1.9)$$

Теорема 1.2. При $r_2 < r_{12}$ справедливо разложение

$$u_{n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k (-1)^{k+l} u_{n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}) u_{k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2). \quad (1.10)$$

При $r_1 < r_{12}$

$$u_{n,m}^{+(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k (-1)^{n+l} u_{n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}) u_{k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1). \quad (1.11)$$

Теорема 1.3. При $\xi_2 \in (0; \gamma_2)$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l+m} u_{s,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) \times \\ &\times \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{q! \Gamma(n+q+\frac{3}{2})} \left(\frac{c_1}{2}\right)^{2q+n+1} \sum_{k=s}^{\infty} (-1)^k g_{k,l}^{-(45)s}(c_2) u_{2q+n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

При $\xi_1 \in (0; \gamma_1)$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l+m} u_{s,l}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) \times \\ &\times \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{q! \Gamma(n+q+\frac{3}{2})} \left(\frac{c_2}{2}\right)^{2q+n+1} \sum_{k=s}^{\infty} (-1)^n g_{k,l}^{-(45)s}(c_1) u_{2q+n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Выше использованы обозначения

$$\gamma_j = \text{Arsh} \left[\frac{t_j^2 + \rho_{12}^2 - c_j^2 + \sqrt{(t_j^2 + \rho_{12}^2 - c_j^2)^2 + 4\rho_{12}^2 c_j^2}}{2c_j^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.14)$$

$$t_j = \max(|z_{12}| - c_{3-j}, 0),$$

$$g_{k,l}^{-(45)s}(c_j) = \sqrt{\pi} \varepsilon_{ks} \left(\frac{c_j}{2}\right)^k \frac{s + \frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} - \frac{s}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{s}{2} + \frac{3}{2}\right)}, \quad (1.15)$$

$$\varepsilon_{ks} = \begin{cases} 1, & k - s = 2p, \quad p \in \mathbb{Z}, \\ 0, & k - s = 2p + 1, \quad p \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.16)$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Теорема 1.4. При $\tilde{\xi}_2 \in [0, \tilde{\gamma}_2)$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l+m} u_{s,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) \times \\ &\times \sqrt{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (-i)^{n+1}}{q! \Gamma(n+q+\frac{3}{2})} \left(\frac{\tilde{c}_1}{2}\right)^{2q+n+1} \times \\ &\times \sum_{k=s}^{\infty} (-1)^k g_{k,l}^{-(46)s}(c_2) u_{2q+n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

При $\tilde{\xi}_1 \in [0, \tilde{\gamma}_1)$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l+m} u_{s,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) \times \\ &\times \sqrt{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (-i)^{n+1}}{q! \Gamma(n+q+\frac{3}{2})} \left(\frac{\tilde{c}_2}{2}\right)^{2q+n+1} \times \\ &\times \sum_{k=s}^{\infty} (-1)^n g_{k,l}^{-(46)s}(c_1) u_{2q+n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь использованы обозначения

$$\tilde{\gamma}_j = \text{Arsh} \left[\frac{z_{12}^2 + \rho_{12}^2 - \tilde{c}_j^2 + \sqrt{(z_{12}^2 + \rho_{12}^2 - \tilde{c}_j^2)^2 + 4z_{12}^2 \tilde{c}_j^2}}{2\tilde{c}_j^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.19)$$

$$g_{k,l}^{-(46)s}(c_j) = \sqrt{\pi} \varepsilon_{ks} (-i)^k \left(\frac{\tilde{c}_j}{2}\right)^k \frac{s + \frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} - \frac{s}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{s}{2} + \frac{3}{2}\right)}, \quad (1.20)$$

1.2. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в сфероидальных координатах

Приведенные в предыдущем параграфе свойства гармонических функций играют существенную роль при моделировании напряженно-деформированного состояния многосвязного упругого тела.

Будем рассматривать однородную изотропную упругую среду. Вектор перемещений \mathbf{U} точек среды, как известно, описывается уравнением Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (1.21)$$

где σ — коэффициент Пуассона; ∇ — оператор “набла”.

В работах [59, 60] были введены следующие частные решения уравнения (1.21) во внешности (внутренности) вытянутого сфероида $\Omega_5^\pm = \{(\xi, \eta, \varphi) : \xi \gtrless \xi_0\}$:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = \frac{c}{2n+1} \mathbf{D}_s \left[u_{n-1,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) - u_{n+1,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) \right]; \quad s = 1, 3; \quad (1.22)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) - c \chi^2 \xi_0 \mathbf{D}_1 u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi), \quad (1.23)$$

где $n = 0, 1, \dots; |m| \leq n+1$; $u_{n,m}^{\pm(5)}$ определены в (1.6);

$$\mathbf{D}_1 = \nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\mathbf{D}_2 = z \nabla - \chi \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{D}_3 = i [\nabla \times \mathbf{e}_z]; \quad (1.24)$$

$\chi = 3 - 4\sigma$, $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ — орты декартовой системы координат.

В развернутой координатной форме формулы (1.22) – (1.23) имеют вид:

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0; \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = & q u_{1,n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - q u_{1,n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - \left[q u_{1,n,m}^{\pm(5)} + \chi u_{n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_0 + \\ & + c (q^2 - q_0^2) \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}; \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(5)} = -u_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1. \quad (1.27)$$

Здесь использованы обозначения

$$u_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{1,n,m}^\pm(\xi) P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}; \quad u_{1,n,m}^\pm(\xi) = \begin{cases} (n+m+1) Q_{n+1}^{-m}(q) \\ -(n-m) P_{n-1}^{-m}(q) \end{cases};$$

$$q = \text{ch}\xi, \quad q_0 = \text{ch}\xi_0, \quad \mathbf{e}_{\mp 1} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y), \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z. \quad (1.28)$$

В работе [62] введено понятие базисности системы решений уравнения Ламе в односвязной канонической области и доказана базисность решений (1.22) – (1.24) в соответствующих областях Ω_5^\pm .

В дальнейшем нам понадобятся теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в одинаково направленных вытянутых сфероидальных системах координат, начала которых сдвинуты согласно соотношениям (1.1).

Теорема 1.5. *При $\xi_2, \xi_{20} \in (0; \gamma_2)$ справедливы разложения*

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{+(55)k,l} \mathbf{U}_{s,k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2), \quad s = 1, 3; \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f_{n,m}^{+(55)k,l} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{n,m}^{+(55)k,l} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) \right], \end{aligned} \quad (1.30)$$

где

$$f_{n,m}^{+(55)k,l} = \sum_{j=n}^{\infty} g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) f_{j,m}^{(45)k,l}(c_2); \quad (1.31)$$

$$g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) = (-1)^m \sqrt{\pi} \left(\frac{c_1}{2} \right)^{j+1} \frac{\varepsilon_{jn}}{\Gamma\left(\frac{j-n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{j+n}{2} + \frac{3}{2}\right)}; \quad (1.32)$$

$$f_{j,m}^{(45)k,l}(c_2) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l} \sqrt{\pi} \left(\frac{c_2}{2} \right)^{p\varepsilon_{pk}} \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right) u_{j+p,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p-k}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + \frac{3}{2}\right)}; \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n,m}^{+(55)k,l} = \sum_{j=n}^{\infty} \left[c_2 q_{20}^2 \frac{2k+1}{2k+3} g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) f_{j+1,m}^{(45)k+1,l}(c_2) + \right. \\ \left. + z_{12} g_{n,m}^{+(54)j}(c_1) f_{j+1,m}^{(45)k,l}(c_2) - c_1 q_{10}^2 g_{n+1,m}^{+(54)j-1}(c_1) f_{j,m}^{(45)k,l}(c_2) \right]. \end{aligned} \quad (1.34)$$

При $\xi_1, \xi_{10} \in (0; \gamma_1)$ справедливы разложения

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{-(55)k,l} \mathbf{U}_{s,k,l}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1), \quad s = 1, 3; \quad (1.35)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f_{n,m}^{-(55)k,l} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{n,m}^{-(55)k,l} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) \right], \quad (1.36)$$

где

$$f_{n,m}^{-(55)k,l} = \sum_{j=k}^{\infty} f_{n,m}^{(54)j,l}(c_2) g_{j,l}^{-(45)k}(c_1); \quad (1.37)$$

$$f_{n,m}^{(54)j,l}(c_2) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l+m} \sqrt{\pi} \left(\frac{c_2}{2} \right)^{p+1} \frac{\varepsilon_{pn} u_{p+j,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p-n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p+n}{2} + \frac{3}{2}\right)}; \quad (1.38)$$

$$\tilde{f}_{n,m}^{-(55)k,l} = \sum_{j=k}^{\infty} \left[c_2 q_{20}^2 f_{n+1,m}^{(54)j+1,l}(c_2) g_{j,l}^{-(45)k}(c_1) + z_{12} f_{n,m}^{(54)j+1,l}(c_2) g_{j,l}^{-(45)k}(c_1) - \right. \\ \left. - c_1 q_{10}^2 \frac{2k+1}{2k+3} f_{n,m}^{(54)j,l}(c_2) g_{j-1,l}^{-(45)k+1}(c_1) \right], \quad (1.39)$$

$g_{j,l}^{-(45)k}(c_1)$ описано формулой (1.15).

Теперь рассмотрим частные решения уравнения Ламе для сжатого сфероида $\Omega_6^{\pm} = \{(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) : \tilde{\xi} \geq \tilde{\xi}_0\}$ [60]:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = \frac{-i\tilde{c}}{2n+1} \mathbf{D}_s \left[u_{n-1,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) - u_{n+1,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \right]; \quad s = 1, 3; \quad (1.40)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) - i\tilde{c} \text{sh}^2 \tilde{\xi}_0 \mathbf{D}_1 u_{n\pm 1,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi), \quad (1.41)$$

где $n = 0, 1, \dots; |m| \leq n+1; m, n \in \mathbb{Z}$, $u_{n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi)$; \mathbf{D}_s определены в (1.7), (1.24).

Приведем координатную форму перемещений (1.40), (1.41)

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = u_{n,m-1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \mathbf{e}_1 - \\ - u_{n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \mathbf{e}_0; \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) &= \tilde{i}q u_{1,n,m-1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \mathbf{e}_{-1} - \tilde{i}q u_{1,n,m+1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \mathbf{e}_1 - \\ &- \left[\tilde{i}q u_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) + \chi u_{n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \right] \mathbf{e}_0 + i\tilde{c} \left(\tilde{q}^2 - \tilde{q}_0^2 \right) \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi); \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = -u_{n,m-1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) \mathbf{e}_1; \quad (1.44)$$

$$\tilde{q} = \text{sh} \tilde{\xi}, \quad \tilde{q}_0 = \text{sh} \tilde{\xi}_0,$$

$$u_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi) = \tilde{u}_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}) P_n^m(\cos \tilde{\eta}) e^{im\varphi}, \quad (1.45)$$

$$\tilde{u}_{1,n,m}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}) = \begin{Bmatrix} (n+m+1)Q_{n+1}^{-m}(\tilde{i}q) \\ -(n-m)P_{n-1}^{-m}(\tilde{i}q) \end{Bmatrix}. \quad (1.46)$$

В работе [62] установлена базисность решений (1.40), (1.41) в областях Ω_6^\pm .

Теорема 1.6. При $\tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_{20} \in [0; \tilde{\gamma}_2)$ справедливы разложения

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{+(66)k,l} \mathbf{U}_{s,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2), \quad s = 1, 3; \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f_{n,m}^{+(66)k,l} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) + \right. \\ &\left. + \tilde{f}_{n,m}^{+(66)k,l} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) \right], \end{aligned} \quad (1.48)$$

где

$$f_{n,m}^{+(66)k,l} = \sum_{j=n}^{\infty} g_{n,m}^{+(64)j}(\tilde{c}_1) f_{j,m}^{(46)k,l}(\tilde{c}_2); \quad (1.49)$$

$$g_{n,m}^{+(64)j}(\tilde{c}_1) = (-1)^m \sqrt{\pi} (-i)^{j+1} \left(\frac{\tilde{c}_1}{2} \right)^{j+1} \frac{\varepsilon_{jn}}{\Gamma\left(\frac{j-n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{j+n}{2} + \frac{3}{2}\right)}; \quad (1.50)$$

$$f_{j,m}^{(46)k,l}(\tilde{c}_2) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l} \sqrt{\pi} (-i)^p \left(\frac{\tilde{c}_2}{2} \right)^p \frac{\varepsilon_{pk} \left(k + \frac{1}{2}\right) u_{j+p,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p-k}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + \frac{3}{2}\right)}; \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n,m}^{+(66)k,l} = \sum_{j=n}^{\infty} \left[i\tilde{c}_2 \tilde{q}_{20}^2 \frac{2k+1}{2k+3} g_{n,m}^{+(64)j} f_{j+1,m}^{(46)k+1,l} + z_{12} g_{n,m}^{+(64)j} f_{j+1,m}^{(46)k,l} - \right. \\ \left. - i\tilde{c}_1 \tilde{q}_{10}^2 g_{n+1,m}^{+(64)j-1} f_{j,m}^{(46)k,l} \right], \quad (1.52) \end{aligned}$$

$$\tilde{q}_{j0} = \text{sh} \tilde{\xi}_{j0}.$$

При $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_{10} \in [0; \tilde{\gamma}_1)$ справедливы разложения

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{n,m}^{-(66)k,l} \mathbf{U}_{s,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1), \quad s = 1, 3; \quad (1.53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f_{n,m}^{-(66)k,l} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{n,m}^{-(66)k,l} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1) \right], \quad (1.54) \end{aligned}$$

где

$$f_{n,m}^{-(66)k,l} = \sum_{j=k}^{\infty} f_{n,m}^{(64)j,l}(\tilde{c}_2) g_{j,l}^{-(46)k}(\tilde{c}_1); \quad (1.55)$$

$$f_{n,m}^{(64)j,l}(\tilde{c}_2) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l+m} \sqrt{\pi} (-i)^{p+1} \left(\frac{\tilde{c}_2}{2} \right)^{p+1} \frac{\varepsilon_{pn} u_{p+j,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p-n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p+n}{2} + \frac{3}{2}\right)}; \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n,m}^{-(66)k,l} = \sum_{j=k}^{\infty} \left[i\tilde{c}_2 \tilde{q}_{20}^2 f_{n+1,m}^{(64)j+1,l}(\tilde{c}_2) g_{j,l}^{-(46)k}(\tilde{c}_1) + \right. \\ \left. + z_{12} f_{n,m}^{(64)j+1,l}(\tilde{c}_2) g_{j,l}^{-(46)k}(\tilde{c}_1) - i\tilde{c}_1 \tilde{q}_{10}^2 \frac{2k+1}{2k+3} f_{n,m}^{(64)j,l}(\tilde{c}_2) g_{j-1,l}^{-(46)k+1}(\tilde{c}_1) \right], \quad (1.57) \end{aligned}$$

$g_{j,l}^{-(46)k}$ описано формулой (1.20).

1.3. Теоремы сложения решений уравнения Ламе в сфероидальных координатах для модифицированного базиса

Приведенные в предыдущем параграфе внешние решения уравнения Ламе не при всех значениях параметров n и m регулярны, а система внутренних решений не является линейно независимой. В работе [60] были построены такие

системы решений уравнения (1.21) в областях Ω_5^\pm , которые являются линейными комбинациями решений (1.22), (1.23) и удовлетворяют всем свойствам базисности [62]. Положим

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(5)} = \mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(5)}; \quad s = \overline{1,3}; \quad n = 1, 2, \dots, |m| \leq n-1; \quad (1.58)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{+(5)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{\pm(5)} \mp \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{\pm(5)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.59)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,0,0}^{+(5)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,1}^{+(5)} + (1 + \chi) \mathbf{U}_{3,0,1}^{+(5)} + \mathbf{U}_{2,0,1}^{+(5)}; \quad (1.60)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{+(5)} = \mathbf{U}_{2,n,\pm n}^{+(5)}; \quad n = 0, 1, \dots; \quad (1.61)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{+(5)} = -\chi \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{+(5)} \pm (1 + \chi) \mathbf{U}_{3,n,\pm(n+1)}^{+(5)} + \mathbf{U}_{2,n,\pm(n+1)}^{+(5)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.62)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{+(5)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,-1}^{+(5)} - (1 + \chi) \mathbf{U}_{3,0,-1}^{+(5)} + \mathbf{U}_{2,0,-1}^{+(5)}; \quad (1.63)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{-(5)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{-(5)}; \quad n = 0, 1, \dots; \quad (1.64)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{-(5)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{-(5)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.65)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{-(5)} = \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{-(5)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.66)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(5)} = \mathbf{U}_{1,0,1}^{-(5)}; \quad (1.67)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(5)} = \mathbf{U}_{1,0,-1}^{-(5)}. \quad (1.68)$$

В работе [75] получены теоремы сложения для решений (1.58) — (1.68).

Теорема 1.7. *Справедливы разложения внешних модифицированных базисных решений уравнения Ламе в вытянутой сфероидальной системе координат с началом в точке O_j по внутренним модифицированным решениям в вытянутой сфероидальной системе координат с началом в точке O_α при $\xi_\alpha \in (0, \beta_{j\alpha})$:*

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{U}_{t,k,l}^{-(5)}(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.69)$$

где

$$\beta_{j\alpha} = \text{Arsh} \frac{\sqrt{t_{j\alpha}^2 + \rho_{j\alpha}^2 - c_\alpha^2} + \sqrt{(t_{j\alpha}^2 + \rho_{j\alpha}^2 - c_\alpha^2)^2 + 4c_\alpha^2 \rho_{j\alpha}^2}}{c_\alpha \sqrt{2}},$$

$$t_{j\alpha} = \max(|z_{j\alpha}| - c_j, 0);$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha}, \quad k \geq 1, |\ell| \leq k-1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,k+1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,k,k+1,\alpha}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} + (1 + \chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,-k-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,k,-k-1,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} - (1 + \chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,0,0,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,0,-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,0,-1,\alpha};$$

$$T_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \delta_{st} f_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{s2} \delta_{t1} g_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (n \geq 1) \wedge (|m| \leq n-1);$$

$$T_{1,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (\delta_{t1} - \delta_{t3}) f_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1);$$

$$T_{1,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = 0, \quad n \geq 1;$$

$$T_{1,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (\delta_{t1} + \delta_{t3}) f_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (-k-1 \leq \ell \leq k) \wedge (n \geq 1);$$

$$T_{1,0,0,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \tilde{\delta}_t f_{0,1,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g_{0,1,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad 1-k \leq \ell \leq k+1;$$

$$T_{1,0,0,j}^{t,k,-k,\alpha} = \delta_{t1} g_{0,1,j}^{k,-k,\alpha};$$

$$T_{1,0,0,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = \delta_{t1} g_{0,1,j}^{k,-k-1,\alpha};$$

$$T_{2,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \delta_{t2} f_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad -k \leq \ell \leq k;$$

$$T_{2,n,n,j}^{t,k,k+1,\alpha} = \delta_{t1} g_{n,n,j}^{k,k+1,\alpha};$$

$$T_{2,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = \delta_{t1} g_{n,n,j}^{k,-k-1,\alpha};$$

$$T_{2,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \delta_{t2} f_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad -k \leq \ell \leq k;$$

$$T_{2,n,-n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = \delta_{t,1} g 1_{n,-n,j}^{k,-k-1,\alpha};$$

$$T_{2,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} = \delta_{t,1} g 1_{n,-n,j}^{k,k+1,\alpha};$$

$$T_{3,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \tilde{\delta}_t f 1_{n,n+1,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t,1} g 1_{n,n+1,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (1-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1);$$

$$T_{3,n,n,j}^{t,k,-k,\alpha} = \delta_{t,1} g 1_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha}, \quad n \geq 1;$$

$$T_{3,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = \delta_{t,1} g 2_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha}, \quad n \geq 1;$$

$$T_{3,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \hat{\delta}_t f 1_{n,-n-1,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t,1} g 1_{n,-n-1,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad -k-1 \leq \ell \leq k-1;$$

$$T_{3,n,-n,j}^{t,k,k,\alpha} = \delta_{t,1} g 1_{n,-n-1,j}^{k,k,\alpha};$$

$$T_{3,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} = \delta_{t,1} g 3_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha};$$

$$g 1_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} = q_{j0}^2 f 2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + q_{\alpha 0}^2 f 3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + z_{j\alpha} f 4_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha};$$

$$g 2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} = q_{j0}^2 f 2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + q_{\alpha 0}^2 f 3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + f 5_{n,j}^{k,\alpha};$$

$$g 3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} = q_{j0}^2 f 2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + q_{\alpha 0}^2 f 3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + f 6_{n,j}^{k,\alpha};$$

$$\tilde{\delta}_t = -\chi \delta_{t,1} + (\chi + 1) \delta_{t,3} + \delta_{t,2};$$

$$\hat{\delta}_t = -\chi \delta_{t,1} - (\chi + 1) \delta_{t,3} + \delta_{t,2};$$

$$f 1_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha};$$

$$f 2_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n+2}^{\infty} (n-r) \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha};$$

$$f 3_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k+2}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} (k-p) \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha};$$

$$f 4_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r+1,m-\ell}^{+(4)j,\alpha};$$

$$f 5_{n,j}^{k,\alpha} = (-1)^{n-k} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} v_{p+r,n,k}^{j,\alpha};$$

$$\text{f}6_{n,j}^{k,\alpha} = (-1)^{k-n} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} w_{p+r,n,k}^{j,\alpha};$$

$$\Gamma_{nrj}^{kp\alpha} = \frac{1}{\gamma_{kp} \gamma_{nr}} (-1)^p \varepsilon_{kp} \varepsilon_{nr} \left(\frac{c_j}{2} \right)^{r+1} \left(\frac{c_\alpha}{2} \right)^p;$$

$$\gamma_{kp} = \Gamma \left(\frac{p-k}{2} + 1 \right) \Gamma \left(\frac{k+p}{2} + \frac{3}{2} \right);$$

$$v_{\nu,n,k}^{j,\alpha} = \begin{cases} u_{\nu,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{\nu+1,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \geq n+k+2, \\ \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \leq n+k+1, \end{cases}$$

$$w_{\nu,n,k}^{j,\alpha} = \begin{cases} u_{\nu,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{\nu+1,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \geq n+k+2, \\ \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \leq n+k+1, \end{cases}$$

$$u_{n,m}^{+(4)j,\alpha} = \begin{cases} \frac{(n-m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}} P_n^m(\cos \theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n \geq m, \\ \frac{(-1)^m (n+m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}} P_n^{-m}(\cos \theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n < m, \end{cases}$$

$(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$ — сферические координаты точки O_α в системе координат с началом в точке O_j .

Доказательство. Формулы (1.29), (1.30) из параграфа 1.2 могут быть записаны в виде одной формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} \left\{ \delta_{st} \text{f}1_{n,m,j}^{k,l,\alpha} + \delta_{t1} \delta_{s2} \left[q_{j0}^2 \text{f}2_{n,m,j}^{k,l,\alpha} + \right. \right. \\ \left. \left. + q_{\alpha 0}^2 \text{f}3_{n,m,j}^{k,l,\alpha} + z_{j\alpha} \text{f}4_{n,m,j}^{k,l,\alpha} \right] \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)}(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \varphi_\alpha). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Преобразуем вектор-функцию $\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,n}^{+(5)}$, используя формулу (1.70):

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,n}^{+(5)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} \text{f}1_{n,n,j}^{k,l,\alpha} \left[\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)} - \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(5)} \right]. \quad (1.71)$$

Учитывая, что справедливо соотношение

$$\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)} - \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(5)} = 2u_{k,l-1}^{-(5)} \mathbf{e}_{-1} - u_{k,l}^{-(5)} \mathbf{e}_0 = \begin{cases} 0, & l = -k-1, \\ -u_{k,-k}^{-(5)} \mathbf{e}_0, & l = -k, \end{cases}$$

разложение (1.71) можно представить в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,n}^{+(5)} = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k+1} (\delta_{t1} - \delta_{t3}) f1_{n,n,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)}, \quad n \geq 1. \quad (1.72)$$

Аналогично вектор-функция $\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,-n}^{+(5)}$ с учетом соотношения

$$\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)} + \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(5)} = -2u_{k,l+1}^{-(5)} \mathbf{e}_1 - u_{k,l}^{-(5)} \mathbf{e}_0 = \begin{cases} 0, & l = k+1, \\ -u_{k,k}^{-(5)} \mathbf{e}_0, & l = k, \end{cases}$$

представима разложением

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,-n}^{+(5)} = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^k (\delta_{t1} + \delta_{t3}) f1_{n,-n,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)}. \quad (1.73)$$

Запишем разложение перемещения $\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(5)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(5)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} \left\{ -\chi f1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)} + (1+\chi) f1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(5)} + \right. \\ \left. + f1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(5)} + g1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)} \right\}. \quad (1.74) \end{aligned}$$

Заметим, что выполняется равенство

$$-\chi \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)} + (1+\chi) \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(5)} + \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(5)} = \begin{cases} -u_{k,-k}^{-(5)} \mathbf{e}_1, & l = -k-1; \\ 0, & l = -k. \end{cases} \quad (1.75)$$

Теперь можно перегруппировать слагаемые в формуле (1.74) следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(5)} = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k+1} \left\{ \left[-\chi \delta_{t1} + (1+\chi) \delta_{t3} + \delta_{t2} \right] f1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} + \right. \\ \left. + \delta_{t1} g1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[f1_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} + g1_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} \right] \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} g1_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k}^{-(5)}. \quad (1.76) \end{aligned}$$

С помощью рекуррентных формул для функций Лежандра преобразуем сумму

$$\begin{aligned} f1_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} + z_{j\alpha} f4_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} &= (-1)^{n-k} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \times \\ &\times \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} \left[u_{p+r,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{p+r+1,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Так как справедливо соотношение

$$u_{n+k,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{n+k+1,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} = \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,n+k+2}^{+(4)j,\alpha},$$

то равенство (1.77) может быть записано в виде

$$f1_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} + z_{j\alpha} f4_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} = (-1)^{n-k} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} v_{r+p,n,k}^{j,\alpha} \equiv f5_{n,j}^{k,\alpha},$$

где $v_{r+p,n,k}^{j,\alpha}$ определено в условии теоремы. Подставляя эту формулу в разложение (1.76), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{3,n,n}^{+(5)} &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k+1} \left\{ \left[-\chi \delta_{t1} + (1+\chi) \delta_{t3} + \delta_{t2} \right] f1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{t1} g1_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \right\} U_{t,k,l}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} g2_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} U_{1,k,-k-1}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} g1_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha} U_{1,k,-k}^{-(5)}. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Подобным образом можно записать

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{3,n,-n}^{+(5)} &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k-1} \left\{ \left[-\chi \delta_{t1} - (1+\chi) \delta_{t3} + \delta_{t2} \right] f1_{n,-n-1,j}^{k,l,\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{t1} g1_{n,-n-1,j}^{k,l,\alpha} \right\} U_{t,k,l}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[f1_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha} + g1_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha} \right] U_{1,k,k+1}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} g1_{n,-n-1,j}^{k,k,\alpha} U_{1,k,k}^{-(5)}, \end{aligned} \quad (1.79)$$

причем

$$f1_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha} + z_{j\alpha} f4_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha} = (-1)^{k-n} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} w_{r+p,n,k}^{j,\alpha} \equiv f6_{n,j}^{k,\alpha},$$

где $w_{r+p,n,k}^{j,\alpha}$ приведено в условии теоремы. Используя этот результат, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{3,n,-n}^{+(5)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k-1} \left\{ \left[-\chi \delta_{t1} - (1+\chi) \delta_{t3} + \delta_{t2} \right] f_{n,-n-1,j}^{k,l,\alpha} + \right. \\ & \left. + \delta_{t1} g_{n,-n-1,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,-n-1,j}^{k,k,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k}^{-(5)}. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Заметим, что перемещения $\mathbf{U}_{2,k,l}^{-(5)} = 0$ при $l = \pm(k+1)$. Поэтому из (1.70) следует разложение

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{2,n,n}^{+(5)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \left\{ \delta_{t2} f_{n,n,j}^{k,l,\alpha} + \delta_{t1} g_{n,n,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,n,j}^{k,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,n,j}^{k,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(5)}. \end{aligned} \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{2,n,-n}^{+(5)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \left\{ \delta_{t2} f_{n,-n,j}^{k,l,\alpha} + \delta_{t1} g_{n,-n,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,-n,j}^{k,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(5)} + \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,-n,j}^{k,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(5)}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Таким образом, доказана формула

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)}(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.83)$$

где коэффициенты $T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha}$ описаны в условии теоремы.

Из формул (1.64) — (1.68) следуют соотношения

$$\mathbf{U}_{2,k,k}^{-(5)} = \chi \tilde{\mathbf{U}}_{1,k,k}^{-(5)} + (1+\chi) \tilde{\mathbf{U}}_{3,k,k}^{-(5)}; \quad (1.84)$$

$$\mathbf{U}_{2,k,-k}^{-(5)} = \chi \tilde{\mathbf{U}}_{1,k,-k}^{-(5)} - (1+\chi) \tilde{\mathbf{U}}_{3,k,-k}^{-(5)}; \quad (1.85)$$

$$\mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(5)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,k,k}^{-(5)}, \quad \mathbf{U}_{2,k,k+1}^{-(5)} = 0, \quad \mathbf{U}_{3,k,k+1}^{-(5)} = -\tilde{\mathbf{U}}_{2,k,k}^{-(5)}; \quad (1.86)$$

$$\mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(5)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,k,-k}^{-(5)}, \quad \mathbf{U}_{2,k,-k-1}^{-(5)} = 0, \quad \mathbf{U}_{3,k,-k-1}^{-(5)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,k,-k}^{-(5)}; \quad (1.87)$$

$$\mathbf{U}_{1,0,1}^{-(5)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(5)}, \quad \mathbf{U}_{1,0,-1}^{-(5)} = \tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(5)}, \quad \mathbf{U}_{2,0,\pm 1}^{-(5)} = 0; \quad (1.88)$$

$$\mathbf{U}_{3,0,1}^{-(5)} = -\tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(5)}, \quad \mathbf{U}_{3,0,-1}^{-(5)} = \tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(5)}, \quad \mathbf{U}_{2,0,0}^{-(5)} = \chi \tilde{\mathbf{U}}_{1,0,0}^{-(5)}, \quad \mathbf{U}_{3,0,0}^{-(5)} = 0. \quad (1.89)$$

Преобразуем разложение (1.83), учитывая равенства (1.84) — (1.89):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(5)} &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k-1} T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,l}^{-(5)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,k,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,k}^{-(5)} + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,k+1}^{-(5)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,-k,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,-k}^{-(5)} + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,-k-1}^{-(5)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 T_{s,n,m,j}^{t,0,-1,\alpha} \mathbf{U}_{t,0,-1}^{-(5)} + \sum_{t=1}^3 T_{s,n,m,j}^{t,0,0,\alpha} \mathbf{U}_{t,0,0}^{-(5)} + \sum_{t=1}^3 T_{s,n,m,j}^{t,0,1,\alpha} \mathbf{U}_{t,0,1}^{-(5)} = \\ &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k-1} T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,l}^{-(5)} + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \delta_{t1} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} \right] + \right. \\ &\quad + \delta_{t2} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,k+1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,k,k+1,\alpha} \right] + \delta_{t3} \left[T_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} + (1+\chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} \right] \left. \right\} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,k}^{-(5)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \delta_{t1} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} \right] + \delta_{t2} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,-k-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,k,-k-1,\alpha} \right] + \right. \\ &\quad + \delta_{t3} \left[T_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} - (1+\chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} \right] \left. \right\} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,-k}^{-(5)} + \sum_{t=1}^3 \left\{ \delta_{t1} \left[T_{s,n,m,j}^{1,0,0,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,0,0,\alpha} \right] + \right. \\ &\quad + \delta_{t2} \left[T_{s,n,m,j}^{1,0,1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,0,1,\alpha} \right] + \delta_{t3} \left[T_{s,n,m,j}^{1,0,-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,0,-1,\alpha} \right] \left. \right\} \tilde{\mathbf{U}}_{t,0,0}^{-(5)}. \quad (1.90) \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,l}^{-(5)}(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.91)$$

где коэффициенты $\tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha}$ приведены в формулировке теоремы. Теорема доказана.

Приведенные в предыдущем параграфе внешние решения уравнения Ламе не при всех значениях параметров n и m регулярны, а система внутренних решений не является линейно независимой. В работе [60] были построены такие системы решений уравнения (1.21) в областях Ω_6^\pm , которые являются линей-

ными комбинациями решений (1.40), (1.41) и удовлетворяют всем свойствам базисности [62]. Положим

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(6)} = \mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(6)}; \quad s = \overline{1,3}; \quad n = 1, 2, \dots, |m| \leq n-1; \quad (1.92)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{+(6)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{\pm(6)} \mp \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{\pm(6)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.93)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,0,0}^{+(6)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,1}^{+(6)} + (1 + \chi) \mathbf{U}_{3,0,1}^{+(6)} + \mathbf{U}_{2,0,1}^{+(6)}; \quad (1.94)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{+(6)} = \mathbf{U}_{2,n,\pm n}^{+(6)}; \quad n = 0, 1, \dots; \quad (1.95)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{+(6)} = -\chi \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{+(6)} \pm (1 + \chi) \mathbf{U}_{3,n,\pm(n+1)}^{+(6)} + \mathbf{U}_{2,n,\pm(n+1)}^{+(6)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.96)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{+(6)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,-1}^{+(6)} - (1 + \chi) \mathbf{U}_{3,0,-1}^{+(6)} + \mathbf{U}_{2,0,-1}^{+(6)}; \quad (1.97)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{-(6)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{-(6)}; \quad n = 0, 1, \dots; \quad (1.98)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{-(6)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{-(6)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.99)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{-(6)} = \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{-(6)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.100)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(6)} = \mathbf{U}_{1,0,1}^{-(6)}; \quad (1.101)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(6)} = \mathbf{U}_{1,0,-1}^{-(6)}. \quad (1.102)$$

В работе [75] получены теоремы сложения для решений (1.92) — (1.102).

Теорема 1.8. *Справедливы разложения внешних модифицированных базисных решений уравнения Ламе в сжатой сфероидальной системе координат с началом в точке O_j по внутренним модифицированным решениям в сжатой сфероидальной системе координат с началом в точке O_α при $\tilde{\xi}_\alpha \in (0, \beta_{j\alpha})$:*

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(6)}(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{U}_{t,k,l}^{-(6)}(\tilde{\xi}_\alpha, \tilde{\eta}_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.103)$$

где

$$\beta_{j\alpha} = \text{Arsh} \frac{\sqrt{t_{j\alpha}^2 + \rho_{j\alpha}^2 - c_\alpha^2} + \sqrt{(t_{j\alpha}^2 + \rho_{j\alpha}^2 - c_\alpha^2)^2 + 4c_\alpha^2 \rho_{j\alpha}^2}}{c_\alpha \sqrt{2}},$$

$$t_{j\alpha} = \max(|z_{j\alpha}| - c_j, 0);$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha}, \quad k \geq 1, |\ell| \leq k-1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,k+1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,k,k+1,\alpha}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} + (1 + \chi)T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,-k-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,k,-k-1,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} - (1 + \chi)T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,0,0,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,0,-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,0,-1,\alpha};$$

$$T_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \delta_{st}f_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{s2}\delta_{t1}g_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (n \geq 1) \wedge (|m| \leq n-1);$$

$$T_{1,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (\delta_{t1} - \delta_{t3})f_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1);$$

$$T_{1,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = 0, \quad n \geq 1;$$

$$T_{1,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (\delta_{t1} + \delta_{t3})f_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (-k-1 \leq \ell \leq k) \wedge (n \geq 1);$$

$$T_{1,0,0,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \tilde{\delta}_t f_{0,1,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1}g_{0,1,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad 1-k \leq \ell \leq k+1;$$

$$T_{1,0,0,j}^{t,k,-k,\alpha} = \delta_{t1}g_{0,1,j}^{k,-k,\alpha};$$

$$T_{1,0,0,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = \delta_{t1}g_{0,1,j}^{k,-k-1,\alpha};$$

$$T_{2,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \delta_{t2}f_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1}g_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad -k \leq \ell \leq k;$$

$$T_{2,n,n,j}^{t,k,k+1,\alpha} = \delta_{t1}g_{n,n,j}^{k,k+1,\alpha};$$

$$T_{2,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = \delta_{t1}g_{n,n,j}^{k,-k-1,\alpha};$$

$$T_{2,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \delta_{t2}f_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1}g_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad -k \leq \ell \leq k;$$

$$T_{2,n,-n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = \delta_{t1}g_{n,-n,j}^{k,-k-1,\alpha};$$

$$T_{2,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} = \delta_{t1}g_{n,-n,j}^{k,k+1,\alpha};$$

$$T_{3,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \tilde{\delta}_t f1_{n,n+1,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g1_{n,n+1,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (1-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1);$$

$$T_{3,n,n,j}^{t,k,-k,\alpha} = \delta_{t1} g1_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha}, \quad n \geq 1;$$

$$T_{3,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = \delta_{t1} g2_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha}, \quad n \geq 1;$$

$$T_{3,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \hat{\delta}_t f1_{n,-n-1,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g1_{n,-n-1,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad -k-1 \leq \ell \leq k-1;$$

$$T_{3,n,-n,j}^{t,k,k,\alpha} = \delta_{t1} g1_{n,-n-1,j}^{k,k,\alpha};$$

$$T_{3,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} = \delta_{t1} g3_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha};$$

$$g1_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} = -\bar{q}_{j0}^2 f2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} - \bar{q}_{\alpha 0}^2 f3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + z_{j\alpha} f4_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha};$$

$$g2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} = -\bar{q}_{j0}^2 f2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} - \bar{q}_{\alpha 0}^2 f3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + f5_{n,j}^{k,\alpha};$$

$$g3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} = -\bar{q}_{j0}^2 f2_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} - \bar{q}_{\alpha 0}^2 f3_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} + f6_{n,j}^{k,\alpha};$$

$$\tilde{\delta}_t = -\chi \delta_{t1} + (\chi + 1) \delta_{t3} + \delta_{t2};$$

$$\hat{\delta}_t = -\chi \delta_{t1} - (\chi + 1) \delta_{t3} + \delta_{t2};$$

$$f1_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha};$$

$$f2_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n+2}^{\infty} (n-r) \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha};$$

$$f3_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k+2}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} (k-p) \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha};$$

$$f4_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = (-1)^{m+l} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} u_{p+r+1,m-\ell}^{+(4)j,\alpha};$$

$$f5_{n,j}^{k,\alpha} = (-1)^{n-k} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} v_{p+r,n,k}^{j,\alpha};$$

$$f6_{n,j}^{k,\alpha} = (-1)^{k-n} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kp\alpha} w_{p+r,n,k}^{j,\alpha};$$

$$\Gamma_{nrj}^{kp\alpha} = \frac{1}{\gamma_{kp} \gamma_{nr}} (-1)^p (-i)^{p+r+1} \varepsilon_{kp} \varepsilon_{nr} \left(\frac{c_j}{2} \right)^{r+1} \left(\frac{c_\alpha}{2} \right)^p;$$

$$\gamma_{kp} = \Gamma\left(\frac{p-k}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{k+p}{2} + \frac{3}{2}\right);$$

$$v_{\nu,n,k}^{j,\alpha} = \begin{cases} u_{\nu,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{\nu+1,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \geq n+k+2, \\ \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \leq n+k+1, \end{cases}$$

$$w_{\nu,n,k}^{j,\alpha} = \begin{cases} u_{\nu,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{\nu+1,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \geq n+k+2, \\ \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \leq n+k+1, \end{cases}$$

$$u_{n,m}^{+(4)j,\alpha} = \begin{cases} \frac{(n-m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}} P_n^m(\cos \theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n \geq m, \\ \frac{(-1)^m (n+m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}} P_n^{-m}(\cos \theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n < m, \end{cases}$$

$(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$ — сферические координаты точки O_α в системе координат с началом в точке O_j .

Теорема 1.8 может быть доказана аналогично теореме 1.7.

1.4. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в сферических координатах

В работе [59] были введены следующие частные решения уравнения Ламе (1.21) во внешности (внутренности) шара $\Omega_4^\pm = \{(r, \theta, \varphi) : r \gtrless r_0\}$:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{D}_s u_{n\mp 1,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi); \quad s = 1, 3; \quad (1.104)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) - \frac{r_0^2}{2(n \pm 1) + 1} \mathbf{D}_1 u_{n\pm 1,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi), \quad (1.105)$$

где $n = 0, 1, \dots; |m| \leq n+1; m, n \in \mathbb{Z}$, $u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi)$; \mathbf{D}_s определены формулами (1.5), (1.24).

Приведем координатную форму перемещений (1.104), (1.105):

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = -u_{n,m-1}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_{-1} + u_{n,m+1}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_1 \mp u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_0; \quad (1.106)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) = & \frac{1}{2n+3} \left\{ -(n-m+2)(n+m)u_{n,m-1}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ & + (n-m)(n+m+2)u_{n,m+1}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_1 - [(n-m+1)(n+m+1) + \chi(2n+3)] \times \\ & \left. \times u_{n,m}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_0 + (r^2 - r_0^2) \nabla u_{n+1,m}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) \right\}; \quad (1.107) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) = & \frac{1}{2n-1} \left\{ -(n-m+1)(n+m-1)u_{n,m-1}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ & + (n-m-1)(n+m+1)u_{n,m+1}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_1 + \\ & \left. + [(n-m)(n+m) - \chi(2n-1)] u_{n,m}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_0 + (r^2 - r_0^2) \nabla u_{n-1,m}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) \right\}; \quad (1.108) \end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = u_{n,m-1}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_{-1} + u_{n,m+1}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_1. \quad (1.109)$$

В работе [62] доказана базисность решений (1.104), (1.105) в областях Ω_4^\pm .

Теорема 1.9. При $r_2, r_{20} < r_{12}$ справедливы разложения

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+l+1} f_{n,m}^{(44)k,l} \mathbf{U}_{s,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2), \quad s = 1, 3; \quad (1.110)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+l} \left[f_{n,m}^{(44)k,l} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) + \right. \\ & \left. + \tilde{f}_{n,m}^{+(44)k,l} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) \right], \quad (1.111) \end{aligned}$$

где

$$f_{n,m}^{(44)k,l} = u_{n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}); \quad (1.112)$$

$$\tilde{f}_{n,m}^{+(44)k,l} = \frac{r_{20}^2}{2k+3} f_{n,m}^{(44)k+2,l} - z_{12} f_{n,m}^{(44)k+1,l} + \frac{r_{10}^2}{2n+3} f_{n+1,m}^{(44)k+1,l}. \quad (1.113)$$

При $r_1, r_{10} < r_{12}$ справедливы разложения

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+l+1} f_{n,m}^{(44)k,l} \mathbf{U}_{s,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1); \quad s = 1, 3; \quad (1.114)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{+(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+l} \left[f_{n,m}^{(44)k,l} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{n,m}^{-(44)k,l} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) \right], \quad (1.115)$$

где

$$\tilde{f}_{n,m}^{-(44)k,l} = \frac{r_{10}^2}{2k+3} f_{n,m}^{(44)k+2,l} - z_{12} f_{n,m}^{(44)k+1,l} + \frac{r_{20}^2}{2n+3} f_{n+1,m}^{(44)k+1,l}. \quad (1.116)$$

1.5. Теоремы сложения решений уравнения Ламе для модифицированного базиса в сферических координатах

Приведенные в предыдущем параграфе внешние решения уравнения Ламе не при всех значениях параметров n и m регулярны, а система внутренних решений не является линейно независимой. В работе [60] были построены такие системы решений уравнения (1.21) в областях Ω_4^\pm , которые являются линейными комбинациями решений (1.104), (1.105) и удовлетворяют всем свойствам базисности [62]. Положим

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)} = \mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(4)}; \quad s = \overline{1, 3}; \quad n = 1, 2, \dots, |m| \leq n-1; \quad (1.117)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{+(4)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{\pm(4)} \mp \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{\pm(4)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.118)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,0,0}^{+(4)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,1}^{+(4)} + (1+\chi) \mathbf{U}_{3,0,1}^{+(4)} + \mathbf{U}_{2,0,1}^{+(4)}; \quad (1.119)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{+(4)} = \mathbf{U}_{2,n,\pm n}^{+(4)}; \quad n = 0, 1, \dots; \quad (1.120)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{+(4)} = -\chi \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{+(4)} \pm (1+\chi) \mathbf{U}_{3,n,\pm(n+1)}^{+(4)} + \mathbf{U}_{2,n,\pm(n+1)}^{+(4)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.121)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{+(4)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,-1}^{+(4)} - (1+\chi) \mathbf{U}_{3,0,-1}^{+(4)} + \mathbf{U}_{2,0,-1}^{+(4)}; \quad (1.122)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{-(4)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{-(4)}; \quad n = 0, 1, \dots; \quad (1.123)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{-(4)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{-(4)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.124)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{-(4)} = \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{-(4)}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.125)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(4)} = \mathbf{U}_{1,0,1}^{-(4)}; \quad (1.126)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(4)} = \mathbf{U}_{1,0,-1}^{-(4)}. \quad (1.127)$$

Теорема 1.10. *Справедливы разложения внешних модифицированных базисных решений уравнения Ламе в сферической системе координат с началом в точке O_j по внутренним модифицированным решениям в сферической системе координат с началом в точке O_α при $r_\alpha < r_{j\alpha}$:*

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,l}^{-(4)}(r_\alpha, \theta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.128)$$

где

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha}, \quad k \geq 1, |\ell| \leq k-1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} - \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,k+1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,k,k+1,\alpha}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} - (1 + \chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} - \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,-k-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,k,-k-1,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} + (1 + \chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,0,0,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,0,-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,0,-1,\alpha};$$

$$T_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (-1)^{k+l+s} \left\{ \delta_{st} f_{n,m,j}^{k,l,\alpha} + \delta_{s2} \delta_{t1} g_{n,m,j}^{k,l,\alpha} \right\}, \quad (n \geq 1, |m| \leq n-1);$$

$$T_{1,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (-1)^{k+l+1} (\delta_{t1} - \delta_{t3}) f_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1);$$

$$T_{1,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = 0, \quad n \geq 1;$$

$$T_{1,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (-1)^{k+l+1} (\delta_{t1} + \delta_{t3}) f_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha}, \quad (-k-1 \leq \ell \leq k) \wedge (n \geq 1);$$

$$T_{1,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} = 0, \quad n \geq 1;$$

$$T_{1,0,0,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (-1)^{k+l+1} (\tilde{\delta}_t f_{0,1,j}^{k,\ell,\alpha} - \delta_{t1} g_{0,1,j}^{k,\ell,\alpha}), \quad 1-k \leq \ell \leq k+1;$$

$$\begin{aligned}
T_{1,0,0,j}^{t,k,-k,\alpha} &= \delta_{t1} g_{0,1,j}^{k,-k,\alpha}; \\
T_{1,0,0,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= \delta_{t1} \tilde{g}_{0,1,j}^{k,-k-1,\alpha}; \\
T_{2,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= (-1)^{k+l} (\delta_{t2} f_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha}), \quad -k \leq \ell \leq k; \\
T_{2,n,n,j}^{t,k,k+1,\alpha} &= -\delta_{t1} g_{n,n,j}^{k,k+1,\alpha}; \\
T_{2,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= -\delta_{t1} g_{n,n,j}^{k,-k-1,\alpha}; \\
T_{2,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= (-1)^{k+l} (\delta_{t2} f_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha} + \delta_{t1} g_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha}), \quad (-k \leq \ell \leq k) \wedge (n \geq 1); \\
T_{2,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} &= -\delta_{t1} g_{n,-n,j}^{k,k+1,\alpha}, \quad n \geq 1; \\
T_{2,n,-n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= -\delta_{t1} g_{n,-n,j}^{k,-k-1,\alpha}, \quad n \geq 1; \\
T_{3,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= (-1)^{k+l+1} (\tilde{\delta}_t f_{n,n+1,j}^{k,\ell,\alpha} - \delta_{t1} g_{n,n+1,j}^{k,\ell,\alpha}), \quad (1-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1); \\
T_{3,n,n,j}^{t,k,-k,\alpha} &= \delta_{t1} g_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha}, \quad n \geq 1; \\
T_{3,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} &= \delta_{t1} \tilde{g}_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha}, \quad n \geq 1; \\
T_{3,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} &= (-1)^{k+l+1} (\hat{\delta}_t f_{n,-n-1,j}^{k,\ell,\alpha} - \delta_{t1} g_{n,-n-1,j}^{k,\ell,\alpha}), \quad -k-1 \leq \ell \leq k-1; \\
T_{3,n,-n,j}^{t,k,k,\alpha} &= \delta_{t1} g_{n,-n-1,j}^{k,k,\alpha}; \\
T_{3,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} &= \delta_{t1} \tilde{g}_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha}; \\
g_{n,m,j}^{k,l,\alpha} &= \left(\frac{r_{j0}^2}{2n+3} + \frac{r_{\alpha 0}^2}{2k+3} \right) f_{n,m,j}^{k+2,l,\alpha} - z_{j\alpha} f_{n,m,j}^{k+1,l,\alpha}; \\
\tilde{g}_{n,m,j}^{k,l,\alpha} &= \left(\frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} - \frac{r_{j0}^2}{2n+3} - \frac{r_{\alpha 0}^2}{2k+3} \right) f_{n+1,m,j}^{k+1,l,\alpha}; \\
\tilde{\delta}_t &= -\chi \delta_{t1} + (\chi+1) \delta_{t3} - \delta_{t2}; \\
\hat{\delta}_t &= -\chi \delta_{t1} - (\chi+1) \delta_{t3} - \delta_{t2}; \\
f_{n,m,j}^{k,l,\alpha} &= u_{n+k,m-\ell}^{+(4)j,\alpha}; \\
u_{n,m}^{+(4)j,\alpha} &= \begin{cases} \frac{(n-m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}} P_n^m(\cos \theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n \geq m, \\ \frac{(-1)^m (n+m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}} P_n^{-m}(\cos \theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n < m; \end{cases}
\end{aligned}$$

$(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$ — сферические координаты точки O_α в системе координат с началом в точке O_j .

Доказательство. Формулы (1.110), (1.111) из параграфа 1.4 могут быть записаны в виде одной формулы

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)} = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+l+s} \left\{ \delta_{st} f_{n,m,j}^{k,l,\alpha} + \right. \\ \left. + \delta_{t1} \delta_{s2} \left[\left(\frac{r_{j0}^2}{2n+3} + \frac{r_{\alpha 0}^2}{2k+3} \right) f_{n,m,j}^{k+2,l,\alpha} - z_{j\alpha} f_{n,m,j}^{k+1,l,\alpha} \right] \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)}. \quad (1.129)$$

Преобразуем вектор-функцию $\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,n}^{+(4)}$, используя формулу (1.129):

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,n}^{+(4)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} f_{n,n,j}^{k,l,\alpha} \left[\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)} - \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(4)} \right]. \quad (1.130)$$

Учитывая, что справедливо соотношение

$$\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)} - \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(4)} = -2u_{k,l-1}^{-(4)} \mathbf{e}_{-1} + u_{k,l}^{-(4)} \mathbf{e}_0 = \begin{cases} 0, & l = -k-1, \\ u_{k,-k}^{-(4)} \mathbf{e}_0, & l = -k, \end{cases}$$

разложение (1.130) можно представить в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,n}^{+(4)} = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k+1} (-1)^{k+l+1} (\delta_{t1} - \delta_{t3}) f_{n,n,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)}, \quad n \geq 1. \quad (1.131)$$

Аналогично вектор-функция $\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,-n}^{+(4)}$ с учетом соотношения

$$\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)} + \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(4)} = 2u_{k,l+1}^{-(4)} \mathbf{e}_1 + u_{k,l}^{-(4)} \mathbf{e}_0 = \begin{cases} 0, & l = k+1, \\ u_{k,k}^{-(4)} \mathbf{e}_0, & l = k, \end{cases}$$

представима разложением

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,-n}^{+(4)} = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^k (-1)^{k+l+1} (\delta_{t1} + \delta_{t3}) f_{n,-n,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)}. \quad (1.132)$$

Запишем разложение перемещения $\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(4)}$:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(4)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+l+1} \left\{ -\chi f_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)} + (1+\chi) f_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(4)} - \right. \\ \left. - f_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(4)} - g_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)} \right\}. \quad (1.133)$$

Заметим, что выполняется равенство

$$-\chi \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)} + (1+\chi) \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(4)} - \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(4)} = \begin{cases} u_{k,-k}^{-(4)} \mathbf{e}_1, & l = -k-1; \\ 0, & l = -k. \end{cases} \quad (1.134)$$

Теперь можно перегруппировать слагаемые в формуле (1.133) следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(4)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k+1} (-1)^{k+l+1} \left\{ \left[-\chi \delta_{t1} + (1+\chi) \delta_{t3} - \delta_{t2} \right] f_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} - \right. \\ & \left. - \delta_{t1} g_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[f_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} - g_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} \right] \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(4)} + \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k}^{-(4)}. \end{aligned} \quad (1.135)$$

С помощью рекуррентных формул для функций Лежандра преобразуем сумму

$$f_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} + z_{j\alpha} f_{n,n+1,j}^{k+1,-k-1,\alpha} = u_{n+k,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{n+k+1,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}. \quad (1.136)$$

Так как справедливо соотношение

$$u_{n+k,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{n+k+1,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} = \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,n+k+2}^{+(4)j,\alpha},$$

то равенство (1.136) может быть записано в виде

$$f_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} + z_{j\alpha} f_{n,n+1,j}^{k+1,-k-1,\alpha} = \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}.$$

Подставляя эту формулу в разложение (1.135), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{3,n,n}^{+(4)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k+1} (-1)^{k+l+1} \left\{ \left[-\chi \delta_{t1} + (1+\chi) \delta_{t3} - \delta_{t2} \right] f_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} - \right. \\ & \left. - \delta_{t1} g_{n,n+1,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)} + \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k}^{-(4)} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} - \frac{r_{j0}^2}{2n+3} - \frac{r_{\alpha 0}^2}{2k+3} \right) f_{n,n+1,j}^{k+2,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(4)}. \end{aligned} \quad (1.137)$$

Подобным образом можно записать

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,-n}^{+(4)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k-1} (-1)^{k+l+1} \left\{ \left[-\chi \delta_{t1} - (1+\chi) \delta_{t3} - \delta_{t2} \right] f_{n,-n-1,j}^{k,l,\alpha} - \right. \\
& \left. - \delta_{t1} g_{n,-n-1,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)} + \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,-n-1,j}^{k,k,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k}^{-(4)} + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} - \frac{r_{j0}^2}{2n+3} - \frac{r_{\alpha 0}^2}{2k+3} \right) f_{n,-n-1,j}^{k+2,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(4)}. \quad (1.138)
\end{aligned}$$

Заметим, что перемещение $\mathbf{U}_{2,k,l}^{-(4)} = 0$ при $l = \pm(k+1)$. Поэтому из (1.129) следует разложение

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,n}^{+(4)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k (-1)^{k+l} \left\{ \delta_{t2} f_{n,n,j}^{k,l,\alpha} + \delta_{t1} g_{n,n,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)} - \\
& - \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,n,j}^{k,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(4)} - \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,n,j}^{k,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(4)}, \quad (1.139)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,-n}^{+(4)} = & \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k (-1)^{k+l} \left\{ \delta_{t2} f_{n,-n,j}^{k,l,\alpha} + \delta_{t1} g_{n,-n,j}^{k,l,\alpha} \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)} - \\
& - \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,-n,j}^{k,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(4)} - \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,-n,j}^{k,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(4)}. \quad (1.140)
\end{aligned}$$

Таким образом, доказана формула

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)}(r_\alpha, \theta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.141)$$

где коэффициенты $T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha}$ описаны в условии теоремы.

Из формул (1.123) — (1.127) следуют соотношения

$$\mathbf{U}_{2,k,k}^{-(4)} = -\chi \tilde{\mathbf{U}}_{1,k,k}^{-(4)} - (1+\chi) \tilde{\mathbf{U}}_{3,k,k}^{-(4)}; \quad (1.142)$$

$$\mathbf{U}_{2,k,-k}^{-(4)} = -\chi \tilde{\mathbf{U}}_{1,k,-k}^{-(4)} + (1+\chi) \tilde{\mathbf{U}}_{3,k,-k}^{-(4)}; \quad (1.143)$$

$$\mathbf{U}_{1,k,k+1}^{-(4)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,k,k}^{-(4)}, \quad \mathbf{U}_{2,k,k+1}^{-(4)} = 0, \quad \mathbf{U}_{3,k,k+1}^{-(4)} = -\tilde{\mathbf{U}}_{2,k,k}^{-(4)}; \quad (1.144)$$

$$\mathbf{U}_{1,k,-k-1}^{-(4)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,k,-k}^{-(4)}, \quad \mathbf{U}_{2,k,-k-1}^{-(4)} = 0, \quad \mathbf{U}_{3,k,-k-1}^{-(4)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,k,-k}^{-(4)}; \quad (1.145)$$

$$\mathbf{U}_{1,0,1}^{-(4)} = \tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(4)}, \quad \mathbf{U}_{1,0,-1}^{-(4)} = \tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(4)}, \quad \mathbf{U}_{2,0,\pm 1}^{-(4)} = 0, \quad \mathbf{U}_{3,0,0}^{-(4)} = 0; \quad (1.146)$$

$$\mathbf{U}_{3,0,1}^{-(4)} = -\tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(4)}, \quad \mathbf{U}_{3,0,-1}^{-(4)} = \tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(4)}, \quad \mathbf{U}_{2,0,0}^{-(4)} = -\chi \tilde{\mathbf{U}}_{1,0,0}^{-(4)}. \quad (1.147)$$

Преобразуем разложение (1.141), учитывая равенства (1.142) — (1.147):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)} &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k-1} T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,l}^{-(4)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,k,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,k}^{-(4)} + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,k+1,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,k+1}^{-(4)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,-k,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,-k}^{-(4)} + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} T_{s,n,m,j}^{t,k,-k-1,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,-k-1}^{-(4)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 T_{s,n,m,j}^{t,0,-1,\alpha} \mathbf{U}_{t,0,-1}^{-(4)} + \sum_{t=1}^3 T_{s,n,m,j}^{t,0,0,\alpha} \mathbf{U}_{t,0,0}^{-(4)} + \sum_{t=1}^3 T_{s,n,m,j}^{t,0,1,\alpha} \mathbf{U}_{t,0,1}^{-(4)} = \\ &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k+1}^{k-1} T_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,l}^{-(4)} + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \delta_{t1} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} - \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} \right] + \right. \\ &\quad + \delta_{t2} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,k+1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,k,k+1,\alpha} \right] + \delta_{t3} \left[T_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} - (1 + \chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} \right] \left. \right\} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,k}^{-(4)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \delta_{t1} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} - \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} \right] + \delta_{t2} \left[T_{s,n,m,j}^{1,k,-k-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,k,-k-1,\alpha} \right] + \right. \\ &\quad + \delta_{t3} \left[T_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} + (1 + \chi) T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} \right] \left. \right\} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,-k}^{-(4)} + \sum_{t=1}^3 \left\{ \delta_{t1} \left[T_{s,n,m,j}^{1,0,0,\alpha} - \chi T_{s,n,m,j}^{2,0,0,\alpha} \right] + \right. \\ &\quad + \delta_{t2} \left[T_{s,n,m,j}^{1,0,1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,0,1,\alpha} \right] + \delta_{t3} \left[T_{s,n,m,j}^{1,0,-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,0,-1,\alpha} \right] \left. \right\} \tilde{\mathbf{U}}_{t,0,0}^{-(4)}. \quad (1.148) \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,l}^{-(4)}(r_\alpha, \theta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.149)$$

где коэффициенты $\tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha}$ приведены в формулировке теоремы. Теорема доказана.

1.6. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в цилиндрических координатах

В работе [60] были введены следующие частные решения уравнения Ламе (1.21) во внешности (внутренности) цилиндра $\Omega_3^\pm = \{(\rho, z, \varphi) : \rho \gtrless \rho_0\}$:

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \lambda^{-1} \mathbf{D}_s u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi); \quad s = 1, 3; \quad (1.150)$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \lambda^{-1} \mathbf{B}_2 u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi), \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (1.151)$$

где

$$\mathbf{B}_2 = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla - \chi [\mathbf{e}_z \times [\nabla \times \mathbf{e}_z]]; \quad (1.152)$$

функции $u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi)$ определены в (1.4).

Приведем координатную форму перемещений (1.150), (1.151):

$$\mathbf{U}_{1,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \mp u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_1 + i u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_0; \quad (1.153)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \mp (D - \chi) \left[u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ \left. + u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_1 \right] + i D u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_0; \end{aligned} \quad (1.154)$$

$$\mathbf{U}_{3,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \pm u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) \mathbf{e}_1, \quad (1.155)$$

где $D = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$.

В работе [62] установлена базисность решений (1.150), (1.151).

Теорема 1.11. При $\rho_2, \rho_{20} \in (0; \rho_{12})$ справедливы разложения

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l f_{\lambda,m}^{+(33)l} \mathbf{U}_{s,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2), \quad (1.156)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \left[f_{\lambda,m}^{+(33)l} \mathbf{U}_{2,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{\lambda,m}^{+(33)l} \mathbf{U}_{1,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) \right], \end{aligned} \quad (1.157)$$

где

$$f_{\lambda,m}^{\pm(33)l} = u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}); \quad (1.158)$$

$$\tilde{f}_{\lambda,m}^{\pm(33)l} = \rho_{12} \frac{\partial}{\partial \rho_{12}} u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}). \quad (1.159)$$

При $\rho_1, \rho_{10} \in (0; \rho_{12})$ справедливы разложения

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^m f_{\lambda,m}^{-(33)l} \mathbf{U}_{s,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1), \quad (1.160)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^m & \left[f_{\lambda,m}^{-(33)l} \mathbf{U}_{2,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) + \right. \\ & \left. + \tilde{f}_{\lambda,m}^{-(33)l} \mathbf{U}_{1,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) \right]. \quad (1.161) \end{aligned}$$

Механика упругого деформирования волокнуистых пористых и композиционных материалов

2.1. Структура среды с линейными неоднородностями

В современной технике активно используются разные виды материалов с линейными неоднородностями. К таковым относятся волокнуистые пористые и композиционные материалы. Волокно в материале можно представлять бесконечным цилиндром с определенными механическими свойствами, отличными от свойств матрицы. Особенности напряженно-деформированного состояния такого материала зависят от структуры материала, геометрических и механических характеристик волокон и связующего. Технология производства материала накладывает определенные требования на взаимное расположение волокон в среде, их размер и механические свойства. Тем самым задается определенная структура композита. В условиях реального технологического процесса укладываемые в матрицу волокна могут отличаться по геометрическим и механическим параметрам. Не всегда возможно выдержать определенную структуру материала. Однако в дальнейшем будут рассмотрены материалы с регулярной структурой и волокнами одинакового размера и постоянными механическими характеристиками.

Однонаправленный волокнуистый композит иногда приближенно моделируется трансверсально-изотропным материалом, упругие модули которого в плоскости изотропии заменяются эффективными модулями в плоскости, перпендикулярной волокнам [16, 54].

Структура материала определяется взаимным расположением цилиндрических включений или пор. В дальнейшем будем рассматривать однонаправленные композиты, в которых цилиндрические волокна параллельны между собой.

В этом случае структуру материала можно характеризовать геометрией сечения образца плоскостью, перпендикулярной оси включений. Регулярная структура определяется представительской ячейкой, содержащей конечное число сечений волокон, которая может быть периодически продолжена на всю плоскость сечения материала. Такая ячейка иногда называется упаковкой.

В механике композиционных материалов различают следующие регулярные геометрические структуры расположения волокон [16].

Моноклинная структура, обладающая наименьшим числом плоскостей симметрии, т. е. относящаяся к наиболее общему случаю анизотропии. *Орторомбическая структура*, образованная цилиндрами с осями в вершинах прямоугольников. Эта структура соответствует ортотропной анизотропии. *Тетрагональная структура*, также соответствующая ортотропной анизотропии. *Гексагональная структура*, обладающая наибольшей симметрией. Она соответствует трансверсально-изотропной анизотропии материала.

Важной характеристикой композита является объемное содержание волокна в матрице. Для разных структур упаковок можно вычислить предельное объемное содержание, при котором волокна в упаковке касаются друг друга. В работе [16] приведены результаты

$$\zeta_{max} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.91,$$

$$\zeta_{max} = \frac{\pi}{4} \approx 0.79$$

соответственно для гексагональной и тетрагональной структур.

2.2. Упругое состояние пористого материала с линейной регулярной структурой

Рассмотрим цилиндрический образец однонаправленного пористого материала. Поры имеют форму одинаковых бесконечных круговых цилиндров радиуса R (рис. 2.1). Представительскую ячейку материала будем характеризовать расположением центров $\{O_j\}_{j=1}^N$ круговых сечений волокон плоскостью, перпендикулярной оси образца. Пусть O_0 — центр представительской ячейки. Если

ячейка объемно центрирована, то считаем, что O_0 совпадает с O_1 , в противном случае O_0 не совпадает с O_j ($j = \overline{1, N}$).

Введем цилиндрические системы координат (ρ_j, z_j, φ_j) с началами в точках O_j , оси $O_j z_j$ которых совпадают с осями цилиндров.

Координаты в введенных системах координат связаны соотношениями

$$\begin{cases} x_j = x_\alpha + x_{j\alpha}, \\ y_j = y_\alpha + y_{j\alpha}, \\ z_j = z_\alpha, \end{cases} \quad j \neq \alpha, \quad j, \alpha = \overline{1, N}, \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} x_j = \rho_j \cos \varphi_j, \\ y_j = \rho_j \sin \varphi_j, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\mathbf{O}_j \mathbf{O}_\alpha = (x_{j\alpha}, y_{j\alpha}) = (\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$.

Считаем, что цилиндрические полости свободны от нагрузки. Для определения НДС в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (2.3)$$

с граничными условиями

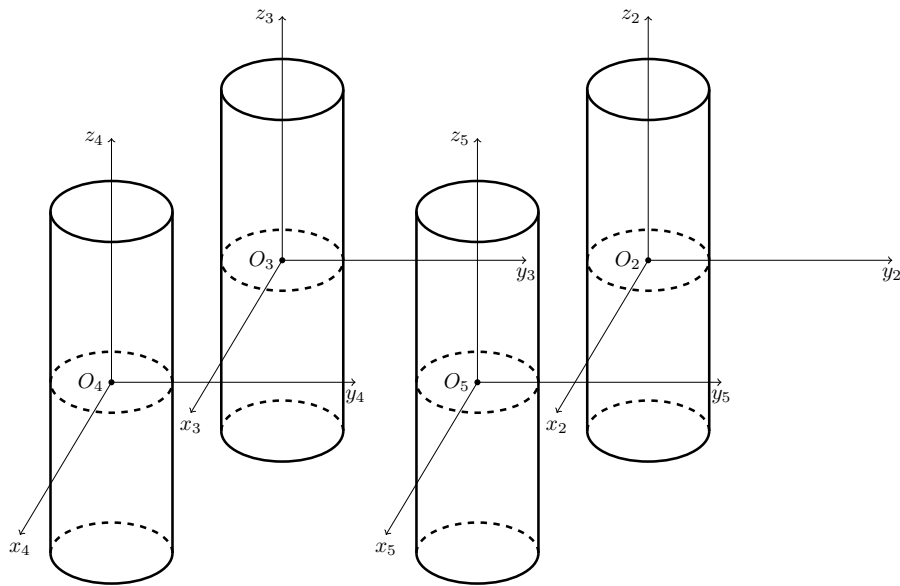


Рис. 2.1. Схематическое представление задачи

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = 0 \quad (2.4)$$

и кусочно-постоянными напряжениями на цилиндрическом образце

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_0} = \left\{ \begin{array}{ll} T, & |z| \leq h/2 \\ 0, & |z| > h/2 \end{array} \right\} \mathbf{e}_\rho, \quad (2.5)$$

где \mathbf{U} — вектор перемещений; $\mathbf{F}\mathbf{U}$ — отвечающий \mathbf{U} вектор усилий на соответствующей граничной поверхности; границы цилиндров Γ_j задаются уравнениями $\rho_j = R_j$ ($j = \overline{1, N}$).

Решение задачи будем искать в виде

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^+ + \mathbf{U}^-, \quad (2.6)$$

где

$$\mathbf{U}^+ = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, z_j, \varphi_j) d\lambda; \quad (2.7)$$

$$\mathbf{U}^- = \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) d\lambda; \quad (2.8)$$

$A_{s,m}^{(j)}(\lambda)$ — неизвестные функции;

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} \mathbf{D}_s u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z); \quad s = 1, 3; \quad (2.9)$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} \mathbf{B}_2 u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{B}_2 = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla - \chi [\mathbf{e}_z \times [\nabla \times \mathbf{e}_z]]; \quad (2.11)$$

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho, \varphi, z) = e^{i\lambda z + im\varphi} \tilde{K}_m(\lambda\rho), \quad u_{\lambda,m}^{-(3)}(\rho, \varphi, z) = e^{i\lambda z + im\varphi} I_m(\lambda\rho),$$

где $\mathbf{D}_1 = \nabla$, $\mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi\mathbf{e}_z$, $\mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z]$ (здесь i — мнимая единица); $I_m(x)$ — модифицированная функция Бесселя, $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign } x)^m K_m(|x|)$, $K_m(x)$ — функция Макдональда; $\chi = 3 - 4\sigma$, $u_{\lambda,m}^{\pm(3)}$ — полный набор частных решений уравнения Лапласа в цилиндрических координатах.

В развернутой координатной форме базисные решения (2.9), (2.10) имеют вид:

$$\mathbf{U}_{1,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \mp u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 + i u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0; \quad (2.12)$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \mp (D - \chi) \left[u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} + u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 \right] + i D u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0; \quad (2.13)$$

$$\mathbf{U}_{3,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \pm u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1, \quad (2.14)$$

где $D = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$; $\mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi)e^{i\varphi}$; $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi)e^{-i\varphi}$; $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z$; $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ — орты цилиндрической системы координат.

Вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n}

$$\mathbf{F}\mathbf{U} = 2G \left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{U}) \right], \quad (2.15)$$

где G — модуль сдвига.

Применив к формулам (2.12) — (2.14) оператор (2.15) на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho$, получим

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_{1,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{2G}{\rho} \left\{ \mp D u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp D u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 + i D u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0 \right\}; \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{2G}{\rho} \left\{ \mp \left[(m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2 \rho^2 + (2\sigma-3)D \right] u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp \right. \\ \left. \mp \left[(m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2 \rho^2 + (2\sigma-3)D \right] u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 + i \left[m^2 + \lambda^2 \rho^2 (2\sigma-2)D \right] u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0 \right\}; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_{3,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{G}{\rho} \left\{ \pm (D + m - 1) u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp (D - m - 1) u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 - i m u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0 \right\}. \quad (2.18)$$

Для удовлетворения граничных условий нам понадобятся теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе для цилиндра:

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, z_j, \varphi_j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l f_{\lambda,m,j,\alpha}^{+(3)l} \mathbf{U}_{s,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha); \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, z_j, \varphi_j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \left[f_{\lambda,m,j,\alpha}^{+(3)l} \mathbf{U}_{2,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{\lambda,m,j,\alpha}^{+(3)l} \mathbf{U}_{1,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) \right]; \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$f_{\lambda,m,j,\alpha}^{+(33)l} = u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, z_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}), \quad \tilde{f}_{\lambda,m,j,\alpha}^{+(33)l} = \rho_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{j\alpha}} u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, z_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha});$$

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, z_0, \varphi_0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{\lambda,m,j}^{-(33)l} \mathbf{U}_{s,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_j, z_j, \varphi_j); \quad (2.21)$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, z_0, \varphi_0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f_{\lambda,m,j}^{-(33)l} \mathbf{U}_{2,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_j, z_j, \varphi_j) + \tilde{f}_{\lambda,m,j}^{-(33)l} \mathbf{U}_{1,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_j, z_j, \varphi_j) \right]; \quad (2.22)$$

$$f_{\lambda,m,j}^{-(33)l} = u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{0j}, z_{0j}, \varphi_{0j}), \quad \tilde{f}_{\lambda,m,j}^{-(33)l} = \rho_{0j} \frac{\partial}{\partial \rho_{0j}} u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{0j}, z_{0j}, \varphi_{0j});$$

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, z_j, \varphi_j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{\lambda,m,j}^{-(33)l} \mathbf{U}_{s,\lambda,l}^{+(3)}(\rho_0, z_0, \varphi_0); \quad (2.23)$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, z_j, \varphi_j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f_{\lambda,m,j}^{-(33)l} \mathbf{U}_{2,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_0, z_0, \varphi_0) + \tilde{f}_{\lambda,m,j}^{-(33)l} \mathbf{U}_{1,\lambda,l}^{+(3)}(\rho_0, z_0, \varphi_0) \right]; \quad (2.24)$$

$$f_{\lambda,m,j}^{-(33)l} = u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{0j}, z_{0j}, \varphi_{0j}), \quad \tilde{f}_{\lambda,m,j}^{-(33)l} = \rho_{0j} \frac{\partial}{\partial \rho_{0j}} u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{0j}, z_{0j}, \varphi_{0j}).$$

Запишем общее решение в системе координат с началами O_0 и O_α с помощью теорем сложения (2.19) — (2.24). В случае, если ячейка не является объемно центрированной,

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, z_0, \varphi_0) + \right. \\ & \left. + \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_0, z_0, \varphi_0) \sum_{\alpha=1}^N \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{0\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0\alpha}, 0, \varphi_{0\alpha}) \right\} d\lambda; \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) + \right. \\ & \left. + \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(0)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{0\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0\alpha}, 0, \varphi_{0\alpha}) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j \neq \alpha} \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) (-1)^m \left[\delta_{st} + \right. \\
& \quad \left. + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{j\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, 0, \varphi_{j\alpha}) \Big\} d\lambda. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

В случае объемно центрированной ячейки вектор перемещения имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) + A_{s,m}^{(1)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) + \right. \\
& + \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) \sum_{\alpha=2}^N \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \right. \\
& \quad \left. + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{1\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{1\alpha}, 0, \varphi_{1\alpha}) \Big\} d\lambda; \quad (2.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) + A_{s,m}^{(1)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) + \right. \\
& + \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) \sum_{\alpha=2}^N \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) (-1)^l \left[\delta_{st} + \right. \\
& \quad \left. + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{1\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{1\alpha}, 0, \varphi_{1\alpha}) \Big\} d\lambda; \quad (2.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) + \right. \\
& + \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(0)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{0\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0\alpha}, 0, \varphi_{0\alpha}) + \\
& + \sum_{j \neq \alpha} \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) (-1)^m \left[\delta_{st} + \right. \\
& \quad \left. + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{j\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, 0, \varphi_{j\alpha}) \Big\} d\lambda, \quad \alpha \neq 1. \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Переходя в формулах (2.25) — (2.29) к напряжениям на поверхности Γ_j , согласно соотношениям (2.4), (2.5), относительно неизвестных функций $A_{s,m}^{(j)}(\lambda)$ получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_0, G, \sigma) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_0, G, \sigma) \times \right. \\
& \quad \times \sum_{\alpha=1}^N \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{0\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0\alpha}, 0, \varphi_{0\alpha}) \Big\} = \\
& \quad = \frac{T \sin \lambda h}{\pi \lambda} \delta_{m0}(1, 1, 0), \quad (2.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R, G, \sigma) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R, G, \sigma) \times \right. \\
& \quad \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(0)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{0\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0\alpha}, 0, \varphi_{0\alpha}) + \\
& \quad + \sum_{j \neq \alpha} \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R, G, \sigma) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) (-1)^m \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{j\alpha}} \right] \times \\
& \quad \times u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, 0, \varphi_{j\alpha}) \Big\} = 0. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Система записана в случае отсутствия объемного центрирования. Для объемно-центрированной ячейки разрешающая система имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_0, G, \sigma) + A_{s,m}^{(1)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_0, G, \sigma) + \right. \\
& \quad + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_0, G, \sigma) \sum_{\alpha=2}^N \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \right. \\
& \quad \left. + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{0\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0\alpha}, 0, \varphi_{0\alpha}) \Big\} = \frac{T \sin \lambda h}{\pi \lambda} \delta_{m0}(1, 1, 0); \quad (2.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R, G, \sigma) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R, G, \sigma) \times \right. \\
& \quad \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(0)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{0\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0\alpha}, 0, \varphi_{0\alpha}) + \\
& \quad + \sum_{j \neq \alpha} \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R, G, \sigma) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) (-1)^m \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{j\alpha}} \right] \times \\
& \quad \times u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, 0, \varphi_{j\alpha}) \Big\} = 0, \quad \alpha \neq 1; \quad (2.33)
\end{aligned}$$

$$\sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R, G, \sigma) + A_{s,m}^{(1)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R, G, \sigma) + \right. \\ \left. + \sum_{j=2}^N \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R, G, \sigma) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) (-1)^m \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{j1} \frac{\partial}{\partial \rho_{j1}} \right] \times \right. \\ \left. \times u_{\lambda, l-m}^{+(3)}(\rho_{j1}, 0, \varphi_{j1}) \right\} = 0; \quad (2.34)$$

$$G_{1,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R) = \mp \frac{2G}{R} D \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \quad G_{1,\lambda,m}^{\pm(1)}(R) = \pm \frac{2G}{R} D \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R); \quad (2.35)$$

$$G_{1,\lambda,m}^{\pm(0)}(R) = \frac{2G}{R} i D \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R); \quad (2.36)$$

$$G_{2,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R) = \mp \frac{2G}{R} \left[(m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2 R^2 + (2\sigma-3)D \right] \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R); \quad (2.37)$$

$$G_{2,\lambda,m}^{\pm(1)}(R) = \mp \frac{2G}{R} \left[(m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2 R^2 + (2\sigma-3)D \right] \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R); \quad (2.38)$$

$$G_{2,\lambda,m}^{\pm(0)}(R) = \frac{2G}{R} i \left[m^2 + \lambda^2 R^2 + (2\sigma-2)D \right] \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R); \quad (2.39)$$

$$G_{3,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R) = \pm \frac{G}{R} (D+m-1) \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R); \quad (2.40)$$

$$G_{3,\lambda,m}^{\pm(1)}(R) = \mp \frac{G}{R} (D-m-1) \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R); \quad (2.41)$$

$$G_{3,\lambda,m}^{\pm(0)}(R) = -\frac{G}{R} i m \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R); \quad (2.42)$$

$$\tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R) = \begin{Bmatrix} \tilde{K}_m(\lambda R) \\ I_m(\lambda R) \end{Bmatrix}. \quad (2.43)$$

2.3. Анализ разрешающей системы

Теорема 2.1. При любом $\lambda \neq 0$ оператор системы (2.30), (2.31) является фредгольмовым в гильбертовом пространстве l_2 при выполнении условий $R_j + R_\alpha < \rho_{j\alpha}$ ($j \neq \alpha$; $j, \alpha = 1 \div N$), $\rho_{0\alpha} + R_\alpha < R_0$ ($\alpha = 1 \div N$).

Доказательство. Путем переобозначения неизвестных функций

$$A_{s,m}^{(j)}(\lambda) = \frac{\tilde{A}_{s,m}^{(j)}(\lambda)}{K_m(|\lambda|R_j)}, \quad (j = 1 \div N), \quad A_{s,m}^{(0)}(\lambda) = \frac{\tilde{A}_{s,m}^{(0)}(\lambda)}{I_m(\lambda R_0)} \quad (2.44)$$

и решения системы относительно $\tilde{A}_{s,m}^{(j)}(\lambda)$ можно представить систему (2.30), (2.31) в виде

$$\tilde{A}_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) + \sum_{j \neq \alpha} \sum_{p=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{1,\alpha,s,m}^{j,p,l} \tilde{A}_{p,l}^{(j)}(\lambda) + \sum_{p=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{2,\alpha,s,m}^{p,l} \tilde{A}_{p,l}^{(0)}(\lambda) = 0, \quad (2.45)$$

$$\tilde{A}_{s,m}^{(0)}(\lambda) + \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{3,s,m}^{j,p,l} \tilde{A}_{p,l}^{(j)}(\lambda) = F_{s,m}(\lambda). \quad (2.46)$$

Опустим явную запись матричных коэффициентов. Заметим, что модули матричных коэффициентов $|T_{1,\alpha,s,m}^{j,p,l}|$, $|T_{2,\alpha,s,m}^{p,l}|$, $|T_{3,s,m}^{j,p,l}|$ оцениваются сверху конечными линейными комбинациями выражений вида (2.47) — (2.49) соответственно:

$$\left| \frac{I_m(\lambda R_\alpha)}{K_l(|\lambda|R_j)} K_{m-l}(|\lambda|\rho_{j\alpha}) \right|; \quad (2.47)$$

$$\left| \frac{I_m(\lambda R_\alpha)}{I_l(\lambda R_0)} I_{m-l}(|\lambda|\rho_{0\alpha}) \right|; \quad (2.48)$$

$$\left| \frac{K_m(|\lambda|R_0)}{K_l(|\lambda|R_j)} I_{m-l}(\lambda \rho_{j0}) \right|. \quad (2.49)$$

При этом были использованы оценки определителей разрешающих систем первой краевой задачи теории упругости для внутренности и внешности цилиндра, полученные в работе [62].

Для доказательства теоремы достаточно показать, выполнение следующих условий для матричных коэффициентов системы (2.45), (2.46):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| T_{1,\alpha,s,m}^{j,p,l} \right|^2 < \infty, \quad (2.50)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| T_{2,\alpha,s,m}^{p,l} \right|^2 < \infty, \quad (2.51)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| T_{3,s,m}^{j,p,l} \right|^2 < \infty. \quad (2.52)$$

Рассмотрим теорему сложения гармонических функций [65]:

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha}) u_{\lambda,l}^{-(3)}(\rho_\alpha, \varphi_\alpha, z_\alpha). \quad (2.53)$$

Это разложение можно интерпретировать как представление функции $u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j)$ рядом Фурье по переменной $\varphi_\alpha \in [0, 2\pi]$. Тогда для этого разложения справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| K_{m-l}(|\lambda|\rho_{j\alpha}) \right|^2 \left| I_l(\lambda\rho_\alpha) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| K_m(|\lambda|\rho_j) \right|^2 d\varphi_\alpha. \quad (2.54)$$

В силу оценок (2.47) — (2.49) для доказательства теоремы достаточно показать сходимость рядов

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \frac{I_m(\lambda R_\alpha)}{K_l(|\lambda|R_j)} K_{m-l}(|\lambda|\rho_{j\alpha}) \right|^2, \quad (2.55)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \frac{I_m(\lambda R_\alpha)}{I_l(\lambda R_0)} I_{m-l}(|\lambda|\rho_{0\alpha}) \right|^2, \quad (2.56)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \frac{K_m(|\lambda|R_0)}{K_l(|\lambda|R_j)} I_{m-l}(\lambda\rho_{j0}) \right|^2. \quad (2.57)$$

В работе [62] доказана оценка

$$I_m(z)K_m(z) > \frac{c}{m^2 + 1} (1 + 2z)^{-1}, \quad m \geq 0, \quad z > 0, \quad (2.58)$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная. Тогда ряд (2.55) можно мажорировать рядом

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| I_l(\lambda R_\alpha) I_m(\lambda R_j) K_{m-l}(|\lambda|\rho_{j\alpha}) \right|^2.$$

Подставим в тождество (2.54) $\rho_\alpha = R_\alpha$, после чего домножим обе его части на $|I_m(\lambda R_j)|^2$ и просуммируем по m от $-\infty$ до ∞ . В результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| I_l(\lambda R_\alpha) I_m(\lambda R_j) K_{m-l}(|\lambda|\rho_{j\alpha}) \right|^2 &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left| I_m(\lambda R_j) \right|^2 \left| K_m(|\lambda|\rho_j) \right|^2 \Big|_{\rho_\alpha=R_\alpha} d\varphi_\alpha. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Из асимптотических формул при $m \rightarrow \infty$ [52]

$$I_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \frac{1}{m!} \left[1 + O(m^{-1})\right], \quad (2.60)$$

$$K_m(z) = \frac{2^{m-1}(m-1)!}{z^m} \left[1 + O(m^{-1})\right] \quad (2.61)$$

следует, что ряд в левой части (2.59) сходится при условии $\rho_j > R_j$. Определим минимальное значение ρ_j^{min} при произвольных значениях угла φ_α . Из соотношений между цилиндрическими координатами в системах с началами O_j и O_α следует, что при $\rho_\alpha = R_\alpha$

$$\rho_j = \sqrt{\rho_{j\alpha}^2 + R_\alpha^2 + 2\rho_{j\alpha}R_\alpha \cos(\varphi_\alpha - \varphi_{j\alpha})}$$

и минимальное значение ρ_j достигается при условии $\varphi_\alpha - \varphi_{j\alpha} = \pi$ и равняется $\rho_j^{min} = \rho_{j\alpha} - R_\alpha$ ($\rho_{j\alpha} > R_\alpha$ — естественное геометрическое условие в постановке задачи).

Таким образом, условие сходимости ряда будет удовлетворено, если $\rho_j^{min} > R_j$. Оно означает, что $R_j + R_\alpha < \rho_{j\alpha}$.

Аналогично можно записать такое равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| K_m(|\lambda|R_0) I_l(\lambda R_\alpha) I_{m-l}(\lambda \rho_{0\alpha}) \right|^2 = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left| K_m(|\lambda|R_0) \right|^2 \left| I_m(\lambda \rho_0) \right|_{\rho_\alpha=R_\alpha}^2 d\varphi_\alpha. \end{aligned} \quad (2.62)$$

На основании асимптотик (2.60), (2.61) ряд в формуле (2.62) сходится при условии $\rho_0 < R_0$. На поверхности $\rho_\alpha = R_\alpha$ справедливо $\rho_0^{max} = \rho_{0\alpha} + R_\alpha$. Поэтому условием сходимости ряда (2.62) является неравенство $\rho_0^{max} < R_0$ или $\rho_{0\alpha} + R_\alpha < R_0$.

В силу оценки (2.58) сходимость ряда (2.57) при условии $\rho_{0j} + R_j < R_0$ следует из сходимости ряда (2.62).

2.4. Анализ напряженного состояния пористого материала

Численное решение разрешающих систем (2.30) — (2.34) позволяет найти распределение напряжений в пористом материале при любой структуре упа-

ковки. Далее будут рассмотрены следующие варианты упаковки волокон: тетрагональная и гексагональная и их центрированные модификации.

Рассмотрим геометрическую конфигурацию, представленную на рис. 2.2.

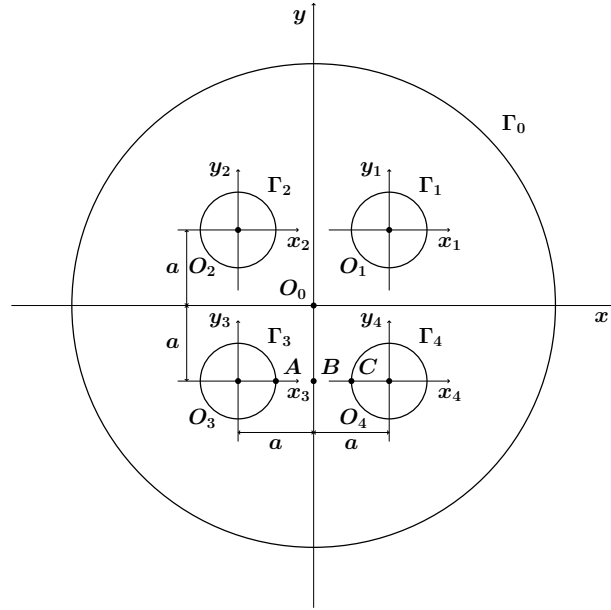


Рис. 2.2. Цилиндрический образец пористого материала с тетрагональной структурой упаковки

Коэффициент Пуассона материала $\sigma = 0.38$, что соответствует материалу матрицы из эпоксидных смол. Толщина кольца, по которому прикладывается постоянная внешняя нагрузка T , $h = 0.5R_0$; также считаем, что $R = 1$, $R_0 = 10R$.

Несобственные интегралы, фигурирующие в формулах для определения напряжений, вычисляются по квадратурным формулам Гаусса — Лагерра с количеством узлов $n = 20$.

Квадратурная формула Гаусса — Лагерра аппроксимирует значения интегралов вида

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \quad (2.63)$$

рядом по n точкам

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad (2.64)$$

где x_i — это i -й корень полинома Лагерра $L_n(x)$, а коэффициенты

$$w_i = \frac{x_i}{(n+1)^2 L_{n+1}^2(x_i)}. \quad (2.65)$$

Таблица 2.1. Проверка граничных условий

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
σ_ρ	-5.2303×10^{-7}	-5.22332×10^{-7}	1.65745×10^{-7}	1.65171×10^{-7}

Результаты вычислений, приведенные в табл. 2.1, свидетельствуют о том, что граничные условия на поверхности полостей выполняются с высокой точностью. Численный анализ показывает, что точность выполнения граничных условий можно повышать, увеличивая количество удерживаемых слагаемых m_{max} в бесконечных суммах по методу редукции.

Таблица 2.2. Сходимость метода редукции

m_{max}	3	5	10	20
σ_x	0.278206	0.283708	0.283728	0.283728
σ_y	0.694919	0.693852	0.693843	0.693843
σ_z	-0.220889	-0.219252	-0.219248	-0.219248

Сходимость метода редукции проверена в средней точке на оси, соединяющей центры 4-й и 5-й полостей. Из данных, приведенных в табл. 2.2, можно сделать вывод, что метод редукции для данной системы сходится достаточно быстро. Для получения по крайней мере четырех верных значащих цифр в величине напряжений достаточно удерживать 11 слагаемых в бесконечных суммах, тогда как 21 слагаемое дает все шесть верных значащих цифр.

Таблица 2.3. Сравнение локальных и глобальных моделей

Кол-во полостей	1	2	4	16
σ_x	0.35721	0.293982	0.283728	0.414127
σ_y	0.601521	0.728503	0.693843	0.56664
σ_z	-0.212649	-0.202628	-0.219248	-0.227097

Сравнение локальных и глобальных моделей проводится численно путем сравнения величин напряжений в одной точке образца для различного коли-

чества полостей, окружающих эту точку. Из анализа данных, приведенных в табл. 2.3, можно сделать вывод, что напряженное состояние (σ_z) в направлении, поперечном плоскости действия нагрузки (вдоль оси образца), практически не зависит от количества рассматриваемых полостей в модели. Добавление учета внешнего слоя полостей приводит к незначительному перераспределению напряжений σ_x и σ_y . Таким образом, можно сделать вывод, что в целом напряженное состояние в пористом материале для данной геометрической конфигурации можно моделировать локально, учитывая только самых ближних “соседей”.

2.4.1. Тетрагональная структура расположения полостей в цилиндрическом образце

Рассмотрим цилиндрический образец пористого материала с тетрагональной структурой расположения полостей, как представлено на рис. 2.2. Вычисления проведены при фиксированных параметрах $\sigma = 0.38$, $h/R_0 = 1.0$, $R_0 = 10R$ в плоскости $z = 0$. Каждая из полостей сдвинута относительно центра цилиндрического образца вдоль осей x и y на величину a . Относительное расстояние между цилиндрическими полостями изменялось следующим образом: $a/R = 2.0$, $a/R = 1.5$ и $a/R = 1.2$, что соответствует пористости материала $\zeta = 0.1964$, $\zeta = 0.3491$ и $\zeta = 0.5454$.

В табл. 2.4 приведены данные проверки граничных условий на одной из полостей в тетрагональной структуре при $R_0 = 10R$, $h/R_0 = 1.0$, $a/R = 1.2$ и $m_{max} = 20$, то есть в бесконечных суммах удерживаем 41 слагаемое. Из анализа приведенных данных видно, что граничные условия на полостях при близком их расположении в тетрагональной структуре выполняются достаточно хорошо.

На рис. 2.3 представлена тетрагональная структура расположения полостей в цилиндрическом образце с шестнадцатью полостями.

Таблица 2.4. Проверка граничных условий

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
σ_ρ	-4.42278×10^{-6}	-4.4263×10^{-6}	2.43255×10^{-6}	2.42862×10^{-6}

На рис. 2.4 — 2.6 представлены графики напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии, соединяющей центры соседних полостей для конфигурации, пред-

В табл. 2.5 приведены данные о сходимости метода редукции для случая шестнадцати полостей в тетрагональной структуре при $a/R = 1.5$ и $h/R_0 = 1.0$ в средней точке отрезка AB . Данные таблицы говорят о том, что удовлетворительную точность можно получить уже при $m_{max} = 5$.

Таблица 2.5. Сходимость метода редукции для случая шестнадцати полостей

m_{max}	5	10	15	20
σ_x/T	0.343729	0.344384	0.344381	0.344382
σ_y/T	1.5964	1.59645	1.59648	1.59648
σ_z/T	-0.260994	-0.260695	-0.260671	-0.260669

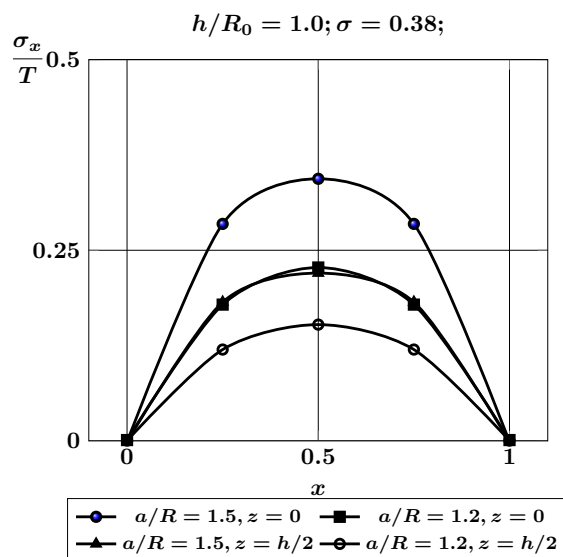


Рис. 2.4. Напряжения σ_x/T на линии AB для конфигурации, представленной на рис. 2.3, в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскостях $z = 0$ и $z = h/2$

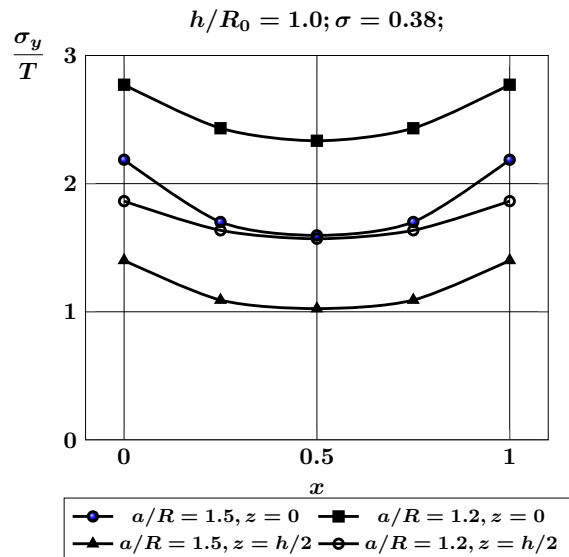


Рис. 2.5. Напряжения σ_y/T на линии AB для конфигурации, представленной на рис. 2.3, в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскостях $z = 0$ и $z = h/2$

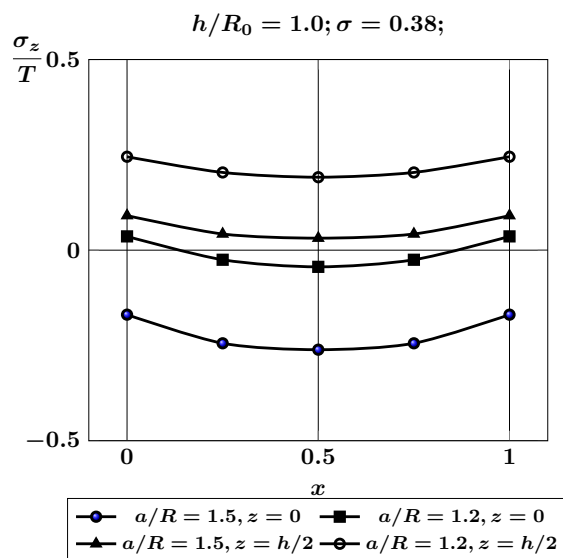


Рис. 2.6. Напряжения σ_z/T на линии AB для конфигурации, представленной на рис. 2.3, в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскостях $z = 0$ и $z = h/2$

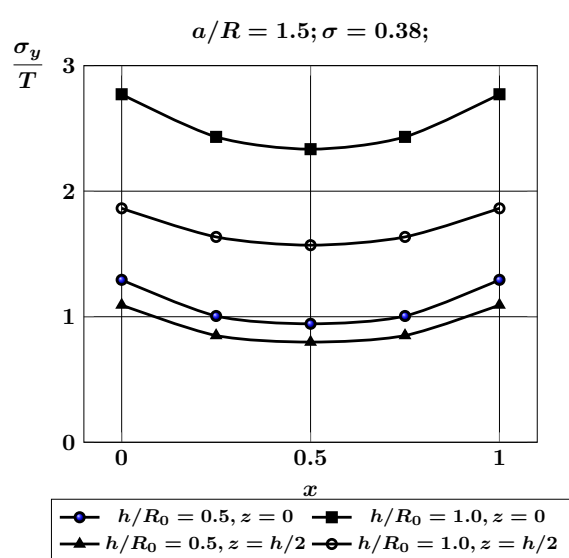


Рис. 2.7. Напряжения σ_y/T на линии AB для конфигурации, представленной на рис. 2.3, в зависимости от интенсивности приложенной внешней нагрузки h/R_0 в плоскостях $z = 0$ и $z = h/2$

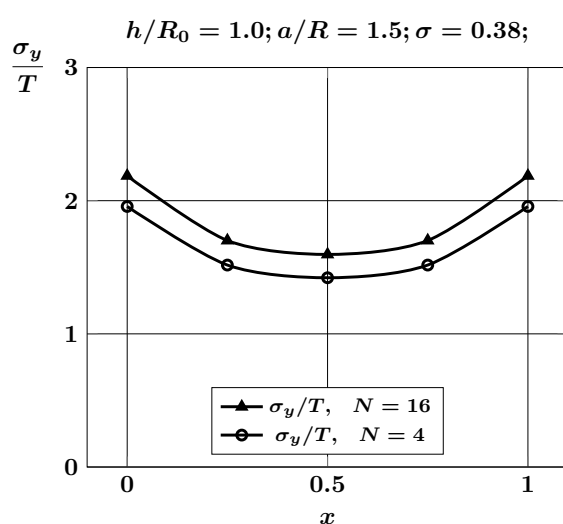


Рис. 2.8. Напряжения σ_y/T на линии AB для конфигураций, представленных на рис. 2.2 и 2.3, в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре

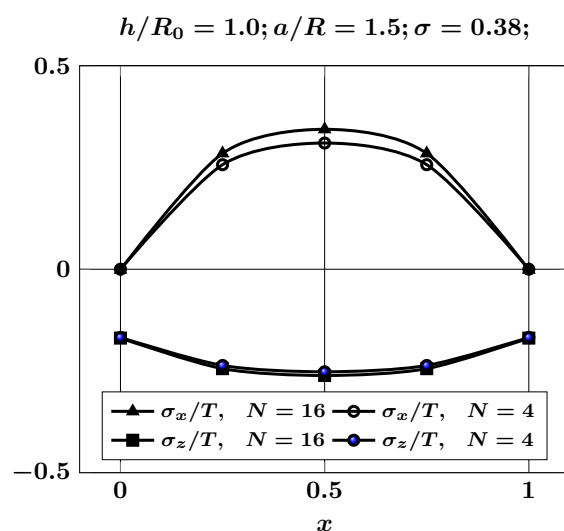


Рис. 2.9. Напряжения σ_x/T и σ_z/T на линии AB для конфигураций, представленных на рис. 2.2 и 2.3, в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре

На рис. 2.8 и 2.9 приведены графики напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии, соединяющей центры соседних полостей, для конфигураций, представленных на рис. 2.2 и 2.3, в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре. Можно сделать вывод, что значения напряжений σ_x/T и σ_z/T и их распределения на линии AB практически не зависят от числа полостей, в то время как напряжения σ_y/T в случае шестнадцати полостей увеличиваются примерно на 10 %. Характер распределения напряжений от числа полостей не зависит. Приведенные данные позволяют использовать локальные модели при описании напряженно-деформированного состояния пористого материала с параллельными цилиндрическими порами.

2.4.2. Тетрагональная объемно центрированная структура расположения полостей в цилиндрическом образце

Рассмотрим тетрагональную объемно центрированную структуру расположения полостей в цилиндрическом образце, представленную на рис. 2.10. Компьютерный эксперимент показывает качественно иной характер в распределении напряжений при переходе от тетрагональной упаковки к объемно центри-

рованному ее варианту. Поэтому изучение такого вида упаковки является важным для оптимального определения геометрических параметров, приводящих к наименьшей концентрации напряжений в теле.

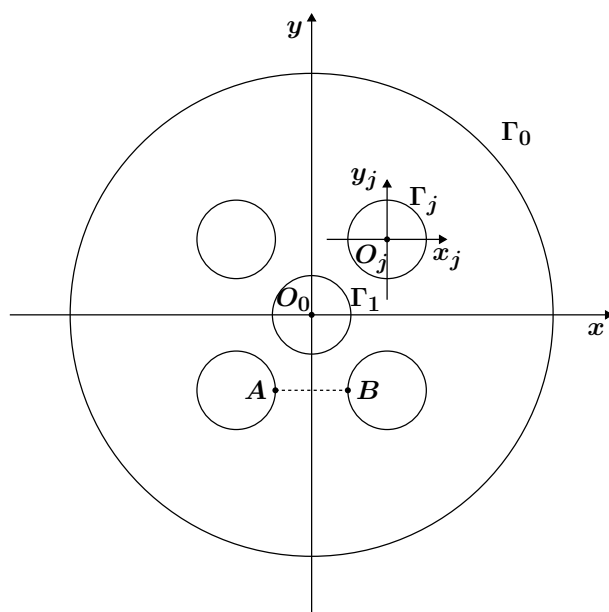


Рис. 2.10. Тетрагональная объемно центрированная структура расположения полостей в цилиндрическом образце

Заметим, что формулы (2.32) — (2.34) из параграфа 2.2 отражают другую структуру разрешающей системы для определения неизвестных коэффициентов в общем решении.

На рис. 2.17 и 2.18 приводится сравнение относительных напряжений σ_x/T и σ_y/T на линии, соединяющей центры соседних полостей для тетрагональной и центрированной тетрагональной структур при прочих одинаковых параметрах.

2.4.3. Гексагональная структура расположения полостей в цилиндрическом образце

Рассмотрим гексагональную структуру расположения полостей в цилиндрическом образце, представленную на рис. 2.19. Гексагональная упаковка обладает максимальной степенью симметрии по отношению к упаковкам, рассмотренным ранее. При вычислении эффективных упругих модулей для материала с подобным расположением полостей можно считать, что этот материал обладает трансверсальной изотропией при условии, что на его границе приложено однородное напряженно-деформированное состояние.

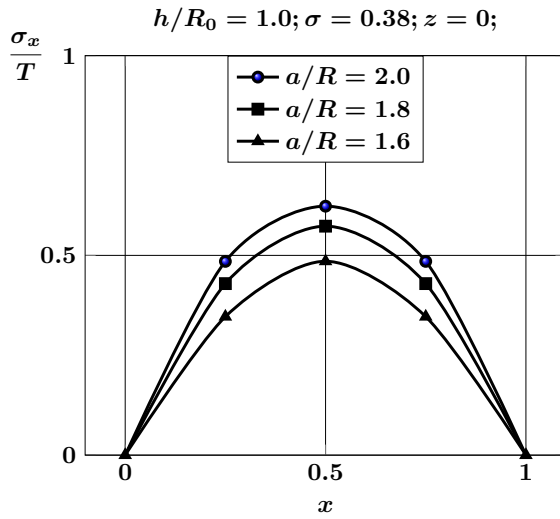


Рис. 2.11. Напряжения σ_x/T на линии AB для центрированной тетрагональной структуры в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = 0$

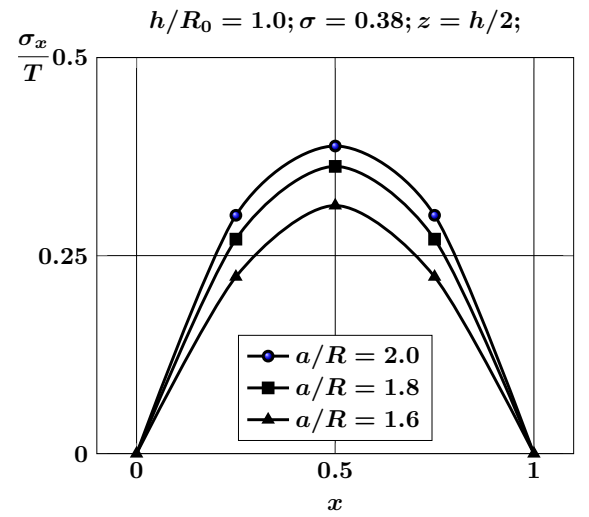


Рис. 2.12. Напряжения σ_x/T на линии AB для центрированной тетрагональной структуры в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = h/2$

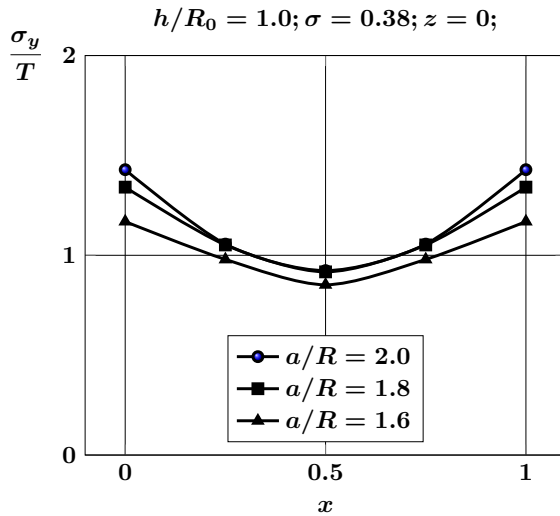


Рис. 2.13. Напряжения σ_y/T на линии AB для центрированной тетрагональной структуры в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = 0$

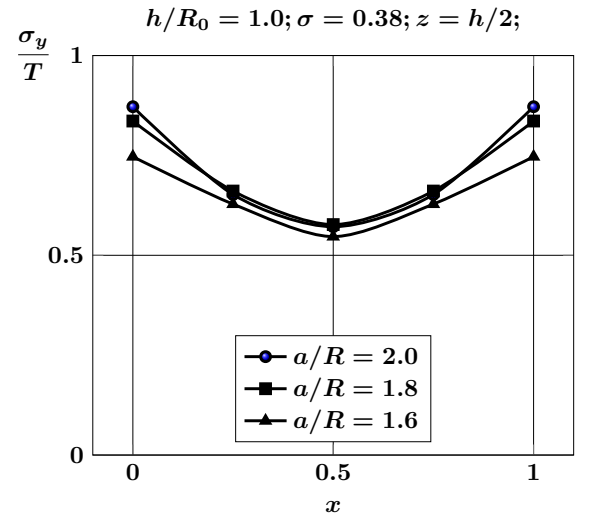


Рис. 2.14. Напряжения σ_y/T на линии AB для центрированной тетрагональной структуры в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = h/2$

На рис. 2.20 и 2.21 приведены графики нормальных напряжений на линии AB в плоскостях $z = 0$ и $z = h/2$ в зависимости от относительного расстояния

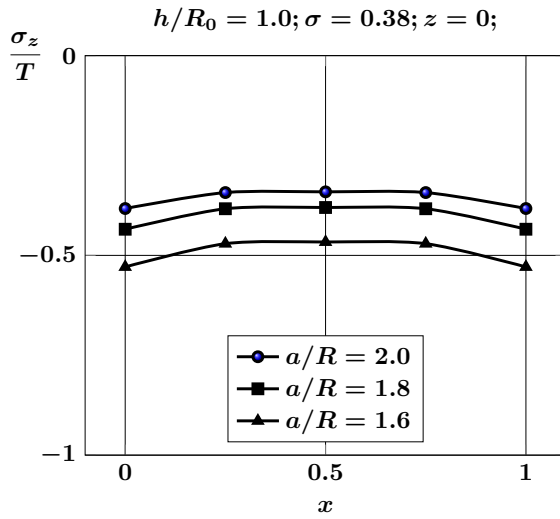


Рис. 2.15. Напряжения σ_z/T на линии AB для центрированной тетрагональной структуры в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = 0$

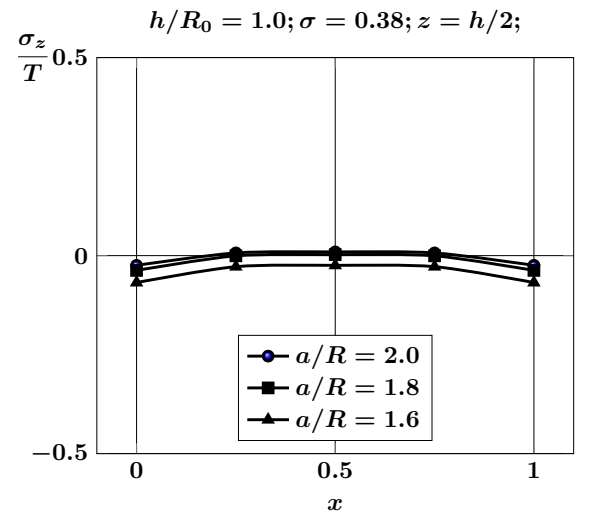


Рис. 2.16. Напряжения σ_z/T на линии AB для центрированной тетрагональной структуры в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = h/2$

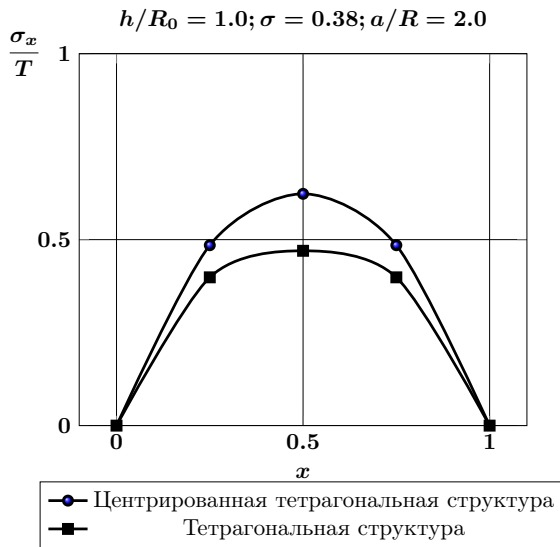


Рис. 2.17. Напряжения σ_x/T на линии AB для тетрагональной и центрированной тетрагональной структур

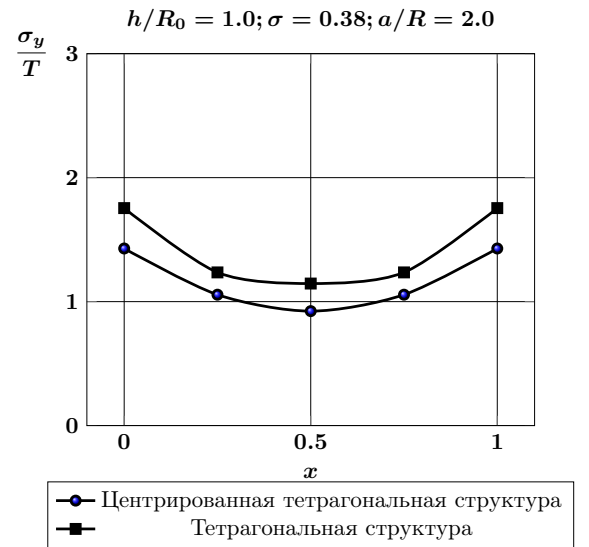


Рис. 2.18. Напряжения σ_y/T на линии AB для тетрагональной и центрированной тетрагональной структур

между полостями. При уменьшении расстояния между полостями наблюдается рост напряжений σ_y/T . Для напряжений σ_x/T наблюдается обратная картина. Напряжения σ_z/T при приближении полостей меняют знак с сжимающих на

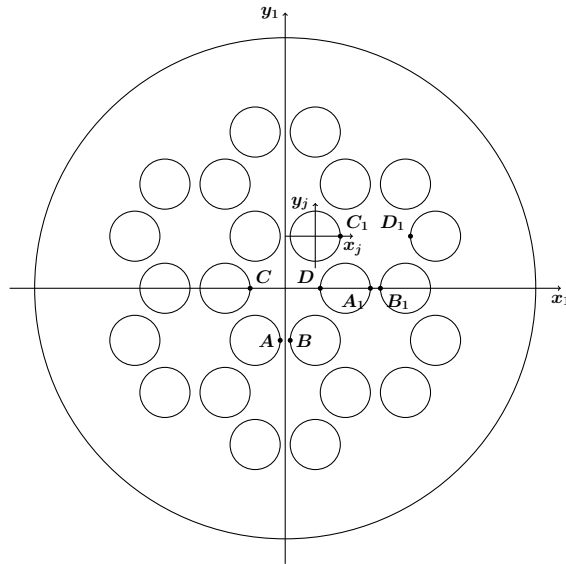


Рис. 2.19. Гексагональная структура расположения полостей в цилиндрическом образце растягивающие. Основной вклад в напряженное состояние вносят напряжения σ_y/T . На эти напряжения в наибольшей степени оказывает влияние расстояние между полостями.

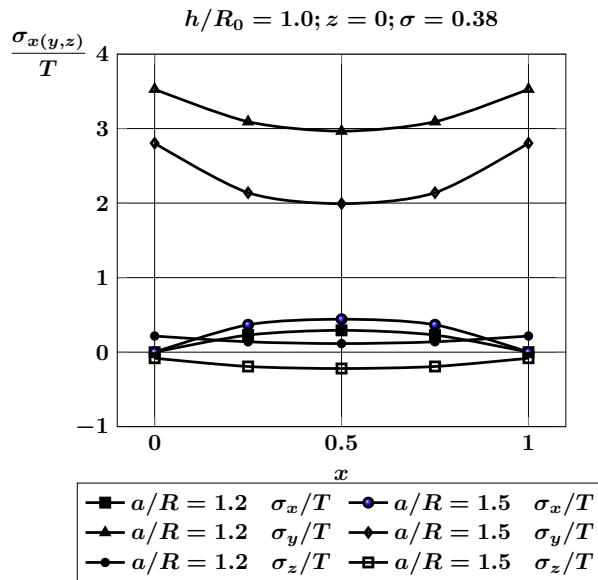


Рис. 2.20. Нормальные напряжения на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = 0$

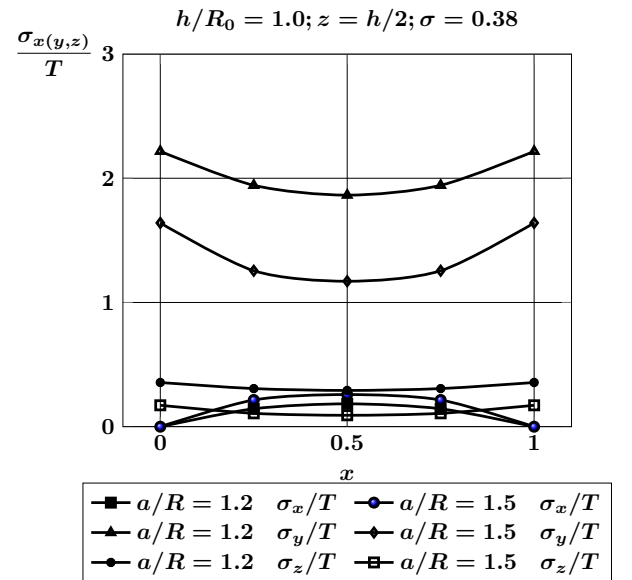


Рис. 2.21. Нормальные напряжения на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = h/2$

На рис. 2.22 и 2.23 представлены графики нормальных напряжений на линии CD в плоскостях $z = 0$ и $z = h/2$ в зависимости от относительного расстояния

между полостями. При уменьшении расстояния между полостями наблюдается уменьшение напряжений σ_x/T и σ_y/T . Напряжения σ_z/T растут по абсолютной величине при приближении полостей и являются сжимающими вне зависимости от расстояния между ними. В сравнении с отрезком AB напряжения σ_y/T на линии CD уменьшаются в среднем в 2–2.5 раза.

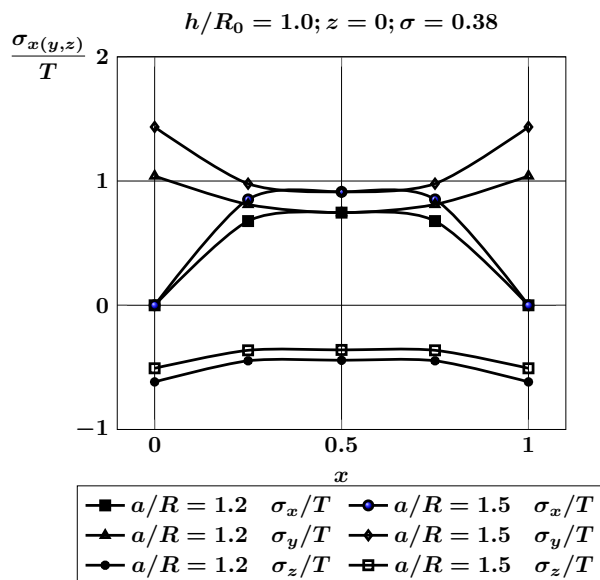


Рис. 2.22. Нормальные напряжения на линии CD в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = 0$

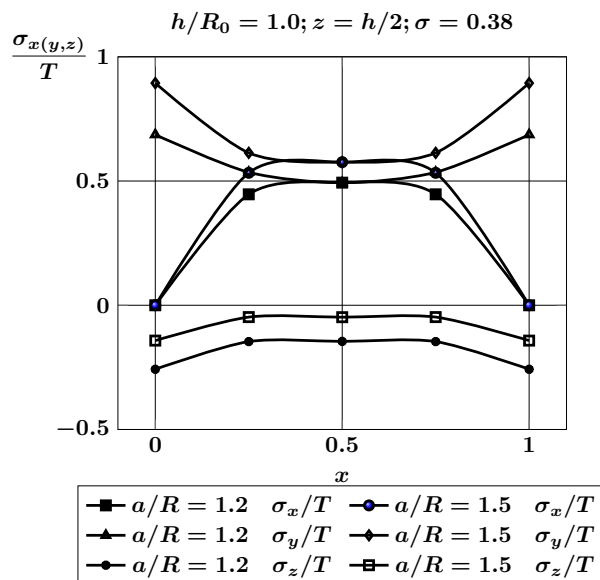


Рис. 2.23. Нормальные напряжения на линии CD в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = h/2$

В табл. 2.6 приведены результаты, показывающие скорость сходимости метода редукции для 24 цилиндрических полостей. Сравниваются значения напряжений σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T в средней точке отрезка AB при $m_{max} = 10, 12, 15$, $a/R = 1.5$, $h/R_0 = 1.0$. Метод показал хорошую сходимость уже для $m_{max} = 10$.

Таблица 2.6. Сходимость метода редукции для 24 цилиндрических полостей

m_{max}	10	12	15
σ_x	0.441673	0.440023	0.440023
σ_y	1.9923	1.98469	1.98469
σ_z	-0.219197	-0.219834	-0.219834

На рис. 2.24 и 2.25 приведены графики нормальных напряжений на линиях A_1B_1 и C_1D_1 в плоскости $z = 0$ в зависимости от относительного расстоя-

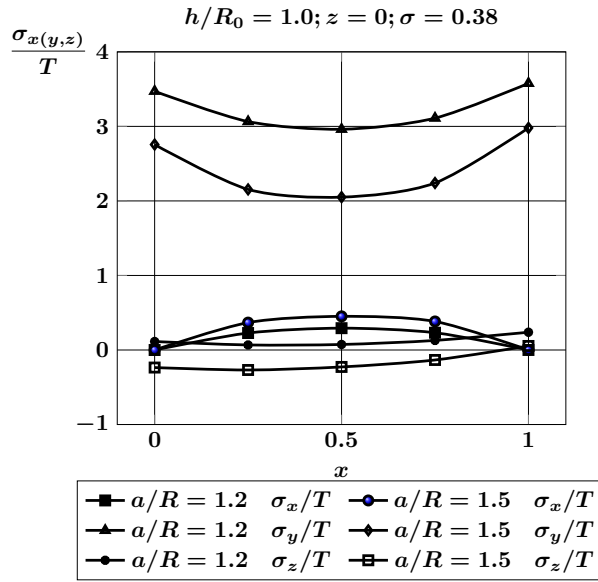


Рис. 2.24. Нормальные напряжения на линии A_1B_1 в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = 0$

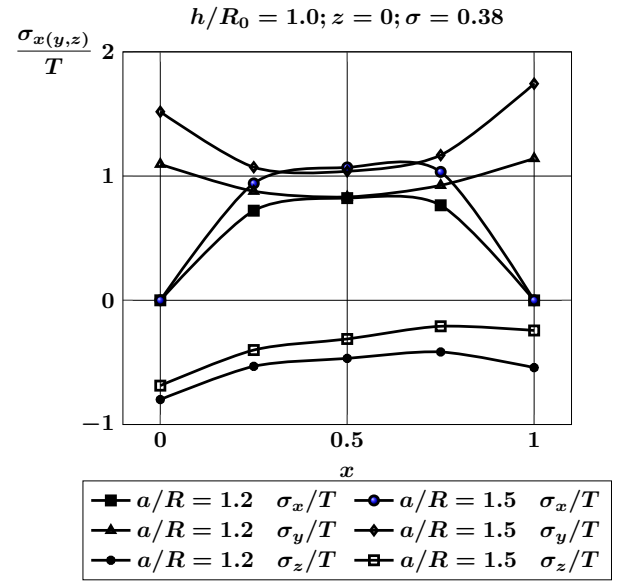


Рис. 2.25. Нормальные напряжения на линии C_1D_1 в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = 0$

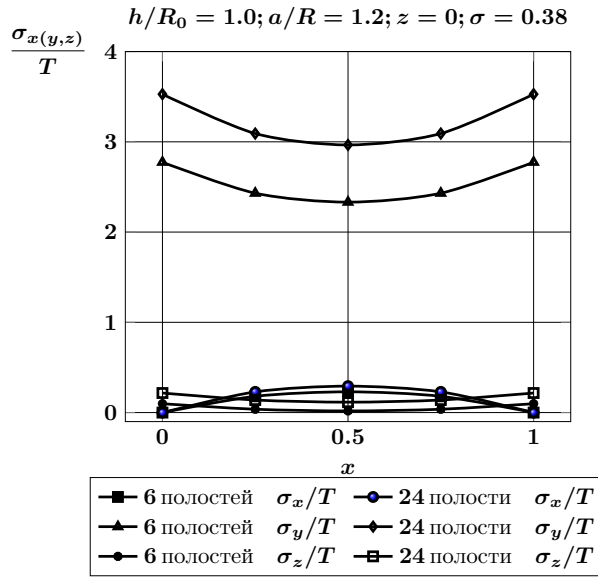


Рис. 2.26. Нормальные напряжения на линии AB для гексагональной структуры при 6 и 24 полостях

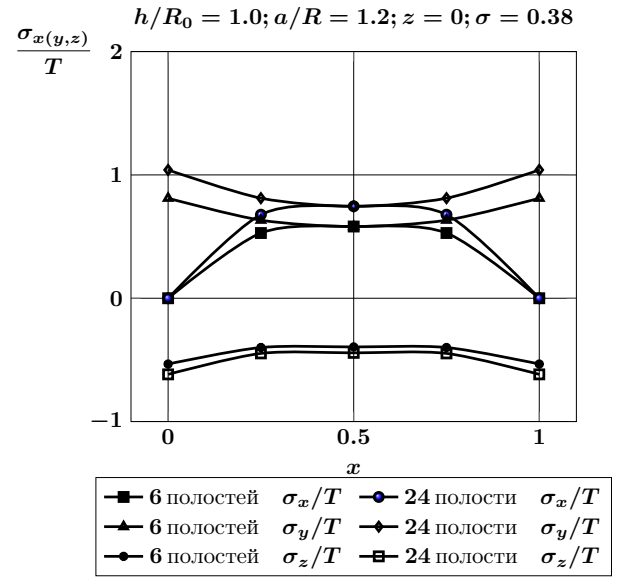


Рис. 2.27. Нормальные напряжения на линии CD для гексагональной структуры при 6 и 24 полостях

ния между полостями. При сохранении характера распределения напряжений по сравнению с центрально расположенной ячейкой наблюдается характерная асимметрия поля напряжений относительно срединных точек отрезков.

На рис. 2.26 и 2.27 приводится сравнение нормальных напряжений на линиях AB и CD в зависимости от количества ячеек в гексагональной упаковке. Заметное отличие наблюдается для напряжений σ_y/T на отрезке AB и напряжений σ_x/T и σ_y/T на отрезке CD .

2.4.4. Гексагональная центрированная структура расположения полостей в цилиндрическом образце

Рассмотрим гексагональную центрированную структуру расположения полостей в цилиндрическом образце, представленную на рис. 2.28. Эта структура соответствует наибольшему объемному содержанию пор в пористом материале.

На рис. 2.29 и 2.30 приводятся графики нормальных напряжений на линии AB в плоскостях $z = 0$ и $z = h/2$ в зависимости от относительного расстояния a/R между полостями. Наибольший вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_y/T , которые растут с приближением полостей друг к другу. Область их концентрации расположена вблизи границ полостей.

Напряжения σ_x/T , напротив, растут с увеличением расстояния между полостями.

Напряжения σ_z/T всюду на отрезке AB в плоскости $z = 0$ являются сжимающими и практически постоянны. Напряжения σ_x/T , σ_z/T на отрезке AB в плоскости $z = h/2$ в 1.5–2 раза меньше, чем в плоскости $z = 0$. При этом характер их распределения остается тем же.

На рис. 2.31 и 2.32 представлены графики нормальных напряжений на линии A_1B_1 в плоскостях $z = 0$ и $z = h/2$ в зависимости от относительного расстояния a/R между полостями.

Наблюдаются те же особенности в распределении напряжений, что и для

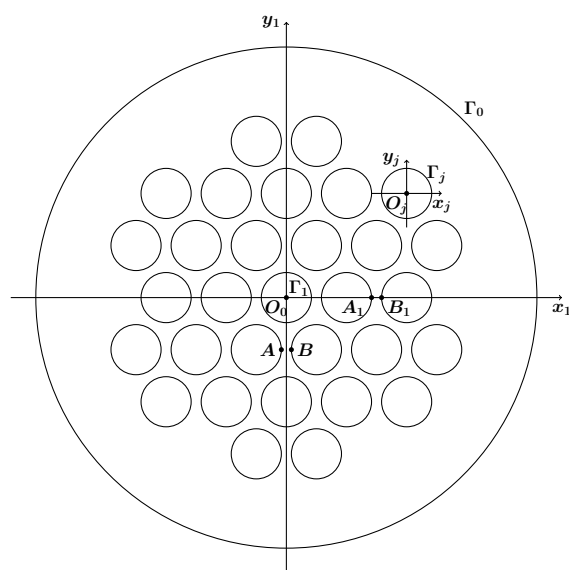


Рис. 2.28. Гексагональная центрированная структура расположения полостей в цилиндрическом образце

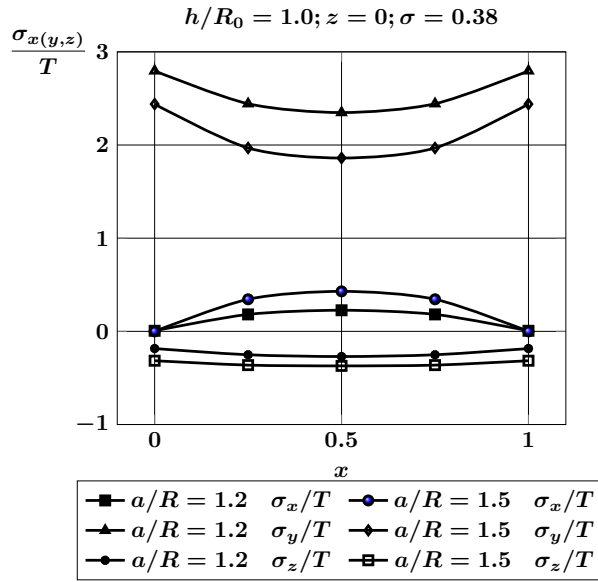


Рис. 2.29. Нормальные напряжения на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = 0$

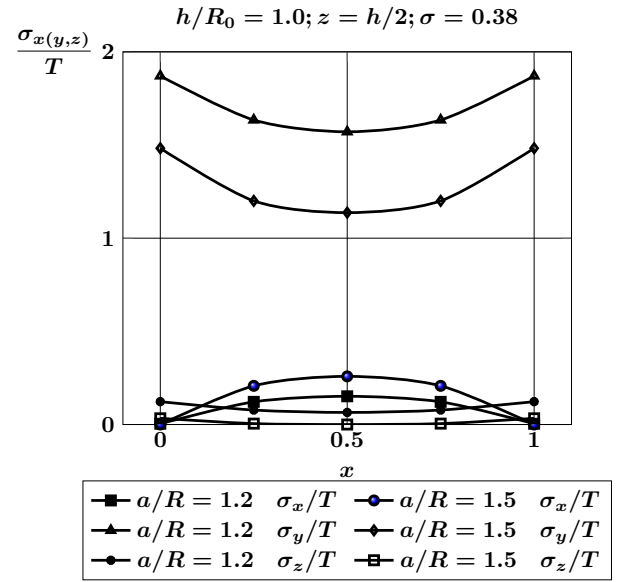


Рис. 2.30. Нормальные напряжения на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = h/2$

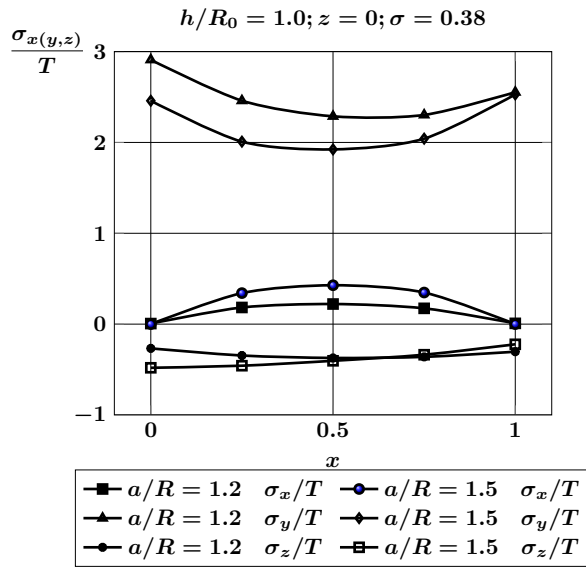


Рис. 2.31. Нормальные напряжения на линии A_1B_1 в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = 0$

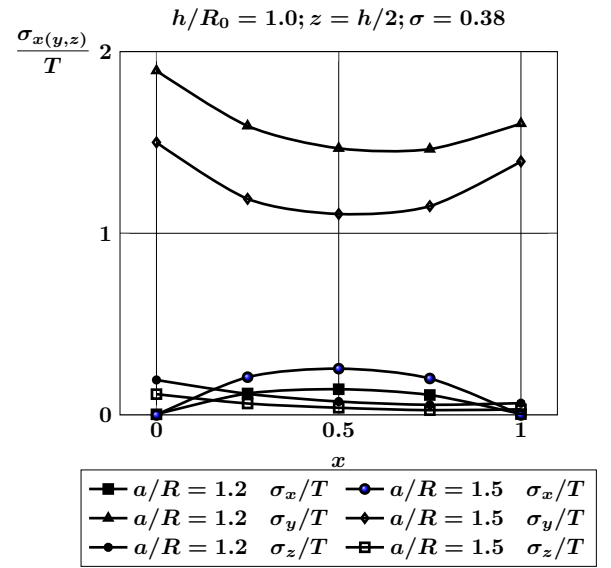


Рис. 2.32. Нормальные напряжения на линии A_1B_1 в зависимости от относительного расстояния между полостями в плоскости $z = h/2$

отрезка AB , с характерной асимметрией, которая имеет место для смещенной относительно центра образца ячейки.

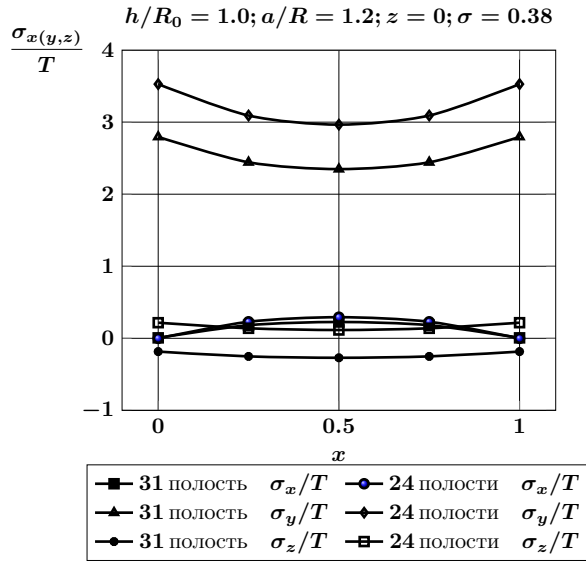


Рис. 2.33. Сравнение нормальных напряжений на линии AB для гексагональной и центрированной гексагональной упаковок при $a/R = 1.2$

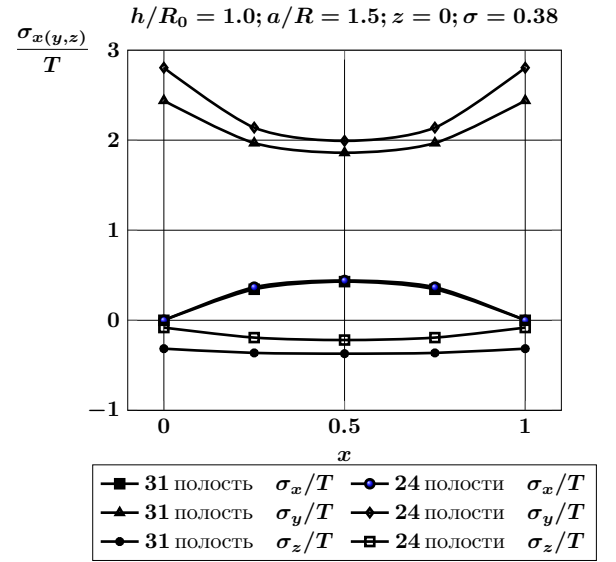


Рис. 2.34. Сравнение нормальных напряжений на линии AB для гексагональной и центрированной гексагональной упаковок при $a/R = 1.5$

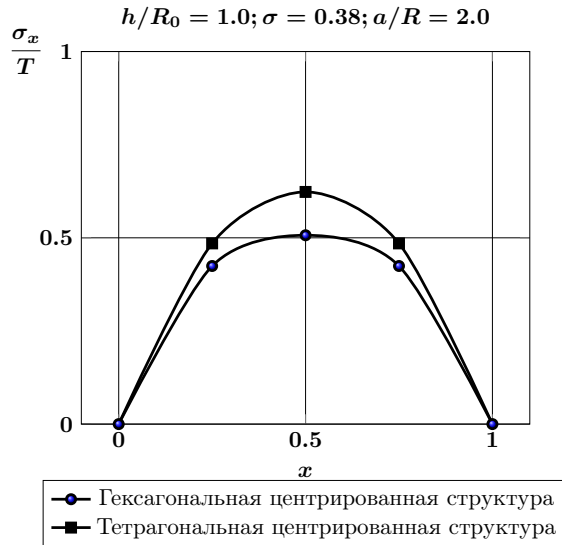


Рис. 2.35. Напряжения σ_x/T на линии, соединяющей центры соседних полостей, для гексагональной и тетрагональной центрированных структур

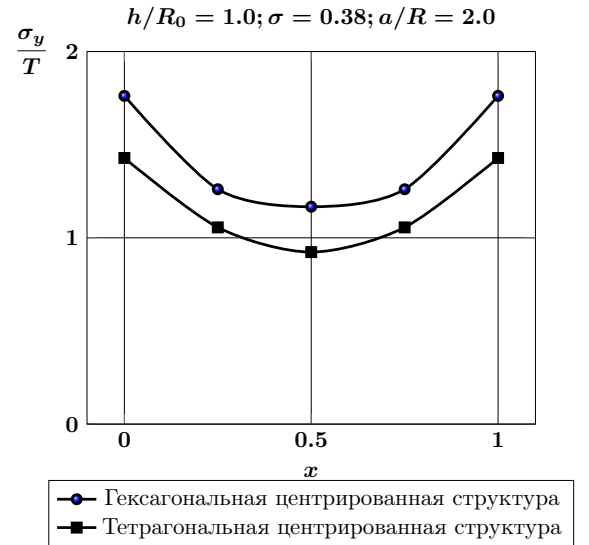


Рис. 2.36. Напряжения σ_y/T на линии, соединяющей центры соседних полостей, для гексагональной и тетрагональной центрированных структур

На рис. 2.33 и 2.34 приведено сравнение нормальных напряжений на линии AB для гексагональной и центрированной гексагональной упаковок в плоскости $z = 0$ при $a/R = 1.2$ и $a/R = 1.5$. Интересно отметить, что в центрированном

случае, при большем объемном содержании пор, напряжения σ_y/T примерно на 20 % меньше, чем в нецентрированном случае. По-видимому, это обусловлено более равномерным распределением напряжений по ячейке в центрированной структуре, чем в нецентрированной.

На рис. 2.35 и 2.36 показано сравнение относительных напряжений σ_x/T и σ_y/T на линии AB в случае одной ячейки для гексагональной и тетрагональной центрированных структур при $a/R = 2.0$ в плоскости $z = 0$. Характер распределения напряжений показывает, что гексагональная центрированная ячейка в силу большей симметрии более равномерно перераспределяет напряжения по ячейке, поэтому максимальные значения рассматриваемых напряжений в гексагональном случае ниже, чем в тетрагональном.

Можно сделать вывод, что структура материала оказывает влияние на численные значения нормальных напряжений, которые возникают в материале под действием внешней нагрузки.

2.5. Упругое состояние композита с линейной регулярной структурой

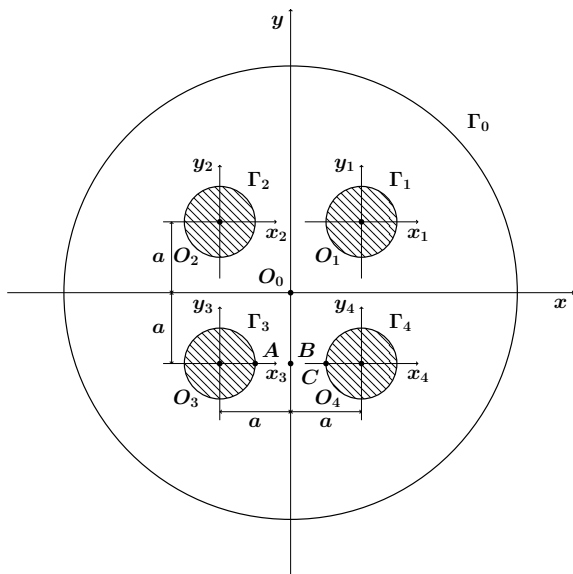


Рис. 2.37. Схематическое представление задачи

Рассмотрим цилиндрический образец однонаправленного волокнистого композиционного материала. Включения имеют форму бесконечных круговых цилиндров радиуса R_α . Представительскую ячейку материала будем характеризовать расположением центров $\{O_j\}_{j=1}^N$ круговых сечений волокон плоскостью, перпендикулярной оси образца. Пусть O_0 — центр представительской ячейки. Если ячейка объемно центрирована, то считаем, что O_0 совпадает с O_1 , в противном случае O_0 не совпадает с O_1 ($j = \overline{1, N}$) (рис. 2.37).

Будем считать, что упругие постоянные матрицы и включений равны (σ_0, G_0) , (σ_j, G_j) соответственно. Предполагается, что к внешней границе ци-

линдра приложена кусочно-постоянная радиальная нагрузка.

Введем цилиндрические системы координат (ρ_j, φ_j, z_j) с началами в точках O_j , оси $O_j z_j$ которых совпадают с осями цилиндров. Координаты в введенных системах координат связаны соотношениями (2.1), (2.2).

Цилиндрический образец представляем как объединение областей матрицы Ω_0 и включений Ω_j . Обозначим через Γ_0 и Γ_j внешнюю границу области Ω_0 и границу Ω_j .

Для определения НДС в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе (2.3) с граничным условием (2.5) и условиями сопряжения на границах включений

$$\mathbf{U}^+|_{\Gamma_j} = \mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad (2.66)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}^+|_{\Gamma_j} = \mathbf{F}\mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad (2.67)$$

где \mathbf{U}^+ — вектор перемещений в матрице; \mathbf{U}_j — вектор перемещений в j -м волокне; $\mathbf{F}\mathbf{U}$ — отвечающий \mathbf{U} вектор усилий на соответствующей граничной поверхности; границы цилиндров Γ_j задаются уравнениями $\rho_j = R_j$ ($j = \overline{1, N}$).

Решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^+ = & \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, z_j, \varphi_j) d\lambda + \\ & + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) d\lambda \quad (x, y, z) \in \Omega_0, \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{U}_j = \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_j, z_j, \varphi_j) d\lambda \quad (x, y, z) \in \Omega_j, \quad (2.69)$$

где $A_{s,m}^{(j)}$, $B_{s,m}^{(j)}$ — неизвестные функции; $\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z)$ определены в (2.9), (2.10).

Используя теоремы сложения (2.19) — (2.24), представим вектор перемещения \mathbf{U}^+ в каждой из цилиндрических систем координат с центрами O_j ($j = 0 \div N$).

В случае, если ячейка не является объемно центрированной,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^+ = & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, z_0, \varphi_0) + \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_0, z_0, \varphi_0) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{\alpha=1}^N \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{0\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0\alpha}, 0, \varphi_{0\alpha}) \right\} d\lambda, \quad (2.70) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^+ = & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) + \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) \times \right. \\ & \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(0)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{0\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0\alpha}, 0, \varphi_{0\alpha}) + \\ & + \sum_{j \neq \alpha} \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) (-1)^m \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{j\alpha}} \right] \times \\ & \left. \times u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, 0, \varphi_{j\alpha}) \right\} d\lambda. \quad (2.71) \end{aligned}$$

В случае объемно центрированной ячейки вектор перемещения имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^+ = & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) + \right. \\ & + A_{s,m}^{(1)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) + \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) \sum_{\alpha=2}^N \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \right. \\ & \left. + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{1\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{1\alpha}, 0, \varphi_{1\alpha}) \left. \right\} d\lambda, \quad (2.72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^+ = & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) + A_{s,m}^{(1)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) + \right. \\ & + \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) \sum_{\alpha=2}^N \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) (-1)^l \left[\delta_{st} + \right. \\ & \left. + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{1\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{1\alpha}, 0, \varphi_{1\alpha}) \left. \right\} d\lambda, \quad (2.73) \end{aligned}$$

$$\mathbf{U} = \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) + \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(0)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{0\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0\alpha}, 0, \varphi_{0\alpha}) + \\
& + \sum_{j \neq \alpha} \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_{\alpha}, z_{\alpha}, \varphi_{\alpha}) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) (-1)^m \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{j\alpha}} \right] \times \\
& \times u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, 0, \varphi_{j\alpha}) \Big\} d\lambda, \quad \alpha \neq 1. \quad (2.74)
\end{aligned}$$

Используя формулы (2.70) — (2.74), в результате удовлетворения граничных условиям (2.5) и условиям сопряжения (2.66), (2.67) для случая необъемно центрированной ячейки получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций $A_{s,m}^{(j)}(\lambda)$, $B_{s,m}^{(j)}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_0, G_0, \sigma_0) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_0, G_0, \sigma_0) \times \right. \\
& \times \sum_{\alpha=1}^N \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{1\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{1\alpha}, 0, \varphi_{1\alpha}) \Big\} = \\
& = \frac{T \sin \lambda h}{\pi \lambda} \delta_{m0}(1, 1, 0), \quad (2.75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_{\alpha}, \sigma_0) + \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_{\alpha}, \sigma_0) \times \right. \\
& \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(1)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{1\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{1\alpha}, 0, \varphi_{1\alpha}) + \\
& + \sum_{j \neq \alpha} \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_{\alpha}, \sigma_0) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) (-1)^m \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{j\alpha}} \right] \times \\
& \times u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, 0, \varphi_{j\alpha}) \Big\} = \sum_{s=1}^3 B_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_{\alpha}, \sigma_{\alpha}), \quad \alpha = \overline{1, N}; \quad (2.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_{\alpha}, G_0, \sigma_0) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_{\alpha}, G_0, \sigma_0) \times \right. \\
& \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(1)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{1\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{1\alpha}, 0, \varphi_{1\alpha}) + \\
& + \sum_{j \neq \alpha} \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_{\alpha}, G_0, \sigma_0) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) (-1)^m \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{j\alpha}} \right] \times
\end{aligned}$$

$$\times u_{\lambda, l-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, 0, \varphi_{j\alpha}) \Big\} = \sum_{s=1}^3 B_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_\alpha, G_\alpha, \sigma_\alpha), \quad \alpha = \overline{1, N}; \quad (2.77)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0; \quad m \in \mathbb{Z}, \quad k = -1, 0, 1;$$

$$\begin{aligned} H_{1,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, \sigma_r) &= \mp \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \quad H_{1,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, \sigma_r) = \mp \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R), \\ H_{1,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, \sigma_r) &= i \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R); \quad H_{2,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, \sigma_r) = \mp (D - \chi_r) \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \\ H_{2,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, \sigma_r) &= \mp (D - \chi_r) \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R), \quad H_{2,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, \sigma_r) = i D \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R); \\ H_{3,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, \sigma_r) &= \pm \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \quad H_{3,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, \sigma_r) = \mp \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R). \end{aligned}$$

Коэффициенты $\mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(R, G_r, \sigma_r)$ получаются из коэффициентов $G_{s,\lambda,m}^{\pm(k)}$, определенных в формулах (2.35) — (2.41) путем подстановки в последние вместо параметров σ и G упругих постоянных σ_r и G_r ($r = 0, 1, 2$) соответственно. Функции $\tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}$ определены в (2.43).

Аналогично для случая объемно центрированной ячейки разрешающая система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 \Big\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_0, G_0, \sigma_0) + A_{s,m}^{(1)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_0, G_0, \sigma_0) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_0, G_0, \sigma_0) \times \\ \times \sum_{\alpha=2}^N \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{1\alpha}} \right] u_{\lambda, l-m}^{-(3)}(\rho_{1\alpha}, 0, \varphi_{1\alpha}) \Big\} = \\ = \frac{T \sin \lambda h}{\pi \lambda} \delta_{m0}(1, 1, 0); \quad (2.78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 \Big\{ A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_\alpha, \sigma_0) + \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_\alpha, \sigma_0) \times \\ \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(1)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{1\alpha}} \right] u_{\lambda, l-m}^{-(3)}(\rho_{1\alpha}, 0, \varphi_{1\alpha}) + \\ + \sum_{j \neq \alpha} \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_\alpha, \sigma_0) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) (-1)^m \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{j\alpha}} \right] \times \\ \times u_{\lambda, l-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, 0, \varphi_{j\alpha}) \Big\} = \sum_{s=1}^3 B_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_\alpha, \sigma_\alpha), \quad \alpha = \overline{1, N}; \quad (2.79) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_\alpha, G_0, \sigma_0) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_\alpha, G_0, \sigma_0) \times \right. \\
& \quad \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(1)}(\lambda) \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{1\alpha}} \right] u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{1\alpha}, 0, \varphi_{1\alpha}) + \\
& \quad + \sum_{j \neq \alpha} \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_\alpha, G_0, \sigma_0) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) (-1)^m \left[\delta_{st} + \delta_{s1} \delta_{t2} \rho_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{j\alpha}} \right] \times \\
& \quad \times u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, 0, \varphi_{j\alpha}) \left. \right\} = \sum_{s=1}^3 B_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_\alpha, G_\alpha, \sigma_\alpha); \quad (2.80)
\end{aligned}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0; \quad m \in \mathbb{Z}, \quad k = -1, 0, 1; \quad \alpha = \overline{1, N}.$$

2.6. Анализ численных результатов моделирования напряженно-деформированного состояния волокнистого композита

В каждой конкретной задаче разрешающая система решается методом редукции по параметру m . Как известно [42], фредгольмовость операторов разрешающих систем обеспечивает сходимость метода редукции. Будем считать, что $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \leq m_{max}$. Постоянную m_{max} выбирают равной 5, 10 и 20. Контроль сходимости осуществляют по стабилизации значащих цифр в численных величинах главных напряжений в некоторых точках образца.

2.6.1. Цилиндрический образец волокнистого композита с тетрагональной структурой

Рассмотрим конфигурацию четырех волокон в цилиндрическом образце композита, аналогичную представленной на рис. 2.37.

На рис. 2.39 — 2.41 приведены относительные напряжения σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T в окрестности четырех цилиндрических волокон в зависимости от расстояния между ними. Анализ графиков показывает, что напряжения σ_x/T растут с увеличением радиуса волокна и при отношении $a/R = 1.2$ становятся практически постоянными на отрезке AB . Напряжения σ_y/T в средней точке отрезка AB , напротив, принимают наименьшее значение в случае наиболее

приближенных друг к другу волокон. Напряжения σ_z/T во всех точках отрезка AB возрастают с уменьшением отношения a/R .

На рис. 2.42 — 2.44 представлены напряжения σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии AB в зависимости от соотношения жесткостей материалов волокон и матрицы. Напряжения σ_x/T и σ_y/T незначительно уменьшаются при увеличении отношения G_j/G . Заметно зависят от соотношения модулей сдвига волокон и матрицы напряжения σ_z/T .

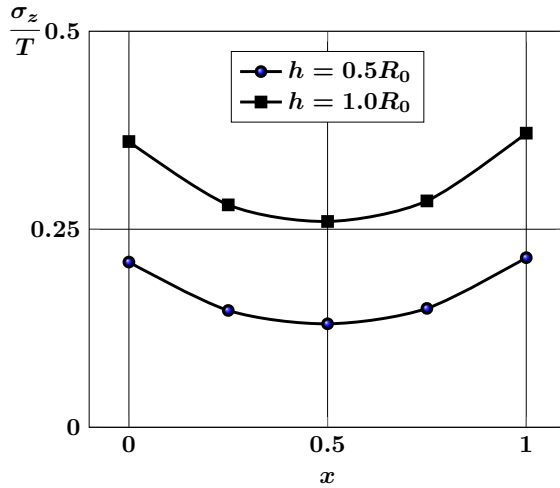


Рис. 2.38. Напряжения σ_z/T в окрестности четырех цилиндрических волокон в зависимости от изменения параметра h/R_0

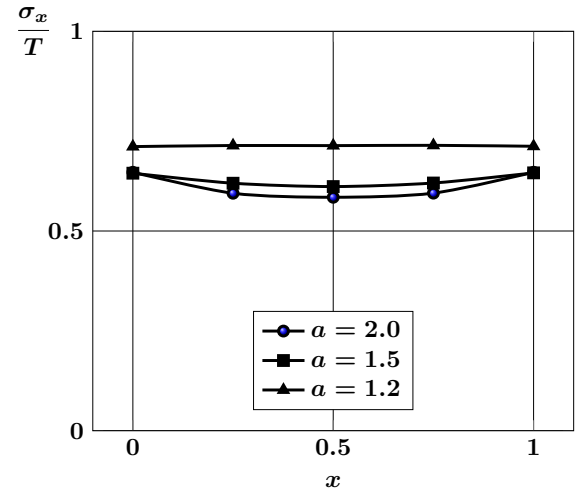


Рис. 2.39. Напряжения σ_x/T в окрестности четырех цилиндрических волокон в зависимости от расстояния между ними

Рассмотрим конфигурацию из шестнадцати волокон в цилиндрическом образце композита, аналогичную представленной на рис. 2.46.

При численной реализации задачи предполагалось, что $R_j = R$ ($j = 1 \div 16$), $R_0 = 10R$. Коэффициенты Пуассона материалов матрицы и волокон $\sigma_0 = 0.38$ и $\sigma_j = 0.21$, что соответствует волокнам из алюмоборосиликатного стекла с эпоксидно-малеиновым связующим. Система уравнений решена методом редукции по индексу m при фиксированном λ , то есть бесконечная система уравнений заменяется конечной системой, в которой индексы меняются в диапазоне $-m_{max} \leq m, l \leq m_{max}$.

Рассматривались случаи $m_{max} = 5, 8, 10$ (табл. 2.7) при $a/R = 1.5$, $h/R_0 = 1.0$, $G_j/G = 25$. Метод показал хорошую сходимость уже при $m_{max} = 5$.

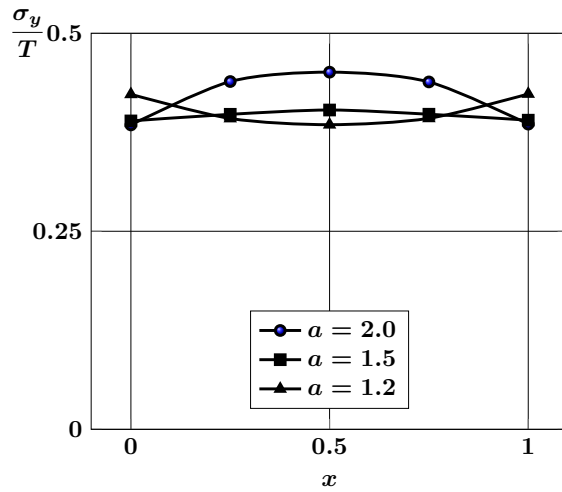


Рис. 2.40. Напряжения σ_y/T в окрестности четырех цилиндрических волокон в зависимости от расстояния между ними

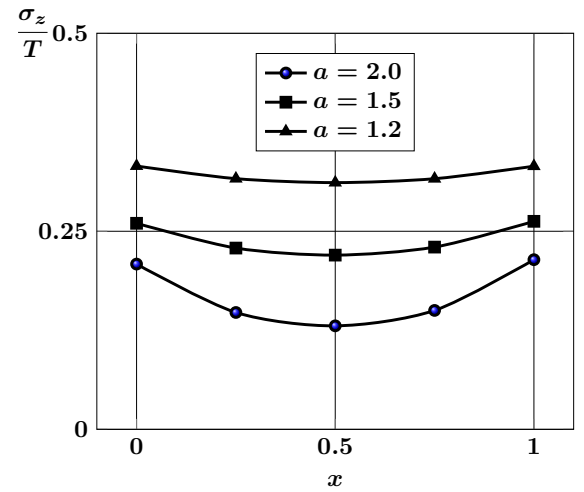


Рис. 2.41. Напряжения σ_z/T в окрестности четырех цилиндрических волокон в зависимости от расстояния между ними

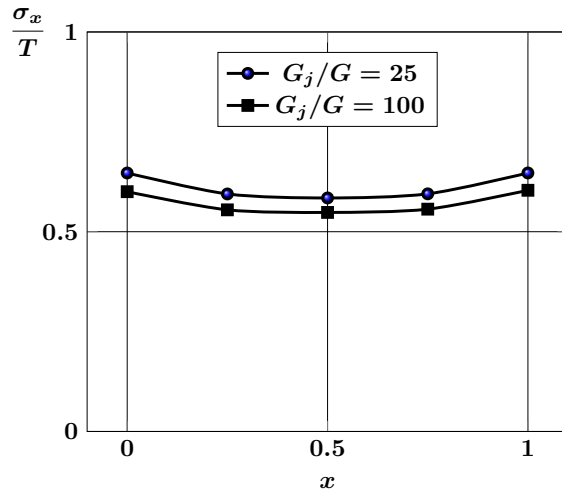


Рис. 2.42. Напряжения σ_x/T в окрестности четырех цилиндрических волокон в зависимости от соотношения жесткостей материалов волокон и матрицы

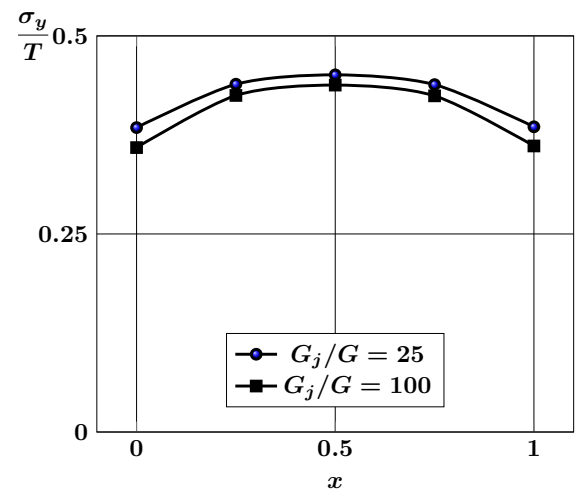


Рис. 2.43. Напряжения σ_y/T в окрестности четырех цилиндрических волокон в зависимости от соотношения жесткостей материалов волокон и матрицы

На рис. 2.47, 2.49, 2.51 приведены распределения напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии, соединяющей центры волокон между точками A и B (рис. 2.46), в зависимости от относительного расстояния a/R между ними в плоскости $z = 0$ для низкомодульных волокон $G_j/G = 25$.

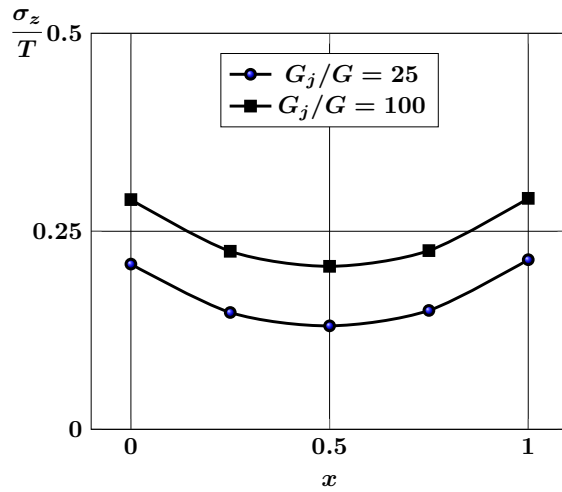


Рис. 2.44. Напряжения σ_z/T в окрестности четырех цилиндрических волокон в зависимости от соотношения жесткостей материалов волокон и матрицы

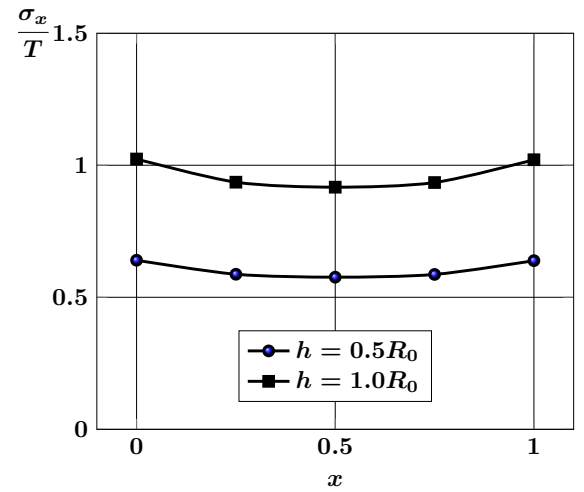


Рис. 2.45. Напряжения σ_x/T в окрестности шестнадцати цилиндрических волокон в зависимости от изменения параметра h/R_0

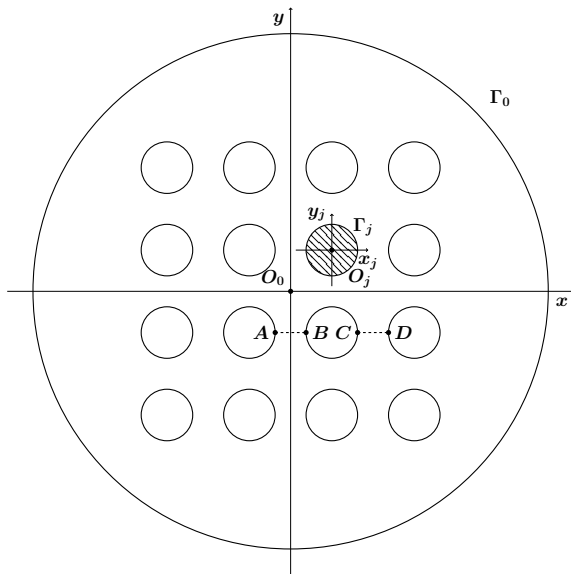


Рис. 2.46. Цилиндрический образец материала с 16 цилиндрическими волокнами

При уменьшении расстояния между волокнами наблюдается изменение характера распределения напряжений σ_y/T : зона концентрации напряжений смещается из середины линии на ее границы. Напряжения σ_x/T и σ_z/T при приближении включений увеличиваются во всех точках отрезка без изменения характера распределения напряжений.

На рис. 2.48, 2.50, 2.52 приведены распределения напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии, соединяющей центры волокон между точками A и B (рис. 2.46), в зависимости от относительного расстояния a/R между ними в плоскости $z = h/2$ для низко модульных волокон $G_j/G = 25$.

Наблюдается тот же характер в распределении напряжений, что и в плоскости $z = 0$, но с их уменьшением приблизительно в два раза.

Таблица 2.7. Сходимость метода редукции

m_{max}	5	8	10
σ_x/T	0.97521	0.975575	0.97557
σ_y/T	0.6496	0.649476	0.649478
σ_z/T	0.462207	0.462297	0.462295

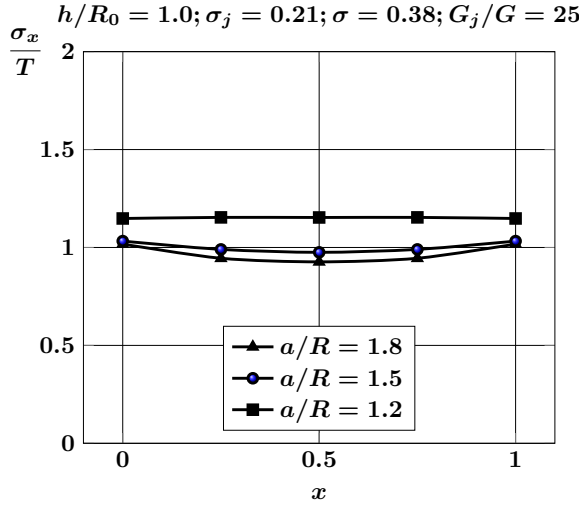


Рис. 2.47. Напряжения σ_x/T на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от относительного расстояния между ними в плоскости $z = 0$

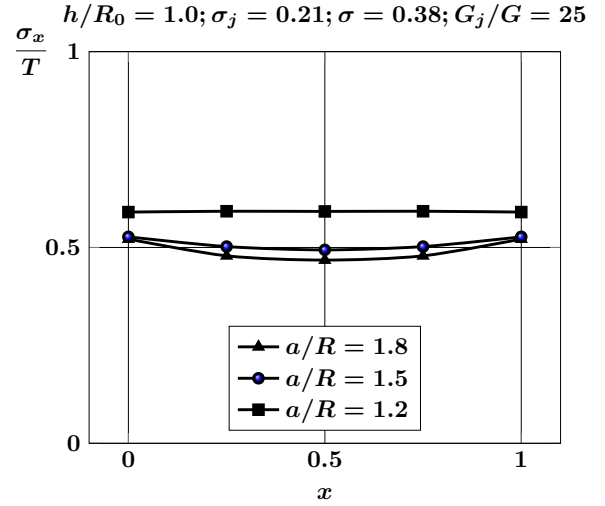


Рис. 2.48. Напряжения σ_x/T на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от относительного расстояния между ними в плоскости $z = h/2$

На рис. 2.53 приведено сравнение распределения напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T для случаев низкомодульных ($G_j/G = 25$) и высокомодульных ($G_j/G = 100$) волокон. Напряжения σ_x/T и σ_y/T в высокомодульном случае приблизительно на 6 % ниже низкомодульного, а напряжения σ_z/T в высокомодульном случае на 13 % выше низкомодульного для приведенных на рис. 2.53 параметров задачи.

На рис. 2.54 представлено сравнение напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на участках AB и CD (см. рис. 2.46) в плоскости $z = 0$. Напряжения на участке CD незначительно отличаются от напряжений на отрезке AB . Наблюдается незначительная асимметрия относительно средней точки отрезка CD в распределении напряжений.

На рис. 2.55, 2.56 приведено сравнение нормальных напряжений на линии

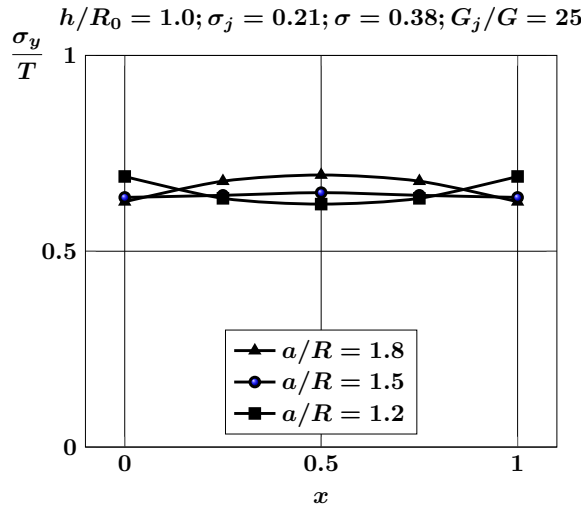


Рис. 2.49. Напряжения σ_y/T на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от относительного расстояния между ними в плоскости $z = 0$

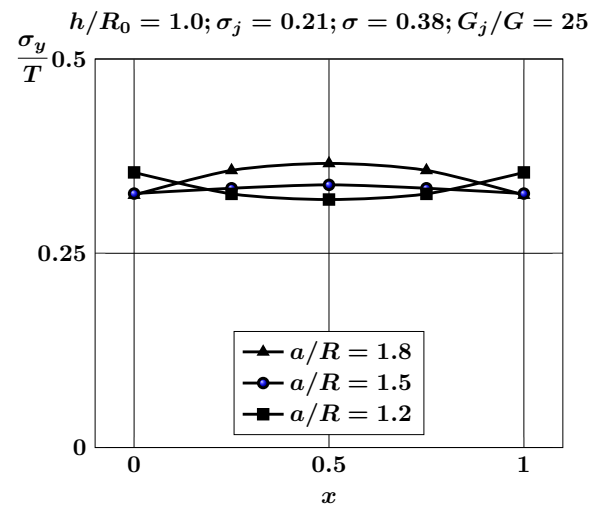


Рис. 2.50. Напряжения σ_y/T на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от относительного расстояния между ними в плоскости $z = h/2$

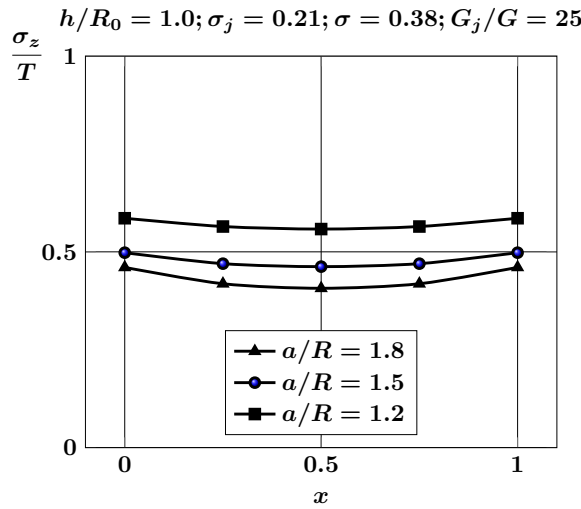


Рис. 2.51. Напряжения σ_z/T на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от относительного расстояния между ними в плоскости $z = 0$

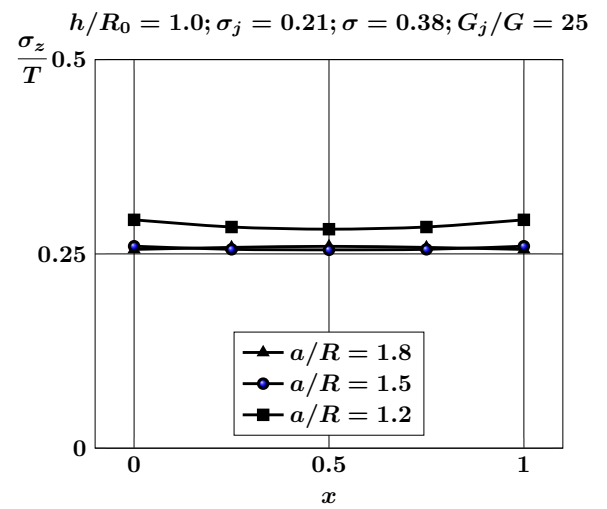


Рис. 2.52. Напряжения σ_z/T на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от относительного расстояния между ними в плоскости $z = h/2$

AB в зависимости от числа включений в упаковке при $a/R = 1.2$ и $a/R = 1.5$. В табл. 2.7 приведены результаты сходимости метода редукции.

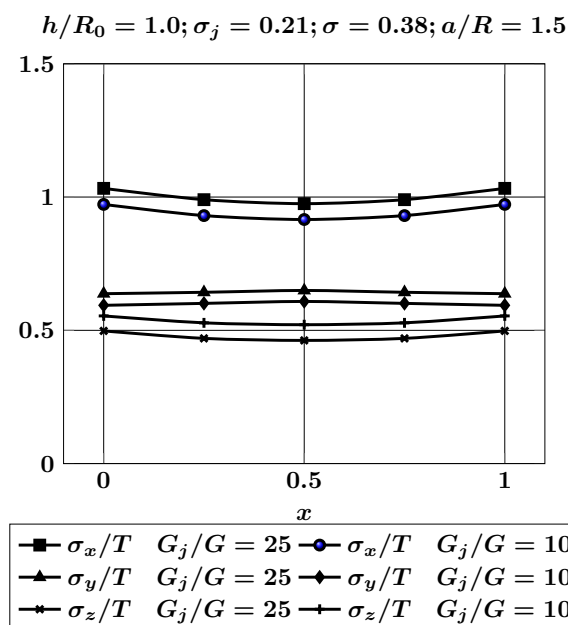


Рис. 2.53. Нормальные напряжения на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от отношения G_j/G в плоскости $z = 0$

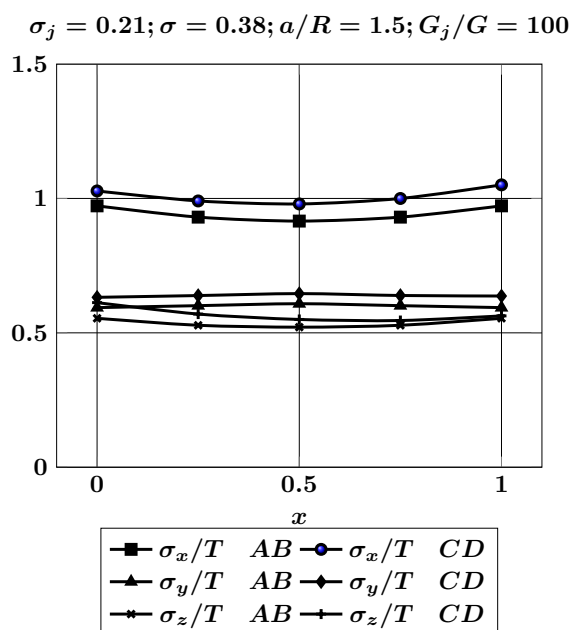


Рис. 2.54. Нормальные напряжения на линиях AB и CD в плоскости $z = 0$

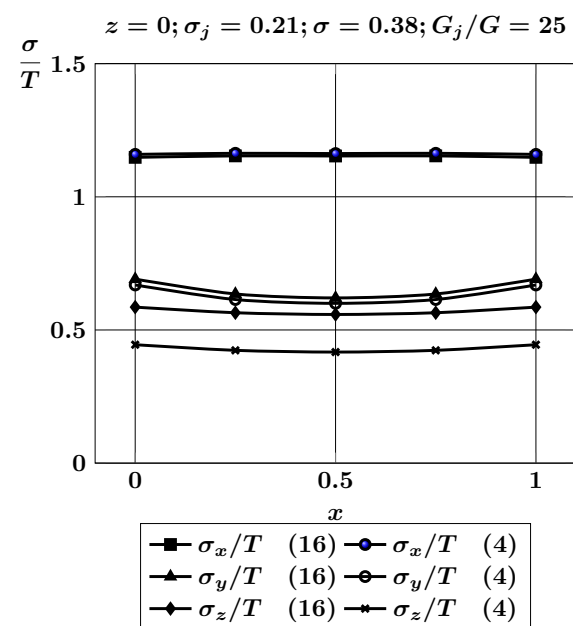


Рис. 2.55. Сравнение напряжений на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от числа включений в упаковке при $a/R = 1.2$

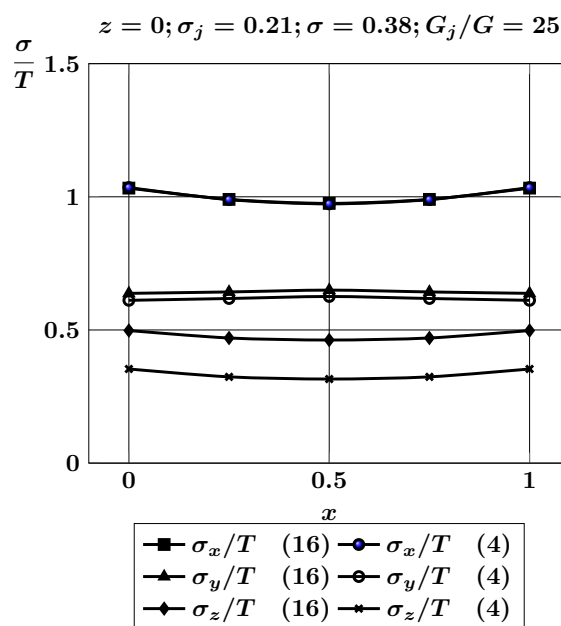


Рис. 2.56. Сравнение напряжений на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от числа включений в упаковке при $a/R = 1.5$

2.6.2. Сравнение различных структур для волокнистого композита с низкомодульными волокнами

На рис. 2.57 представлено сравнение нормальных компонент тензора напряжений для двух и четырех включений в цилиндрическом образце волокнистого композита с тетрагональной структурой упаковки волокон при $a/R = 1.5$, $h/R_0 = 1.0$, $G_j/G = 25$. Напряжения σ_y/T и σ_z/T мало отличаются на рассматриваемом участке. Напряжения σ_x/T приблизительно на 11 % больше для двух волокон, чем для четырех.

Сравним напряжения σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T в одной ячейке волокнистого композита с низкомодульными волокнами для гексагональной центрированной (рис. 2.28), гексагональной (рис. 2.19) и тетрагональной (рис. 2.37) структур упаковки волокон (рис. 2.58 — 2.60) при $h/R_0 = 1.0$, $a/R = 1.5$, $G_j/G = 25$. На всех графиках наибольшие значения напряжений наблюдаются для гексагональной структуры, в которой волокна расположены на наибольшем расстоянии друг относительно друга.

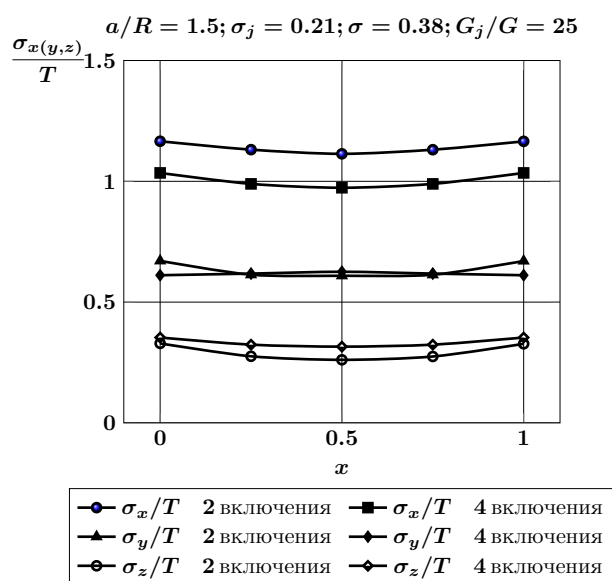


Рис. 2.57. Сравнение нормальных напряжений для двух и четырех включений в цилиндрическом образце с тетрагональной структурой упаковки волокон

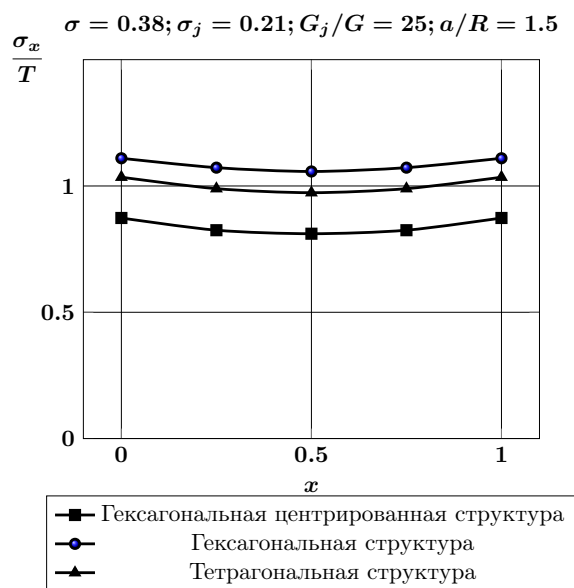


Рис. 2.58. Сравнение напряжений σ_x/T для волокнистого композита с низкомодульными волокнами для различных структур упаковки волокон

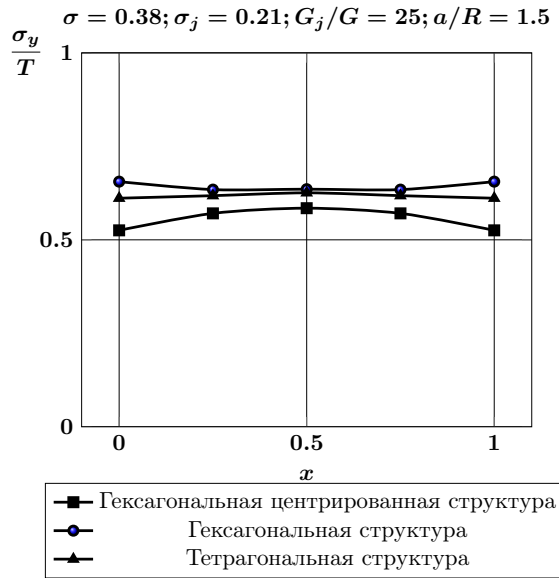


Рис. 2.59. Сравнение напряжений σ_y/T для волокнистого композита с низкомодульными волокнами для разных структур упаковки волокон

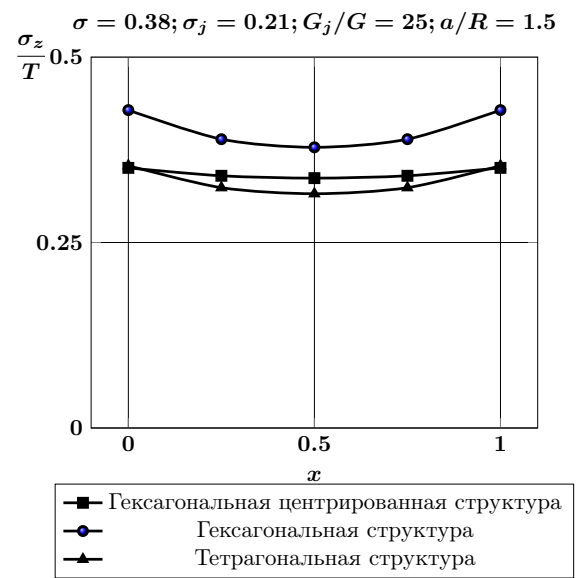


Рис. 2.60. Сравнение напряжений σ_z/T для волокнистого композита с низкомодульными волокнами для разных структур упаковки волокон

2.6.3. Цилиндрический образец волокнистого композита с тетрагональной объемно центрированной структурой

Рассмотрим конфигурацию пяти волокон (одна ячейка) в цилиндрическом образце композита, представленную на рис. 2.61. На рис. 2.62 — 2.64 приведены напряжения σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния a/R между ними в плоскости $z = 0$.

Графики показывают, что нормальные напряжения незначительно зависят от расстояния между волокнами. При этом напряжения σ_x/T и σ_y/T убывают с приближением волокон друг к другу, в то время как σ_z/T растут в этом случае.

На рис. 2.65 — 2.67 приведено сравнение нормальных напряжений на линии AB в плоскости $z = 0$ в зависимости от отношения модулей сдвига G_j/G волокон и матрицы при $a/R = 1.8$. Графики показывают, что напряжения σ_x/T и σ_y/T практически не зависят от отношения G_j/G в приведенном диапазоне. Существенно зависят от отношения модулей только напряжения σ_z/T , причем для высокомодульных волокон ($G_j/G = 100$) эти напряжения выше в 1.5 раза, чем для низкомодульных ($G_j/G = 25$).

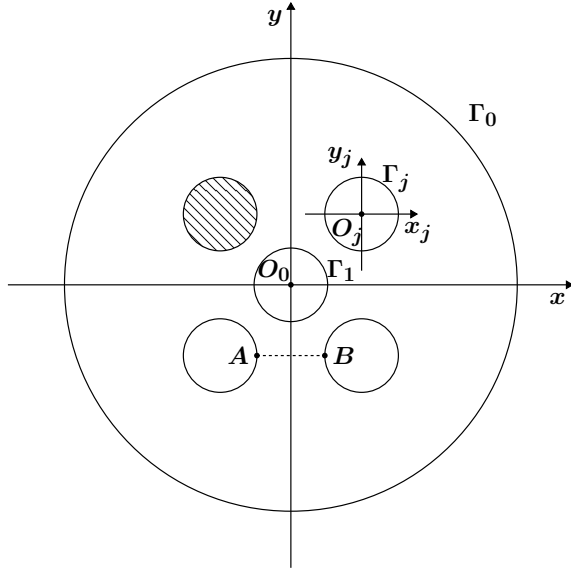


Рис. 2.61. Тетрагональная центрированная структура расположения волокон в цилиндрическом образце с одной ячейкой

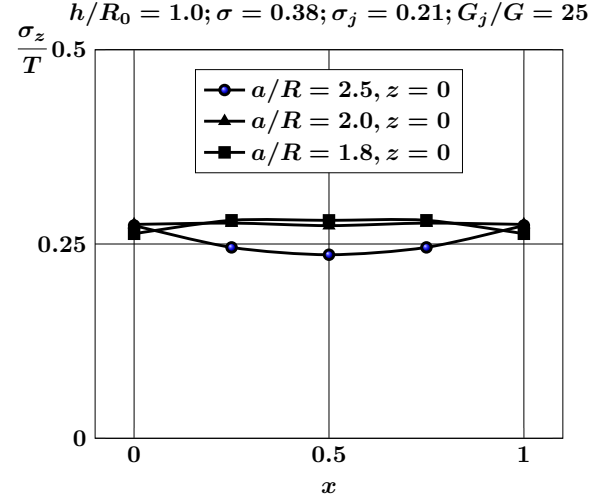


Рис. 2.62. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между волокнами

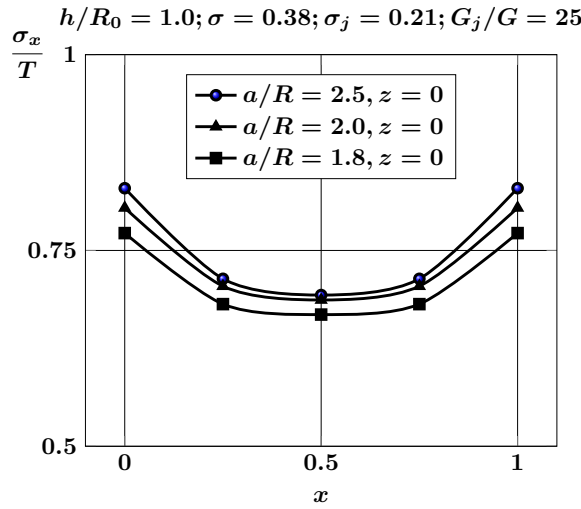


Рис. 2.63. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между волокнами

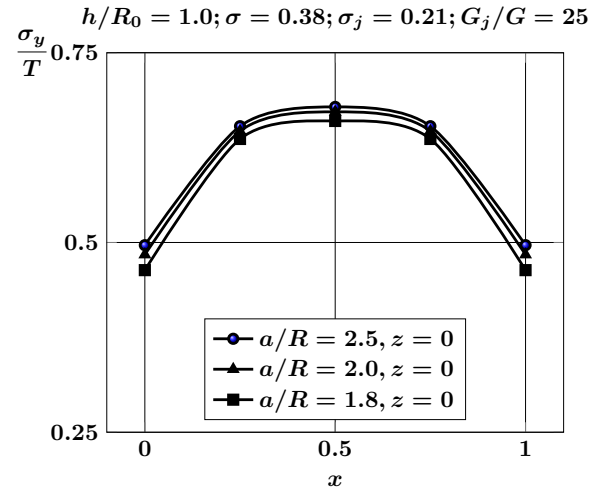


Рис. 2.64. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между волокнами

На рис. 2.68 — 2.70 представлено сравнение нормальных напряжений в зависимости от типа упаковки волокон. Сравниваются напряжения на линии AB в плоскости $z = 0$ при $a/R = 2.0$ и $G_j/G = 25$ для одной ячейки с тетрагональной структурой и одной ячейки с центрированной тетрагональной структурой. Для

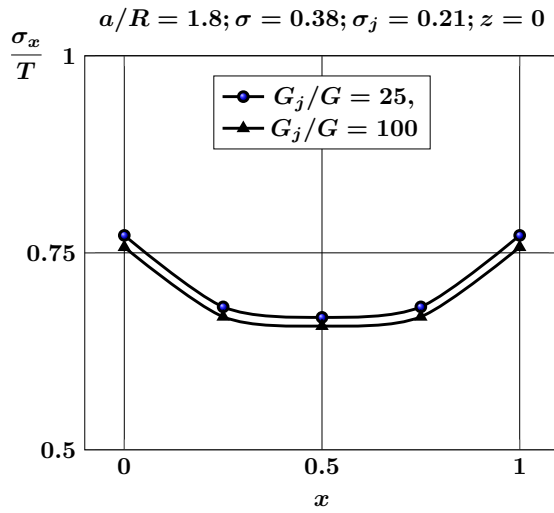


Рис. 2.65. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от отношения G_j/G

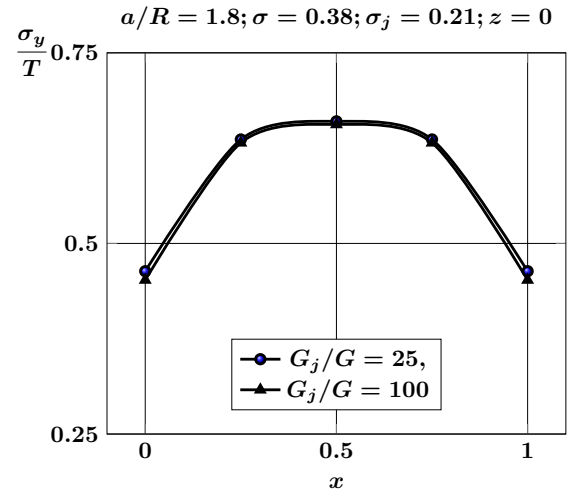


Рис. 2.66. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от отношения G_j/G

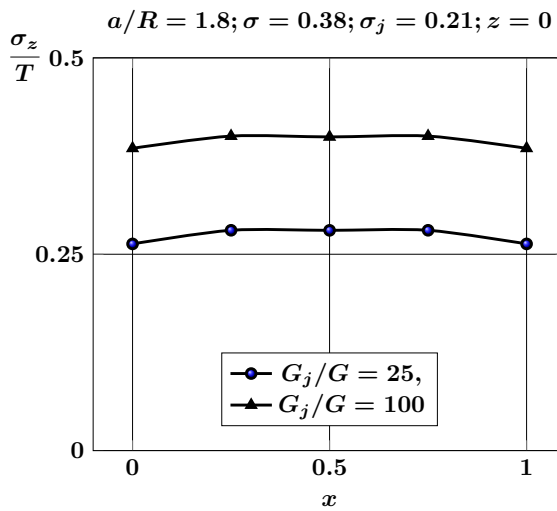


Рис. 2.67. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от отношения G_j/G

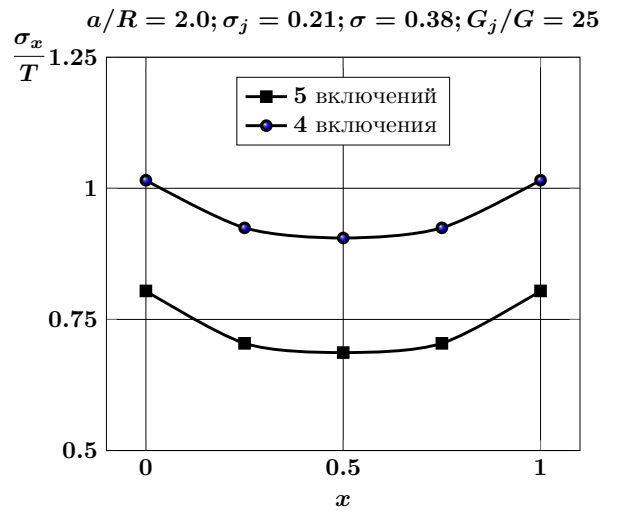


Рис. 2.68. Сравнение напряжений σ_x/T в зависимости от типа упаковки

напряжений σ_x/T и σ_y/T большие значения на всем рассматриваемом отрезке соответствуют нецентрированной тетрагональной структуре. График напряжений σ_z/T для центрированной ячейки практически постоянен и на большей части рассматриваемого отрезка расположен выше графика напряжений для нецентрированной ячейки.

Рассмотрим девять ячеек (25 волокон) с центрированной тетрагональной структурой, расположенных симметрично относительно оси цилиндрического

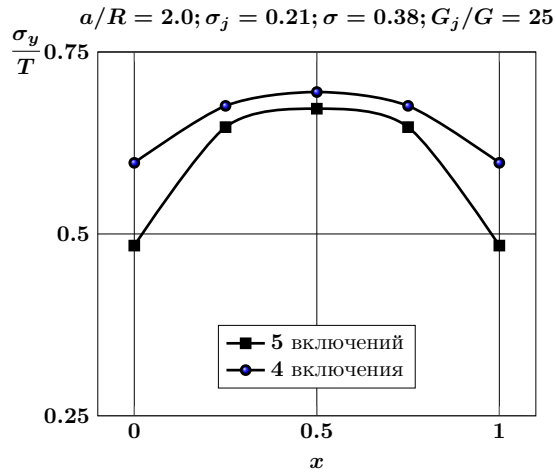


Рис. 2.69. Сравнение напряжений σ_y/T в зависимости от типа упаковки

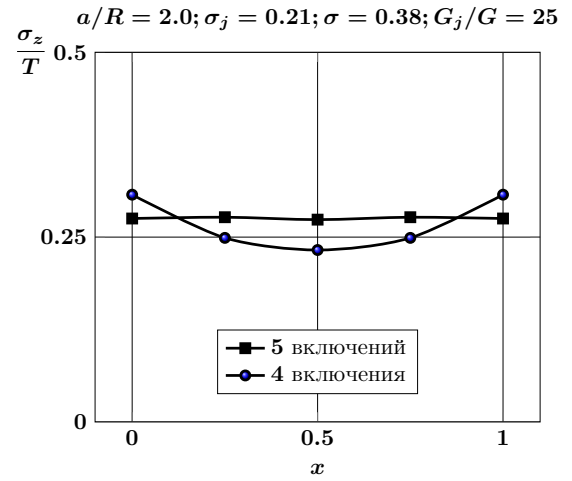


Рис. 2.70. Сравнение напряжений σ_z/T в зависимости от типа упаковки

образца (рис. 2.71).

На рис. 2.72 приведены нормальные напряжения на линии AB в плоскости $z = 0$ в зависимости от относительного расстояния между волокнами. Из графиков следует, что при сближении волокон напряжения уменьшаются. Области концентрации напряжений σ_x/T являются границы включений, в то время как для напряжений σ_y/T — середина отрезка AB .

На рис. 2.73 приведены напряжения на линии CD в зависимости от относительного расстояния между волокнами a/R в плоскости $z = 0$. Наблюдается тот же характер в распределении напряжений, что и на линии AB , с некоторой асимметрией графиков относительно срединной точки отрезка.

На рис. 2.74 сравниваются напряжения на линии AB в зависимости от отношения G_j/G . Напряжения σ_x/T и σ_y/T в низко модульном случае больше соответствующих напряжений в высоко модульном случае. Обратная картина наблюдается для напряжений σ_z/T .

Для нормальных напряжений на линии CD наблюдается та же зависимость от отношения G_j/G , что и на линии AB (рис. 2.75).

На рис. 2.76 приведено сравнение напряжений для одной и девяти ячеек тетрагональной центрированной структуры на линии AB в плоскости $z = 0$. Результаты даны для случая $a/R = 1.8$ и $G_j/G = 25$. Напряжения σ_x/T для

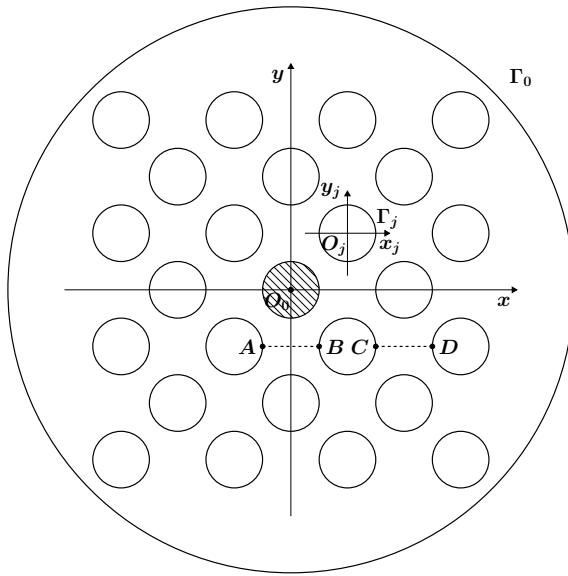


Рис. 2.71. Тетрагональная центрированная структура расположения волокон в цилиндрическом образце с девятью ячейками

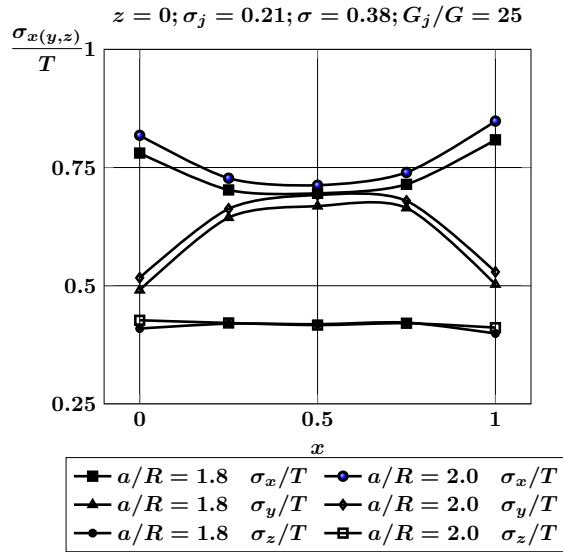


Рис. 2.73. Нормальные напряжения на линии CD в зависимости от относительного расстояния между волокнами

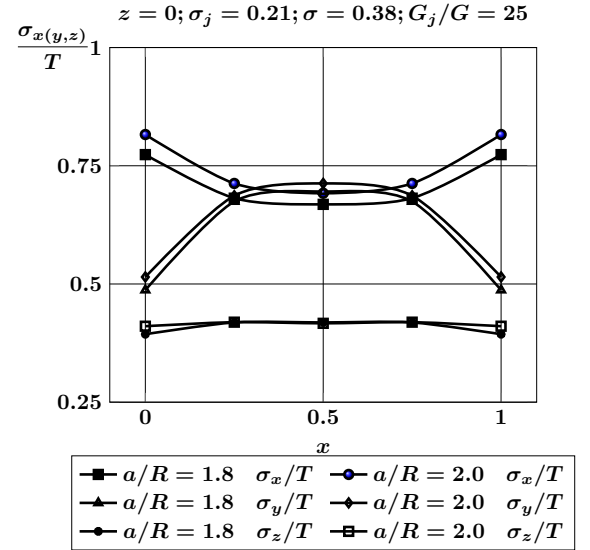


Рис. 2.72. Нормальные напряжения на линии AB в зависимости от относительного расстояния между волокнами

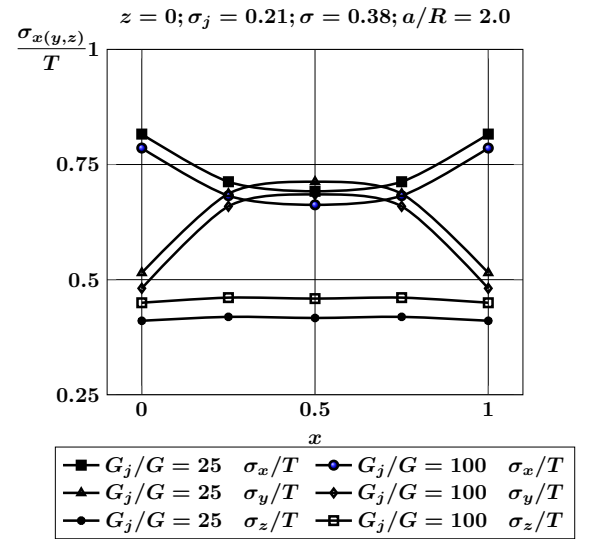


Рис. 2.74. Нормальные напряжения на линии AB в зависимости от отношения G_j/G

этих случаев практически совпадают, напряжения σ_y/T мало отличаются друг от друга, и напряжения σ_z/T заметно отличаются друг от друга (для 25 включений значения больше, чем для 5).

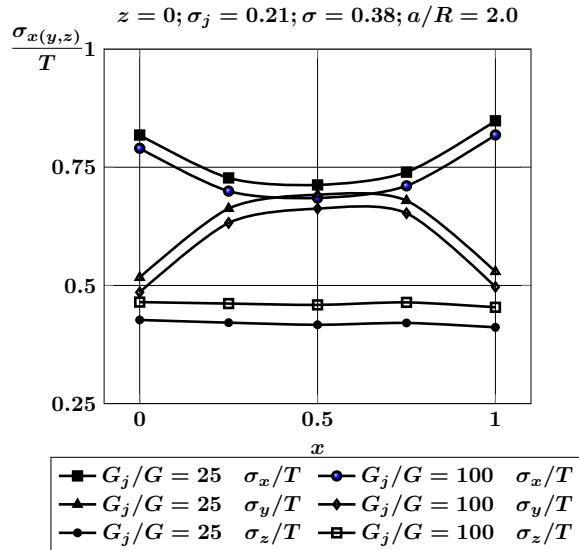


Рис. 2.75. Нормальные напряжения на линии CD в зависимости от отношения G_j/G

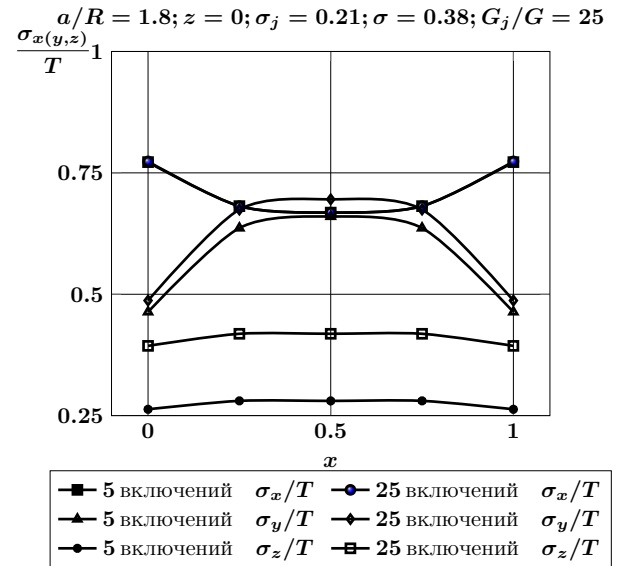


Рис. 2.76. Сравнение напряжений для одной и девяти ячеек тетрагональной центрированной структуры на линии AB

2.6.4. Цилиндрический образец волокнистого композита с гексагональной структурой

Рассмотрим гексагональную упаковку волокон в цилиндрическом образце композита, представленную на рис. 2.77.

На рис. 2.78 — 2.80 приведены напряжения σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии AB в плоскостях $z = 0$ и $z = h/2$ для одной центральной ячейки гексагональной упаковки в зависимости от относительного расстояния a/R между ними. Основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T . Для всех приведенных графиков характерно, что с приближением волокон напряжения растут, и напряжения в плоскости $z = h/2$ приблизительно в 2 раза меньше, чем в плоскости $z = 0$.

Рассмотрим случай девяти ячеек гексагональной структуры, симметрично расположенных относительно центра цилиндрического образца. При численной реализации полагаем, что $R_j = R$ ($j = 1 \div 24$), а радиус цилиндрического образца материала $R_0 = 10R$. Коэффициенты Пуассона материалов матрицы и волокон $\sigma = 0.38$ и $\sigma_j = 0.21$, что соответствует волокнам из алюмоборосиликатного стекла с эпоксидно-малеиновым связующим. Разрешающая система

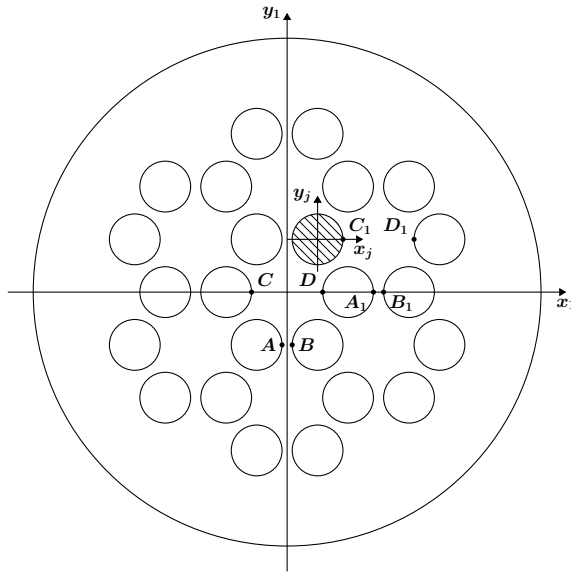


Рис. 2.77. Гексагональная структура расположения волокон в цилиндрическом образце

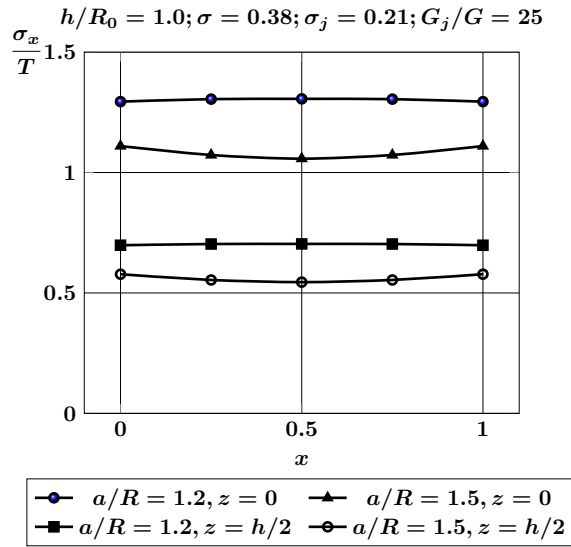


Рис. 2.79. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между волокнами

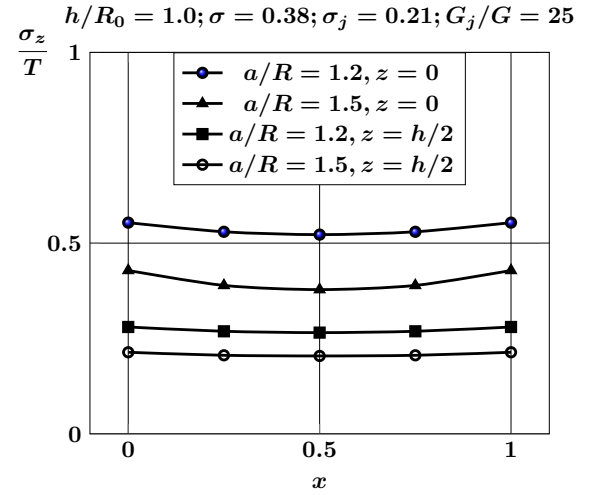


Рис. 2.78. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между волокнами

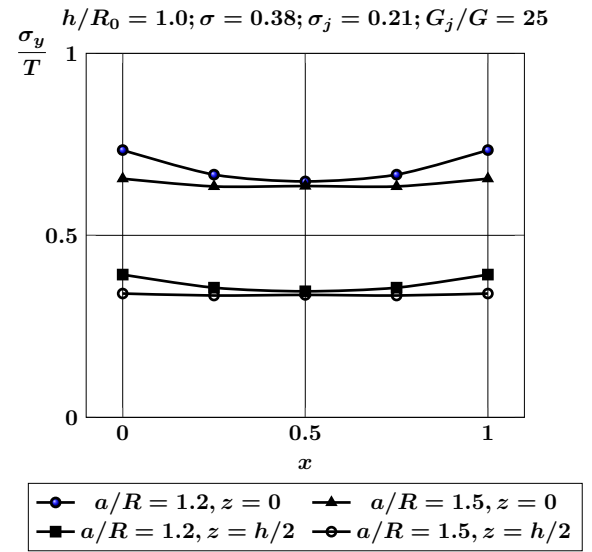


Рис. 2.80. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между волокнами

уравнений решена численно методом редукции по индексу m при фиксированном λ , то есть бесконечная система уравнений заменяется конечной системой, в которой индексы меняются в диапазоне $-m_{max} \leq m, l \leq m_{max}$.

Рассматривались случаи $m_{max} = 5, 8, 10$ (табл. 2.8) при $a/R = 1.5$, $h/R_0 =$

1.0, $G_j/G = 25$. Метод показал хорошую сходимость уже при $m_{max} = 5$.

Таблица 2.8. Сходимость метода редукции для 24 включений

m_{max}	5	8	10
σ_x	1.0812	1.08641	1.08656
σ_y	0.648698	0.64797	0.647916
σ_z	0.499931	0.501547	0.50158

Нормальные компоненты тензора напряжений вычислялись на наиболее характерных в смысле распределения напряжений линиях. Выбирались линии AB и CD , принадлежащие границе гексагональной ячейки и ее диагонали, и соответствующие им линии A_1B_1 и C_1D_1 в нецентральной ячейке (см. рис. 2.77).

На рис. 2.81, 2.82 приведены графики распределения напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линиях AB и CD (см. рис. 2.77) в зависимости от относительного расстояния между включениями a/R в плоскости $z = 0$.

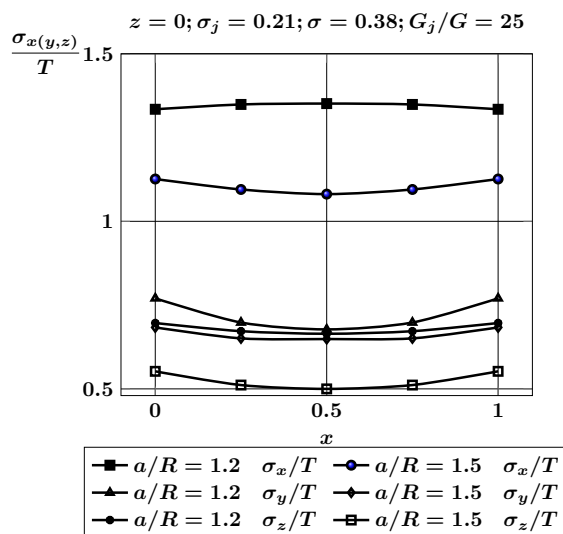


Рис. 2.81. Распределение напряжений на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями

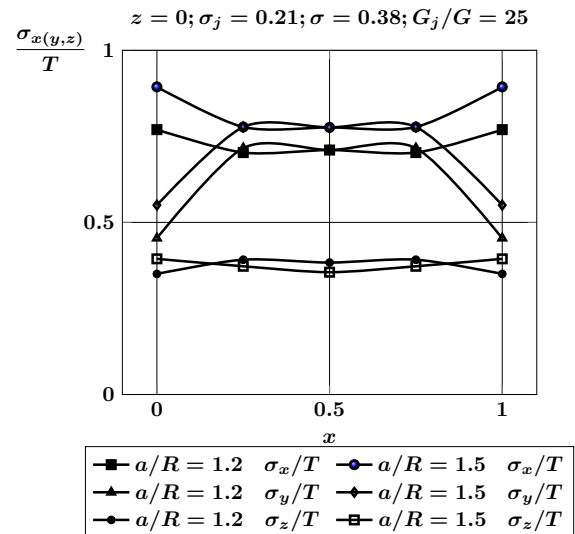


Рис. 2.82. Распределение напряжений на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями

На линии AB наблюдается рост нормальных напряжений при приближении волокон без существенного изменения их характера. Иначе себя ведут напряжения на линии CD . Напряжения σ_x/T и σ_y/T убывают с приближением волокон, в то время как напряжения σ_z/T на концах линии убывают, а в середине —

растут. Наблюдается также отличие в характере распределения напряжений на линиях AB (одномодальные кривые) и CD (двухмодальные кривые).

На рис. 2.83, 2.84 приведено сравнение нормальных напряжений на линиях AB и CD для низкомодульных ($G_j/G = 25$) и высокомодульных волокон ($G_j/G = 100$). В целом характер распределения напряжений не меняется, однако напряжения σ_x/T и σ_y/T уменьшаются с ростом G_j/G , в то время как σ_z/T , наоборот, увеличиваются. Изменения составляют 3–6 %.

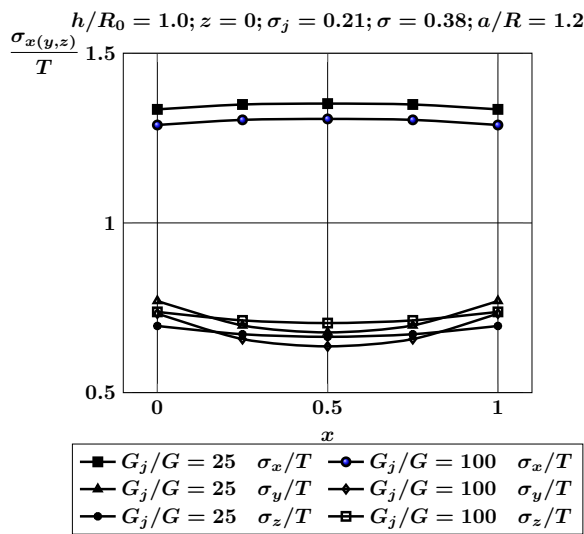


Рис. 2.83. Сравнение напряжений на линии AB при разном отношении G_j/G

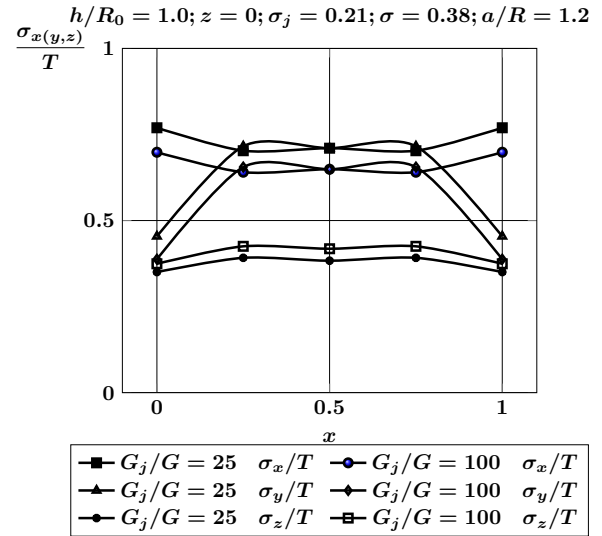


Рис. 2.84. Сравнение напряжений на линии CD при разном отношении G_j/G

На рис. 2.85, 2.86 приведено сравнение графиков напряжений на линиях AB и CD при различном количестве включений. Сравниваются случаи 24 и 6 включений. Считается, что 6 включений образуют центральную ячейку гексагональной упаковки с рассматриваемыми 24 волокнами. С увеличением числа ячеек в гексагональной упаковке наблюдаются незначительное увеличение напряжений σ_x/T , σ_y/T и заметное увеличение напряжений σ_z/T . На характер распределения напряжений количество ячеек не влияет.

На рис. 2.87, 2.88 представлены графики распределения напряжений на соответствующих линиях AB и A_1B_1 , CD и C_1D_1 в двух ячейках (см. рис. 2.77). Анализ данных показывает, что в нецентральной ячейке значения напряжений выше, чем в центральной ячейке, причем наибольшее отличие наблюдается в

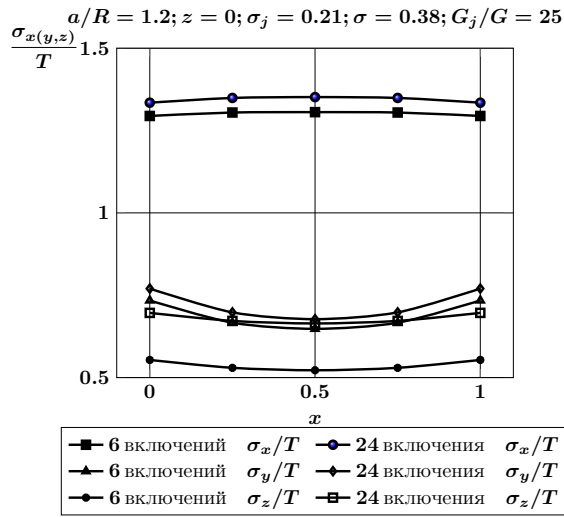


Рис. 2.85. Сравнение напряжений на линии AB при разном количестве волокон в упаковке

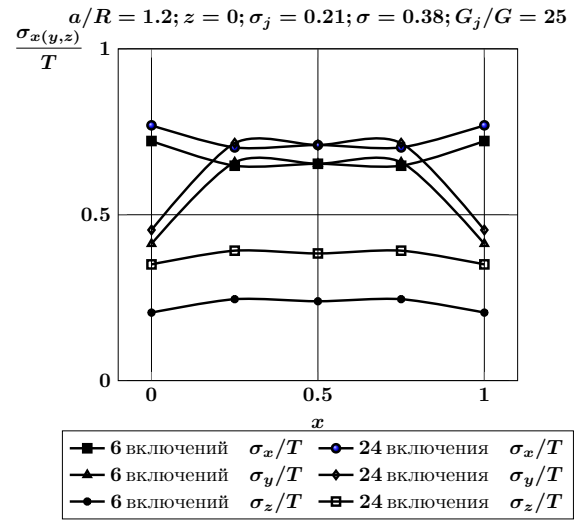


Рис. 2.86. Сравнение напряжений на линии CD при разном количестве волокон в упаковке

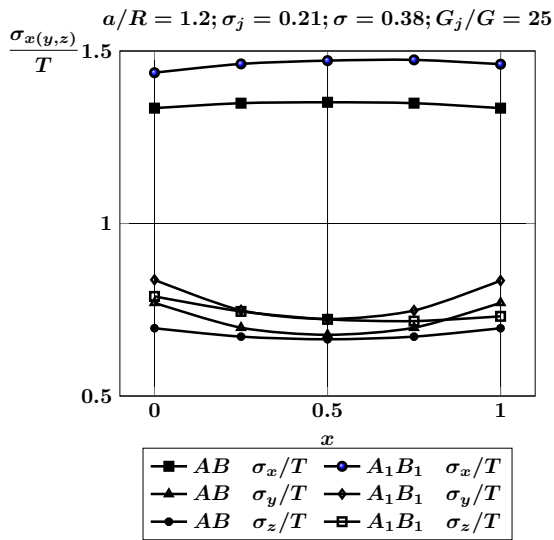


Рис. 2.87. Сравнение напряжений на линиях AB и A_1B_1

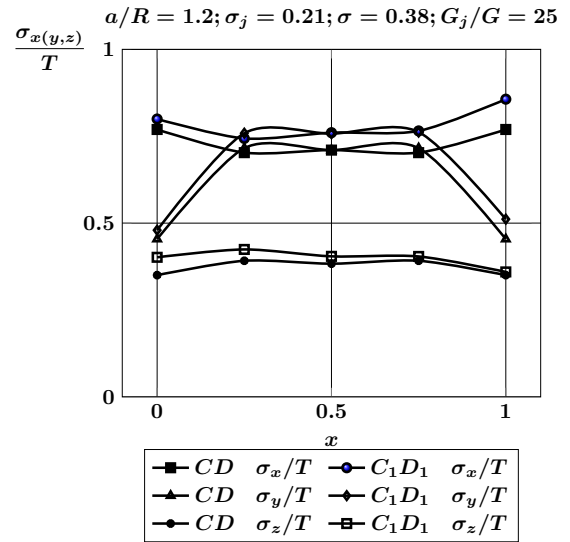


Рис. 2.88. Сравнение напряжений на линиях CD и C_1D_1

распределении напряжений σ_x/T . Для нецентральной ячейки характерным является несимметричное распределение напряжений относительно середины линии.

2.6.5. Цилиндрический образец волокнистого композита с гексагональной объемно центрированной структурой

Рассмотрим гексагональную объемно центрированную упаковку волокон в цилиндрическом образце композита, представленную на рис. 2.89.

На рис. 2.90 — 2.92 приведены напряжения σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии AB в плоскостях $z = 0$ и $z = h/2$ для одной центральной ячейки гексагональной центрированной упаковки в зависимости от относительного расстояния a/R между ними. Основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T . Для σ_x/T и σ_z/T характерно, что с приближением волокон напряжения растут, в то время как для напряжений σ_y/T , наоборот, убывают. В плоскости $z = h/2$ напряжения в среднем уменьшаются в 1.5 раза по сравнению с напряжениями в плоскости $z = 0$.

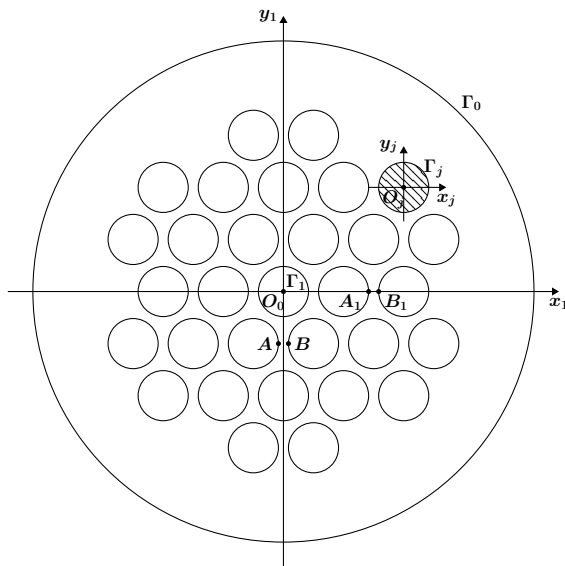


Рис. 2.89. Гексагональная центрированная структура расположения волокон в цилиндрическом образце

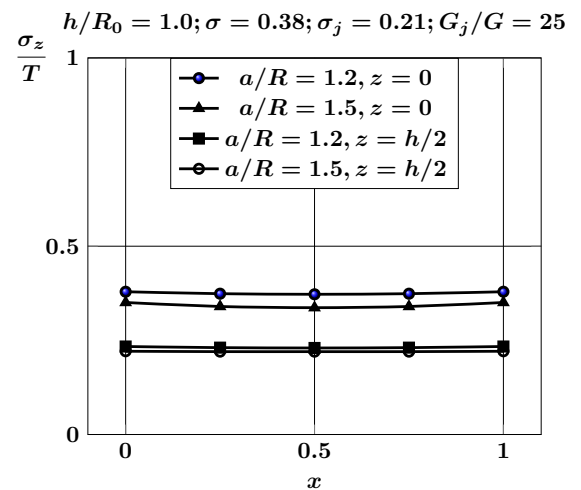


Рис. 2.90. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между волокнами для одной центрально расположенной ячейки

Рассмотрим случай центрированной гексагональной ячейки, окруженной такими же ячейками. Этот случай соответствует 31 включению (см. рис. 2.89).

Нормальные компоненты тензора напряжений вычислялись на наиболее характерных в смысле распределения напряжений линиях. Были выбраны линия

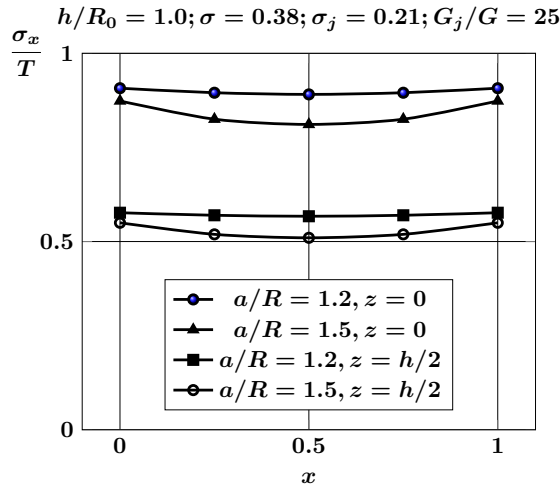


Рис. 2.91. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между волокнами для одной центрально расположенной ячейки

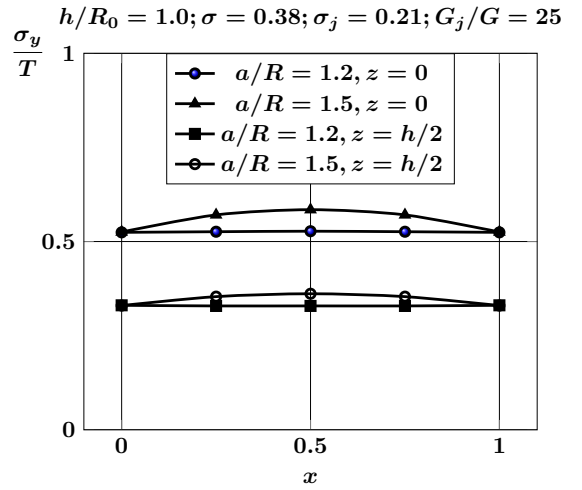


Рис. 2.92. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между волокнами для одной центрально расположенной ячейки

AB , принадлежащая границе гексагональной ячейки, и соответствующая ей линия A_1B_1 в нецентральной ячейке (см. рис. 2.89).

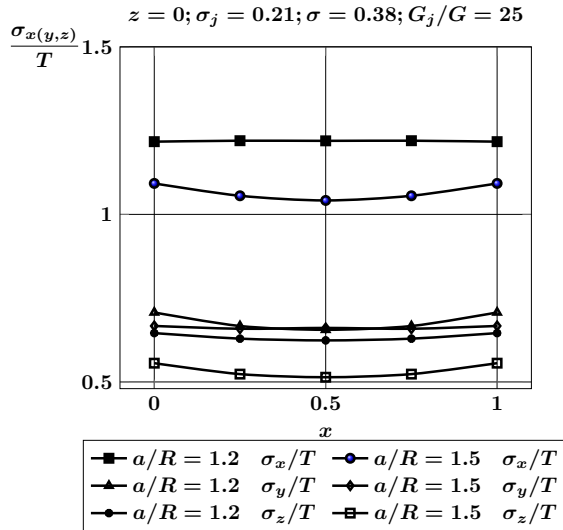


Рис. 2.93. Распределение напряжений на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями в плоскости $z = 0$

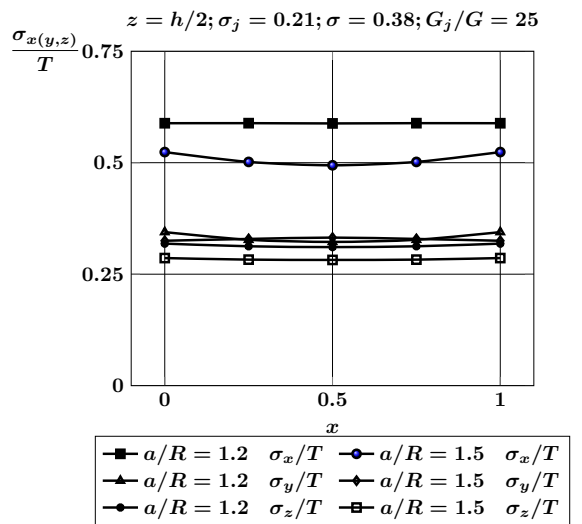


Рис. 2.94. Распределение напряжений на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями в плоскости $z = h/2$

На рис. 2.93, 2.94 приведены графики распределения напряжений σ_x/T ,

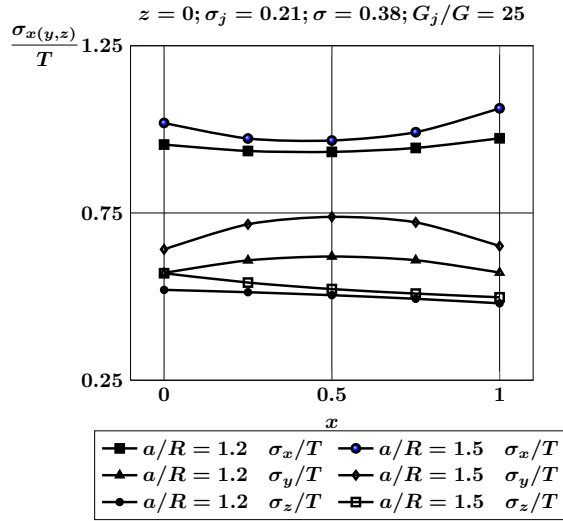


Рис. 2.95. Распределение напряжений на линии A_1B_1 в зависимости от относительного расстояния между включениями в плоскости $z = 0$

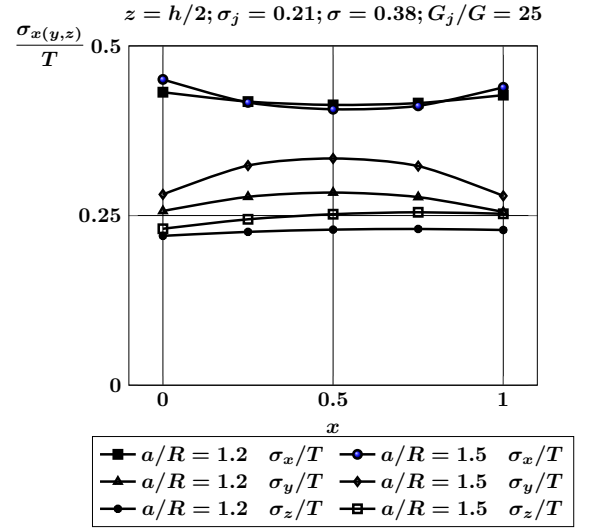


Рис. 2.96. Распределение напряжений на линии A_1B_1 в зависимости от относительного расстояния между включениями в плоскости $z = h/2$

σ_y/T и σ_z/T на линии AB (см. рис. 2.89), в зависимости от относительного расстояния между включениями a/R в плоскостях $z = 0$ и $z = h/2$. Все графики нормальных напряжений в случае меньшего расстояния между включениями расположены выше графиков, которые соответствуют большему расстоянию между включениями. Обратим внимание на различия в распределении напряжений σ_y/T для одной ячейки и семи ячеек объемно центрированной гексагональной структуры.

На рис. 2.95, 2.96 представлены графики распределения напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии A_1B_1 (см. рис. 2.89) в зависимости от относительного расстояния между включениями a/R в плоскостях $z = 0$ и $z = h/2$. Все графики нормальных напряжений в случае меньшего расстояния между включениями расположены ниже графиков, которые соответствуют большему расстоянию между включениями. Напряжения σ_x/T на линии A_1B_1 на 25 % выше тех же напряжений на линии AB . Наблюдается характерная асимметрия графиков относительно срединной точки отрезка.

На рис. 2.97, 2.98 приведено сравнение напряжений на линиях AB и A_1B_1 в плоскости $z = 0$ в зависимости от отношения G_j/G . На всех графиках напря-

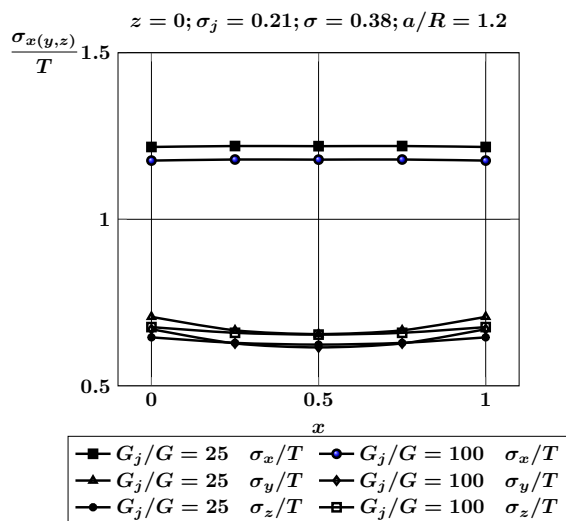


Рис. 2.97. Сравнение напряжений на линии AB при разном отношении G_j/G

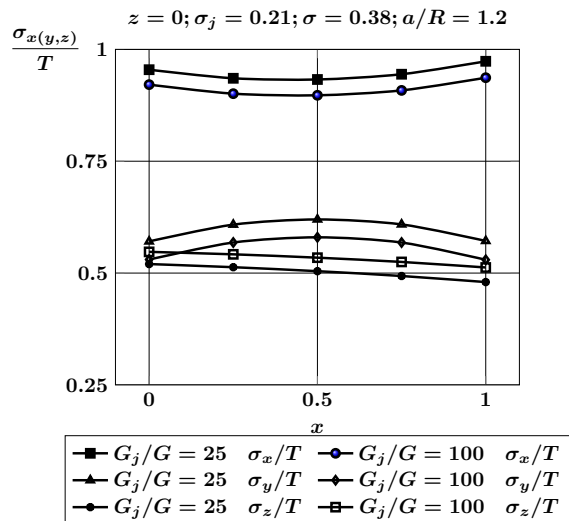


Рис. 2.98. Сравнение напряжений на линии A_1B_1 при разном отношении G_j/G

жения в низкомодульном случае выше напряжений в высокомодульном случае.

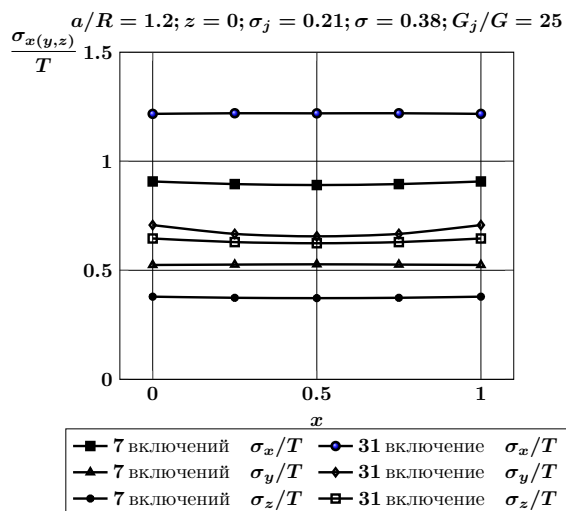


Рис. 2.99. Сравнение напряжений на линии AB в плоскости $z = 0$ для одной и семи ячеек объемно центрированной гексагональной структуры

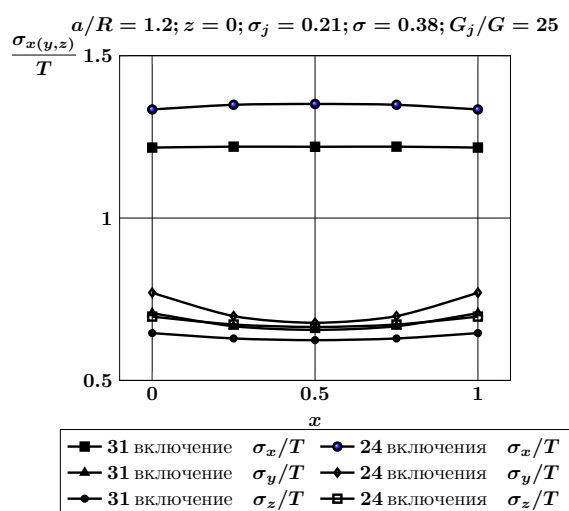


Рис. 2.100. Сравнение напряжений на линии AB в плоскости $z = 0$ для семи ячеек в случаях центрированной и нецентрированной гексагональной структуры

На рис. 2.99 сравниваются напряжения на линии AB в плоскости $z = 0$ для одной и семи (симметрично расположенных относительно центра цилиндрического образца) ячеек объемно центрированной гексагональной структуры. На-

блюдается заметное отличие в значениях напряжений, причем все напряжения для случая семи ячеек больше соответствующих напряжений для случая одной ячейки.

На рис. 2.100 приведено сравнение напряжений на линии AB в плоскости $z = 0$ для семи ячеек в случаях центрированной и нецентрированной гексагональной структуры. Все графики напряжений для нецентрированной структуры лежат выше, чем для центрированной.

Глава 3

Механика упругого деформирования зернистых композитов со сферическими зернами

3.1. Структура среды с зернистыми неоднородностями

Однородная матрица со сферическими или сфероидальными включениями — простейшая модель дисперсного или обычного упрочненного композиционного материала. Если размеры включений не превышают доли микрона, то имеем дисперсно-упрочненный материал, а если превышают указанную величину, то имеем материал с включениями, например твердосплавные композиции на основе металлов, керметы, строительные материалы, сферопластики и т. д.

Реальные материалы имеют нерегулярное размещение частиц в пространстве, различные формы и размеры. Модельные структуры строятся исходя из трансляционной и поворотной симметрии регулярной среды с одинаковыми частицами [16].

Кубическая структура. Наиболее простой структурой зернистого материала является структура, в которой сферические зерна одинакового размера расположены в узлах кубической решетки (рис. 3.1).

При плотной упаковке шаров предельное объемное заполнение достигается, когда сферы касаются друг друга:

$$\zeta_{max} = \frac{\pi}{6} \approx 0.52.$$

Напряженное состояние в такой структуре будет обладать циклической симметрией в трех взаимно перпендикулярных плоскостях с углом периода $\alpha = \pi/4$.

Объемно-центрированная кубическая структура. Если в кубическую структуру поместить еще одну сферу в центре куба (рис. 3.2), так что в од-

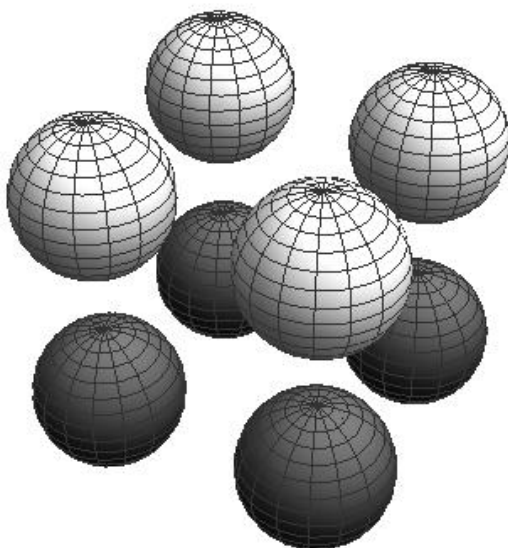


Рис. 3.1. Простейшая кубическая структура композита со сферическими зернами

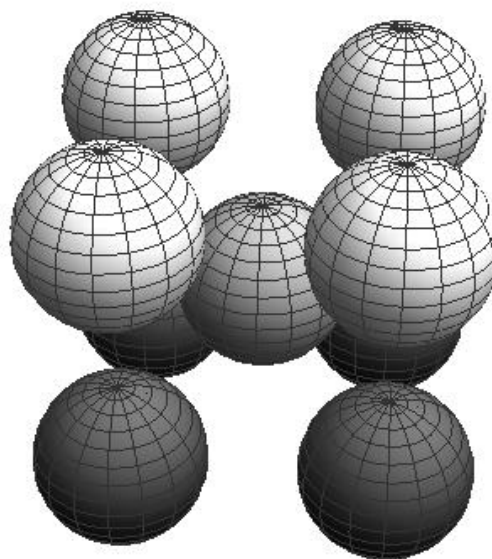


Рис. 3.2. Объемно-центрированная кубическая структура

ной ячейке уже будет два шара, то плотная упаковка достигается при касании шаров по диагоналям куба.

Предельное объемное содержание

$$\zeta_{max} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \approx 0.68.$$

Циклическая симметрия напряженного состояния в такой решетке будет определяться наклоном плоскости симметрии, соответственно изменится угол периода.

Гранецентрированная кубическая структура. Если на каждой грани куба в кубической структуре поместить дополнительно по одному шару, половина объема которых войдет в данную ячейку, то в выделенном объеме будет всего четыре включения (рис. 3.3).

Допустимое наибольшее содержание включений для такой структуры —

$$\zeta_{max} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0.74.$$

Локальная симметрия в напряженном состоянии в этой решетке определя-

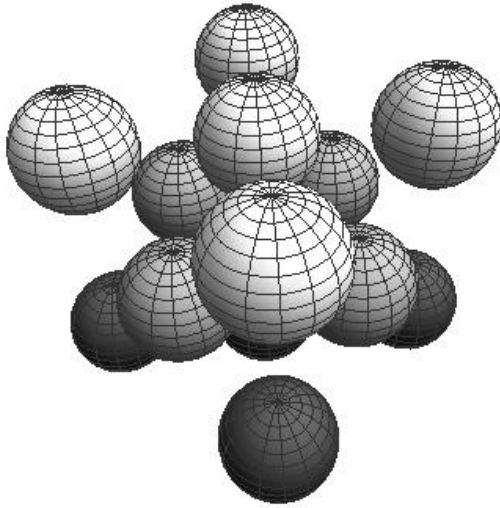


Рис. 3.3. Гранецентрированная кубическая структура

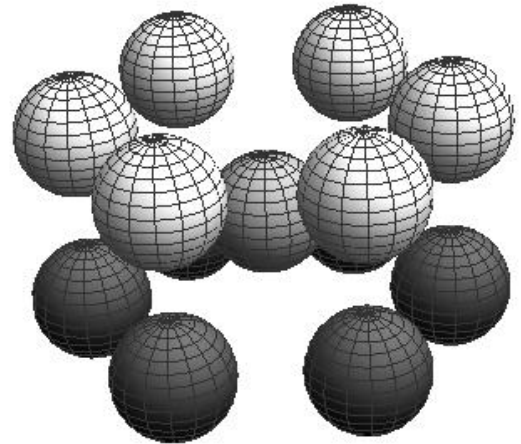


Рис. 3.4. Гексагональная центрированная упаковка композиционной среды

ется расположением ближайших соседей и эквивалентна таковой в простой кубической структуре.

Гексагональная центрированная структура. В гексагональной центрированной структуре основание ячейки образовано гексагональной сеткой. Центры сфер в следующей плоскости сдвинуты так, что шары расположены между лежащими в нижней плоскости. Каждый шар имеет шесть ближайших соседей в основной плоскости ячейки (как в плоской структуре), другие шесть соседей расположены по три — выше и ниже основной плоскости (рис. 3.4).

Предельная степень упаковки материала достигается при касании шаров друг друга:

$$\zeta_{max} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74$$

3.2. Упругое состояние пространства с несколькими сферическими полостями

Рассмотрим одно(дву)осное растяжение на бесконечности упругого пространства с несколькими сферическими полостями, расположенными неосесимметрично. Центры полостей находятся в точках O_j , а их радиусы равны R_j .

Точки O_j расположены в узлах периодической решетки с кубической структурой (см. рис. 3.5). Считается, что полости свободны от нагрузки.

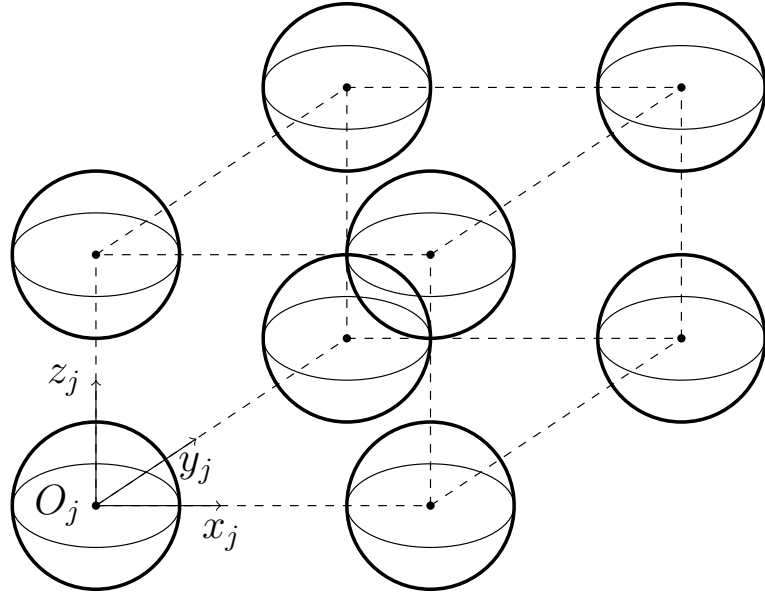


Рис. 3.5. Схематическое представление задачи

Введем сферические системы координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ с началами в точках O_j , оси которых одинаково направлены.

Соотношения между координатами можно описать формулами

$$\begin{aligned} x_i &= r_i \sin \theta_i \cos \varphi_i, \\ y_i &= r_i \sin \theta_i \sin \varphi_i, \\ z_i &= r_i \cos \theta_i, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} x_j = x_\alpha + x_{j\alpha}, \\ y_j = y_\alpha + y_{j\alpha}, \\ z_j = z_\alpha + z_{j\alpha}, \end{cases} \quad j \neq \alpha, \quad j, \alpha = \overline{1, N}, \tag{3.2}$$

где $\overrightarrow{O_j O_\alpha} = (x_{j\alpha}, y_{j\alpha}, z_{j\alpha}) = (r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$.

Для определения НДС в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе относительно неизвестного вектора перемещения \mathbf{U} с граничными условиями

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = 0 \tag{3.3}$$

и условиями на бесконечности одного из двух типов

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{z=\pm\infty} = \pm T\mathbf{e}_z \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\rho=\infty} = T\mathbf{e}_\rho \quad (\text{двуосное растяжение}), \quad (3.5)$$

где $\mathbf{F}\mathbf{U}$ — отвечающий перемещению \mathbf{U} вектор усилий на соответствующей граничной поверхности, $\Gamma_j = \{(r_j, \theta_j, \varphi_j) : r_j = R_j\}$.

Решение задачи будем искать в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0, \quad (3.6)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} a_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad (3.7)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \left(-\frac{\sigma}{1+\sigma} \rho_1 \mathbf{e}_{\rho_1} + \frac{1}{1+\sigma} z_1 \mathbf{e}_z \right) \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (3.8)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma} \rho_1 \mathbf{e}_{\rho_1} - \frac{2\sigma}{1+\sigma} z_1 \mathbf{e}_z \right) \quad (\text{двуосное растяжение}), \quad (3.9)$$

где G , σ — модуль сдвига и коэффициент Пуассона упругого пространства; $a_{s,n,m}^{(j)}$ — неизвестные коэффициенты.

В работе [59] были введены следующие частные решения уравнения Ламе во внешности (внутренности) шара $\Omega_4^\pm = \{(r, \theta, \varphi) : r \gtrless r_0\}$:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{D}_s u_{n\mp 1,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi); \quad s = 1, 3; \quad (3.10)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) - \frac{r_0^2}{2(n \pm 1) + 1} \mathbf{D}_1 u_{n\pm 1,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi), \quad (3.11)$$

где $n = 0, 1, \dots$, $|m| \leq n+1$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

$$u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = \left\{ \begin{array}{l} (n-m)!/r^{n+1} \\ r^n/(n+m)! \end{array} \right\} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad |m| \leq n; \quad (3.12)$$

$$\mathbf{D}_1 = \nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}; \quad \mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z],$$

где $\chi = 3 - 4\sigma$; $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ — орты декартовой системы координат.

Относительно перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ граничные условия можно записать следующим образом:

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\Gamma_j} = -\mathbf{F}\mathbf{U}_0|_{\Gamma_j}; \quad (3.13)$$

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{z=\pm\infty} = 0 \quad (\text{одноосное растяжение}); \quad (3.14)$$

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\rho=\infty} = 0 \quad (\text{двуосное растяжение}). \quad (3.15)$$

Вспомогательным перемещениям \mathbf{U}_0 отвечают следующие напряжения на поверхностях Γ_j ($\mathbf{n}_j = \mathbf{e}_{r_j}$ — вектор нормали на поверхности Γ_j):

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = TP_1(\cos \theta_j)\mathbf{e}_z \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (3.16)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = -TP_1^{(1)}(\cos \theta_j)\mathbf{e}_{\rho_j} \quad (\text{двуосное растяжение}). \quad (3.17)$$

Используя теоремы сложения, перемещение $\tilde{\mathbf{U}}$ можно записать полностью в системе координат с началом в точке O_j :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} a_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) + \\ & + \sum_{\alpha \neq j} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} \left\{ \mathbf{U}_{1,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+1} \left[a_{1,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m} - \right. \right. \\ & \left. \left. - a_{2,k,l}^{(\alpha)} \tilde{f}_{k,l,j,\alpha}^{-(44)n,m} \right] + \mathbf{U}_{2,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m} a_{2,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m} + \right. \\ & \left. + \mathbf{U}_{3,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+1} a_{3,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m} \right\}, \quad (3.18) \end{aligned}$$

где

$$f_{n,m,j,\alpha}^{(44)k,l} = u_{n+k,m-l}^{+(4)}(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}); \quad (3.19)$$

$$\tilde{f}_{n,m,j,\alpha}^{-(44)k,l} = \frac{r_{j0}^2}{2k+3} f_{n,m,j,\alpha}^{(44)k+2,l} - z_{j\alpha} f_{n,m,j,\alpha}^{(44)k+1,l} + \frac{r_{\alpha 0}^2}{2n+3} f_{n+1,m,j,\alpha}^{(44)k+1,l}. \quad (3.20)$$

Формулы для напряжений, отвечающих базисным функциям перемещений $\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ на сферических поверхностях Γ_j ($\mathbf{n}_j = \mathbf{e}_{\rho_j}$, \mathbf{n}_j — нормаль к поверхности Γ_j):

$$\mathbf{FU}_{1,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = -\frac{2G}{r_j}(n+1) \left[-u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ \left. + u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right]; \quad (3.21)$$

$$\mathbf{FU}_{2,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \frac{2G}{r_j} \left\{ (n+m) \left[\frac{(n+3)(n-m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] \times \right. \\ \times u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} - \\ - (n-m) \left[\frac{(n+3)(n+m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 + \\ + \left[\frac{(n+3)(n-m+1)(n+m+1)}{2n+3} - (n+1)(2\sigma-1) \right] \times \\ \left. \times u_{n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right\}; \quad (3.22)$$

$$\mathbf{FU}_{3,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = -\frac{2G}{r_j} \left[(n-m+2)u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ \left. + (n+m+2)u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 - mu_{n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right]; \quad (3.23)$$

$$\mathbf{FU}_{1,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \frac{2G}{r_j} n \left[-u_{n,m-1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ \left. + u_{n,m+1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 + u_{n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right]; \quad (3.24)$$

$$\mathbf{FU}_{2,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \\ = \frac{2G}{r_j} \left\{ -(n-m+1) \left[\frac{(n-2)(n+m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \times \right. \\ \times u_{n,m-1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + (n+m+1) \left[\frac{(n-2)(n-m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \times \\ \times u_{n,m+1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 + \\ + \left[\frac{(n-2)(n-m)(n+m)}{2n-1} + n(2\sigma-1) \right] u_{n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \left. \right\}; \quad (3.25)$$

$$\mathbf{FU}_{3,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \frac{2G}{r_j} \left[(n+m-1)u_{n,m-1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ \left. + (n-m-1)u_{n,m+1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 - mu_{n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right]. \quad (3.26)$$

После перехода в формулах (3.14), (3.15) к напряжениям и удовлетворения граничным условиям относительно неизвестных $a_{s,n,m}^{(j)}$ получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(j)} F_{s,n,m}^{+(k)}(R_j) + F_{1,n,m}^{-(k)}(R_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+1} \left[a_{1,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m} - \right. \\
& \quad \left. - a_{2,k,l}^{(\alpha)} \tilde{f}_{k,l,j,\alpha}^{-(44)n,m} \right] + F_{2,n,m}^{-(k)}(R_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m} a_{2,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m} + \\
& \quad + F_{3,n,m}^{-(k)}(R_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+1} a_{3,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m} = F_{n,m}^{(k)}; \quad (3.27)
\end{aligned}$$

$$n, m \in \mathbb{Z}: \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n+1, \quad k = -1, 0, 1; \quad j = \overline{1, N};$$

$$F_{1,n,m}^{+(1)}(R) = \frac{2G}{R^{n+2}}(n+1)(n-m+1)!; \quad (3.28)$$

$$F_{1,n,m}^{+(1)}(R) = -\frac{2G}{R^{n+2}}(n+1)(n-m-1)!; \quad (3.29)$$

$$F_{1,n,m}^{+(0)}(R) = \frac{2G}{R^{n+2}}(n+1)(n-m)!; \quad (3.30)$$

$$F_{1,n,m}^{+(-1)}(R) = \frac{2G}{R^{n+2}}(n+1) \left[\frac{(n+3)(n-m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] (n-m+1)!; \quad (3.31)$$

$$F_{2,n,m}^{+(1)}(R) = -\frac{2G}{R^{n+2}}(n-m) \left[\frac{(n+3)(n+m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] (n-m-1)!; \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
F_{2,n,m}^{+(0)} = \frac{2G}{R^{n+2}} \left[\frac{(n+3)(n-m+1)(n+m+1)}{2n+3} - \right. \\
\left. - (n+1)(2\sigma-1) \right] (n-m)!; \quad (3.33)
\end{aligned}$$

$$F_{3,n,m}^{+(-1)}(R) = -\frac{G}{R^{n+2}}(n-m+2)(n-m+1)!; \quad (3.34)$$

$$F_{3,n,m}^{+(1)}(R) = -\frac{2G}{R^{n+2}}(n+m+2)(n-m-1)!; \quad (3.35)$$

$$F_{3,n,m}^{+(0)}(R) = \frac{G}{R^{n+2}}m(n-m)!; \quad (3.36)$$

$$F_{1,n,m}^{-(-1)}(R) = -2GR^{n-1} \frac{n}{(n+m-1)!}; \quad (3.37)$$

$$F_{1,n,m}^{-(1)}(R) = 2GR^{n-1} \frac{n}{(n+m+1)!}; \quad (3.38)$$

$$F_{1,n,m}^{-(0)}(R) = 2GR^{n-1} \frac{n}{(n+m)!}; \quad (3.39)$$

$$F_{2,n,m}^{(-1)}(R) = -2GR^{n-1}(n-m+1) \left[\frac{(n-2)(n+m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \frac{1}{(n+m-1)!}; \quad (3.40)$$

$$F_{2,n,m}^{(1)}(R) = 2GR^{n-1}(n+m+1) \left[\frac{(n-2)(n-m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \frac{1}{(n+m+1)!}; \quad (3.41)$$

$$F_{2,n,m}^{(0)}(R) = 2GR^{n-1} \left[\frac{(n-2)(n-m)(n+m)}{2n-1} + n(2\sigma-1) \right] \frac{1}{(n+m)!}; \quad (3.42)$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -T\delta_{n1}\delta_{m0}\delta_{k0} \quad (\text{одноосное растяжение}); \quad (3.43)$$

$$F_{n,m}^{(k)} = -T\delta_{n1}\delta_{m0}(2\delta_{k,-1} - \delta_{k1}) \quad (\text{двуосное растяжение}). \quad (3.44)$$

3.3. Анализ разрешающей системы

Теорема 3.1. При выполнении условия $R_j + R_\alpha < r_{j\alpha}$ оператор системы (3.27) является фредгольмовым в гильбертовом пространстве l_2 .

Доказательство. Путем переобозначения неизвестных коэффициентов

$$\tilde{a}_{s,n,m}^{(j)} = a_{s,n,m}^{(j)} \frac{(n-m)!}{R_j^{n+2}} \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{1}{n+1/2}} \quad (3.45)$$

и разрешения системы относительно $\tilde{a}_{s,n,m}^{(j)}$ можно представить систему (3.27) в виде

$$\tilde{a}_{s,n,m}^{(j)} + \sum_{\alpha \neq j} \sum_{p=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} T_{j,s,n,m}^{\alpha,p,k,l} \tilde{a}_{p,k,l}^{(\alpha)} = F_{s,n,m}^{(j)}, \quad (3.46)$$

$$n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n+1; \quad s = 1, 2, 3; \quad j = \overline{1, N}.$$

Ввиду громоздкости опустим явную запись матричных коэффициентов системы (3.46). Заметим, однако, что модуль матричных коэффициентов $|T_{j,s,n,m}^{\alpha,p,k,l}|$ можно оценить сверху конечными линейными комбинациями выражений вида

$$\frac{n^\gamma k^\beta R_j^n R_\alpha^k |f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m}|}{\sqrt{(n+m)!(n-m)!(k+l)!(k-l)!}}, \quad (3.47)$$

где β и γ — заданные числа, не зависящие от n, m, k, l .

Оценим сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \left[\frac{n^{\gamma} k^{\beta} R_j^n R_{\alpha}^k |f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m}|}{\sqrt{(n+m)!(n-m)!(k+l)!(k-l)!}} \right]^2. \quad (3.48)$$

С этой целью рассмотрим теорему сложения (1.10) как разложение функции $u_{n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ в ряд Фурье по ортонормированной системе функций $\sqrt{(n+1/2)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_{\alpha}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi_{\alpha}}$. Для этого разложения справедливо равенство Парсеваля

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left| u_{n,m}^{+(r)}(r_j, \theta_{\alpha}, \varphi_j) \right|^2 \sin \theta_{\alpha} d\theta_{\alpha} d\varphi_{\alpha} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \left| u_{n+k,m-l}^{+(4)}(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}) \right|^2 \frac{r_{\alpha}^{2k} (k+1/2)^{-1}}{(k+l)!(k-l)!}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Положим в последней формуле $r_{\alpha} = R_{\alpha}$, после чего помножим ее обе части на $\frac{R_j^{2n}}{(n+m)!(n-m)!}$ и просуммируем по n и m от 0 до ∞ и от $-n$ до n соответственно. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{R_j^{2n}}{r_j^{2n+2}} \frac{1}{n+1/2} \frac{[P_n^m(\cos \theta_j)]^2}{||P_n^m||^2} \sin \theta_{\alpha} d\theta_{\alpha} d\varphi_{\alpha} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \frac{R_j^{2n} R_{\alpha}^{2k} |f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m}|^2}{(n+m)!(n-m)!(k+l)!(k-l)!}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Ряд в левой части равенства (3.50) сходится при условии $R_j < r_j$. Определим минимальное значение r_j при произвольных значениях $\theta_{\alpha} \in [0; \pi]$ и $\varphi_{\alpha} \in [0; 2\pi]$. Из соотношений (1.1), (1.2), в которых $r_{\alpha} = R_{\alpha}$, следует, что

$$r_j = \sqrt{R_{\alpha}^2 + r_{j\alpha}^2 + 2R_{\alpha}r_{j\alpha}\omega_{j\alpha}}, \quad (3.51)$$

где $\omega_{j\alpha} = \cos \theta_{\alpha} \cos \theta_{j\alpha} + \sin \theta_{\alpha} \sin \theta_{j\alpha} \cos(\varphi_{\alpha} - \varphi_{j\alpha})$.

Выражение $\omega_{j\alpha}$ равно косинусу угла между радиусами-векторами R_{α} и $r_{j\alpha}$ и принимает наименьшее значение, равное -1 . Тогда $r_j^{\min} = r_{j\alpha} - R_{\alpha}$. Требуя, чтобы $r_j^{\min} > R_j$, мы и подавно удовлетворяем условию $r_j \geq r_j^{\min} > R_j$, т. е. обеспечиваем сходимость ряда в левой, а значит, и в правой частях

равенства (3.50). Таким образом, доказана сходимость ряда (3.48), а следовательно, и ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \left| T_{j,s,n,m}^{\alpha,p,k,l} \right|^2. \quad (3.52)$$

Последнее гарантирует фредгольмовость оператора системы (3.27), что доказывает теорему.

3.4. Анализ напряженного состояния пористого материала со сферическими полостями

3.4.1. Тетрагональная структура расположения сферических полостей в материале

Рассмотрим упругое пространство с четырьмя сферическими полостями, расположенными в вершинах квадрата (рис. 3.6). Численный анализ решения задачи проведен для одинаковых сферических полостей, коэффициент Пуассона материала упругого пространства $\sigma = 0.38$. Под относительным показателем близости полостей понимаем величину a/R . Система уравнений решена методом редукции. Анализ сходимости метода редукции показал, что высокая точность достигается уже при $n_{max} = 6$.

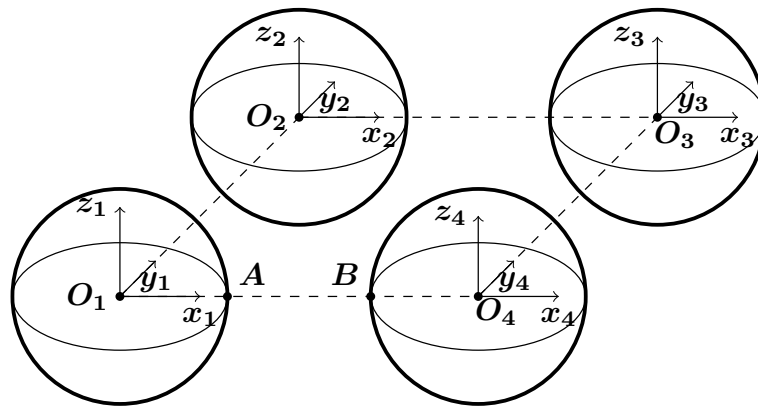


Рис. 3.6. Четыре сферические полости, расположенные в вершинах квадрата

На рис. 3.7 — 3.12 приведены графики нормальных напряжений на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном и двуосном растяжениях пространства. При одноосном растяжении основ-

ной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_z/T . Их область концентрации расположена на границах полостей. Они увеличиваются с приближением полостей друг к другу. Напряжения σ_x/T и σ_y/T приблизительно в 8 раз меньше, чем напряжения σ_z/T . Характер распределения напряжений σ_x/T и σ_y/T различный: у первых областью концентрации является середина отрезка, у вторых — его концы.

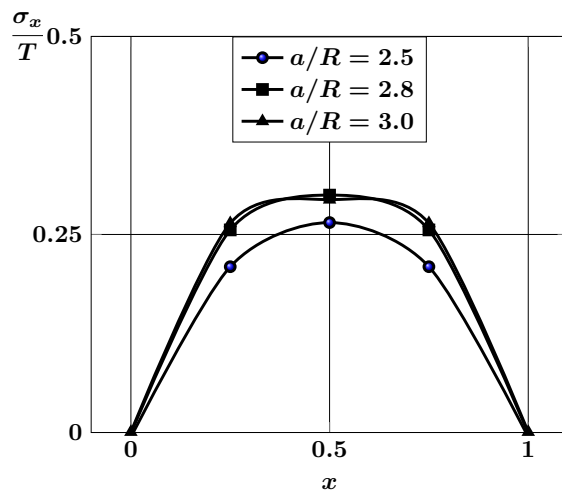


Рис. 3.7. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении пространства

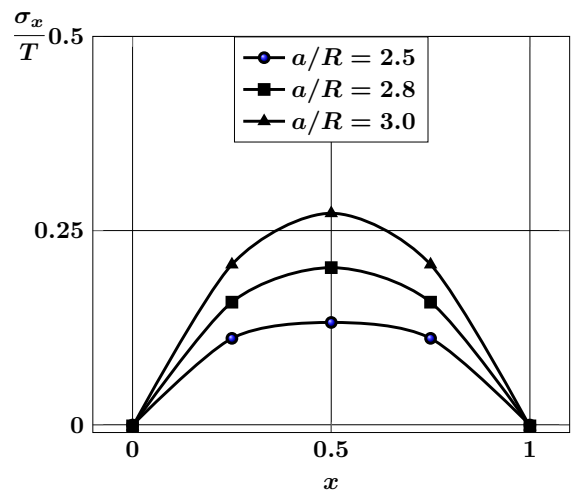


Рис. 3.8. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при двуосном растяжении пространства

При двуосном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_y/T . Их область концентрации расположена на границах полостей. Они увеличиваются с приближением полостей друг к другу. Напряжения σ_x/T и σ_z/T приблизительно в 6 раз меньше, чем напряжения σ_y/T . Заметим, что напряжения σ_x/T на всем отрезке AB являются растягивающими, в то время как напряжения σ_z/T — сжимающими.

На рис. 3.13 — 3.15 приведены графики напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии, соединяющей сферические полости, в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре при $\sigma = 0.38$, $a/R = 2.5$ и одноосном растяжении пространства. Наблюдается увеличение значений напряжений σ_y/T на порядок при переходе от двух полостей к четырем. Характер напряжений σ_x/T и σ_z/T меняется незначительно. Основной вклад в напряженное состояние

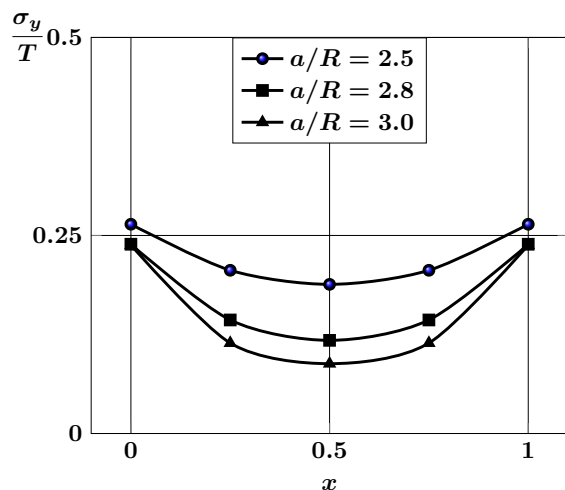


Рис. 3.9. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении пространства

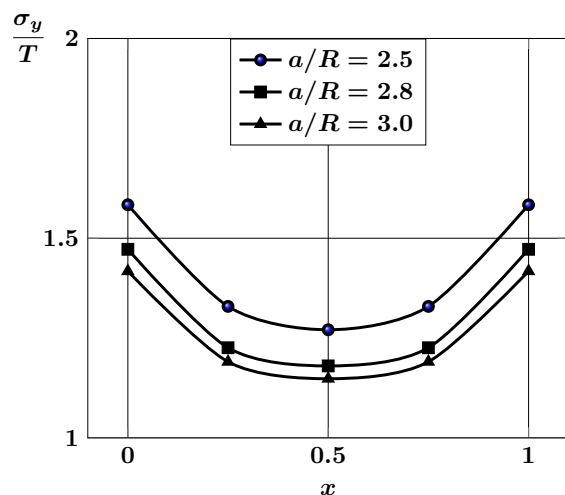


Рис. 3.10. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при двuosном растяжении пространства

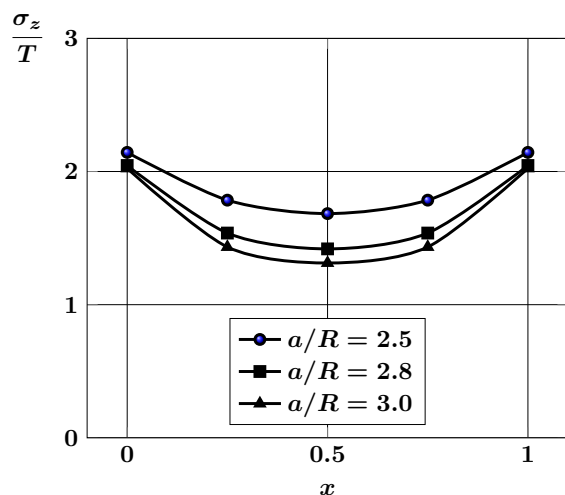


Рис. 3.11. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении пространства

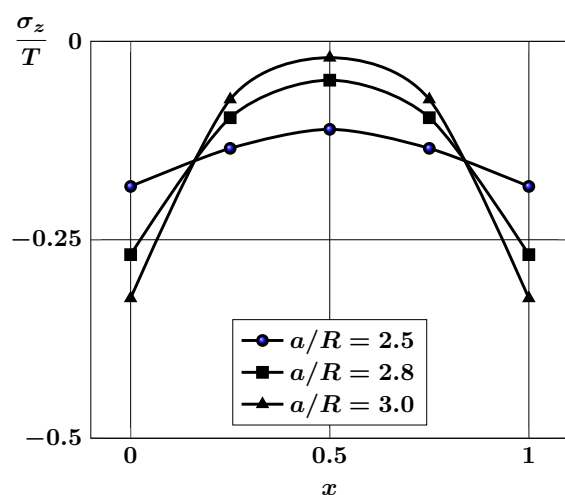


Рис. 3.12. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при двuosном растяжении пространства

вносят напряжения σ_z/T . Областью их концентрации являются окрестности экваториальных линий поверхностей сфер.

В табл. 3.1 приведены результаты данных по сходимости метода редукции в средней точке линии, соединяющей центры пары сферических полостей при одноосном растяжении и при $\sigma = 0.38$, $a/R = 2.5$.

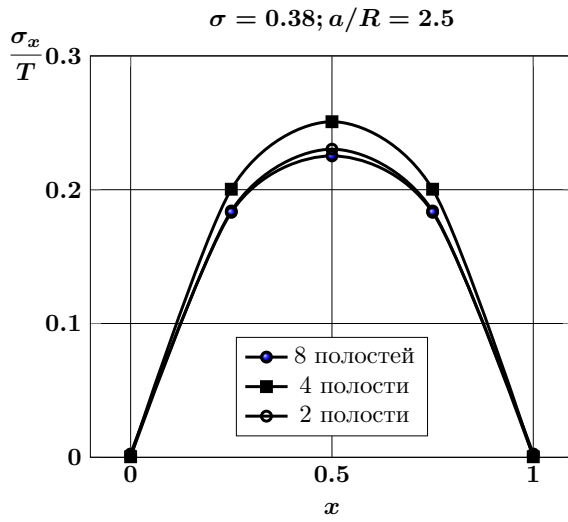


Рис. 3.13. Напряжения σ_x/T на линии, соединяющей сферические полости, в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре при одноосном растяжении пространства

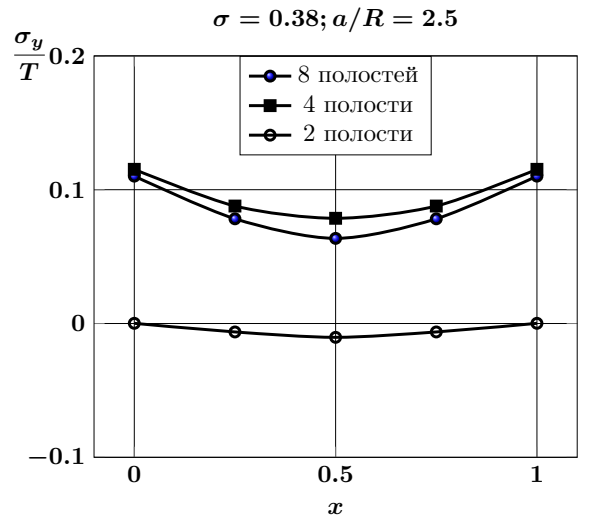


Рис. 3.14. Напряжения σ_y/T на линии, соединяющей сферические полости, в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре при одноосном растяжении пространства

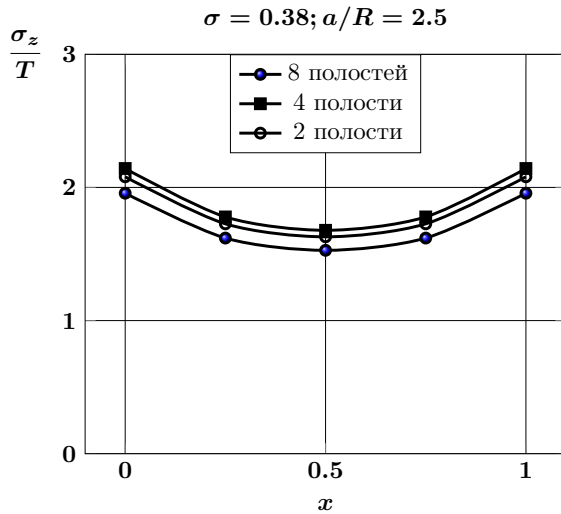


Рис. 3.15. Напряжения σ_z/T на линии, соединяющей сферические полости, в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре при одноосном растяжении пространства

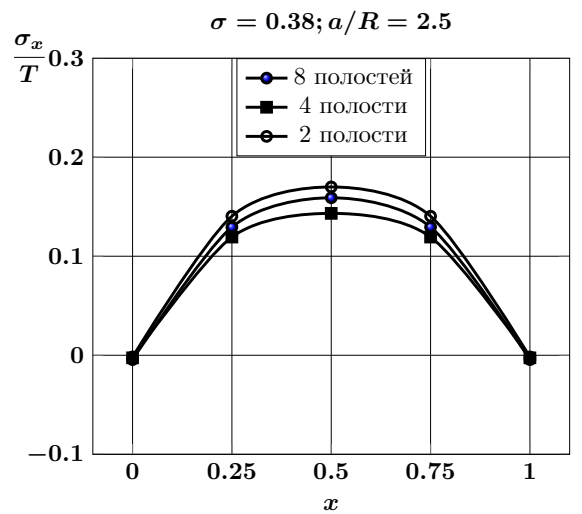


Рис. 3.16. Напряжения σ_x/T на линии, соединяющей сферические полости, в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре при двuosном растяжении пространства

На рис. 3.17 — 3.18 приведены графики напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии, соединяющей сферические полости, в зависимости от количества поло-

стей в тетрагональной структуре при $\sigma = 0.38$, $a/R = 2.5$ и двuosном растяжении пространства.

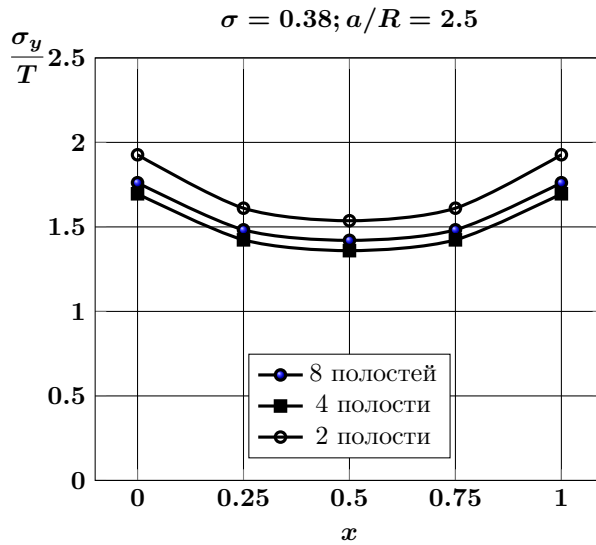


Рис. 3.17. Напряжения σ_y/T на линии, соединяющей сферические полости, в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре при двuosном растяжении пространства

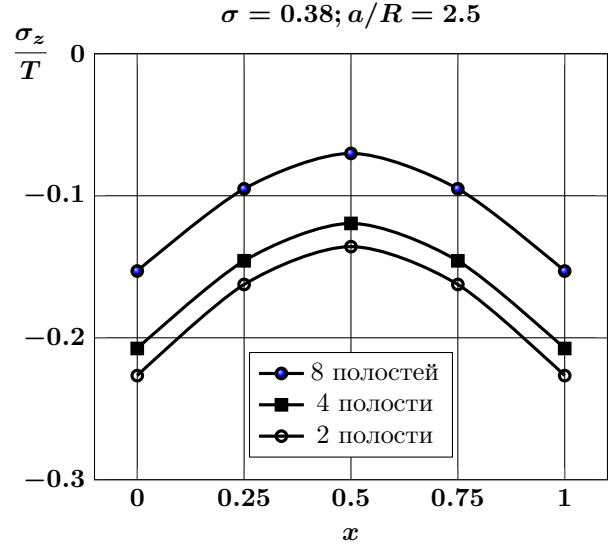


Рис. 3.18. Напряжения σ_z/T на линии, соединяющей сферические полости, в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре при двuosном растяжении пространства

3.4.2. Тетрагональная центрированная структура расположения сферических полостей в материале

Рассмотрим одну ячейку тетрагональной центрированной структуры материала со сферическими полостями (рис. 3.19).

На рис. 3.20 — 3.25 приведены нормальные напряжения на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном и двuosном растяжениях упругого пространства. В одноосном случае основной

Таблица 3.1. Сходимость метода редукции

$n_{max}; p_{max}; r_{max}$	5; 5; 5	6; 10; 10	8; 10; 10	10; 10; 10
σ_x	0.222002	0.230265	0.23015	0.229113
σ_y	-0.0107009	-0.0103348	-0.0105722	-0.0106546
σ_z	1.62754	1.62895	1.62936	1.62909

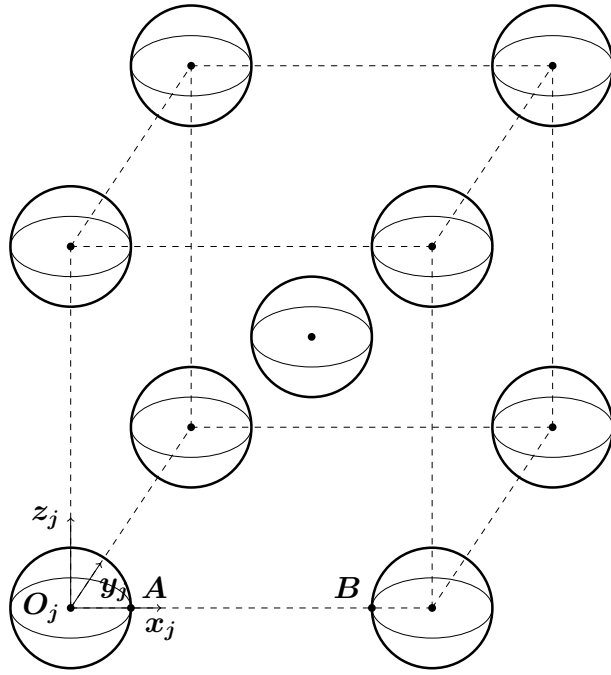


Рис. 3.19. Одна ячейка тетрагональной центрированной структуры

вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_z/T . Областью их концентрации являются границы полостей. С приближением полостей друг к другу напряжения σ_z/T растут.

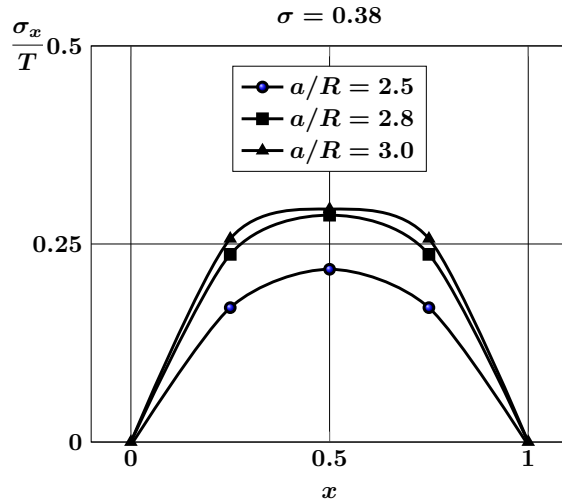


Рис. 3.20. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

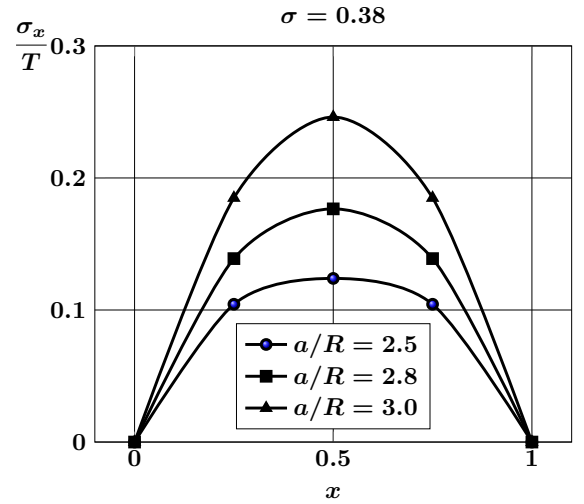


Рис. 3.21. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при двuosном растяжении

В случае двuosного растяжения основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_y/T . Областью их концентрации являются границы полостей. С

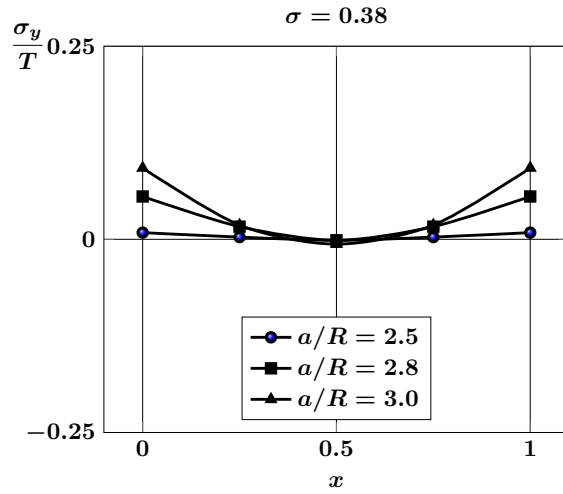


Рис. 3.22. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

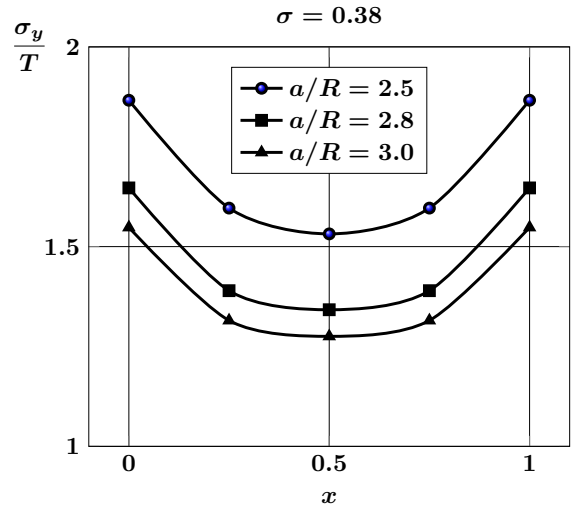


Рис. 3.23. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при двуосном растяжении

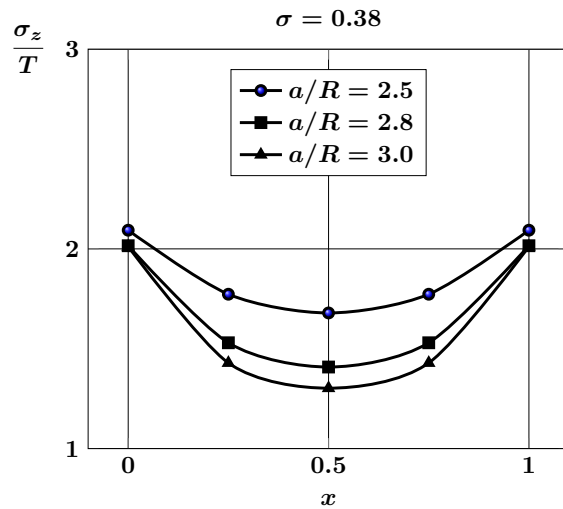


Рис. 3.24. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

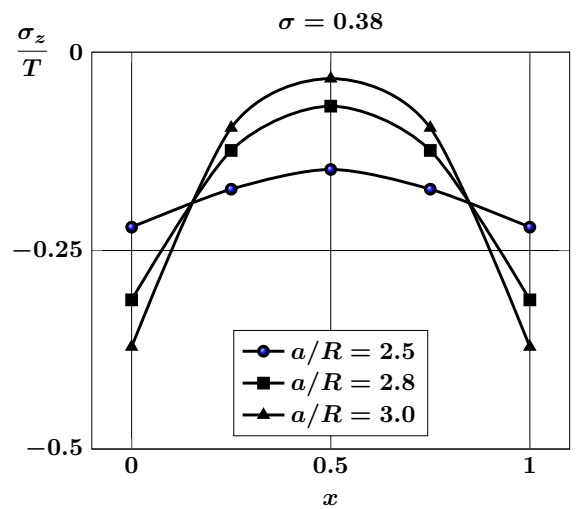


Рис. 3.25. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при двуосном растяжении

приближением полостей друг к другу напряжения σ_y/T растут. Напряжения σ_z/T в этом случае являются сжимающими на рассматриваемом отрезке.

3.4.3. Гексагональная центрированная структура расположения сферических полостей в материале

Рассмотрим одну ячейку гексагональной центрированной структуры материала со сферическими полостями (рис. 3.26).

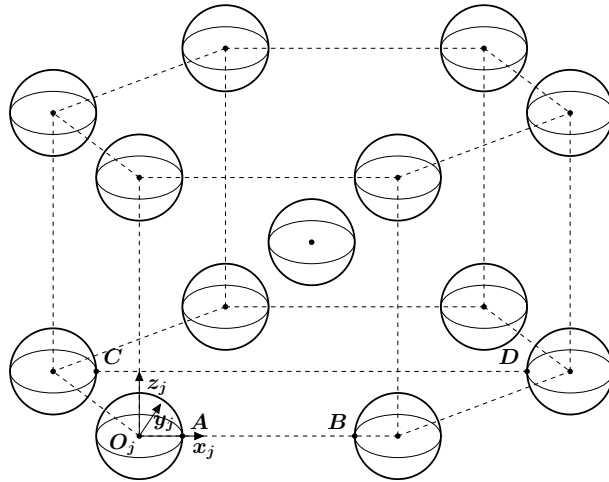


Рис. 3.26. Одна ячейка гексагональной центрированной структуры

На рис. 3.27 — 3.32 приведены нормальные напряжения на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном и двуосном растяжениях упругого пространства. В одноосном случае основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_z/T . Областью их концентрации являются границы полостей. С приближением полостей друг к другу напряжения σ_z/T растут.

В случае двуосного растяжения основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_y/T . Областью их концентрации являются границы полостей. С приближением полостей друг к другу напряжения σ_y/T растут. Напряжения σ_z/T в этом случае являются сжимающими на рассматриваемом отрезке.

На рис. 3.33 — 3.38 приведены нормальные напряжения на линии CD в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном и двуосном растяжениях упругого пространства. В одноосном случае основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_z/T . Областью их концентрации являются границы полостей. Напряжения σ_z/T мало зависят от расстояния между полостями. На отрезке CD напряжения σ_x/T меняют знак. Напряжения σ_y/T имеют наибольшие значения на границах полостей и с приближением

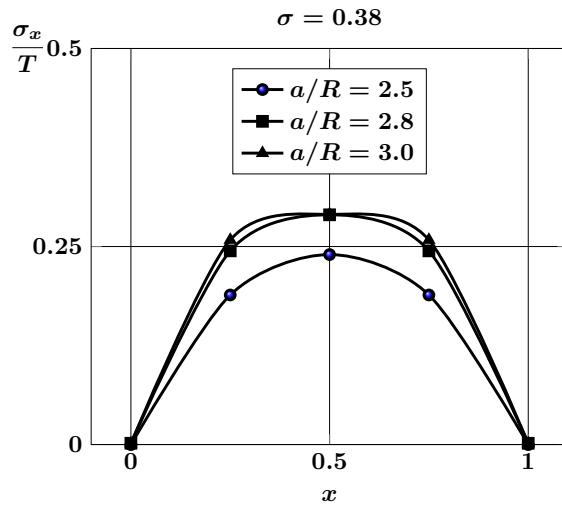


Рис. 3.27. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

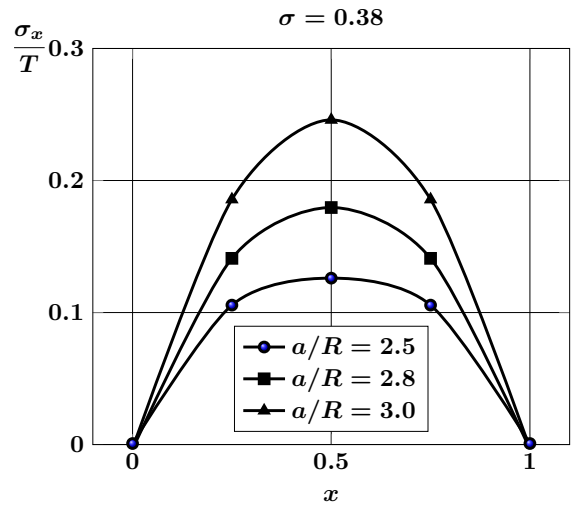


Рис. 3.28. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при двuosном растяжении

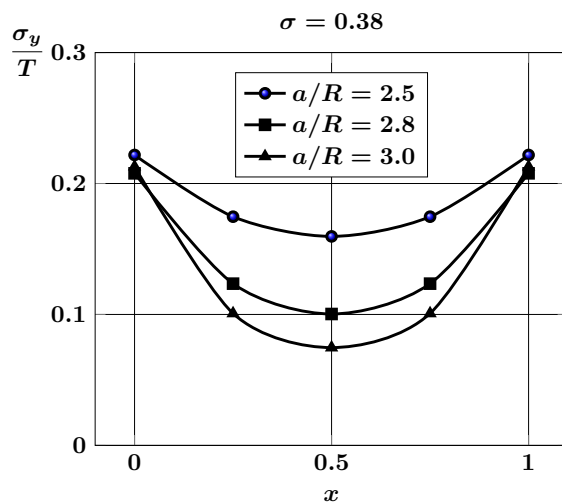


Рис. 3.29. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

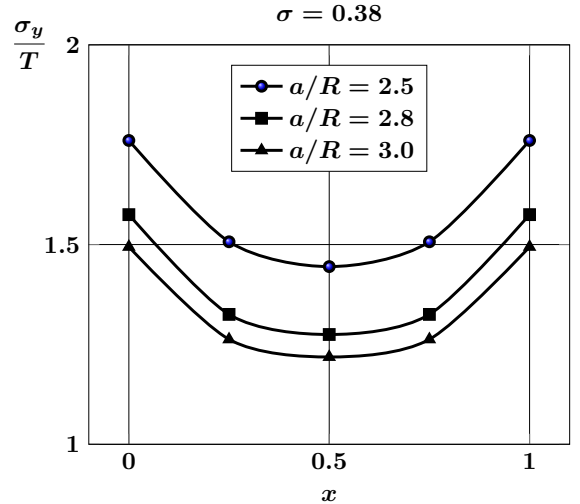


Рис. 3.30. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при двuosном растяжении

полостей растут.

В случае двuosного растяжения основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T и σ_y/T . Областью их концентрации является середина отрезка CD , где эти напряжения совпадают. С приближением полостей друг к

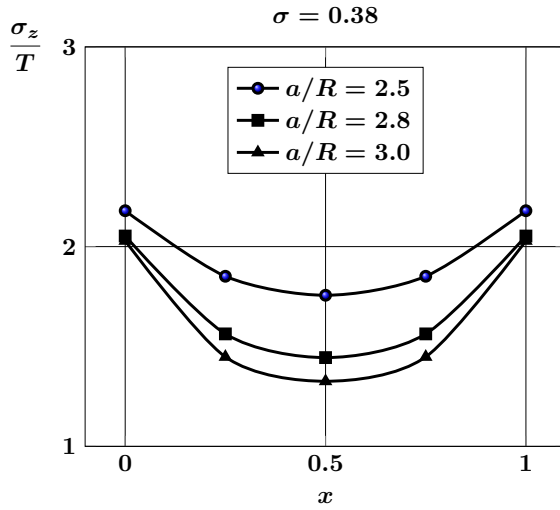


Рис. 3.31. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

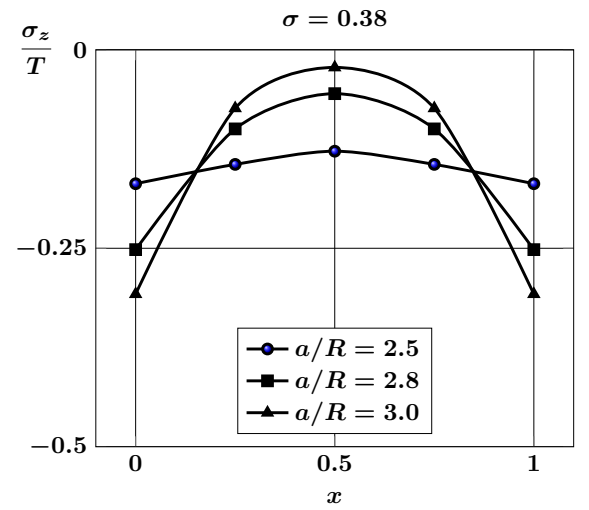


Рис. 3.32. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между полостями при двуосном растяжении

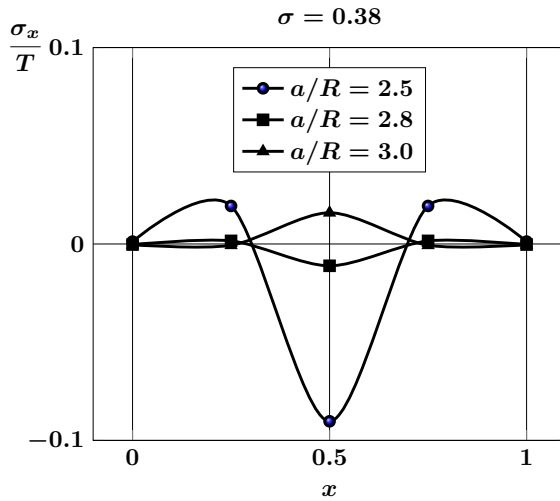


Рис. 3.33. Напряжения σ_x/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

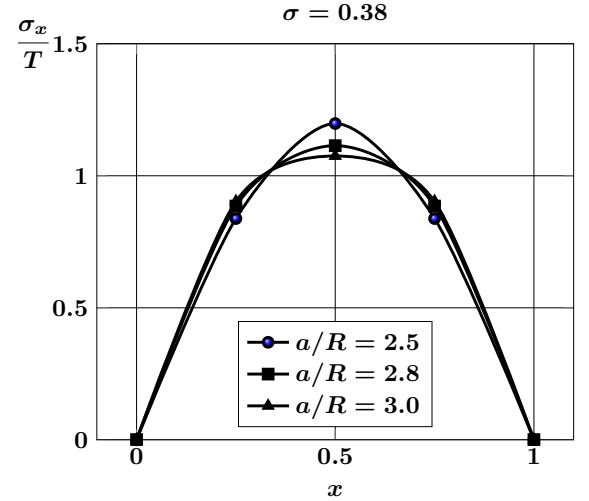


Рис. 3.34. Напряжения σ_x/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между полостями при двуосном растяжении

другу напряжения σ_x/T и σ_y/T растут в средней точке отрезка CD . Для компоненты σ_z/T наблюдается область растягивающих напряжений вблизи середины отрезка CD .

На рис. 3.39, 3.40 приведено сравнение нормальных напряжений на линии

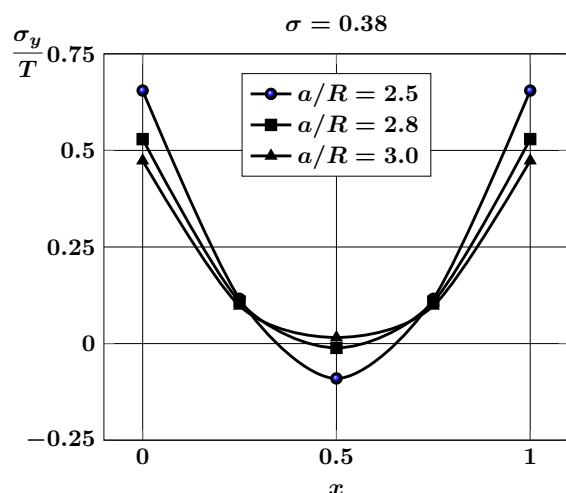


Рис. 3.35. Напряжения σ_y/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

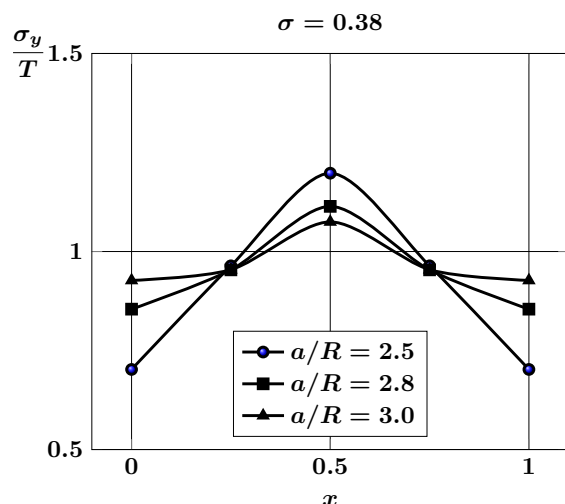


Рис. 3.36. Напряжения σ_y/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между полостями при двuosном растяжении

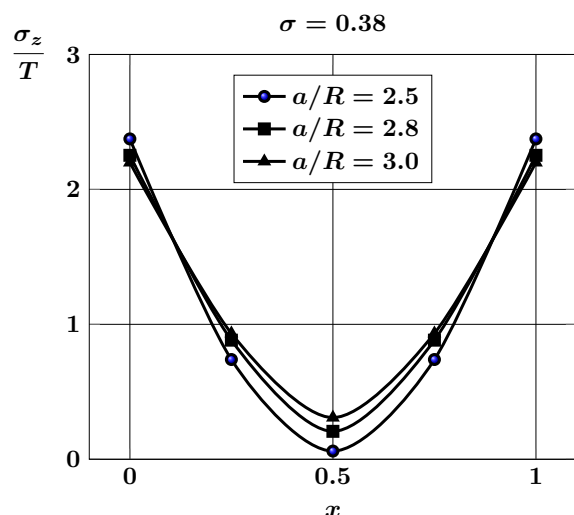


Рис. 3.37. Напряжения σ_z/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

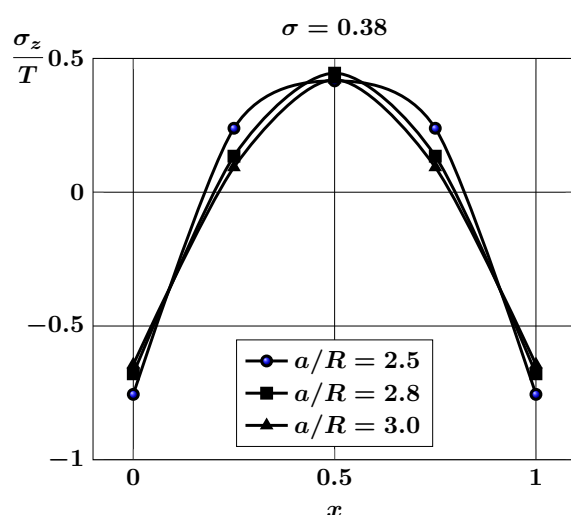


Рис. 3.38. Напряжения σ_z/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между полостями при двuosном растяжении

AB для одной ячейки центрированных тетрагональной и гексагональной структур при одноосном и двuosном растяжении упругого пространства. При одноосном растяжении графики напряжений σ_x/T практически совпадают, в то время как графики напряжений σ_y/T и σ_z/T мало отличаются друг от друга. При

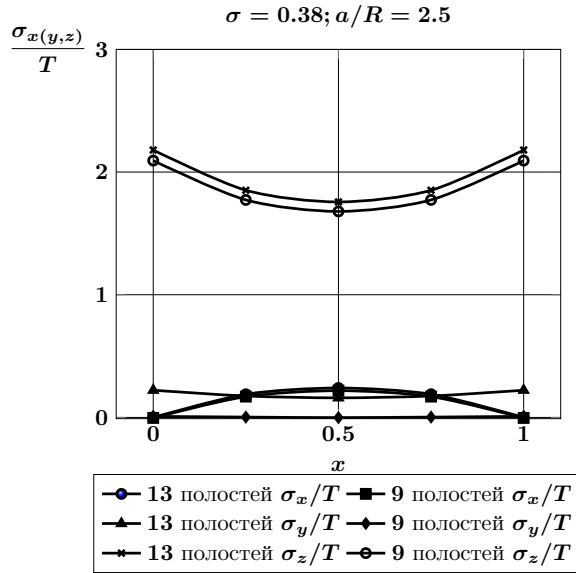


Рис. 3.39. Сравнение напряжений на линии AB для одной ячейки центрированных тетрагональной и гексагональной структур при одноосном растяжении

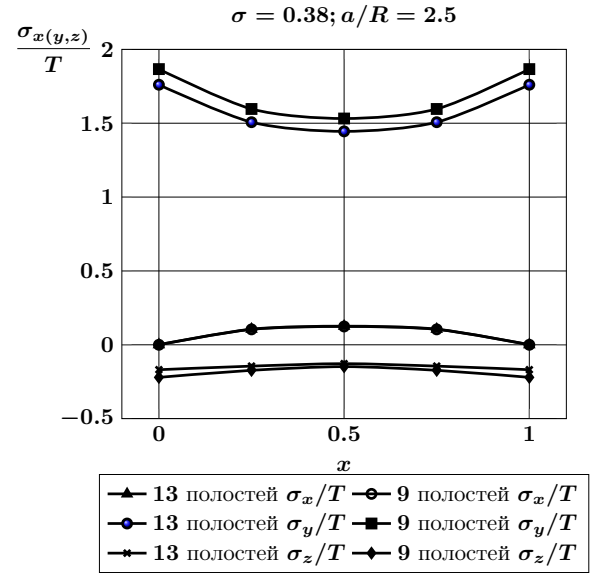


Рис. 3.40. Сравнение напряжений на линии AB для одной ячейки центрированных тетрагональной и гексагональной структур при двuosном растяжении

двuosном растяжении получается та же картина. Для обеих рассматриваемых структур характер распределения напряжений один и тот же.

3.5. Упругое состояние пространства с несколькими сферическими включениями

Рассмотрим одно(дву)осное растяжение на бесконечности упругого пространства с несколькими сферическими включениями, расположенными неосесимметрично. Центры включений находятся в точках O_j , а их радиусы равны R_j . Точки O_j расположены в узлах периодической решетки с кубической структурой (см. рис. 3.5). Введем сферические системы координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ с началами в точках O_j , оси которых одинаково направлены. Считаем, что включения находятся в условиях идеального контакта с матрицей.

Соотношения между координатами можно описать формулами (3.1), (3.2).

Предполагается, что упругие постоянные включений равны (σ_j, G_j) . Упругие постоянные матрицы будем считать равными (σ, G) .

Граничные условия (3.13) нужно заменить условиями сопряжения полей перемещений и напряжений на поверхностях Γ_j . Для того, чтобы их записать, представим вектор перемещений в упругом пространстве в виде

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_j^-, & (x, y, z) \in \Omega_j, \\ \tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{U}_0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_j \Omega_j, \end{cases} \quad (3.53)$$

где $\Omega_j = \{(r_j, \theta_j, \varphi_j) : r_j < R_j\}$. Тогда условия сопряжения принимают следующий вид:

$$(\tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{U}_0)|_{\Gamma_j} = \tilde{\mathbf{U}}_j^-|_{\Gamma_j}, \quad (3.54)$$

$$(\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{F}\mathbf{U}_0)|_{\Gamma_j} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_j^-|_{\Gamma_j}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.55)$$

В формулах (3.53), (3.54) вектор \mathbf{U}_0 определен в (3.8), (3.9). Вектор-функции $\tilde{\mathbf{U}}^+$, $\tilde{\mathbf{U}}_j^-$ будем искать в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}^+ = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} a_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad (3.56)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_j^- = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} b_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad (3.57)$$

где $a_{s,n,m}^{(j)}$, $b_{s,n,m}^{(j)}$ — неизвестные коэффициенты.

Для представления вектора перемещений $\tilde{\mathbf{U}}^+$ в системах координат с началами O_j можем использовать формулы (3.18).

После удовлетворения условиям (3.54), (3.55) получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_{s,n,m}^{(j)}$, $b_{s,n,m}^{(j)}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(j)} E_{s,n,m}^{+(k)0}(R_j) + E_{1,n,m}^{-(k)0}(R_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+1} \times \\ & \times \left[a_{1,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m} - a_{2,k,l}^{(\alpha)} \tilde{f}_{k,l,j,\alpha}^{-(44)n,m} \right] + E_{2,n,m}^{-(k)0}(R_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m} a_{2,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m} + \\ & + E_{3,n,m}^{-(k)0}(R_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+1} a_{3,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{T}{2G} \gamma \left[\delta_{n0} \delta_{m1} \delta_{k,-1} \rho_{j\alpha} e^{-i\varphi_{j\alpha}} + \delta_{n0} \delta_{m,-1} \delta_{k1} \rho_{j\alpha} e^{i\varphi_{j\alpha}} \right] = \sum_{s=1}^3 E_{s,n,m}^{-(k)j}(R_j) b_{s,n,m}^{(j)}; \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(j)} F_{s,n,m}^{+(k)0}(R_j) + F_{1,n,m}^{-(k)0}(R_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+1} \left[a_{1,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m} - \right. \\ & \quad \left. - a_{2,k,l}^{(\alpha)} \tilde{f}_{k,l,j,\alpha}^{-(44)n,m} \right] + F_{2,n,m}^{-(k)0}(R_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m} a_{2,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m} + \\ & + F_{3,n,m}^{-(k)0}(R_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+1} a_{3,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{(44)n,m} = F_{n,m}^{(k)} + \sum_{s=1}^3 F_{s,n,m}^{-(k)j}(R_j) b_{s,n,m}^{(j)}; \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$n, m \in \mathbb{Z} : \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n+1, \quad k = -1, 0, 1; \quad (3.60)$$

$$a_{3,n,0}^{(j)} = b_{3,n,0}^{(j)} = 0; \quad (3.61)$$

$$E_{1,n,m}^{\pm(-1)r}(R) = -\tilde{u}_{n,m-1}^{\pm(4)}(R), \quad E_{1,n,m}^{\pm(1)r}(R) = \tilde{u}_{n,m+1}^{\pm(4)}(R), \quad E_{1,n,m}^{\pm(0)r}(R) = \mp \tilde{u}_{n,m}^{\pm(4)}(R); \quad (3.62)$$

$$E_{2,n,m}^{+(-1)r}(R) = -\frac{(n-m+2)(n+m)}{2n+3} \tilde{u}_{n,m-1}^{+(4)}(R); \quad (3.63)$$

$$E_{2,n,m}^{+(1)r}(R) = \frac{(n-m)(n+m+2)}{2n+3} \tilde{u}_{n,m+1}^{+(4)}(R); \quad (3.64)$$

$$E_{2,n,m}^{+(0)r}(R) = -\left[\frac{(n-m+1)(n+m+1)}{2n+3} + \chi_r \right] \tilde{u}_{n,m}^{+(4)}(R); \quad (3.65)$$

$$E_{2,n,m}^{-(-1)r}(R) = -\frac{(n-m+1)(n+m-1)}{2n-1} \tilde{u}_{n,m-1}^{-(4)}(R); \quad (3.66)$$

$$E_{2,n,m}^{-(1)r}(R) = \frac{(n-m-1)(n+m+1)}{2n-1} \tilde{u}_{n,m+1}^{-(4)}(R); \quad (3.67)$$

$$E_{2,n,m}^{-(0)r}(R) = \left[\frac{(n-m)(n+m)}{2n-1} - \chi_r \right] \tilde{u}_{n,m}^{-(4)}(R); \quad (3.68)$$

$$E_{3,n,m}^{\pm(-1)r}(R) = -\tilde{u}_{n,m-1}^{\pm(4)}(R); \quad (3.69)$$

$$E_{3,n,m}^{\pm(1)r}(R) = -\tilde{u}_{n,m+1}^{\pm(4)}(R); \quad (3.70)$$

$$E_{3,n,m}^{\pm(0)r}(R) = 0; \quad (3.71)$$

$$\tilde{u}_{n,m}^{\pm(4)}(R) = \left\{ \frac{\frac{(n-m)!}{R^{n+1}}}{\frac{R^n}{(n+m)!}} \right\}; \quad (3.72)$$

$$\gamma = \begin{cases} -\frac{\sigma}{1+\sigma} & (\text{одноосное растяжение}), \\ \frac{1-\sigma}{1+\sigma} & (\text{двуосное растяжение}); \end{cases} \quad (3.73)$$

$$\chi_r = 3 - 4\sigma_r.$$

Коэффициенты $F_{s,n,m}^{\pm(k)r}$ получаются из коэффициентов $F_{s,n,m}^{\pm(k)}$, определенных в формулах (3.28) — (3.42) путем подстановки в последние вместо параметров σ и G упругих постоянных σ_r и G_r ($r = 0, j$) соответственно. При этом считается, что $\sigma_0 = \sigma$, $G_0 = G$. Коэффициенты $F_n^{(k)}$ определены в формулах (3.43), (3.44).

3.6. Анализ напряженного состояния композита со сферическими включениями

3.6.1. Тетрагональная структура расположения сферических включений в композите

Рассмотрим одну ячейку тетрагональной структуры материала со сферическими включениями (рис. 3.41).

На рис. 3.42 — 3.44 приведены графики распределения напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре при одноосном растяжении упругого пространства для следующего набора параметров: $\sigma = 0.38$, $\sigma_j = 0.21$, $G_j/G = 25$, $a/R = 2.5$ (R — радиус сферических включений, a — расстояние между центрами соседних включений). Наблюдается незначительное отличие в значениях нормальных напряжений в конфигурациях, содержащих два, четыре и восемь включений. Интересно отметить, что напряжения σ_x/T и σ_y/T являются сжимающими на всем отрезке AB , в то время как напряжения σ_z/T на этом отрезке меняют знак. Основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T .

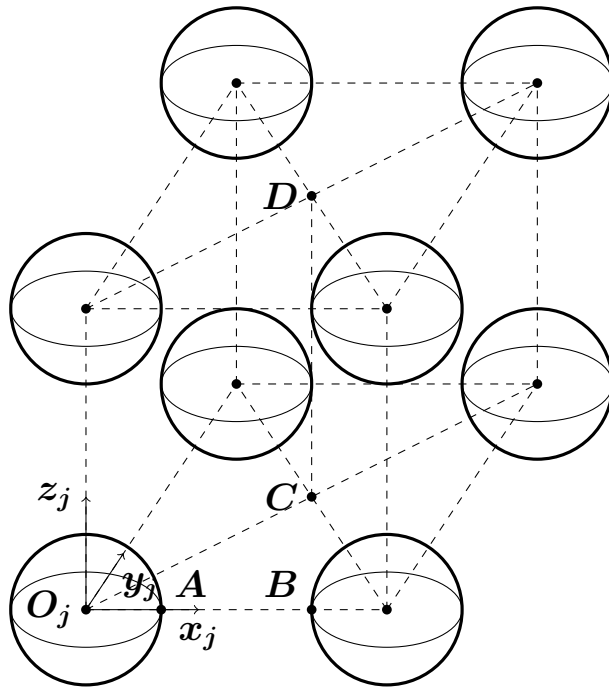


Рис. 3.41. Одна ячейка тетрагональной структуры

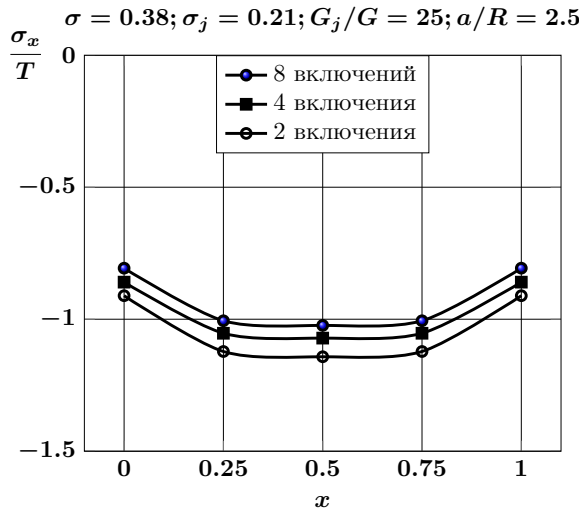


Рис. 3.42. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре при одноосном растяжении пространства

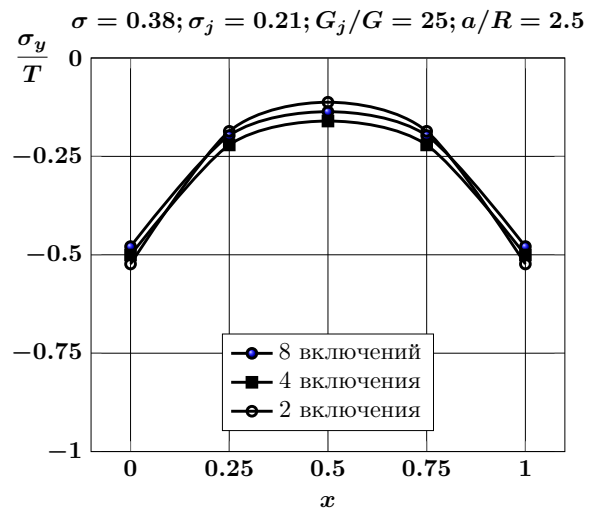


Рис. 3.43. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре при одноосном растяжении пространства

Рассмотрим двуосное растяжение пространства с несколькими сферическими включениями. На рис. 3.45 — 3.47 приведены графики распределения напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T вдоль горизонтальной линии, соединяющей центры соседних сферических включений, в зависимости от количества включе-

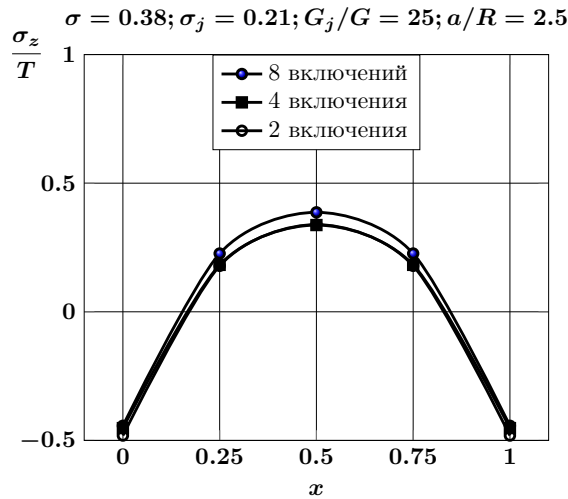


Рис. 3.44. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре при одноосном растяжении пространства

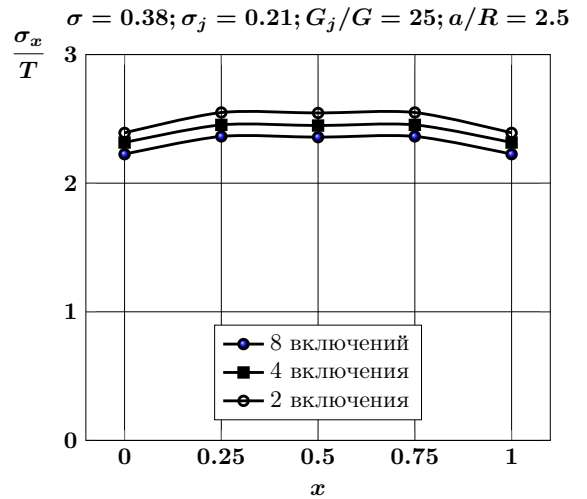


Рис. 3.45. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре при двuosном растяжении пространства

ний в тетрагональной структуре для следующего набора параметров: $\sigma = 0.38$, $\sigma_j = 0.21$, $G_j/G = 25$, $a/R = 2.5$. Наблюдается незначительное отличие в значениях нормальных напряжений в конфигурациях, содержащих два, четыре и восемь включений. Интересно отметить, что напряжения σ_z/T являются растягивающими на всем отрезке AB . Основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T , однако напряжения σ_y/T и σ_z/T тоже значимы.

3.6.2. Тетрагональная гранецентрированная структура расположения сферических включений в композите

Рассмотрим тетрагональную гранецентрированную структуру расположения пяти включений в зернистом композиционном материале (рис. 3.48).

На рис. 3.49 — 3.54 показаны графики распределения напряжений σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T на линии AB между включениями в зависимости от относительного расстояния a/R между ними.

Максимальные по модулю значения напряжений σ_x/T , σ_y/T наблюдаются при наиболее близко расположенных включениях. Для напряжений σ_z/T подобное свойство имеет место для двuosного растяжения. А в случае одноосного растяжения, напротив, максимальные по модулю значения напряжений

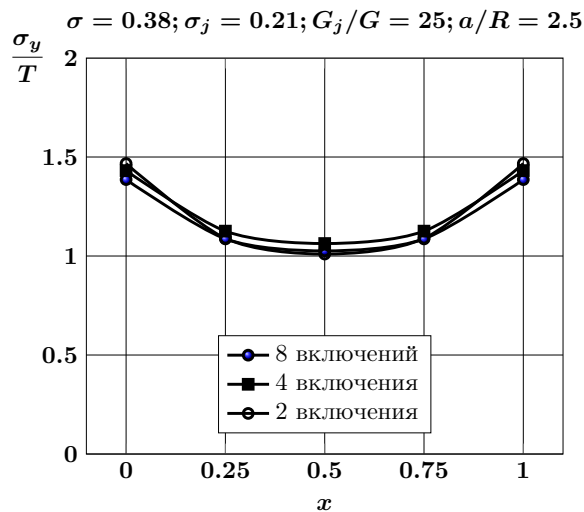


Рис. 3.46. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре при двукратном растяжении пространства

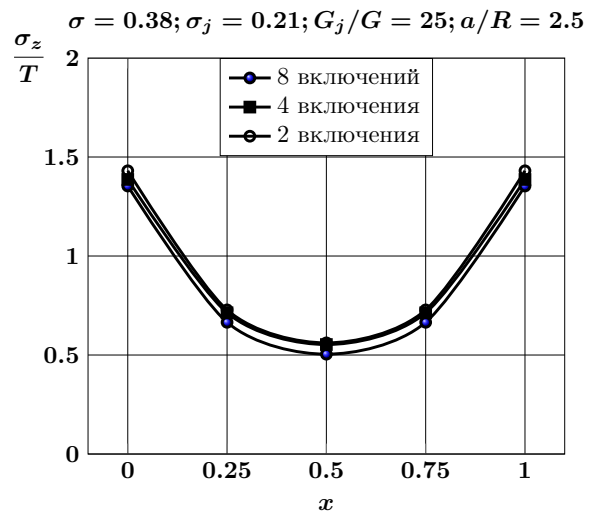


Рис. 3.47. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре при двукратном растяжении пространства

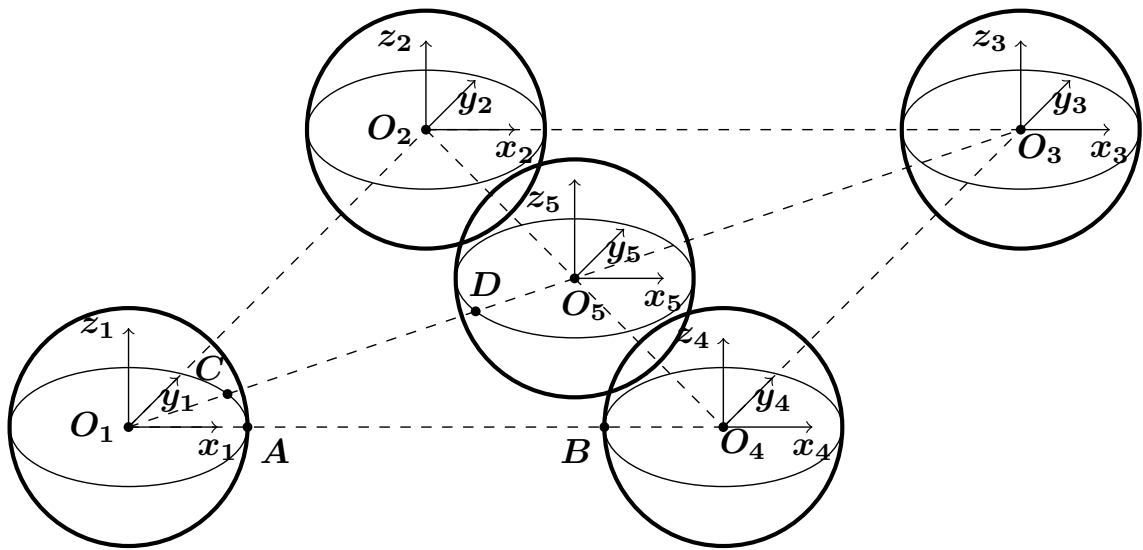


Рис. 3.48. Тетрагональная гранецентрированная структура

σ_z/T соответствуют наиболее удаленным друг от друга включениям. Характер распределения приведенных напряжений в одноосном и двукратном случаях принципиально отличается. В одноосном случае напряжение σ_z/T меняет знак, становясь сжимающим вблизи границы включений.

На рис. 3.55 — 3.58 приведены напряжения σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T на линии CD между включениями в зависимости от относительного расстояния между ними. В случае двукратного растяжения для напряжений σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T обла-

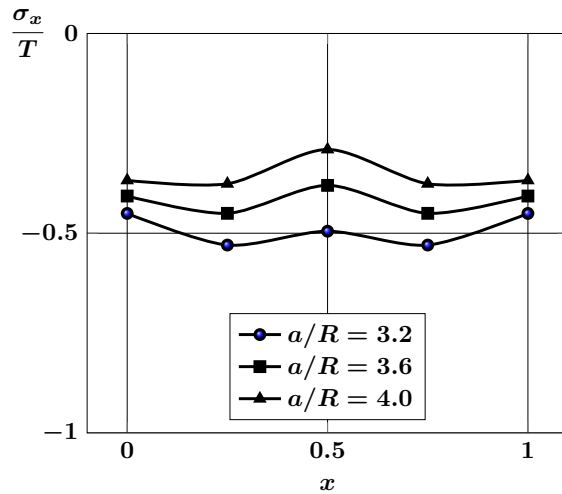


Рис. 3.49. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении пространства

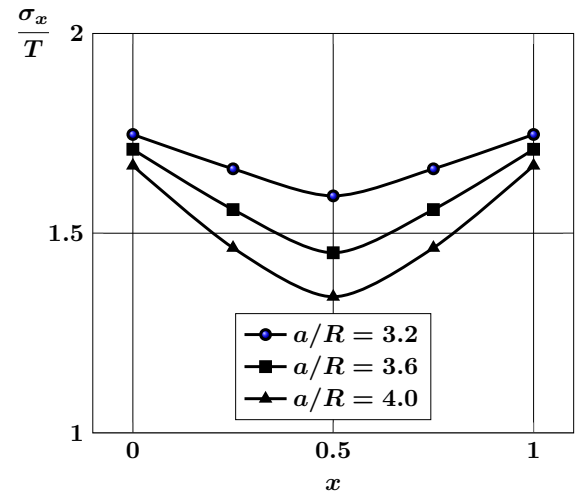


Рис. 3.50. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении пространства

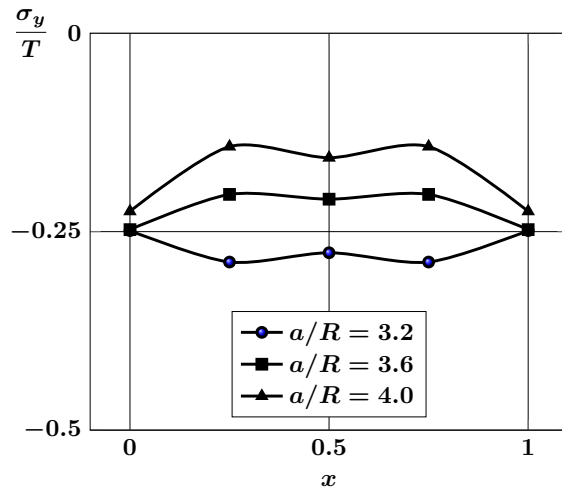


Рис. 3.51. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении пространства

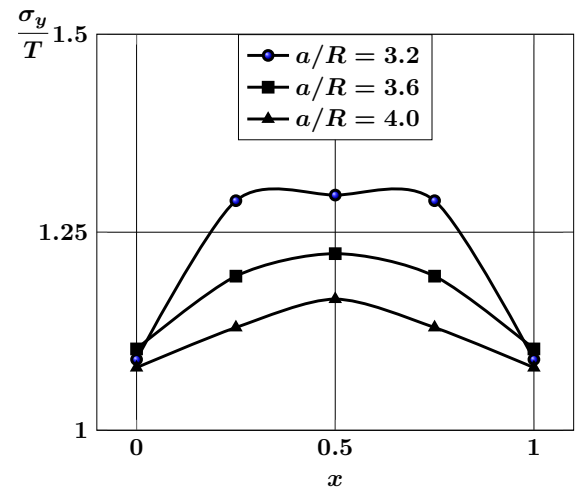


Рис. 3.52. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении пространства

стью концентрации является окрестность границ включений, при этом все они являются растягивающими. Для одноосного растяжения σ_x/T , σ_y/T меняются незначительно в пределах рассматриваемого отрезка. Обнаружена интересная закономерность в распределении напряжений σ_z/T при одноосном растяжении. С уменьшением расстояния между включениями напряжения из растягиваю-

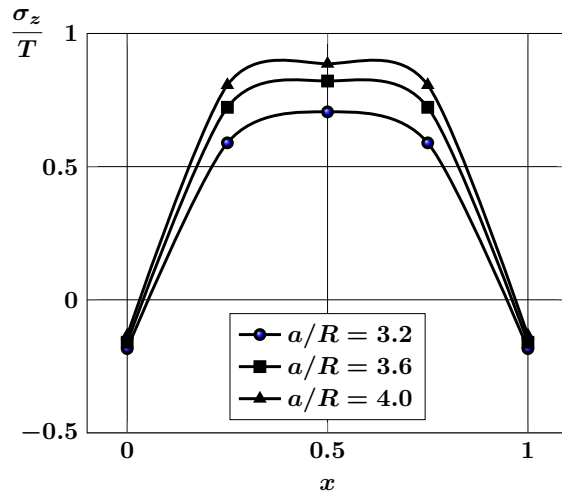


Рис. 3.53. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении пространства

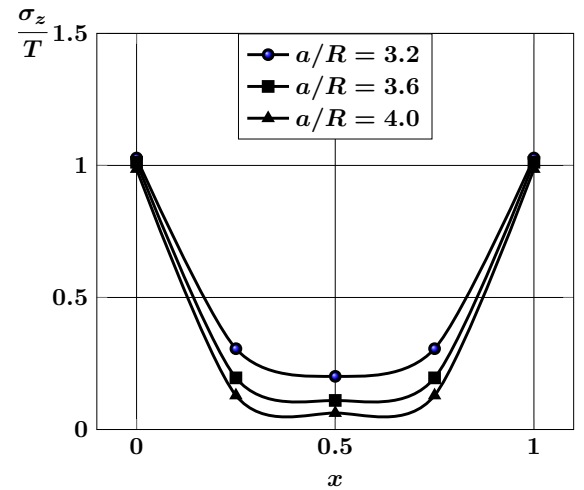


Рис. 3.54. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении пространства

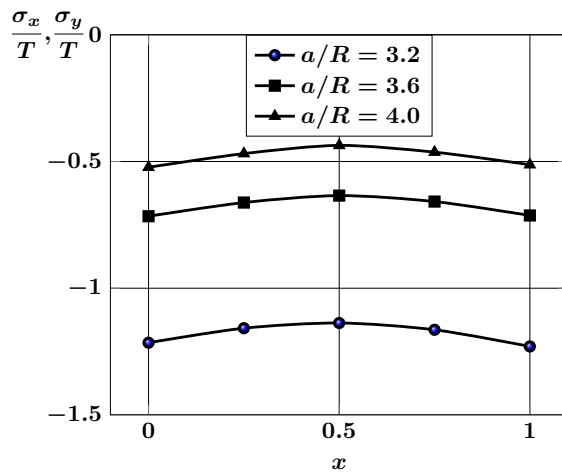


Рис. 3.55. Напряжения σ_x/T и σ_y/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении пространства

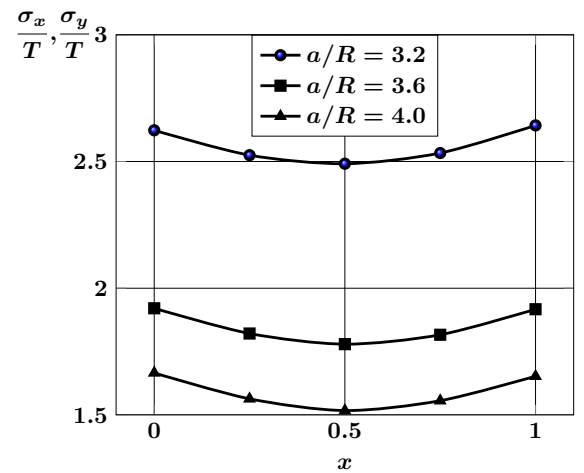


Рис. 3.56. Напряжения σ_x/T и σ_y/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении пространства

щих на большей части рассматриваемой линии ($a/R = 4.0$) становятся сжимающими на всей линии ($a/R = 3.2$).

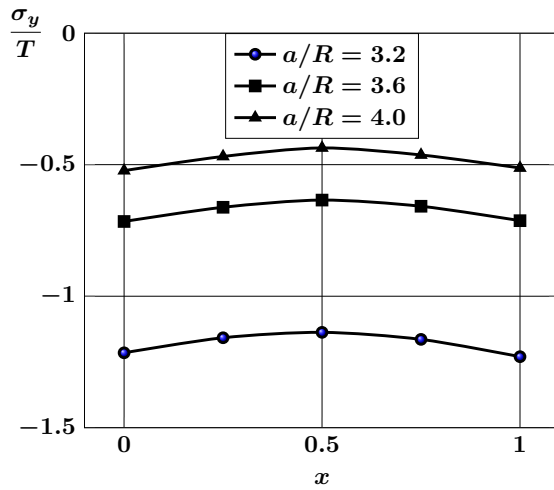


Рис. 3.57. Напряжения σ_z/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении пространства

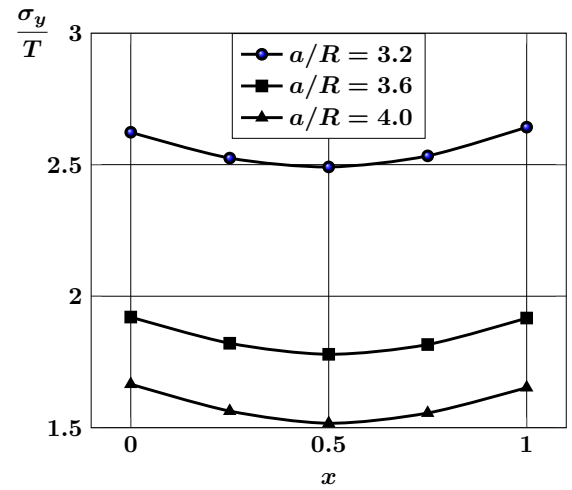


Рис. 3.58. Напряжения σ_z/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении пространства

3.6.3. Тетрагональная центрированная структура расположения сферических включений в композите

Рассмотрим тетрагональную центрированную структуру расположения включений в композиционном материале (рис. 3.19).

На рис. 3.59 — 3.64 приведены напряжения на линии AB в зависимости от относительного расстояния a/R между включениями при одноосном и двuosном растяжениях упругого пространства.

В случае одноосного растяжения основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T , которые на всем отрезке AB являются сжимающими. С приближением включений друг к другу значения напряжений σ_x/T и σ_y/T растут по модулю. Напряжения σ_z/T меняют знак на отрезке AB .

Для двuosного растяжения основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T , однако, напряжения σ_y/T и σ_z/T тоже являются значимыми. Все напряжения растут при приближении включений друг к другу. Интересно отметить, что напряжения σ_z/T являются растягивающими на всем отрезке AB . Областью концентрации напряжений σ_y/T и σ_z/T служат границы включений.

На рис. 3.65 и 3.66 приведено сравнение нормальных напряжений на ли-

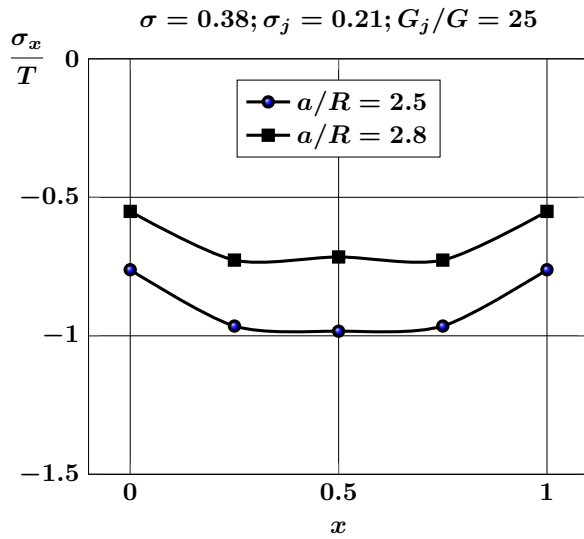


Рис. 3.59. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении пространства

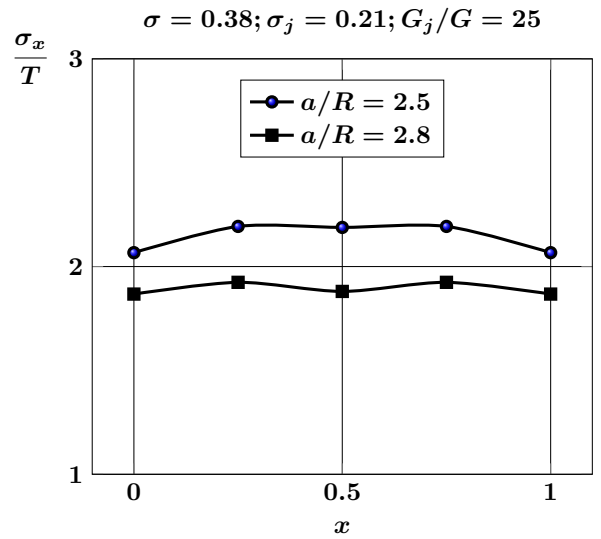


Рис. 3.60. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении пространства

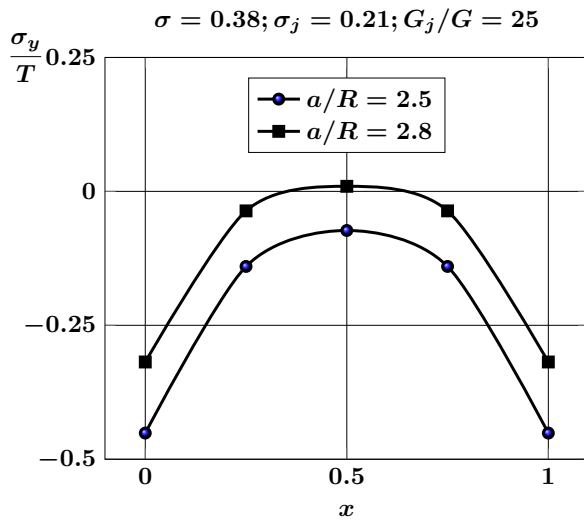


Рис. 3.61. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении пространства

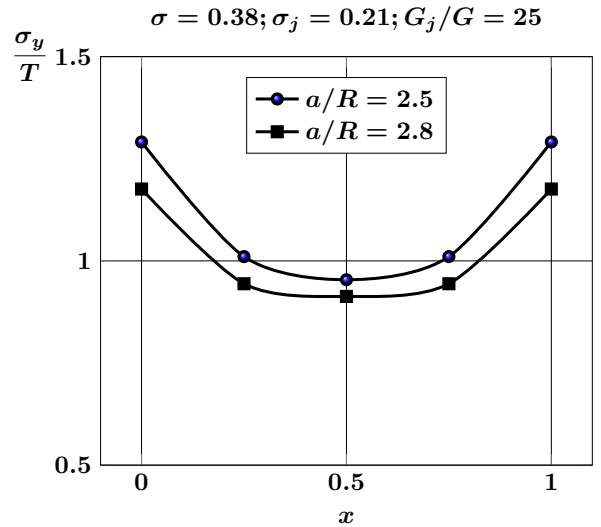


Рис. 3.62. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении пространства

нии AB в зависимости от отношения модулей сдвига материалов включений и матрицы G_j/G при одноосном и двuosном растяжениях упругого пространства. Приведенные графики показывают, что нормальные напряжения на линии AB

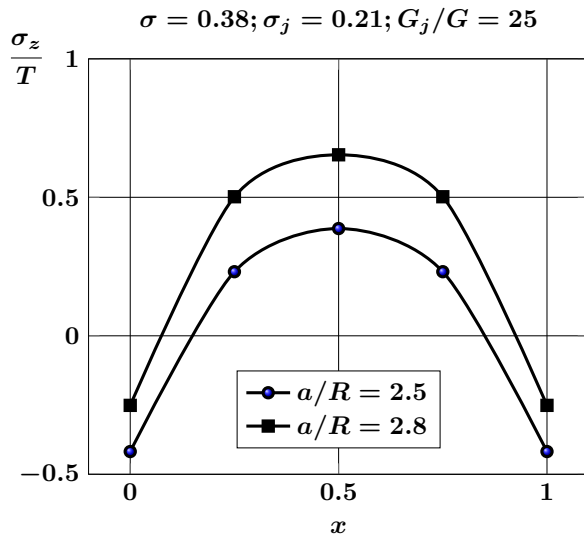


Рис. 3.63. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении пространства

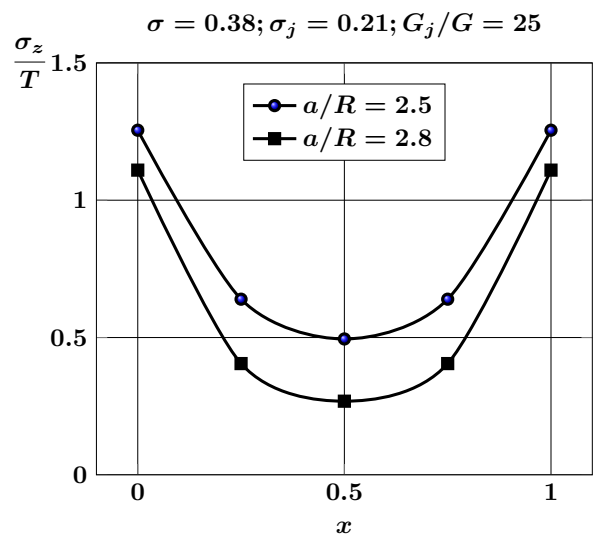


Рис. 3.64. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении пространства

незначительно зависят от отношения модулей сдвига материалов включений и матрицы. Для двuosного растяжения большему отношению G_j/G соответствуют большие значения напряжений.

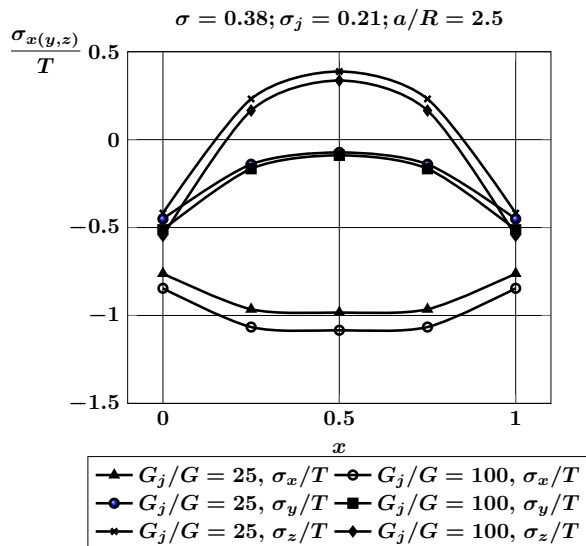


Рис. 3.65. Нормальные напряжения на линии AB в зависимости от отношения G_j/G при одноосном растяжении пространства

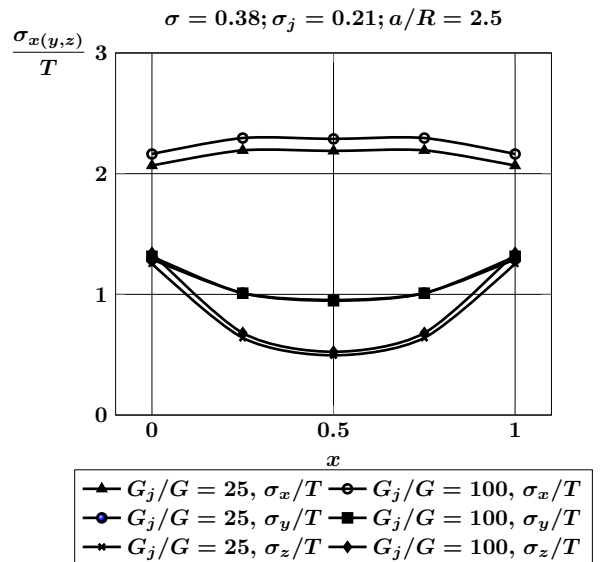


Рис. 3.66. Нормальные напряжения на линии AB в зависимости от отношения G_j/G при двuosном растяжении пространства

3.6.4. Гексагональная центрированная структура расположения сферических включений в композите

Рассмотрим гексагональную центрированную структуру расположения включений в зернистом композиционном материале (см. рис. 3.26).

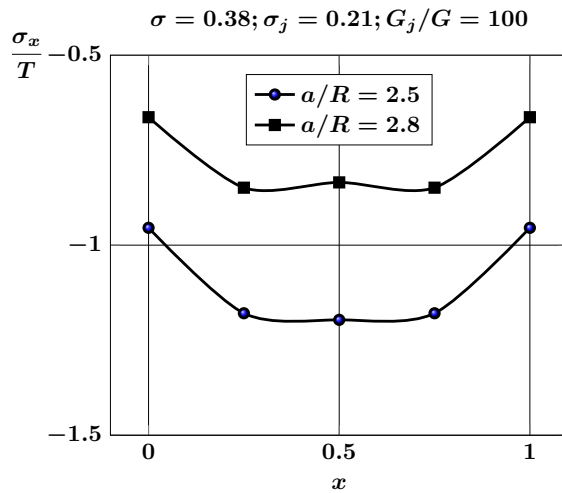


Рис. 3.67. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении пространства

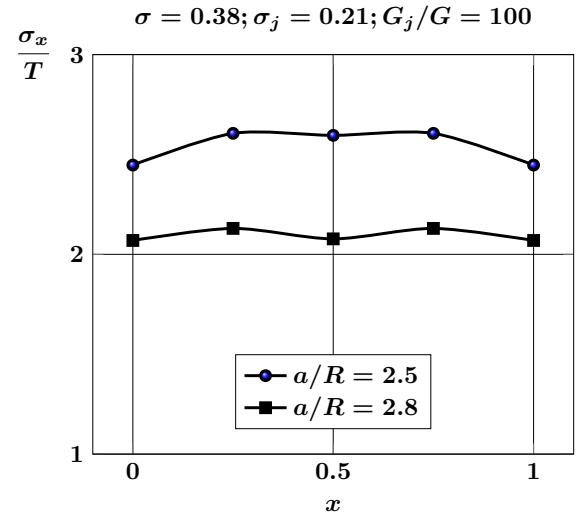


Рис. 3.68. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении пространства

На рис. 3.67 — 3.72 приведены нормальные напряжения на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном и двuosном растяжениях упругого пространства. В одноосном случае основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T . В этом случае напряжения σ_x/T и σ_y/T являются сжимающими и растущими по модулю при сближении включений. Напряжения σ_z/T на отрезке AB меняют знак.

При двuosном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T , однако и напряжения σ_y/T и σ_z/T являются значимыми. Все напряжения положительны на отрезке AB , причем увеличиваются с приближением включений друг к другу. Областью концентрации напряжений σ_y/T и σ_z/T служат границы включений.

На рис. 3.73 — 3.78 приведены нормальные напряжения на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном

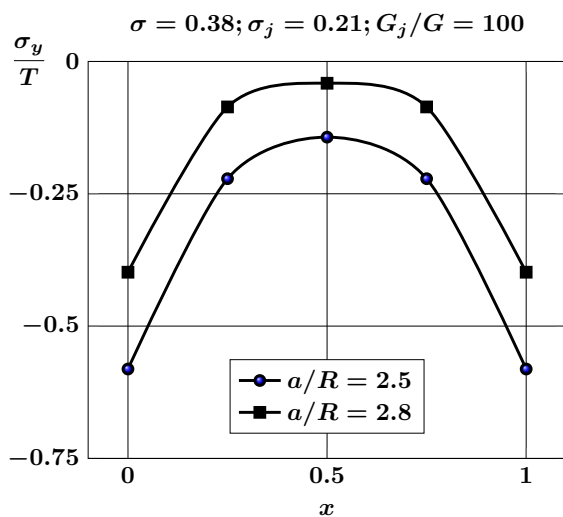


Рис. 3.69. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении пространства

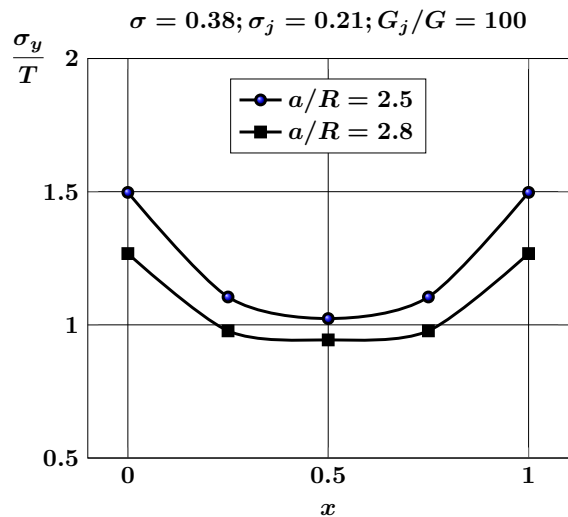


Рис. 3.70. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении пространства

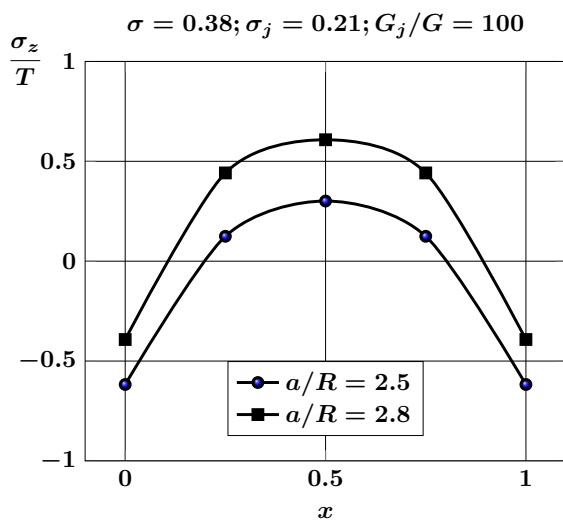


Рис. 3.71. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении пространства

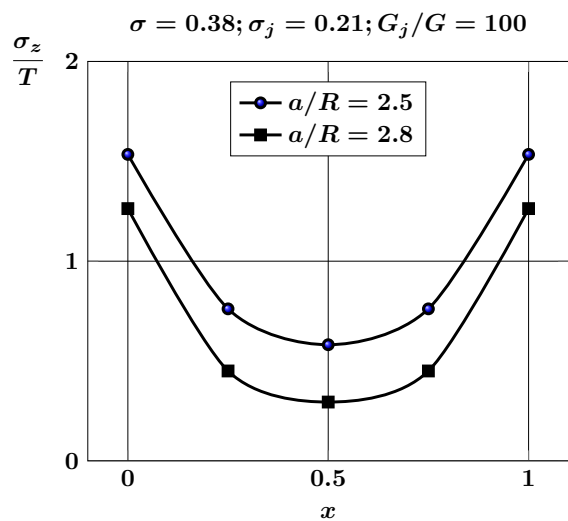


Рис. 3.72. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении пространства

и двuosном растяжениях упругого пространства. В одноосном случае основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_z/T . В этом случае напряжения σ_x/T и σ_y/T меняют знак. Напряжения σ_z/T достигают наибольших значений в середине отрезка CD .

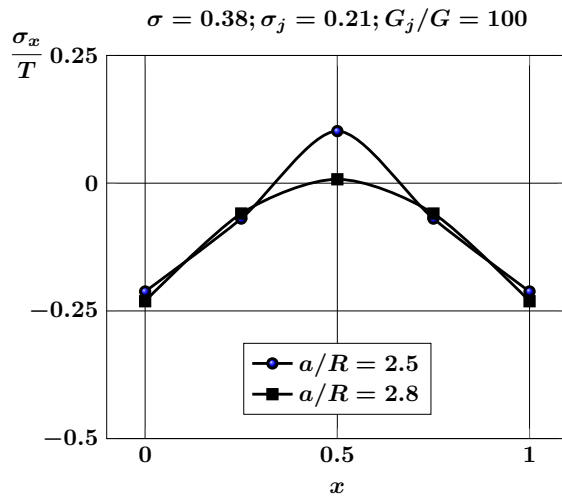


Рис. 3.73. Напряжения σ_x/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении пространства

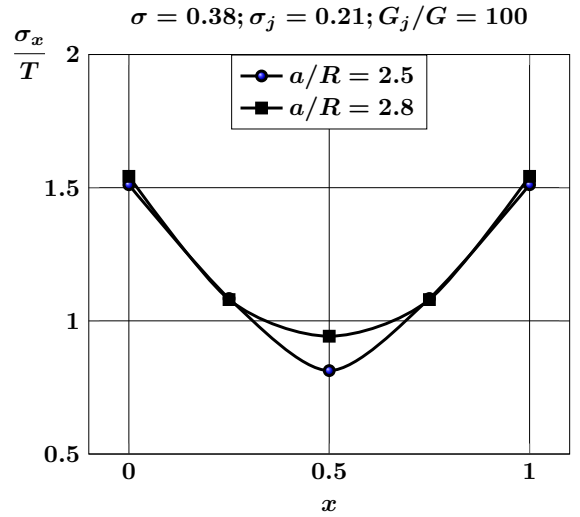


Рис. 3.74. Напряжения σ_x/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении пространства

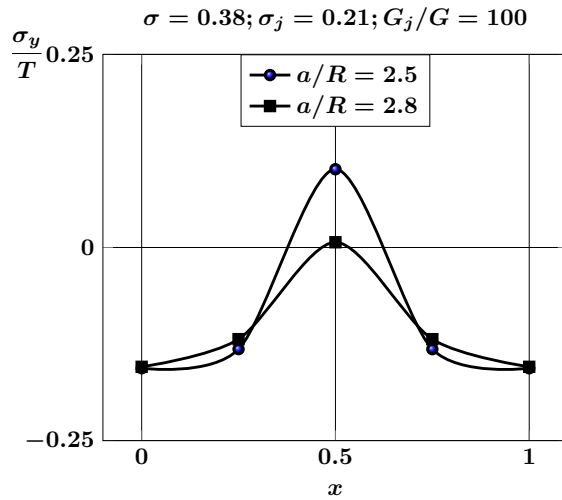


Рис. 3.75. Напряжения σ_y/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении пространства

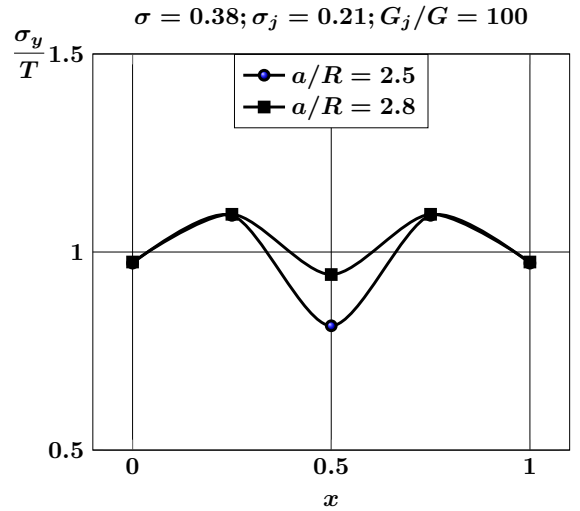


Рис. 3.76. Напряжения σ_y/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении пространства

При двuosном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T , однако и напряжения σ_y/T и σ_z/T значимы. Напряжения σ_z/T меняют знак на отрезке CD и являются растягивающими в окрестности границ включений и сжимающими вблизи середины отрезка CD .

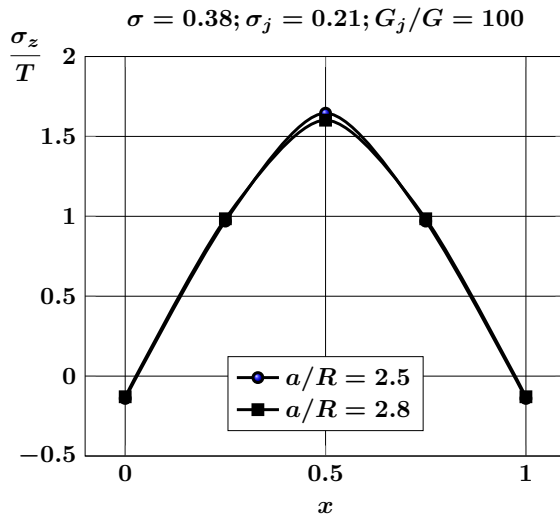


Рис. 3.77. Напряжения σ_z/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении пространства

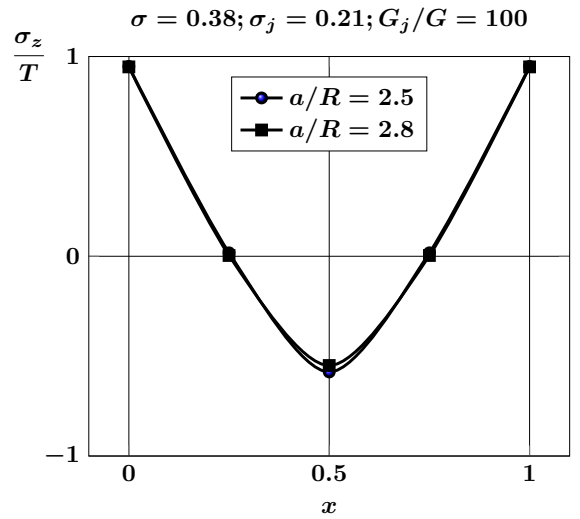


Рис. 3.78. Напряжения σ_z/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении пространства

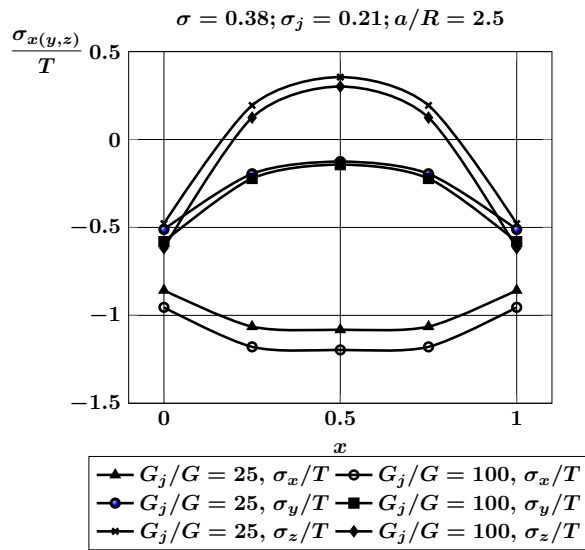


Рис. 3.79. Нормальные напряжения на линии AB в зависимости от отношения G_j/G при одноосном растяжении пространства

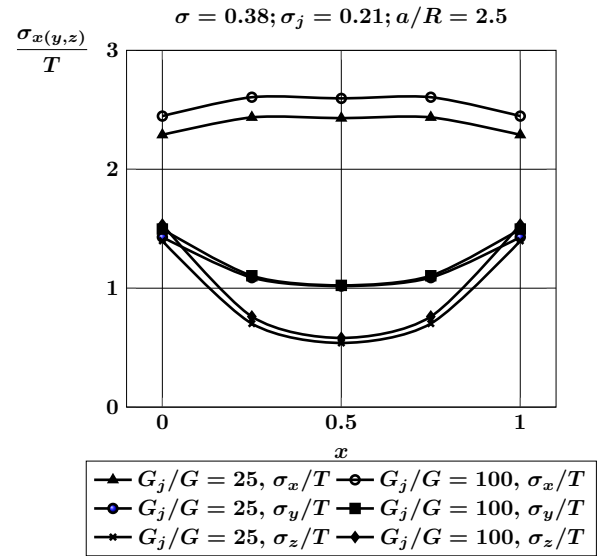


Рис. 3.80. Нормальные напряжения на линии AB в зависимости от отношения G_j/G при двuosном растяжении пространства

Напряжения σ_z/T практически не зависят от расстояния между включениями как в случае одноосного, так и в случае двuosного растяжения упругого пространства.

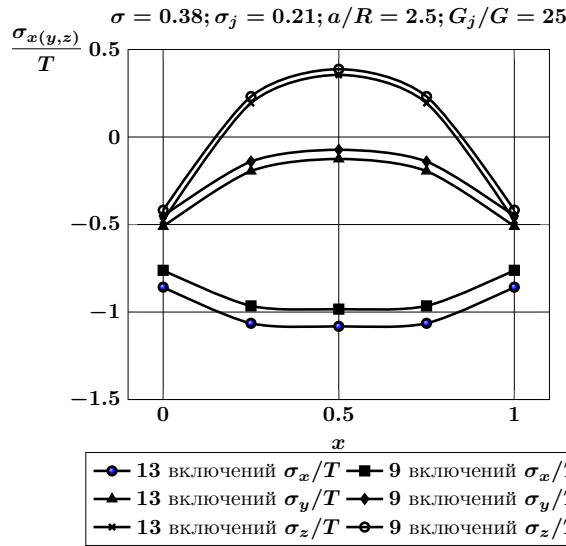


Рис. 3.81. Сравнение нормальных напряжений на линии AB для одной ячейки центрированных тетрагональной и гексагональной структур при одноосном растяжении

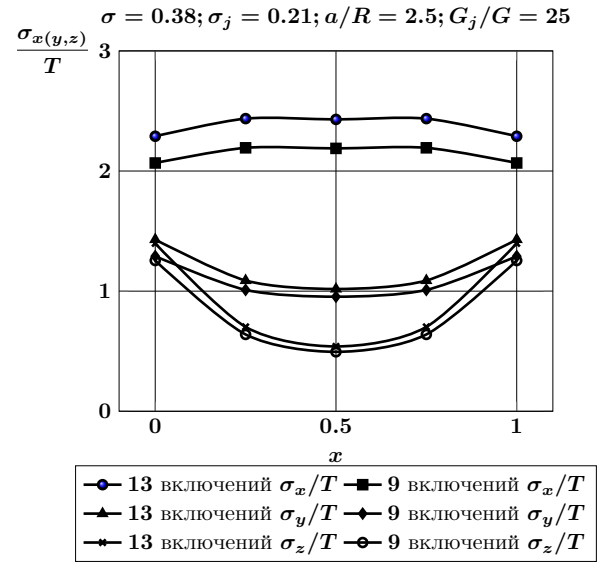


Рис. 3.82. Сравнение нормальных напряжений на линии AB для одной ячейки центрированных тетрагональной и гексагональной структур при двуосном растяжении

На рис. 3.79, 3.80 приведены нормальные напряжения на линии AB в зависимости от отношения модулей сдвига волокон и матрицы при одноосном и двуосном растяжениях упругого пространства. При увеличении отношения G_j/G значения напряжений меняются несущественно. При этом в одноосном случае увеличиваются модули напряжений σ_x/T и σ_y/T , в двуосном — все нормальные напряжения. На линии CD напряжения в обоих случаях практически не зависят от расстояния между включениями.

На рис. 3.81, 3.82 показано сравнение нормальных напряжений на линии AB для одной ячейки центрированных тетрагональной и гексагональной структур при одноосном и двуосном растяжениях упругого пространства при $a/R = 2.5$, $G_j/G = 25$.

При одинаковом характере распределения напряжений максимальное отличие в их значениях составляет не более 10 %. В одноосном случае графики напряжений для 9 включений расположены выше графиков напряжений для 13 включений. В двуосном случае наблюдается обратная картина.

Механика упругого деформирования зернистых композитов с вытянутыми сфероидальными зернами

4.1. Упругое состояние пространства с несколькими вытянутыми сфероидальными полостями

Рассмотрим одно(дву)осное растяжение на бесконечности упругого пространства с несколькими вытянутыми сфероидальными полостями, расположенными неосесимметрично (см. рис. 4.1). Центры полостей находятся в точках O_j , а их границы задаются уравнениями

$$\frac{\rho_j^2}{d_{j1}^2} + \frac{z_j^2}{d_{j2}^2} = 1, \quad (4.1)$$

где $d_{ij} > 0$ — полуоси сфероидов; (ρ_j, φ_j, z_j) — одинаково направленные цилиндрические системы координат, начала которых совпадают с точками O_j . Считается, что полости свободны от нагрузки.

Введем вытянутые сфероидальные системы координат $(\xi_j, \eta_j, \varphi_j)$, совмещенные с цилиндрическими системами. Все введенные системы координат связаны соотношениями

$$\begin{cases} x_j = x_\alpha + x_{j\alpha}, \\ y_j = y_\alpha + y_{j\alpha}, \\ z_j = z_\alpha + z_{j\alpha}; \end{cases} \quad (4.2)$$

В сфероидальных координатах поверхности полостей задаются уравнениями $\Gamma_j : \xi_j = \xi_{j0}$, где ξ_{j0} можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} c_j \operatorname{sh} \xi_{j0} = d_{j1}, \\ c_j \operatorname{ch} \xi_{j0} = d_{j2}. \end{cases} \quad (4.3)$$

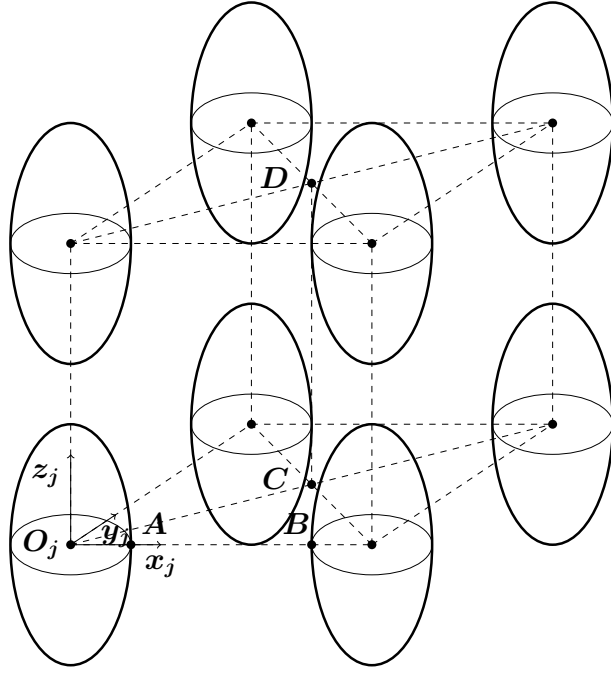


Рис. 4.1. Схематическое представление задачи

Для определения НДС в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу относительно вектора перемещения \mathbf{U} , удовлетворяющего уравнению Ламе, граничным условиям на поверхностях Γ_j

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = 0 \quad (j = \overline{1, N}) \quad (4.4)$$

и условиям на бесконечности

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{z=\pm\infty} = \pm T\mathbf{e}_z \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (4.5)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\rho=\infty} = T\mathbf{e}_\rho \quad (\text{двуосное растяжение}). \quad (4.6)$$

Решение задачи будем искать в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0, \quad (4.7)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} a_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (4.8)$$

где $a_{s,n,m}^{(j)}$ — неизвестные коэффициенты;

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \left(-\frac{\sigma}{1+\sigma} \rho_1 \mathbf{e}_{\rho_1} + \frac{1}{1+\sigma} z_1 \mathbf{e}_z \right) \quad (\text{одноосное растяжение}); \quad (4.9)$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{T}{2G} \left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma} \rho_1 \mathbf{e}_{\rho_1} - \frac{2\sigma}{1+\sigma} z_1 \mathbf{e}_z \right) \quad (\text{двуосное растяжение}). \quad (4.10)$$

В работе [65] были введены следующие частные решения уравнения Ламе во внешности (внутренности) вытянутого сфероида $\Omega_5^\pm \{(\xi, \eta, \varphi) : \xi \gtrless \xi_0\}$:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = \frac{c}{2n+1} \mathbf{D}_s \left[u_{n-1,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) - u_{n+1,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) \right]; \quad s = 1, 3; \quad (4.11)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) - c \text{ch}^2 \xi_0 \mathbf{D}_1 u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi), \quad (4.12)$$

где $n = 0, 1, \dots, |m| \leq n+1$;

$$u_{n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = \left\{ \begin{array}{c} Q_n^{-m}(\text{ch}\xi) \\ P_n^{-m}(\text{ch}\xi) \end{array} \right\} P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, |m| \leq n; \quad (4.13)$$

где $P_n^m(x)$, $Q_n^m(x)$ — функции Лежандра первого и второго рода соответственно;

$$\mathbf{D}_1 = \nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}; \quad (4.14)$$

$$\mathbf{D}_2 = z \nabla - \chi \mathbf{e}_z; \quad (4.15)$$

$$\mathbf{D}_3 = i [\nabla \times \mathbf{e}_z]. \quad (4.16)$$

В развернутой координатной форме формулы (4.11), (4.12) имеют вид:

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0; \quad (4.17)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = q u_{1,n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - q u_{1,n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - \left[q u_{1,n,m}^{\pm(5)} + \chi u_{n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_0 + c (q^2 - q_0^2) \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}; \quad (4.18)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(5)} = -u_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1. \quad (4.19)$$

Здесь использованы обозначения

$$u_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{1,n,m}^\pm(\xi) P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}; \quad (4.20)$$

$$u_{1,n,m}^\pm(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} (n+m+1) Q_{n+1}^{-m}(q) \\ -(n-m) P_{n-1}^{-m}(q) \end{array} \right\}; \quad (4.21)$$

$$q = \operatorname{ch} \xi, \quad q_0 = \operatorname{ch} \xi_0, \quad \mathbf{e}_{\mp 1} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x \pm i \mathbf{e}_y), \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z. \quad (4.22)$$

В работе [62] введено понятие базисности системы решений уравнения Ламе в односвязной канонической области и доказана базисность решений (4.11), (4.12) в соответствующих областях Ω_5^\pm .

Относительно перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ граничные условия можно записать так:

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\Gamma_j} = -\mathbf{F}\mathbf{U}_0|_{\Gamma_j}. \quad (4.23)$$

На бесконечности вектор $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}$ подчиняется условиям (3.14), (3.15). Заметим, что вектор усилий $\mathbf{F}\mathbf{U}_0|_{\Gamma_j}$ для каждого типа растяжений упругого пространства находят по формулам ($\mathbf{n}_j = \mathbf{e}_{\xi_j}$)

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0|_{\Gamma_j} = TH_j \operatorname{sh} \xi_{j0} P_1(\cos \eta_j) \mathbf{e}_z \quad (\text{одноосное растяжение}), \quad (4.24)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0|_{\Gamma_j} = -TH_j \operatorname{ch} \xi_{j0} P_1^{(1)}(\cos \eta_j) \mathbf{e}_{\rho_j} \quad (\text{двуосное растяжение}), \quad (4.25)$$

где $H_j = (\operatorname{ch}^2 \xi_{j0} - \cos^2 \eta_j)^{-\frac{1}{2}}$.

Используя теоремы сложения, перемещение $\tilde{\mathbf{U}}$ можно записать в системе координат с началом в точке O_j :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} a_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} \left\{ \mathbf{U}_{1,n,m}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} \left[a_{1,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} + \right. \right. \\ & + a_{2,k,l}^{(\alpha)} \tilde{f}_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} \left. \right] + \mathbf{U}_{2,n,m}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{2,k,l}^{(\alpha)} \tilde{f}_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} + \\ & \left. + \mathbf{U}_{3,n,m}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{3,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} \right\}; \quad (4.26) \end{aligned}$$

$$f_{n,m,j,\alpha}^{-(55)k,l} = \sum_{r=k}^{\infty} f_{n,m,j,\alpha}^{(54)r,l}(c_\alpha) g_{r,l}^{-(45)k}(c_j); \quad (4.27)$$

$$g_{k,l}^{-(45)s}(c_j) = \sqrt{\pi} \varepsilon_{ks} \left(\frac{c_j}{2} \right)^k \frac{s + \frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} - \frac{s}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{s}{2} + \frac{3}{2}\right)}, \quad (4.28)$$

$$f_{n,m,j,\alpha}^{(54)r,l}(c_\alpha) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l+m} \sqrt{\pi} \left(\frac{c_\alpha}{2} \right)^{p+1} \frac{\varepsilon_{pn} u_{p+r,m-l}^{+(4)}(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})}{\Gamma\left(\frac{p-n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p+n}{2} + \frac{3}{2}\right)}; \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n,m,j,\alpha}^{-(55)k,l} = \sum_{r=k}^{\infty} \left[c_\alpha q_{\alpha 0}^2 f_{n+1,m,j,\alpha}^{(54)r+1,l}(c_\alpha) g_{r,l}^{-(45)k}(c_j) + z_{j\alpha} f_{n,m,j,\alpha}^{(54)r+1,l}(c_\alpha) g_{r,l}^{-(45)k}(c_j) - \right. \\ \left. - c_j q_{j0}^2 \frac{2k+1}{2k+3} f_{n,m,j,\alpha}^{(54)r,l}(c_\alpha) g_{r-1,l}^{-(45)k+1}(c_j) \right], \quad (4.30) \end{aligned}$$

Формулы для напряжений, отвечающих базисным вектор-функциям перемещений $\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j)$ на поверхностях Γ_j ($\mathbf{n}_j = \mathbf{e}_{\xi_j}$ — нормаль к поверхности Γ_j):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = 2G \frac{H_j}{c_j} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} u_{n,m-1}^{\pm(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial \xi_j} u_{n,m+1}^{\pm(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 - \frac{\partial}{\partial \xi_j} u_{n,m}^{\pm(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right]; \quad (4.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = 2G \frac{H_j}{c_j} \left\{ \left[q_j^2 \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{u_{1,n,m-1}^{\pm(5)}}{q_j} \right) - 2\sigma u_{2,n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_{-1} - \right. \\ \left. - \left[q_j^2 \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{u_{1,n,m+1}^{\pm(5)}}{q_j} \right) - 2\sigma u_{3,n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_1 - \left[q_j^2 \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{u_{1,n,m}^{\pm(5)}}{q_j} \right) + (1-2\sigma) \frac{\partial}{\partial \xi_j} u_{n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_0 \right\}; \quad (4.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = 2G \frac{H_j}{c_j} \left\{ - \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} u_{n,m-1}^{\pm(5)} - \frac{1}{2} u_{2,n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_{-1} - \right. \\ \left. - \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} u_{n,m+1}^{\pm(5)} - \frac{1}{2} u_{3,n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_1 + \frac{m}{2} \frac{q_j}{\bar{q}_j} u_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0 \right\}, \quad (4.33) \end{aligned}$$

где $H_j = (q_j^2 - \cos^2 \eta_j)^{-\frac{1}{2}}$;

$$u_{1,n,m}^{\pm(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \tilde{u}_{1,n,m}^{\pm(5)}(\xi_j) P_n^m(\cos \eta_j) e^{im\varphi_j}; \quad (4.34)$$

$$u_{2,n,m}^{\pm(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \tilde{u}_{2,n,m}^{\pm(5)}(\xi_j) P_n^{m-1}(\cos \eta_j) e^{i(m-1)\varphi_j}; \quad (4.35)$$

$$u_{3,n,m}^{\pm(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \tilde{u}_{n,m}^{\pm(5)}(\xi_j) P_n^{m+1}(\cos \eta_j) e^{i(m+1)\varphi_j}; \quad (4.36)$$

$$\tilde{u}_{n,m}^{\pm(5)}(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} Q_n^{-m}(q) \\ P_n^{-m}(q) \end{array} \right\}; \quad (4.37)$$

$$\tilde{u}_{1,n,m}^{\pm(5)}(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} (n+m+1)Q_{n+1}^{-m}(q) \\ -(n-m)P_{n-1}^{-m}(q) \end{array} \right\}; \quad (4.38)$$

$$\tilde{u}_{2,n,m}^{\pm(5)}(\xi) = (n+m)(n-m+1)\tilde{u}_{n,m}^{\pm(5)}(\xi), \quad q = \operatorname{ch} \xi, \quad \bar{q} = \operatorname{sh} \xi. \quad (4.39)$$

После перехода в формуле (4.26) к напряжениям и удовлетворения граничных условий относительно неизвестных $a_{s,n,m}^{(j)}$ получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(j)} W_{s,n,m}^{+(k)}(\xi_{j0}) + W_{1,n,m}^{-(k)}(\xi_{j0}) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} \left[a_{1,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} + \right. \\ \left. + a_{2,k,l}^{(\alpha)} \tilde{f}_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} \right] + W_{2,n,m}^{-(k)}(\xi_{j0}) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{2,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} + \\ + W_{3,n,m}^{-(k)}(\xi_{j0}) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{3,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} = 0; \quad (4.40) \end{aligned}$$

$$n, m \in \mathbb{Z}: \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n+1, \quad k = -1, 0, 1;$$

$$W_{1,n,m}^{\pm(-1)}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}_{n,m-1}^{\pm(5)}(\xi), \quad W_{1,n,m}^{\pm(1)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}_{n,m+1}^{\pm(5)}(\xi); \quad (4.41)$$

$$W_{1,n,m}^{\pm(0)}(\xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}_{n,m}^{\pm(5)}(\xi); \quad W_{2,n,m}^{\pm(-1)}(\xi) = q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\tilde{u}_{1,n,m-1}^{\pm(5)}(\xi)}{q} \right] - 2\sigma \tilde{u}_{2,n,m}^{\pm(5)}(\xi); \quad (4.42)$$

$$W_{2,n,m}^{\pm(1)}(\xi) = -q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{u_{1,n,m+1}^{\pm(5)}(\xi)}{q} \right] + 2\sigma \tilde{u}_{n,m}^{\pm(5)}(\xi); \quad (4.43)$$

$$W_{2,n,m}^{\pm(0)}(\xi) = -q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\tilde{u}_{1,n,m}^{\pm(5)}(\xi)}{q} \right] - (1-2\sigma) \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}_{n,m}^{\pm(5)}(\xi); \quad (4.44)$$

$$W_{3,n,m}^{\pm(-1)}(\xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}_{n,m-1}^{\pm(5)}(\xi) + \frac{1}{2} \tilde{u}_{2,n,m}^{\pm(5)}(\xi); \quad (4.45)$$

$$W_{3,n,m}^{\pm(1)}(\xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}_{n,m+1}^{\pm(5)}(\xi) + \frac{1}{2} \tilde{u}_{n,m}^{\pm(5)}(\xi); \quad (4.46)$$

$$W_{3,n,m}^{\pm(0)}(\xi) = \frac{m}{2} \frac{q}{\bar{q}} \tilde{u}_{n,m}^{\pm(5)}(\xi); \quad (4.47)$$

$$W_{n,m}^{(k)j} = \begin{cases} -\frac{T}{2G} c_j \operatorname{sh} \xi_{j0} \delta_{n1} \delta_{m0} \delta_{k0} & (\text{одноосное растяжение}), \\ \frac{T}{2G} c_j \operatorname{ch} \xi_{j0} \delta_{n1} \delta_{m0} \delta_{k1} & (\text{двуосное растяжение}). \end{cases} \quad (4.48)$$

4.2. Анализ разрешающей системы

Теорема 4.1. При выполнении условия $\xi_{j0} < \xi_j^*$ оператор системы (4.40) является фредгольмовым в гильбертовом пространстве l_2 .

Доказательство. Путем переобозначения неизвестных коэффициентов

$$\tilde{a}_{s,n,m}^{(j)} = a_{s,n,m}^{(j)} Q_n^{-m}(q_{j0}) \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n+1/2)(n-m)!}} \quad (4.49)$$

и разрешения системы относительно $\tilde{a}_{s,n,m}^{(j)}$ можно представить систему (4.40) в виде

$$\tilde{a}_{s,n,m}^{(j)} + \sum_{\alpha \neq j} \sum_{p=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} T_{j,s,n,m}^{\alpha,p,k,l} \tilde{a}_{p,k,l}^{(\alpha)} = W_{s,n,m}^{(j)}, \quad (4.50)$$

$$n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n+1; \quad s = 1, 2, 3; \quad j = \overline{1, N}.$$

Ввиду громоздкости опустим явную запись матричных коэффициентов системы (4.50). Заметим, однако, что модуль матричных коэффициентов $|T_{j,s,n,m}^{\alpha,p,k,l}|$ можно оценить сверху конечными линейными комбинациями выражений вида

$$n^\gamma k^\beta \left| \frac{P_n^{-m}(q_{j0})}{Q_k^{-l}(q_{\alpha 0})} \right|^2 \frac{(n+m)!(k+l)!}{(n-m)!(k-l)!} \left| f_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} \right|^2, \quad (4.51)$$

где β и γ — заданные числа, не зависящие от n, k, l, m .

Оценим сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \left[\frac{n^{\gamma} k^{\beta} P_n^{-m}(q_{j0})}{Q_k^{-l}(q_{\alpha 0})} \right]^2 \frac{(n+m)!(k+l)!}{(n-m)!(k-l)!} \left| f_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} \right|^2. \quad (4.52)$$

С этой целью рассмотрим теорему сложения гармонических функций (1.12), которую можно записать так:

$$u_{n,m}^{+(5)}(\xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, \varphi_{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k f_{n,m,j,\alpha}^{-(55)k,l} u_{k,l}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j). \quad (4.53)$$

Равенство (4.53) представляет собой разложение функции, входящей в ее левую часть, в ряд Фурье по ортонормированной системе функций $\sqrt{(k+1/2)} \frac{(k-l)!}{(k+l)!} P_k^l(\cos \eta_j) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il\varphi_j}$ на поверхности сфероида. Для этого разложения справедливо равенство Парсеваля

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left| u_{n,m}^{+(5)}(\xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, \varphi_{\alpha}) \right|^2 \sin \eta_j d\eta_j d\varphi_j = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \left| f_{n,m,j,\alpha}^{-(55)k,l} \right|^2 \left| P_k^{-l}(q_{j0}) \right|^2 \frac{(k+l)!}{(k-l)!(k+1/2)}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Положим в формуле (4.54) $\xi_j = \xi_{0j}$, после чего помножим обе части равенства (4.54) на выражение $\frac{(n+m)!}{(n-m)!} |Q_n^{-m}(q_{\alpha 0})|^{-2}$ и просуммируем по n и m от 0 до ∞ и от $-n$ до n соответственно. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left| \frac{Q_n^{-m}(q_{\alpha})}{Q_n^{-m}(q_{\alpha 0})} \right|^2 \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \frac{|P_n^m(\cos \eta_{\alpha})|^2}{||P_n^m||^2} \sin \eta_j d\eta_j d\varphi_j = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \left| \frac{P_k^{-l}(q_{j0})}{Q_n^{-m}(q_{\alpha 0})} \right|^2 \frac{(n+m)!(k+l)!}{(n-m)!(k-l)!} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})(k + \frac{1}{2})} \left| f_{n,m}^{-(55)k,l} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Ряд в левой части равенства (4.55) сходится при условии $\xi_{\alpha} > \xi_{\alpha 0}$. Найдем наименьшее значение ξ_{α} , при котором точка с координатами $(\xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$ находится на поверхности сфероида $\xi_j = \xi_{j0}$. Очевидно, это значение ξ_{α} соответствует случаю, когда сфероиды $\xi_j = \xi_{j0}$ и $\xi_{\alpha} = \xi_{\alpha 0}$ касаются. Обозначим это значение переменной ξ_{α} через ξ_{α}^* . Оно может быть найдено из решения задачи касания двух сфероидов по формуле

$$\operatorname{ch}^2 \xi_j^* = \frac{\sin \eta_\alpha \operatorname{ch} \xi_{\alpha 0} (c_\alpha \operatorname{ch} \xi_{\alpha 0} \cos \eta_\alpha + z_{j\alpha})}{c_\alpha \sin \eta_\alpha \cos \eta_\alpha + \sin \eta_\alpha \operatorname{ch} \xi_{\alpha 0} z_{j\alpha} + \cos \eta_\alpha \operatorname{sh} \xi_{\alpha 0} \rho_{j\alpha}}, \quad (4.56)$$

где $\eta_\alpha \in [0, \pi]$ — тот корень уравнения

$$(c_\alpha \operatorname{ch} \xi_{\alpha 0} \operatorname{sh} \xi_{\alpha 0} - \operatorname{ch} \xi_{\alpha 0} \rho_{j\alpha} \sin \eta_\alpha \operatorname{sh} \xi_{\alpha 0} z_{j\alpha} \cos \eta_\alpha) (c_\alpha \sin \eta_\alpha \cos \eta_\alpha + \\ + \operatorname{ch} \xi_{\alpha 0} z_{j\alpha} \sin \eta_\alpha + \operatorname{sh} \xi_{\alpha 0} \rho_{j\alpha} \cos \eta_\alpha) = c_j^2 \operatorname{sh} \xi_{\alpha 0} \operatorname{ch} \xi_{\alpha 0} \sin \eta_\alpha \cos \eta_\alpha, \quad (4.57)$$

для которого

$$\eta_\alpha \in \begin{cases} \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right], & z_{j\alpha} \geq 0, \\ \left[0; \frac{\pi}{2} \right], & z_{j\alpha} < 0. \end{cases} \quad (4.58)$$

Если потребовать, чтобы $\xi_{\alpha 0}^* < \xi_\alpha^*$, то и подавно для всех точек поверхности $\xi_j = \xi_{j0}$ будет выполняться условие $\xi_{\alpha 0} < \xi_\alpha^* \leq \xi_\alpha$, т. е. ряд в левой части равенства (4.55) будет сходиться, а значит, будет сходиться и ряд в правой части (4.55). Тогда сходится ряд в (4.52). Следовательно, оператор исследуемой системы является фредгольмовым в гильбертовом пространстве l_2 .

4.3. Анализ напряженного состояния пористого материала с вытянутыми сфероидальными полостями

4.3.1. Тетрагональная структура расположения сфероидальных полостей в материале

Рассмотрим одноосное растяжение пространства с несколькими вытянутыми сфероидальными полостями. На рис. 4.2 — 4.4 приведены графики распределения напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T вдоль горизонтальной линии, соединяющей центры соседних сфероидальных полостей, в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре для следующего набора параметров: $\sigma = 0.38$, $a/d_1 = 2.5$, $d_2/d_1 = 0.75$ (d_1, d_2 — большая и малая полуоси сфероидов, a — расстояние между центрами соседних полостей).

Характерная особенность приведенных графиков заключается в том, что напряжения σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T в средней точке отрезка с увеличением количества полостей сперва увеличиваются, а потом начинают убывать. Максимальные значения напряжений σ_z/T на порядок выше максимальных значений

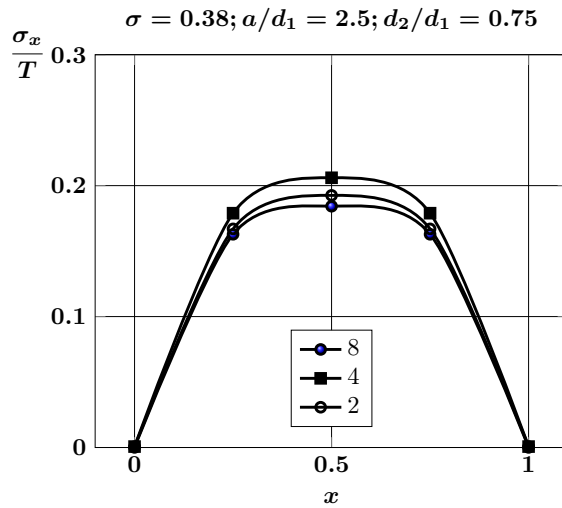


Рис. 4.2. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре при одноосном растяжении пространства

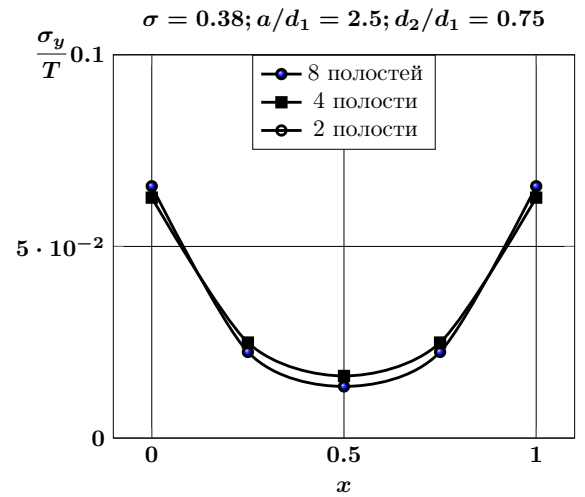


Рис. 4.3. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре при одноосном растяжении пространства

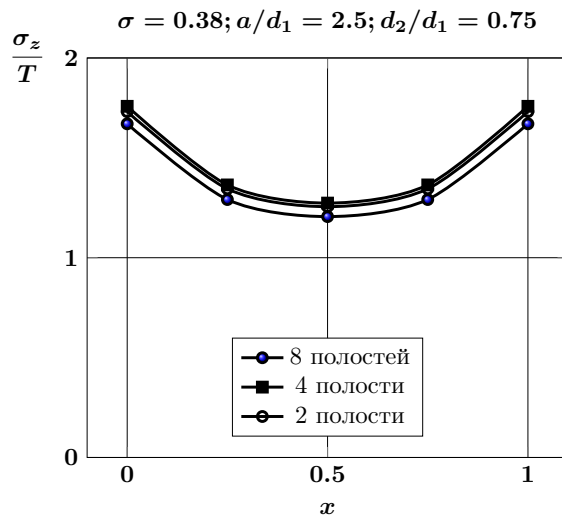


Рис. 4.4. Напряжения σ_x/T на линии AB для гексагональной и тетрагональной центрированных структур

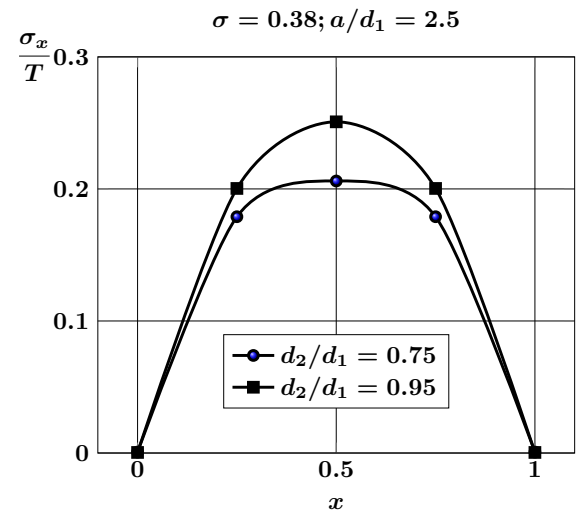


Рис. 4.5. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от соотношения между полуосями сфероидов (четыре полости)

напряжений σ_x/T и на два порядка — σ_y/T . Наблюдается характерная концентрация напряжений σ_z/T на поверхностях полостей в их экваториальной плоскости. Максимальные напряжения σ_z/T в 1.7 раза больше, чем растягивающие усилия на бесконечности.

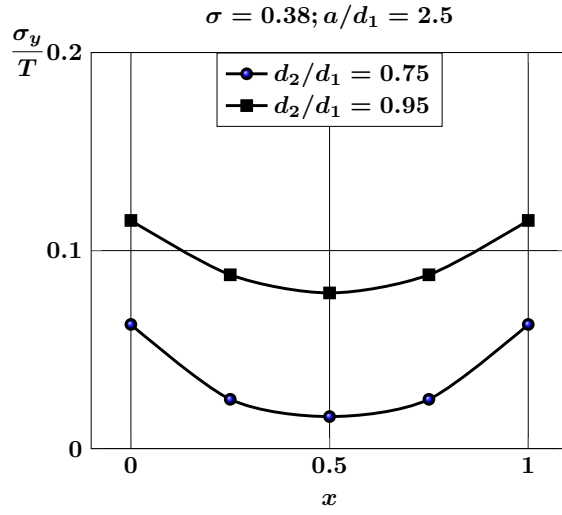


Рис. 4.6. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от соотношения между полюсами сфероидов (четыре полости)

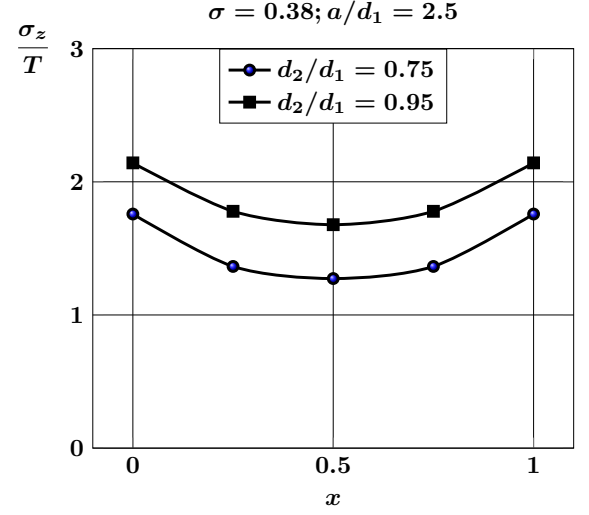


Рис. 4.7. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости соотношения между полюсами сфероидов (четыре полости)

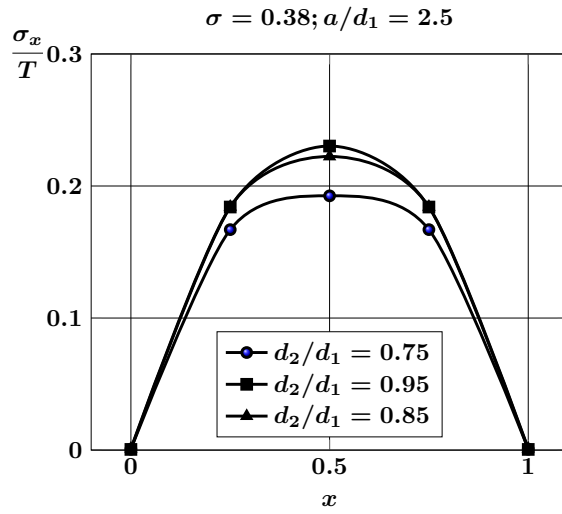


Рис. 4.8. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от соотношения между полюсами сфероидов (две полости)

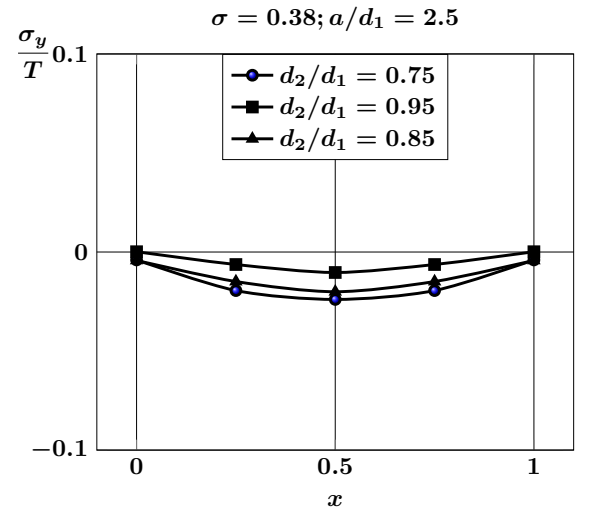


Рис. 4.9. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от соотношения между полюсами сфероидов (две полости)

На рис. 4.8 — 4.10 приведены графики распределения напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T вдоль горизонтальной линии, соединяющей центры соседних сфероидальных полостей, в зависимости от соотношения полюсей сфероидов для двух полостей.

При увеличении отношения d_2/d_1 напряжения σ_x/T , σ_z/T растут, а модуль напряжения σ_y/T убывает.

Наблюдается существенное увеличение напряжений при сохранении общего характера в их распределении в случае увеличения отношения малой и большой полуосей сфероидов.

В табл. 4.1 приведены результаты данных проверки граничных условий на одной из сфероидальных полостей для конфигурации из пары полостей при одноосном растяжении и при $\sigma = 0.38$, $a/d_1 = 2.5$, $d_1/d_2 = 0.75$, $n_{max} = 6$, $p_{max} = r_{max} = 10$.

В табл. 4.2 представлены результаты данных по сходимости метода редукции в средней точке линии, соединяющей центры пары сфероидальных полостей при одноосном растяжении и при $\sigma = 0.38$, $a/d_1 = 2.5$, $d_1/d_2 = 0.75$.

Рассмотрим двuosное растяжение пространства с несколькими вытянутыми сфероидальными полостями. На рис. 4.11 — 4.13 приведены графики распределения напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T вдоль горизонтальной линии, соединяющей центры соседних сфероидальных полостей, в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре для следующего набора параметров: $\sigma = 0.38$, $a/d_1 = 2.5$, $d_2/d_1 = 0.75$.

На рис. 4.14 — 4.17 представлены графики напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T

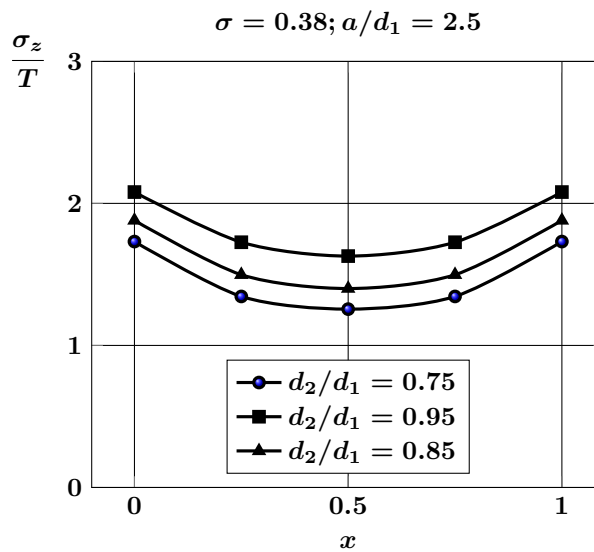


Рис. 4.10. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости соотношения между полуосями сфероидов (две полости)

на линии CD в тетрагональной структуре из сфероидальных полостей при одноосном и двуосном растяжениях пространства.

Таблица 4.1. Проверка граничных условий

η	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
σ_ρ	0.000685503	1.44838×10^{-6}	0.000356788	1.44838×10^{-6}

Таблица 4.2. Сходимость метода редукции для сфероидальных полостей

$n_{max}; p_{max}; r_{max}$	5; 5; 5	6; 10; 10	8; 10; 10	10; 10; 10
σ_x	0.191411	0.192552	0.19243	0.19242
σ_y	-0.0239008	-0.0239348	-0.0239318	-0.0239316
σ_z	1.25566	1.25552	1.25556	1.25557

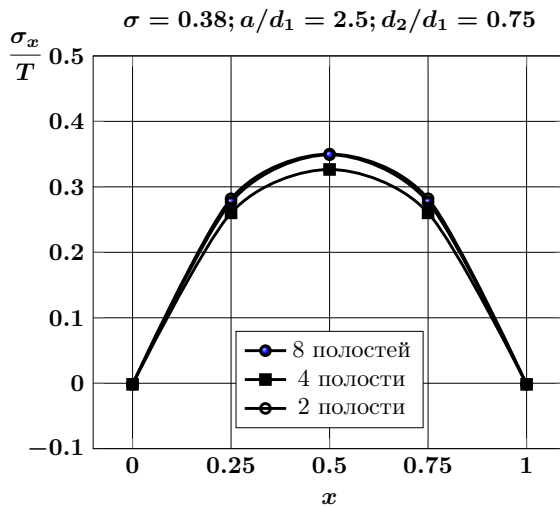


Рис. 4.11. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре при двуосном растяжении пространства

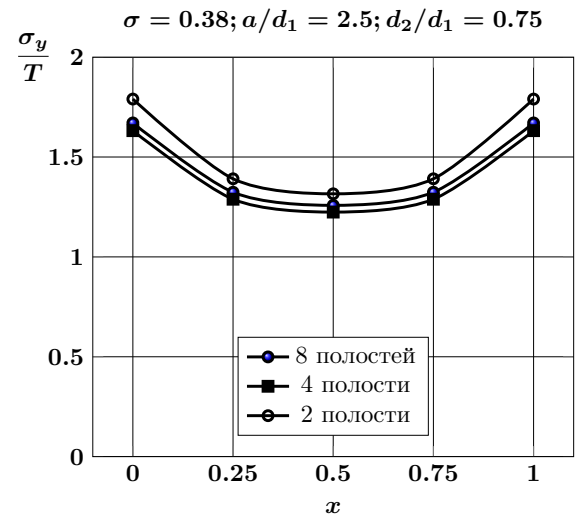


Рис. 4.12. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре при двуосном растяжении пространства

Наблюдается практически линейный характер распределения напряжений между средней точкой отрезка CD и любым из его концов. Для напряжений σ_x/T , σ_y/T имеются области растягивающих напряжений в окрестности оснований кубической ячейки. Напряжения σ_z/T растут при приближении полостей друг к другу.

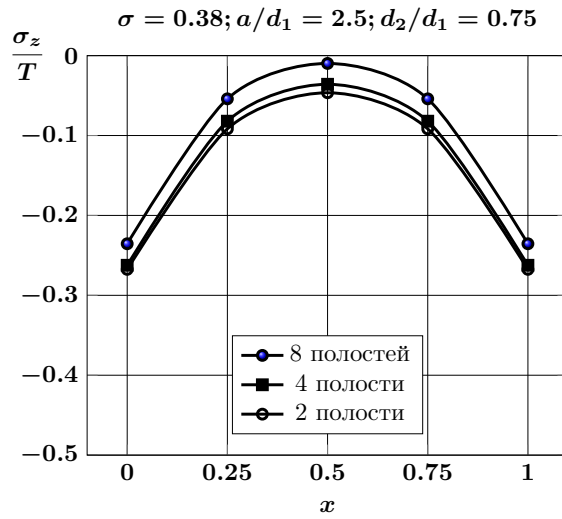


Рис. 4.13. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от количества полостей в тетрагональной структуре при двuosном растяжении пространства

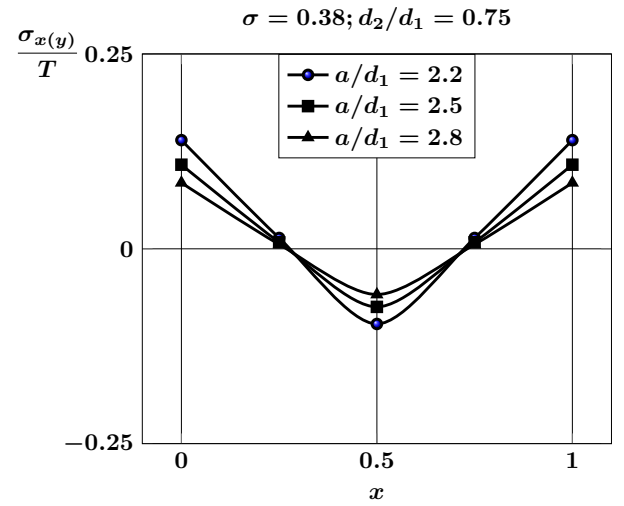


Рис. 4.14. Напряжения $\sigma_x/T, \sigma_y/T$ на линии CD в тетрагональной структуре из сфероидальных полостей в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении пространства

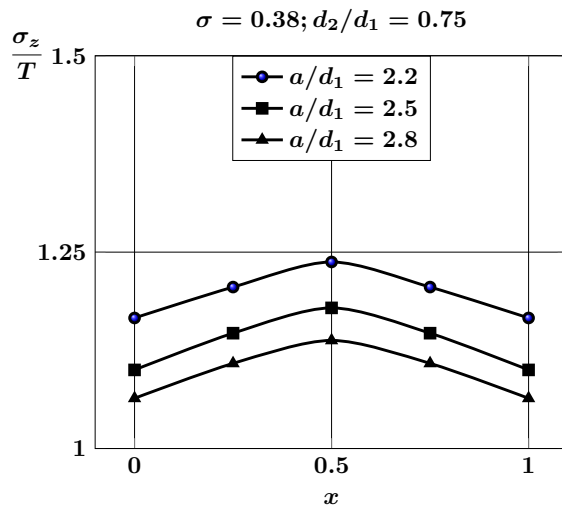


Рис. 4.15. Напряжения σ_z/T на линии CD в тетрагональной структуре из сфероидальных полостей в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении пространства

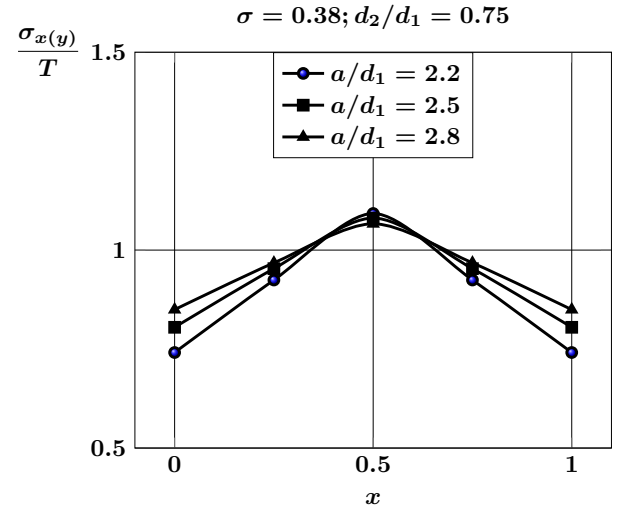


Рис. 4.16. Напряжения σ_x/T на линии CD в тетрагональной структуре из сфероидальных полостей в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении пространства

Для двuosного растяжения характер распределения напряжений σ_x/T ,

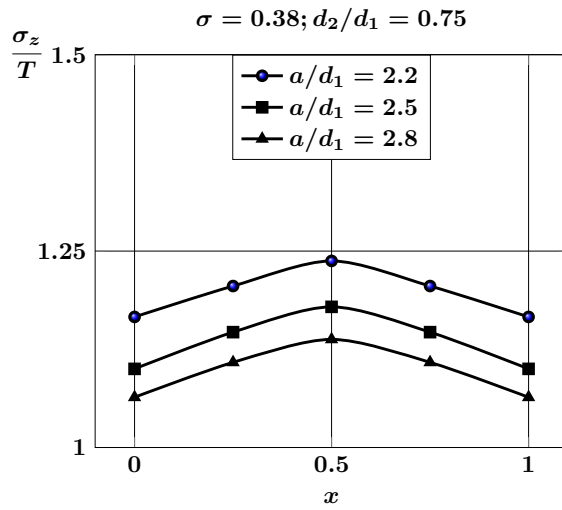


Рис. 4.17. Напряжения σ_z/T на линии CD в тетрагональной структуре из сфероидальных полостей в зависимости от расстояния между полостями при двустороннем растяжении пространства

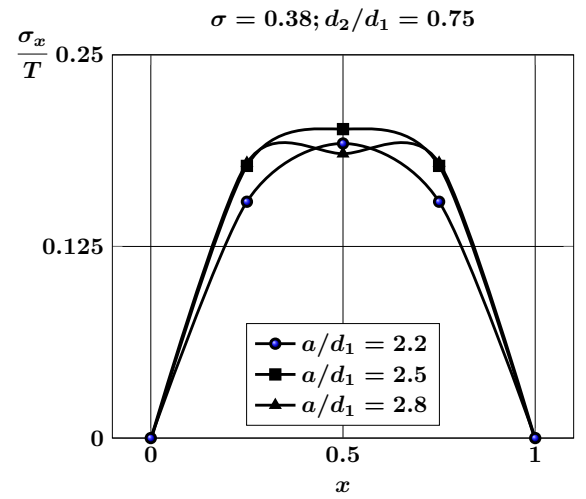


Рис. 4.18. Напряжения σ_x/T на линии AB в тетрагональной структуре из сфероидальных полостей в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении пространства

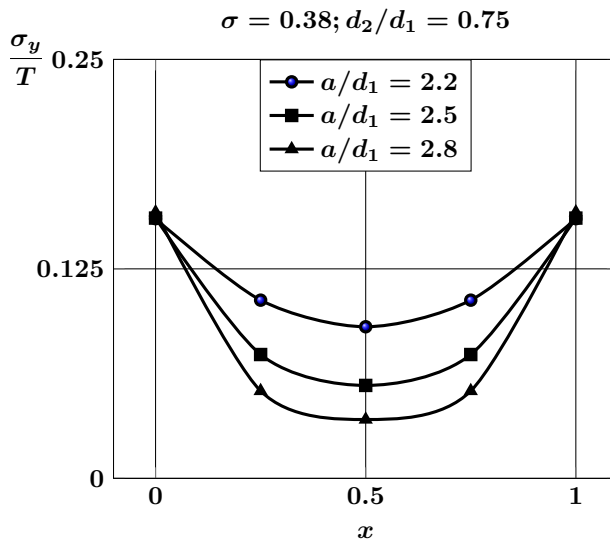


Рис. 4.19. Напряжения σ_y/T на линии AB в тетрагональной структуре из сфероидальных полостей в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении пространства

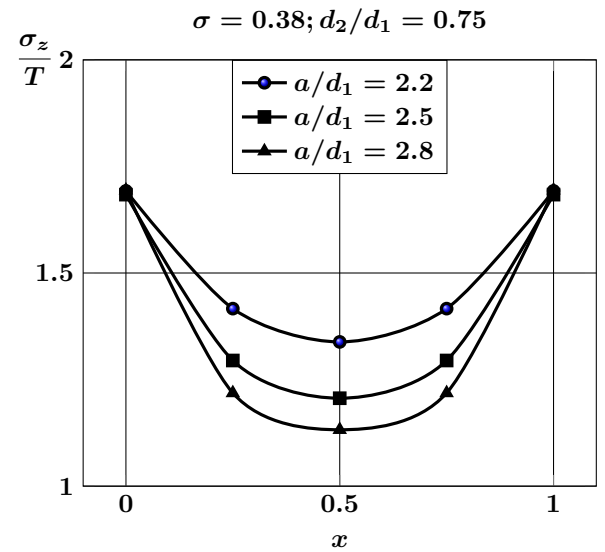


Рис. 4.20. Напряжения σ_z/T на линии AB в тетрагональной структуре из сфероидальных полостей в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении пространства

σ_y/T , σ_z/T напоминает случай одноосного растяжения, только с заменой σ_x/T , σ_y/T на σ_z/T .

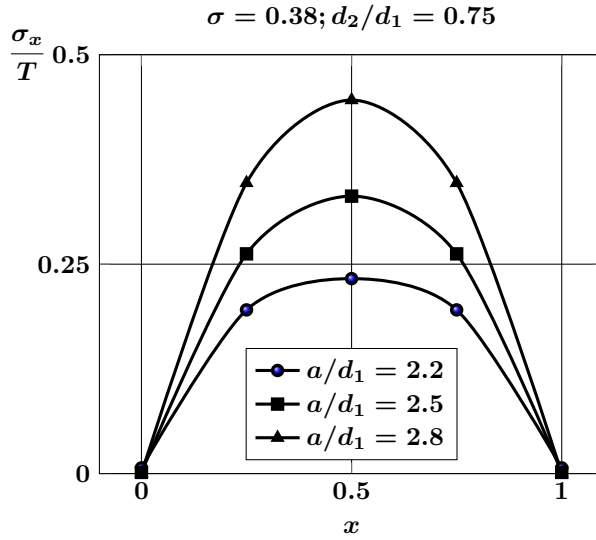


Рис. 4.21. Напряжения σ_x/T на линии AB в тетрагональной структуре из сфероидальных полостей в зависимости от расстояния между полостями при двучосном растяжении пространства

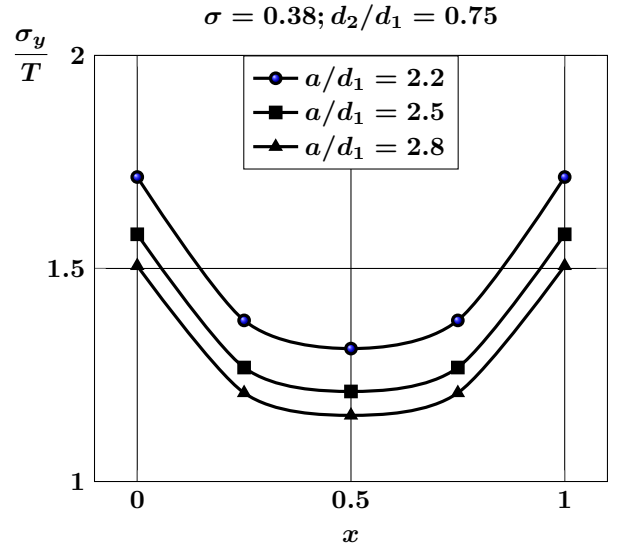


Рис. 4.22. Напряжения σ_y/T на линии AB в тетрагональной структуре из сфероидальных полостей в зависимости от расстояния между полостями при двучосном растяжении пространства

На рис. 4.18 — 4.20 приведены напряжения σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T на линии AB при одноосном растяжении в зависимости от относительного расстояния a/d_1 между полостями.

Основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_z/T . Областью концентрации напряжений σ_y/T , σ_z/T является граница полостей, в то время как напряжения σ_x/T достигают максимальных значений в средней точке отрезка AB . Напряжения σ_y/T , σ_z/T растут с приближением полостей друг к другу.

На рис. 4.21 — 4.23 приведены напряжения σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T на линии AB при двучосном растяжении в зависимости от относительного расстояния a/d_1 между полостями.

Основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_y/T . Областью их концентрации являются границы полостей. Напряжения σ_x/T убывают, а σ_y/T растут при приближении полостей друг к другу. Напряжения σ_z/T с приближением полостей друг к другу стремятся к сжимающим постоянным напряжениям.

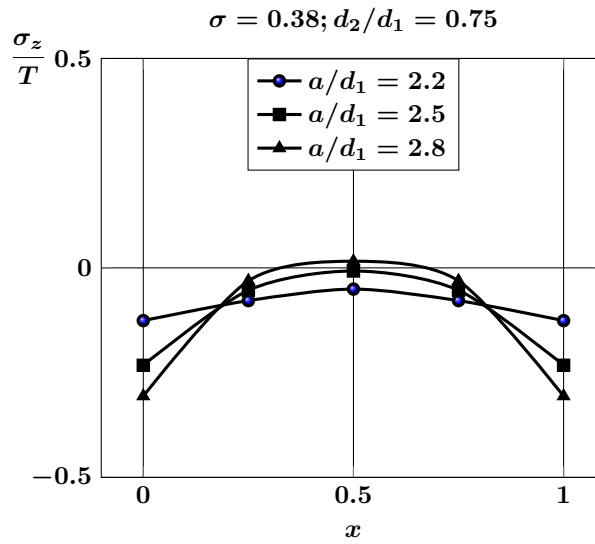


Рис. 4.23. Напряжения σ_z/T на линии AB в тетрагональной структуре из сфероидальных полостей в зависимости от расстояния между полостями при двусосном растяжении пространства

4.3.2. Тетрагональная центрированная структура расположения сфероидальных полостей в материале

Рассмотрим тетрагональную центрированную структуру расположения сфероидальных полостей в пористом материале (см. рис. 4.24).

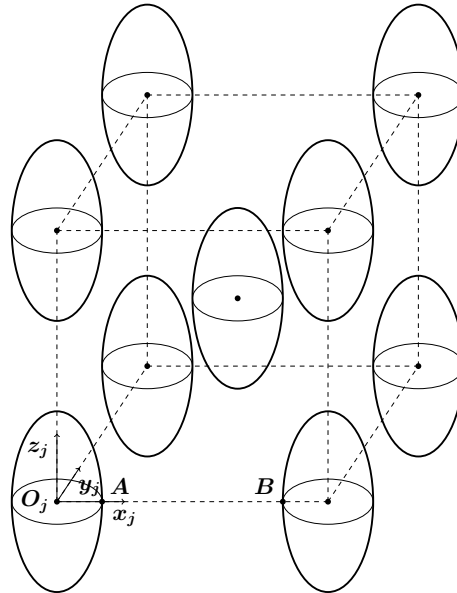


Рис. 4.24. Одна ячейка тетрагональной центрированной структуры

На рис. 4.25 — 4.30 приведены графики напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T для одной ячейки тетрагональной центрированной структуры на линии AB в зави-

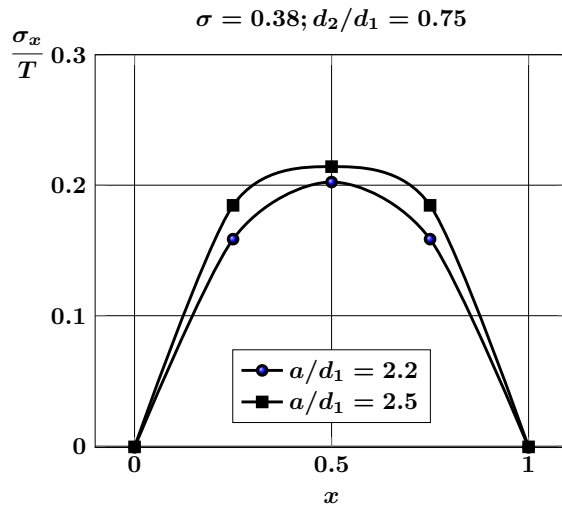


Рис. 4.25. Напряжения σ_x/T на линии AB в тетрагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

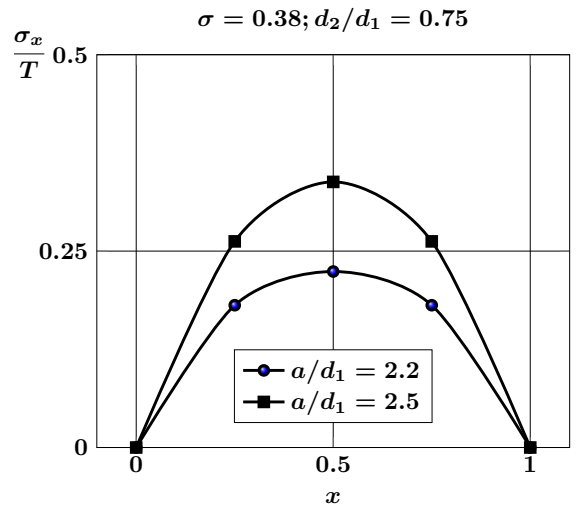


Рис. 4.26. Напряжения σ_x/T на линии AB в тетрагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при двуосном растяжении

симости от относительного расстояния a/d_1 между полостями при одноосном и двуосном растяжениях упругого пространства при $d_2/d_1 = 0.75$, $\sigma = 0.38$.

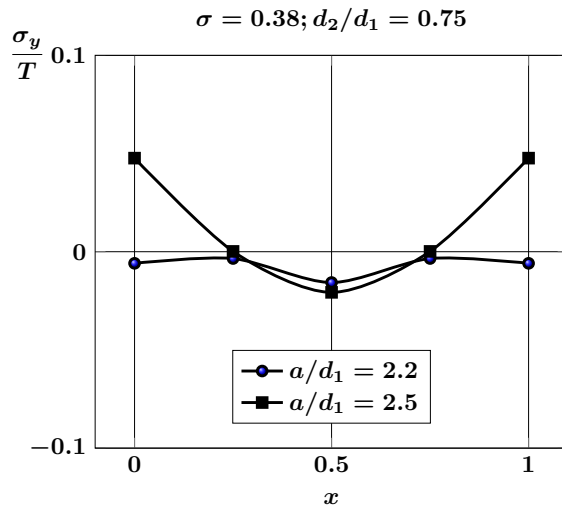


Рис. 4.27. Напряжения σ_y/T на линии AB в тетрагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

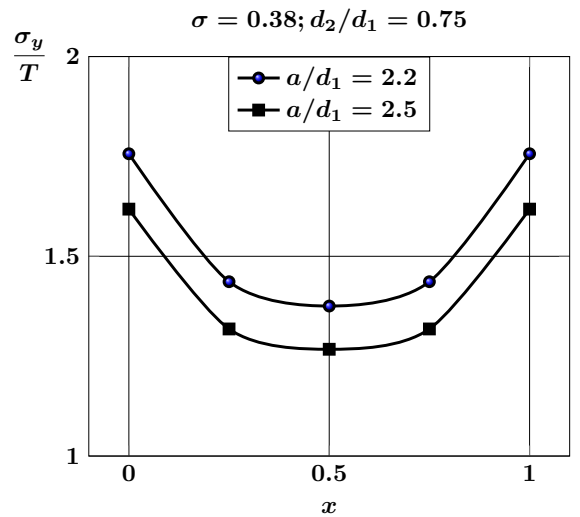


Рис. 4.28. Напряжения σ_y/T на линии AB в тетрагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при двуосном растяжении

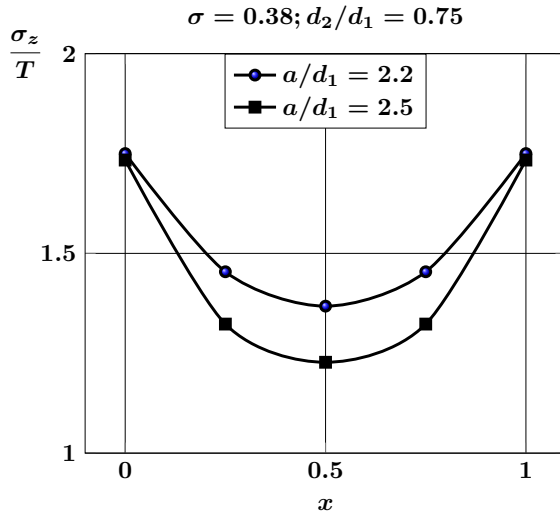


Рис. 4.29. Напряжения σ_z/T на линии AB в тетрагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

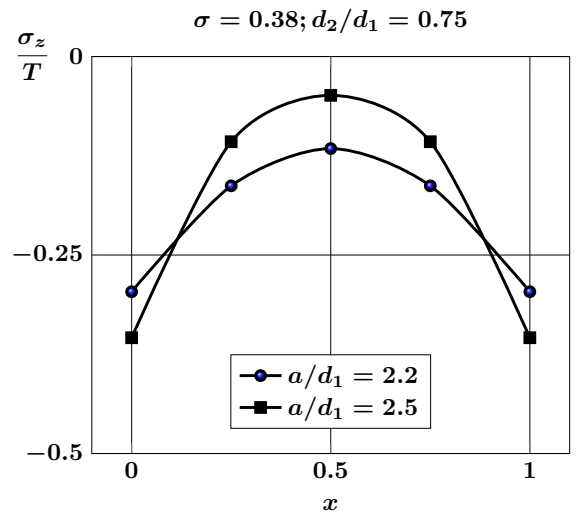


Рис. 4.30. Напряжения σ_z/T на линии AB в тетрагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при двуосном растяжении

При одноосном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_z/T . Областью их концентрации являются границы полостей, и они растут с приближением полостей друг к другу. При двуосном растяжении подобными свойствами обладают напряжения σ_y/T . Напряжения σ_z/T являются сжимающими на всем отрезке AB .

4.3.3. Гексагональная центрированная структура расположения сфероидальных полостей в материале

Рассмотрим гексагональную центрированную структуру расположения сфероидальных полостей в пористом материале (см. рис. 4.31).

На рис. 4.32 — 4.37 приведены графики напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T для одной ячейки гексагональной центрированной структуры на линии AB в зависимости от относительного расстояния a/d_1 между полостями при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства при $d_2/d_1 = 0.75$, $\sigma = 0.38$.

При одноосном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_z/T . Областью их концентрации являются границы полостей, и они растут с приближением полостей друг к другу. При двуосном растяжении по-

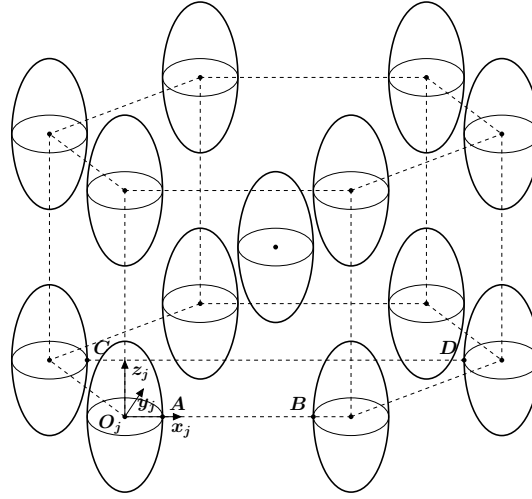


Рис. 4.31. Одна ячейка гексагональной центрированной структуры

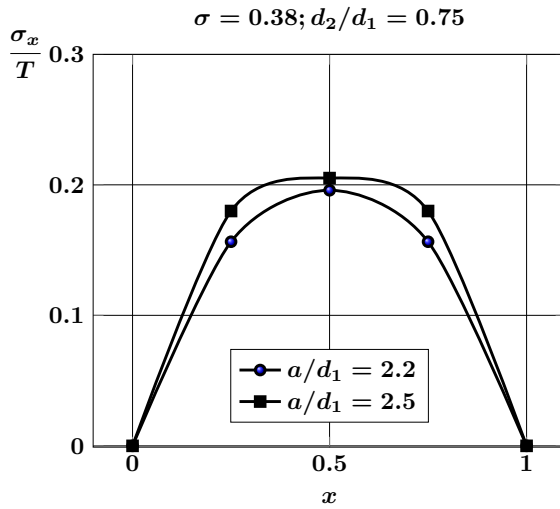


Рис. 4.32. Напряжения σ_x/T на линии AB в гексагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

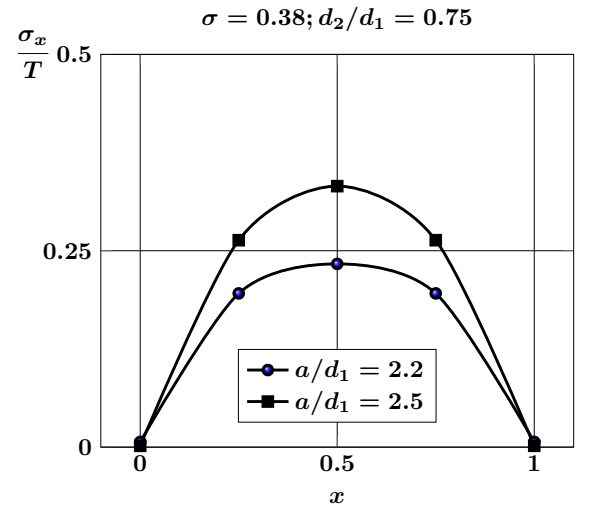


Рис. 4.33. Напряжения σ_x/T на линии AB в гексагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при двуосном растяжении

добными свойствами обладают напряжения σ_y/T . Напряжения σ_z/T являются сжимающими на всем отрезке AB .

На рис. 4.38 — 4.43 приведены графики напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T для одной ячейки гексагональной центрированной структуры на линии CD в зависимости от относительного расстояния a/d_1 между полостями при одноосном и двуосном растяжениях упругого пространства при $d_2/d_1 = 0.75$, $\sigma = 0.38$.

В случае одноосного растяжения основной вклад в тензор напряжений вно-

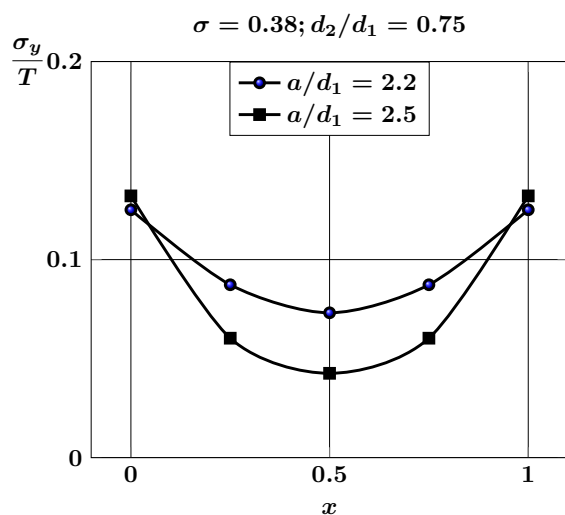


Рис. 4.34. Напряжения σ_y/T на линии AB в гексагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

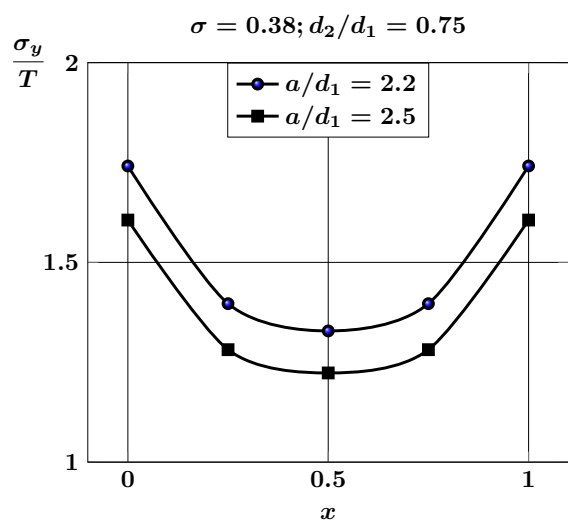


Рис. 4.35. Напряжения σ_y/T на линии AB в гексагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при двуосном растяжении

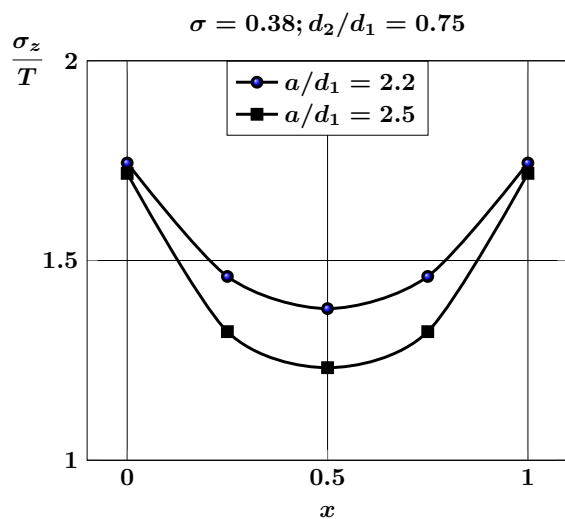


Рис. 4.36. Напряжения σ_z/T на линии AB в гексагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

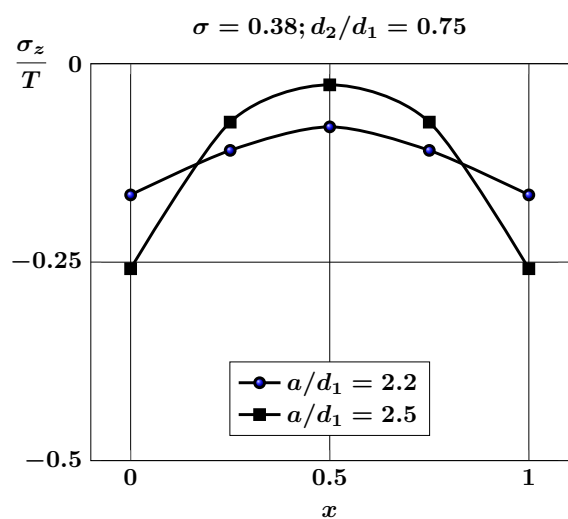


Рис. 4.37. Напряжения σ_z/T на линии AB в гексагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при двуосном растяжении

сят напряжения σ_z/T . Областью их концентрации являются границы полостей. В середине отрезка CD напряжения σ_z/T близки к нулю. Зависимость напря-

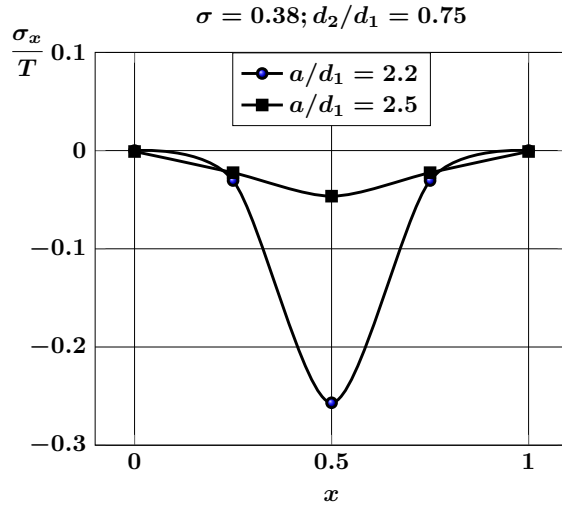


Рис. 4.38. Напряжения σ_x/T на линии CD в гексагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

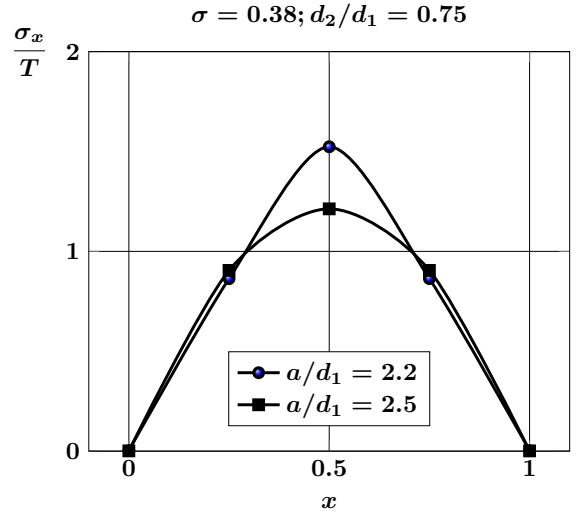


Рис. 4.39. Напряжения σ_x/T на линии CD в гексагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при двуосном растяжении

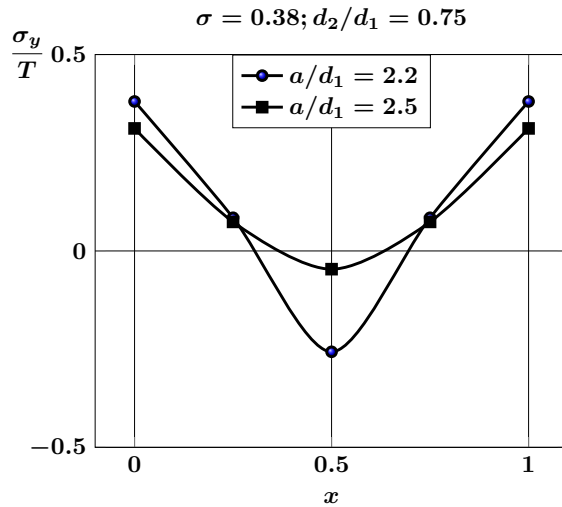


Рис. 4.40. Напряжения σ_y/T на линии CD в гексагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

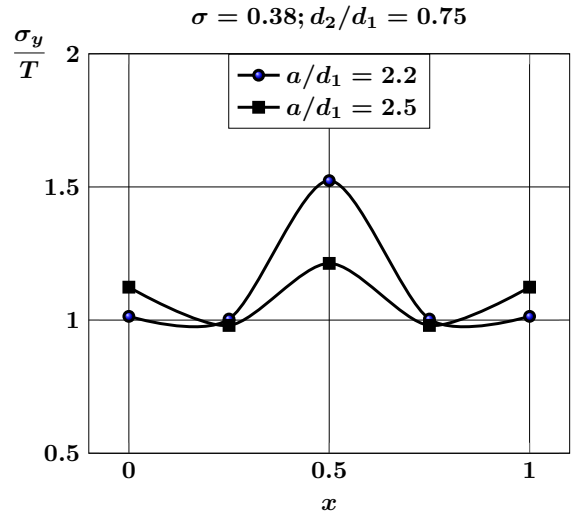


Рис. 4.41. Напряжения σ_y/T на линии CD в гексагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при двуосном растяжении

жений от расстояния между полостями несущественна.

При двуосном растяжении главный вклад в тензор напряжений вносят на-

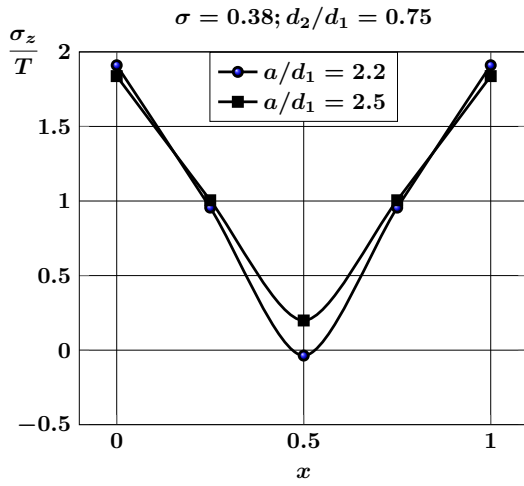


Рис. 4.42. Напряжения σ_z/T на линии CD в гексагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении

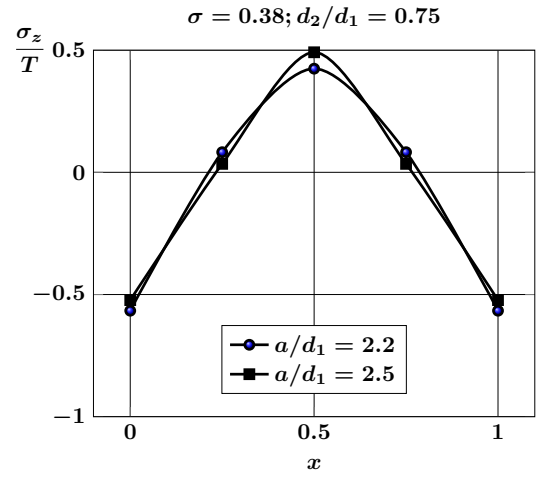


Рис. 4.43. Напряжения σ_z/T на линии CD в гексагональной центрированной структуре в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении

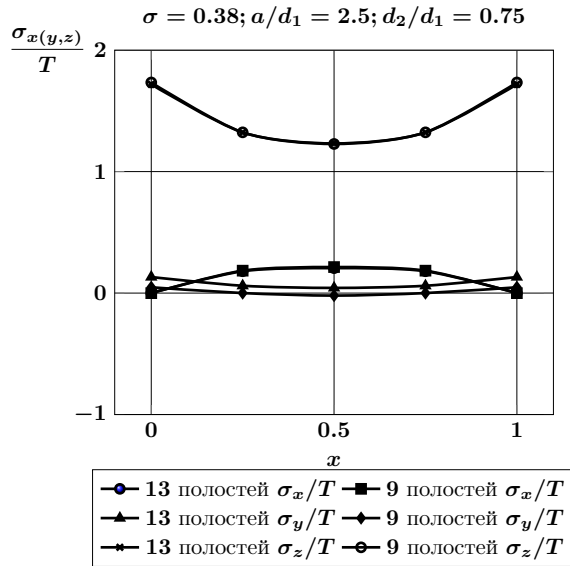


Рис. 4.44. Сравнение напряжений на линии AB для одной ячейки центрированных тетрагональной и гексагональной структур при одноосном растяжении

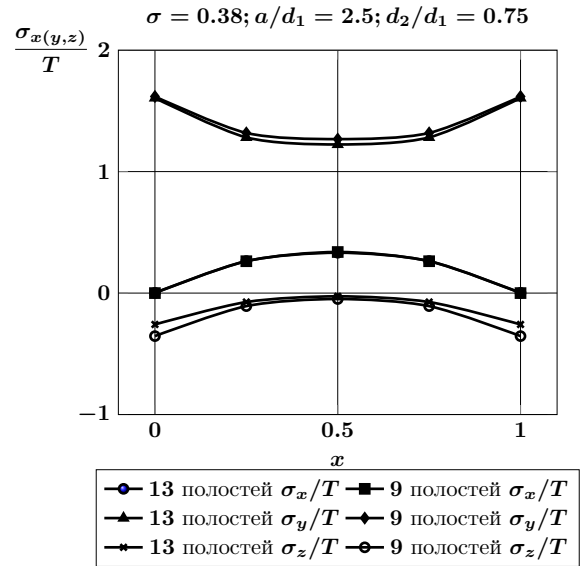


Рис. 4.45. Сравнение напряжений на линии AB для одной ячейки центрированных тетрагональной и гексагональной структур при двuosном растяжении

пряжения σ_x/T и σ_y/T , которые в средней точке отрезка CD достигают максимального значения и совпадают. Напряжения σ_z/T меняют знак на рассмат-

риваемом отрезке, оставаясь сжимающими вблизи границ полостей и растягивающими в средней части отрезка CD .

На рис. 4.44, 4.45 приведено сравнение нормальных напряжений для одной ячейки центрированных тетрагональной и гексагональной структур на отрезке AB при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства. Графики показывают, что распределения напряжений для указанных структур практически не отличаются.

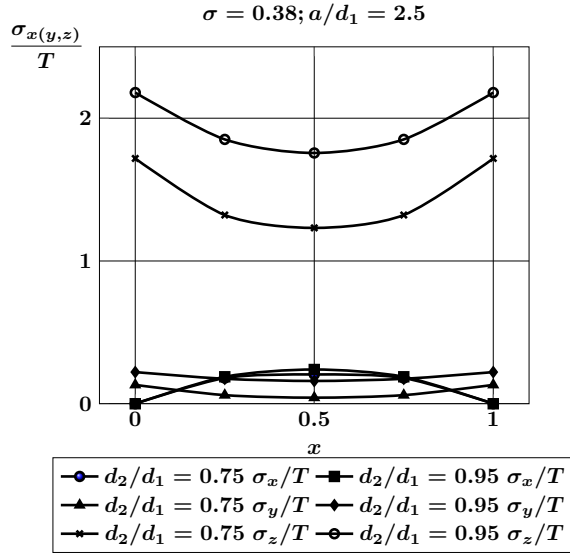


Рис. 4.46. Сравнение напряжений на линии AB для одной ячейки центрированной гексагональной структуры в зависимости от формы полостей при одноосном растяжении

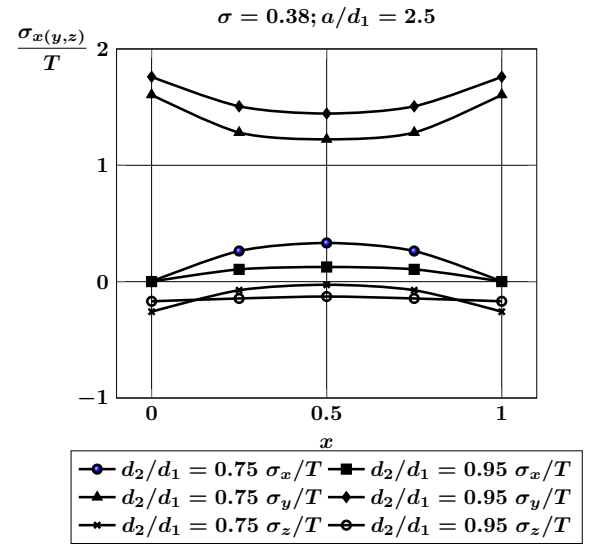


Рис. 4.47. Сравнение напряжений на линии AB для одной ячейки центрированной гексагональной структуры в зависимости от формы полостей при двуосном растяжении

На рис. 4.46, 4.47 представлено сравнение напряжений на линии AB для одной ячейки центрированной гексагональной структуры в зависимости от формы полостей при одноосном и двуосном растяжениях упругого пространства. При одноосном растяжении наибольшее отличие наблюдается при сравнении напряжений σ_y/T и σ_z/T , причем полостям с меньшей кривизной соответствуют большие значения напряжений. В двуосном случае в отличие от одноосного заметна разница в распределении напряжений σ_x/T .

4.4. Упругое состояние пространства с несколькими вытянутыми сфероидальными включениями

Рассмотрим постановку задачи предыдущего параграфа в случае, когда сферические полости заполнены упругими материалами с механическими характеристиками (σ_j, G_j) . Упругие постоянные матрицы будем считать равными (σ, G) .

Граничные условия (4.4) нужно заменить условиями сопряжения полей перемещений и напряжений на поверхностях Γ_j . Для того, чтобы их записать, представим вектор перемещений в упругом пространстве в виде

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_j^-, & (x, y, z) \in \Omega_j, \\ \tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{U}_0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_j, \end{cases} \quad (4.59)$$

где $\Omega_j = \{(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) : \xi_j < \xi_{j0}\}$. Тогда условия сопряжения принимают следующий вид:

$$(\tilde{\mathbf{U}}^+ + \mathbf{U}_0)|_{\Gamma_j} = \tilde{\mathbf{U}}_j^-|_{\Gamma_j}, \quad (4.60)$$

$$(\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{F}\mathbf{U}_0)|_{\Gamma_j} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_j|_{\Gamma_j}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (4.61)$$

В формулах (4.59), (4.60) вектор \mathbf{U}_0 определен в (4.9), (4.10). Вектор-функции $\tilde{\mathbf{U}}^+$, $\tilde{\mathbf{U}}_j^-$ будем искать в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}^+ = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} a_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (4.62)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_j^- = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} b_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (4.63)$$

где $a_{s,n,m}^{(j)}$, $b_{s,n,m}^{(j)}$ — неизвестные коэффициенты.

Для представления вектора перемещений $\tilde{\mathbf{U}}^+$ в системах координат с началами O_j можем использовать формулы (4.26).

Пользуясь формулами (4.26) — (4.30), после удовлетворения условиям (4.60), (4.61) получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_{s,n,m}^{(j)}$, $b_{s,n,m}^{(j)}$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(j)} W_{s,n,m}^{+(k)0}(\xi_{j0}) + W_{1,n,m}^{-(k)0}(\xi_{j0}) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} \left[a_{1,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} + \right. \\
& \quad \left. + a_{2,k,l}^{(\alpha)} \tilde{f}_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} \right] + W_{2,n,m}^{-(k)0}(\xi_{j0}) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{2,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} + \\
& + W_{3,n,m}^{-(k)0}(\xi_{j0}) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{3,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} = W_{n,m}^{(k)j} + \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m}^{(j)} W_{s,n,m}^{-(k)j}(\xi_{j0}); \quad (4.64)
\end{aligned}$$

$$n, m \in \mathbb{Z} : \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n+1, \quad k = -1, 0, 1;$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(j)} V_{s,n,m}^{+(k)0}(\xi_{j0}) + V_{1,n,m}^{-(k)0}(\xi_{j0}) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} \left[a_{1,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} + \right. \\
& \quad \left. + a_{2,k,l}^{(\alpha)} \tilde{f}_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} \right] + V_{2,n,m}^{-(k)0}(\xi_{j0}) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{2,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} + \\
& \quad + V_{3,n,m}^{-(k)0}(\xi_{j0}) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{3,k,l}^{(\alpha)} f_{k,l,j,\alpha}^{-(55)n,m} + \\
& + \frac{T}{2G} \gamma \rho_{j\alpha} \left[e^{-i\varphi_{j\alpha}} \delta_{n0} \delta_{m1} \delta_{k,-1} + e^{i\varphi_{j\alpha}} \delta_{n0} \delta_{m,-1} \delta_{k1} \right] = \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m}^{(j)} V_{s,n,m}^{-(k)j}(\xi_{j0}); \quad (4.65)
\end{aligned}$$

$$n, m \in \mathbb{Z} : \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n+1, \quad k = -1, 0, 1;$$

$$V_{1,n,m}^{\pm(-1)r}(\xi) = \tilde{u}_{n,m-1}^{\pm(5)}(\xi), \quad V_{1,n,m}^{\pm(1)r} = -\tilde{u}_{n,m+1}^{\pm(5)}(\xi),$$

$$V_{1,n,m}^{\pm(0)r}(\xi) = -\tilde{u}_{n,m}^{\pm(5)}(\xi); \quad V_{2,n,m}^{\pm(-1)r}(\xi) = q \tilde{u}_{1,n,m-1}^{\pm(5)}(\xi),$$

$$V_{2,n,m}^{\pm(1)r}(\xi) = -q \tilde{u}_{1,n,m+1}^{\pm(5)}(\xi), \quad V_{2,n,m}^{\pm(0)r}(\xi) = -q \tilde{u}_{1,n,m}^{\pm(5)}(\xi) - \chi_r \tilde{u}_{n,m}^{\pm(5)}(\xi);$$

$$V_{3,n,m}^{\pm(-1)r}(\xi) = -\tilde{u}_{n,m-1}^{\pm(5)}(\xi), \quad V_{3,n,m}^{\pm(1)r}(\xi) = -\tilde{u}_{n,m+1}^{\pm(5)}(\xi), \quad V_{3,n,m}^{\pm(0)r}(\xi) = 0;$$

$$\chi_r = 3 - 4\sigma_r.$$

Коэффициенты $W_{s,n,m}^{\pm(k)r}$ получаются из коэффициентов $W_{s,n,m}^{\pm(k)}$, определенных в формулах (4.41) — (4.47), путем подстановки в последние вместо параметров σ и G упругих постоянных σ_r и G_r ($r = 0, j$) соответственно. При этом считается, что $\sigma_0 = \sigma$, $G_0 = G$; $W_{n,m}^{(k)r}$ определены в формуле (4.48), γ определены в формуле (3.73).

4.5. Анализ напряженного состояния зернистого композита с вытянутыми сфероидальными включениями

4.5.1. Тетрагональная структура расположения сфероидальных включений в композите

Рассмотрим одноосное растяжение пространства с несколькими вытянутыми сфероидальными включениями. Будем исследовать четыре сфероидальных включений в композите, центры которых расположены в вершинах квадрата (рис. 4.48).

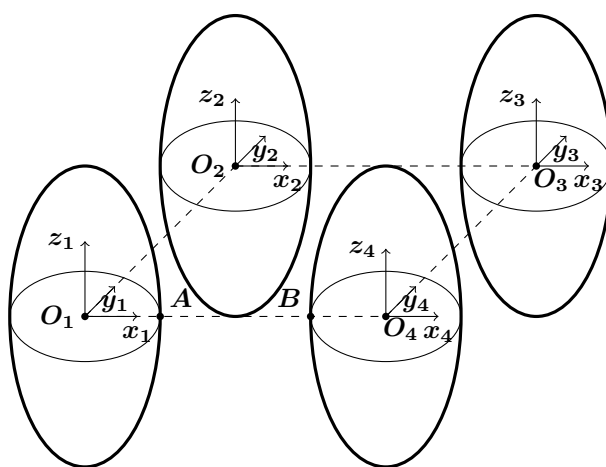


Рис. 4.48. Четыре сфероидальных включений, расположенных в вершинах квадрата

На рис. 4.49 — 4.54 приведены напряжения σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T на линии AB при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства для $G_j/G = 25$, $d_2/d_1 = 0.75$ в зависимости от относительного расстояния a/d_1 между включениями.

Для случая одноосного растяжения максимальные по модулю значения напряжений σ_x/T и σ_y/T получаются в случае наиболее сближенных включений. При всех значениях расстояний между включениями эти напряжения являются сжимающими. Максимальные значения напряжений σ_z/T , наоборот, наблюдаются при наиболее удаленных включениях. Имеются зоны изменения знака напряжений вблизи границ включений.

Для случая двуосного растяжения характерно преобладание растягивающих напряжений в плоскости xOy . Практически на всем рассматриваемом отрезке напряжения σ_x/T , σ_y/T мало отличаются от постоянных. Максимальные

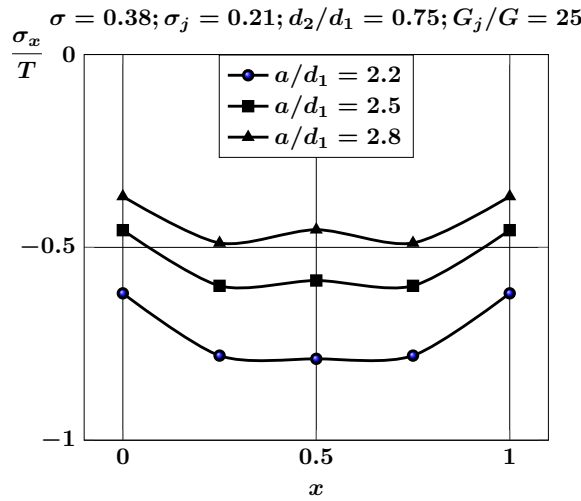


Рис. 4.49. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении

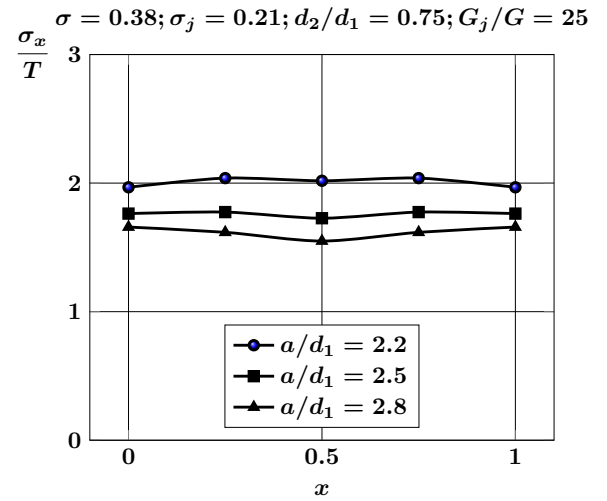


Рис. 4.50. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении

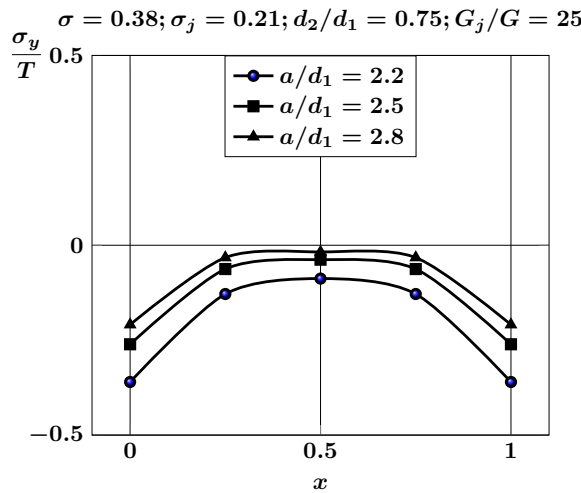


Рис. 4.51. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении

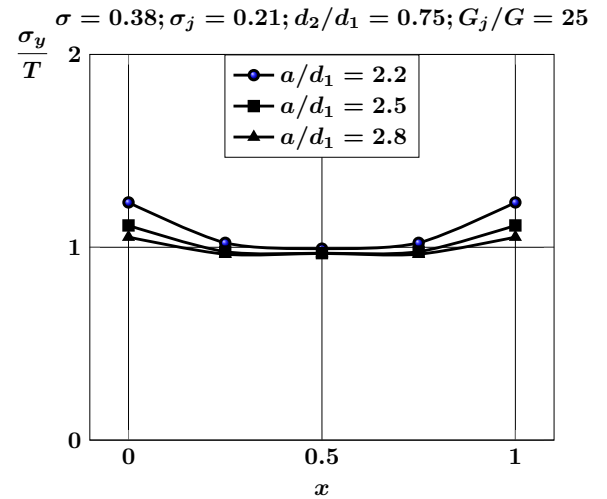


Рис. 4.52. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении

значения напряжений наблюдаются в случае наиболее близко расположенных включений. Все нормальные напряжения в этом случае являются растягивающими.

На рис. 4.55, 4.56 представлены изменения напряжений σ_x/T в зависимо-

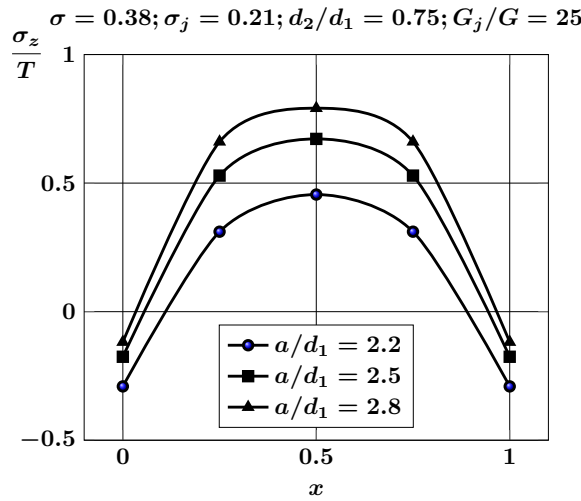


Рис. 4.53. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении

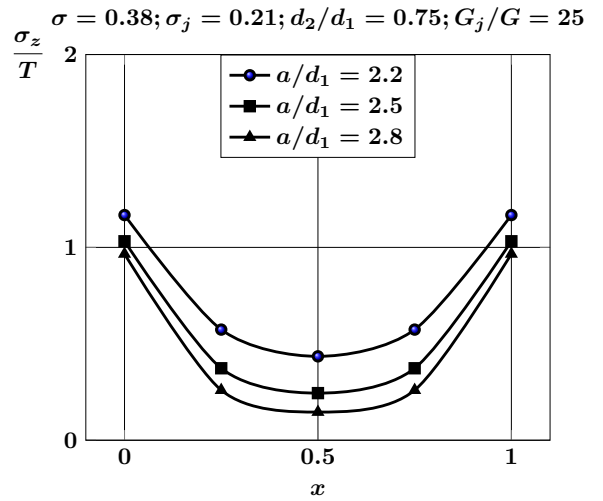


Рис. 4.54. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении

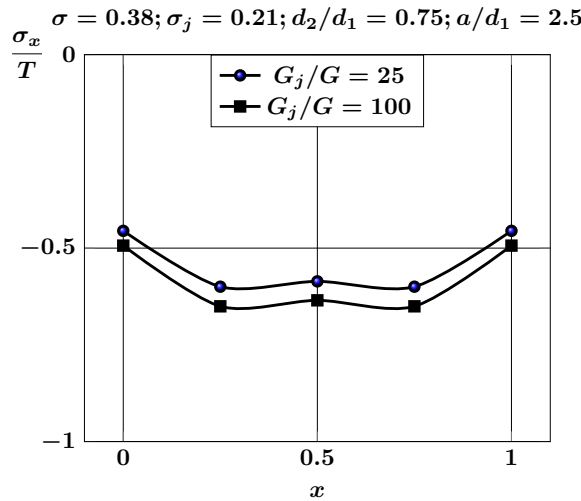


Рис. 4.55. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от отношения G_j/G при одноосном растяжении

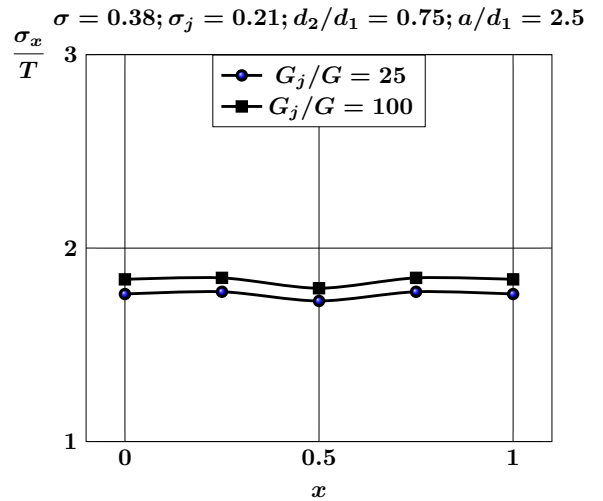


Рис. 4.56. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от отношения G_j/G при двuosном растяжении

сти от отношения модулей сдвига материалов включения и пространства при одноосном и двuosном растяжениях. Наблюдается незначительное увеличение напряжений в случае более жестких включений при сохранении общего характера в их распределении.

Теперь рассмотрим одну ячейку тетрагональной структуры расположения

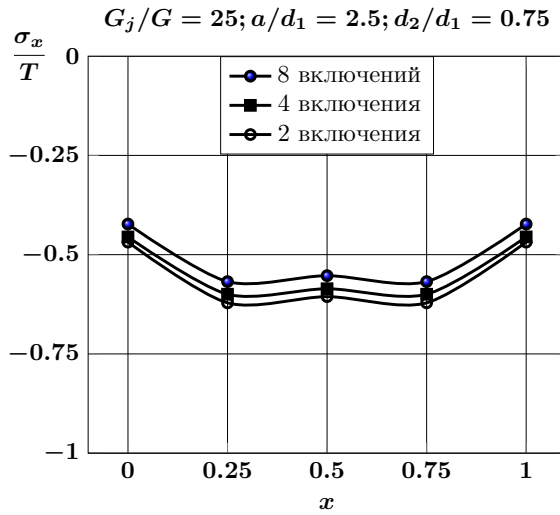


Рис. 4.57. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре при одноосном растяжении пространства

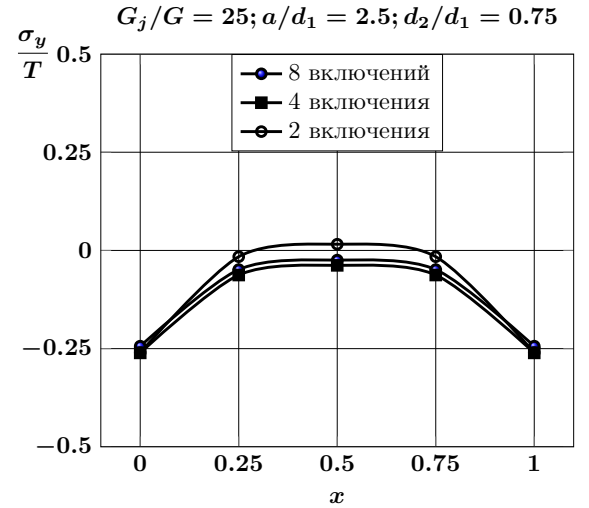


Рис. 4.58. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре при одноосном растяжении пространства

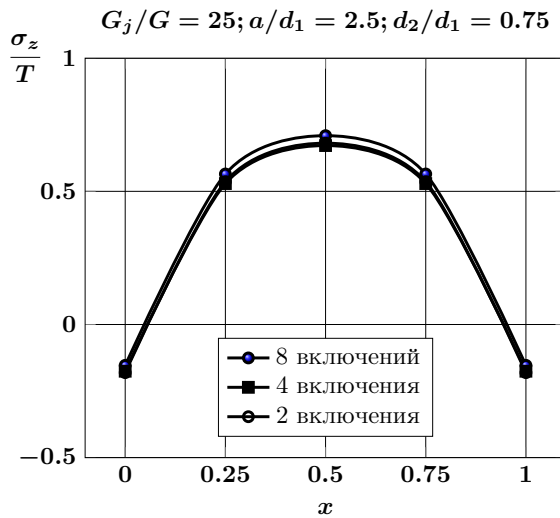


Рис. 4.59. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре при одноосном растяжении пространства

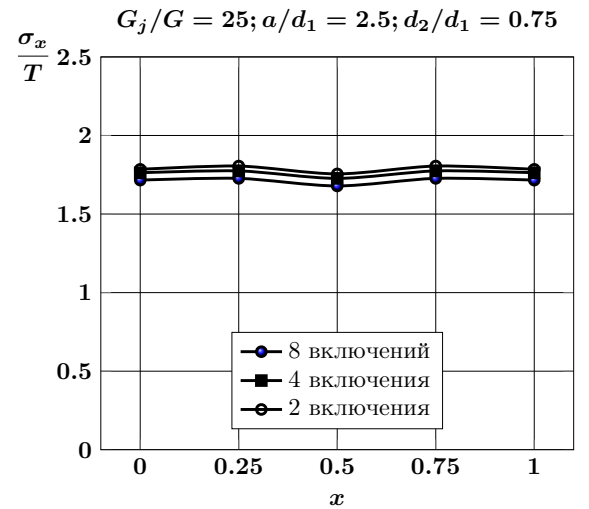


Рис. 4.60. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре при двuosном растяжении пространства

сферических включений в материале (см. рис. 4.1).

На рис. 4.57 — 4.59 приведены графики распределения напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре для следующего набора параметров: $\sigma = 0.38$, $\sigma_j = 0.21$,

$G_j/G = 25$, $a/d_1 = 2.5$, $d_2/d_1 = 0.75$ (d_1 , d_2 — большая и малая полуоси сфероидов, a — расстояние между центрами соседних включений).

Графики показывают, что на линии AB различия в распределении напряжений в зависимости от числа включений незначительны.

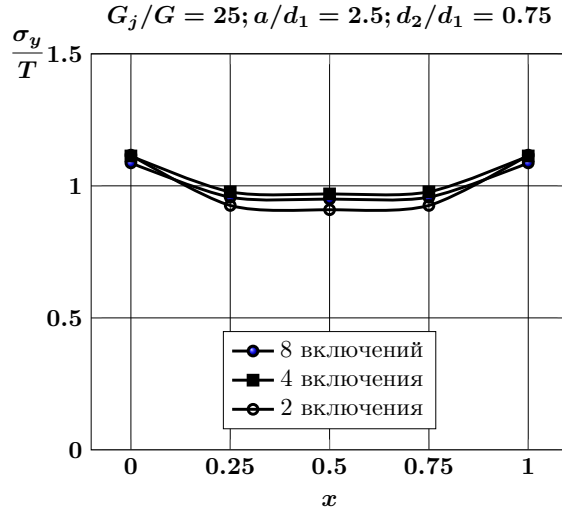


Рис. 4.61. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре при двuosном растяжении пространства

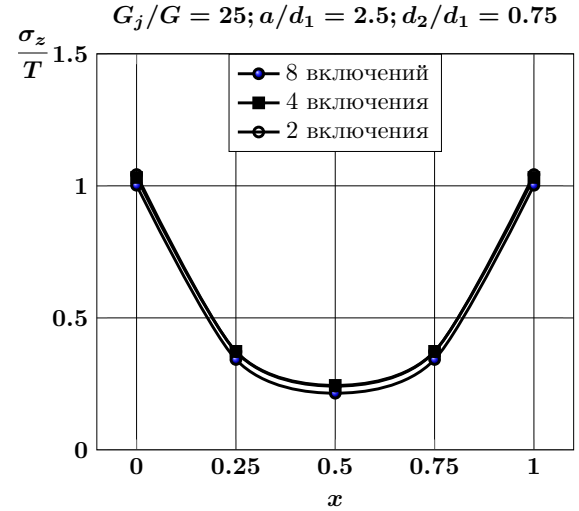


Рис. 4.62. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре при двuosном растяжении пространства

В табл. 4.3 представлены результаты сходимости метода редукции в средней точке линии, соединяющей центры пары сфероидальных включений при $\sigma = 0.38$, $\sigma_j = 0.21$, $G_j/G = 25$, $a/d_1 = 2.5$, $d_2/d_1 = 0.75$ для случая одноосного растяжения пространства.

Таблица 4.3. Сходимость метода редукции для сфероидальных включений

$n_{max}; p_{max}; r_{max}$	5; 5; 5	6; 10; 10	8; 10; 10	10; 10; 10
σ_x	-0.605721	-0.604027	-0.604331	-0.604363
σ_y	0.0157598	0.0158017	0.0158096	0.015811
σ_z	0.680886	0.6807	0.680786	0.680798

На рис. 4.60 — 4.62 приведены графики распределения напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T вдоль линии AB в зависимости от количества включений в тетрагональной структуре при двuosном растяжении упругого пространства для следующего набора параметров: $\sigma = 0.38$, $\sigma_j = 0.21$, $G_j/G = 25$, $a/d_1 = 2.5$,

$$d_2/d_1 = 0.75.$$

Как и в случае одноосного растяжения, отличия в распределении напряжений остаются незначительными.

4.5.2. Тетрагональная центрированная структура расположения сфероидальных включений в композите

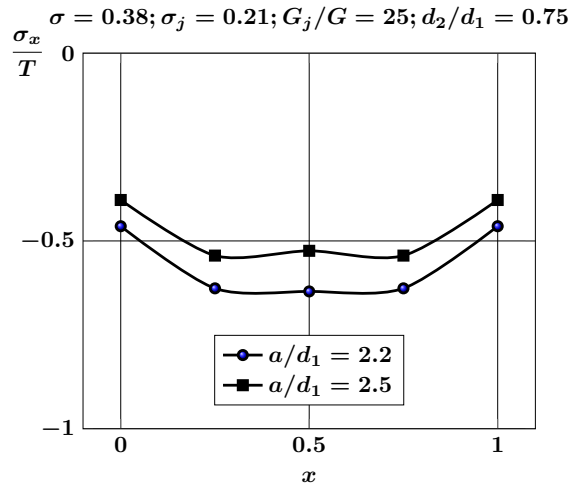


Рис. 4.63. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении

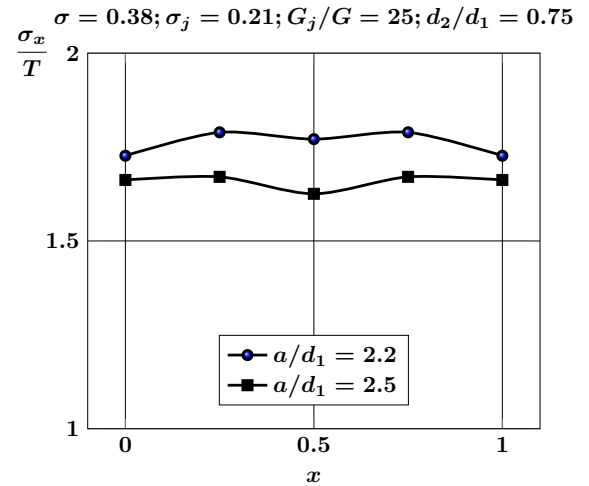


Рис. 4.64. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении

Рассмотрим одну ячейку тетрагональной центрированной структуры расположения сфероидальных включений в композите (см. рис. 4.24).

На рис. 4.63 — 4.68 приведены напряжения σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном и двuosном растяжении упругого пространства.

В случае одноосного растяжения напряжения σ_x/T растут по модулю с приближением включений друг к другу. Для напряжений σ_z/T наблюдается обратная картина — они уменьшаются с приближением включений друг к другу. Максимальных значений они достигают в середине отрезка AB .

При двuosном растяжении наибольшие значения принимают напряжения σ_x/T , которые увеличиваются с приближением включений друг к другу. Областью концентрации напряжений σ_y/T и σ_z/T являются границы включений.

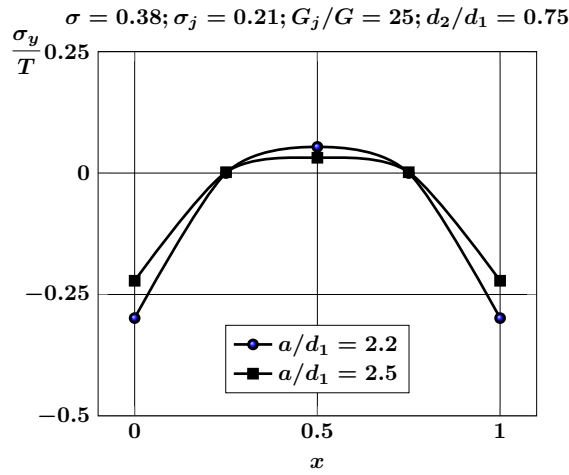


Рис. 4.65. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении

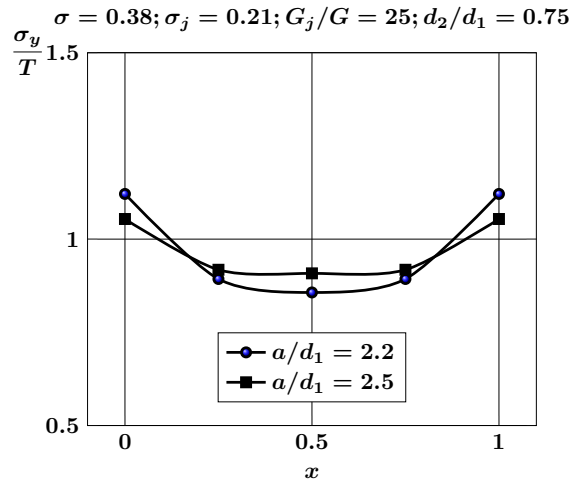


Рис. 4.66. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении

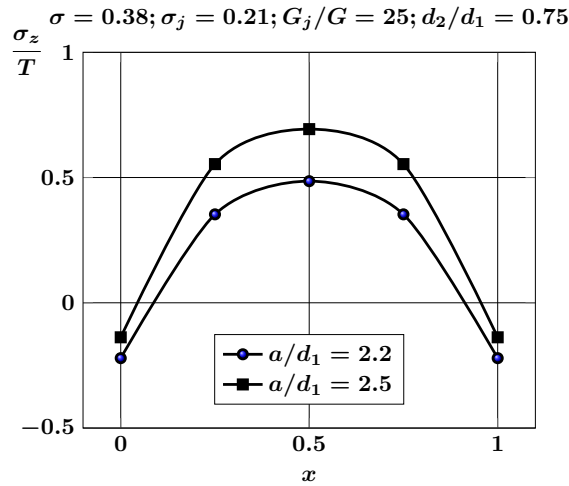


Рис. 4.67. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении

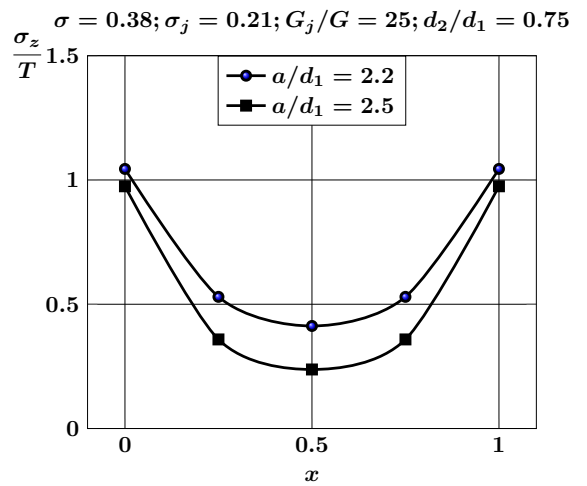


Рис. 4.68. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении

4.5.3. Гексагональная центрированная структура расположения сфероидальных включений в композите

Рассмотрим одну ячейку гексагональной центрированной структуры расположения сфероидальных включений в композите (см. рис. 4.31).

На рис. 4.69 — 4.74 приведены напряжения σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства.

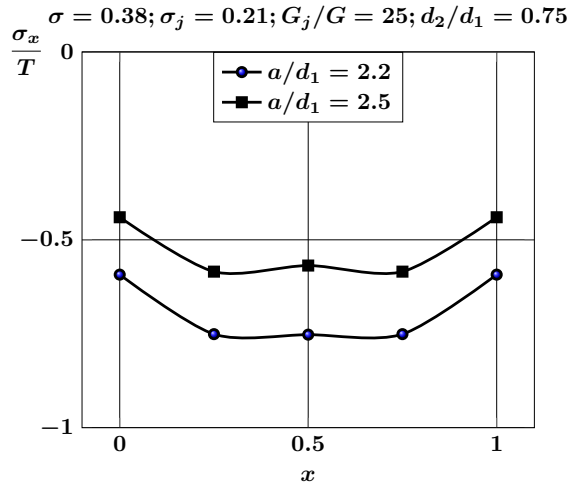


Рис. 4.69. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении

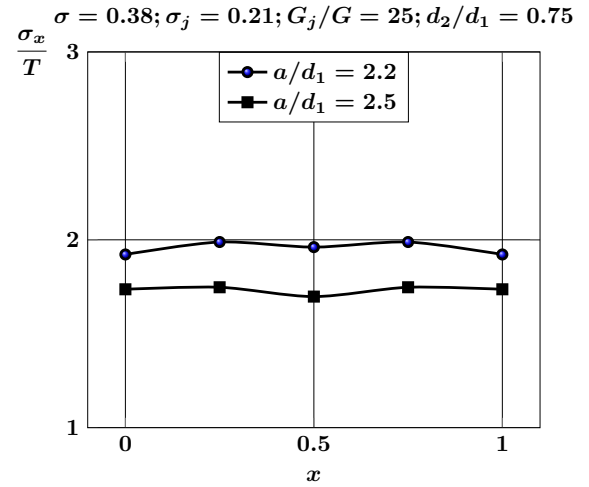


Рис. 4.70. Напряжения σ_x/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двуосном растяжении

В случае одноосного растяжения напряжения σ_x/T растут по модулю с приближением включений друг к другу. Для напряжений σ_z/T наблюдается обратная картина — они уменьшаются с приближением включений друг к другу. Максимальных значений они достигают в середине отрезка AB .

При двуосном растяжении наибольшие значения принимают напряжения σ_x/T , которые увеличиваются с приближением включений друг к другу. Областью концентрации напряжений σ_y/T и σ_z/T являются границы включений.

На рис. 4.75 — 4.80 приведены графики напряжений σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном и двуосном растяжениях упругого пространства.

При одноосном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_z/T которые мало зависят от расстояния между включениями. Областью концентрации этих напряжений является середина отрезка CD . Напряжения σ_x/T и σ_y/T на отрезке CD меняют знак так, что в окрестности включений они сжимающие, а вблизи середины отрезка CD — растягивающие.

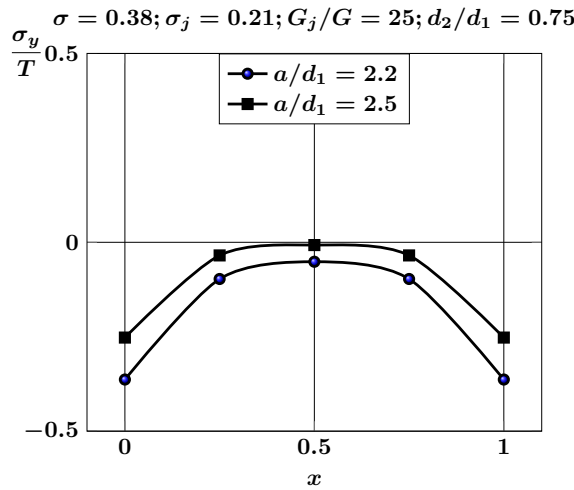


Рис. 4.71. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении

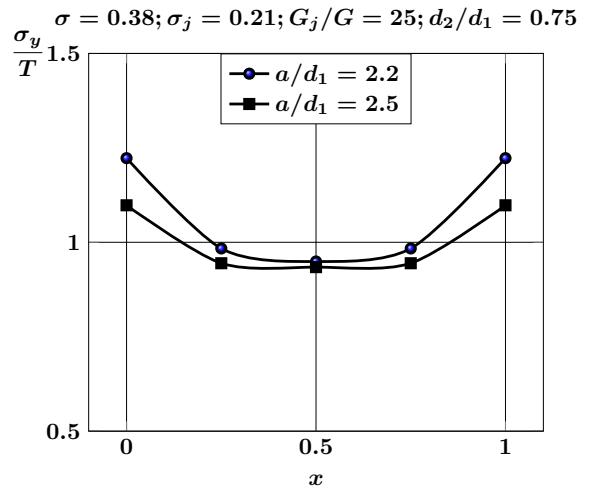


Рис. 4.72. Напряжения σ_y/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении

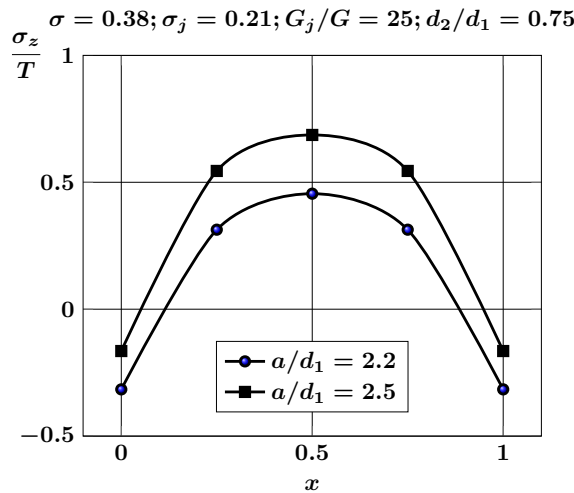


Рис. 4.73. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении

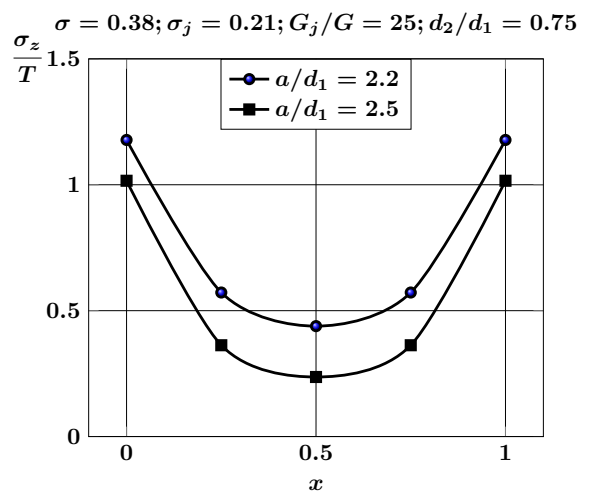


Рис. 4.74. Напряжения σ_z/T на линии AB в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении

При двuosном растяжении основной вклад в тензор напряжений вносят напряжения σ_x/T , однако напряжения σ_y/T , σ_z/T тоже являются значимыми. Областью концентрации напряжений σ_x/T служат границы включений. С приближением включений друг к другу эти напряжения в средней точке отрезка CD убывают. Напряжения σ_z/T меняют знак на отрезке CD . На рис. 4.81,

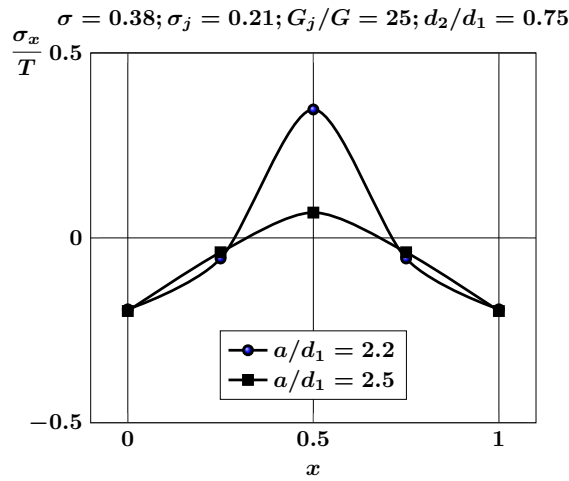


Рис. 4.75. Напряжения σ_x/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении

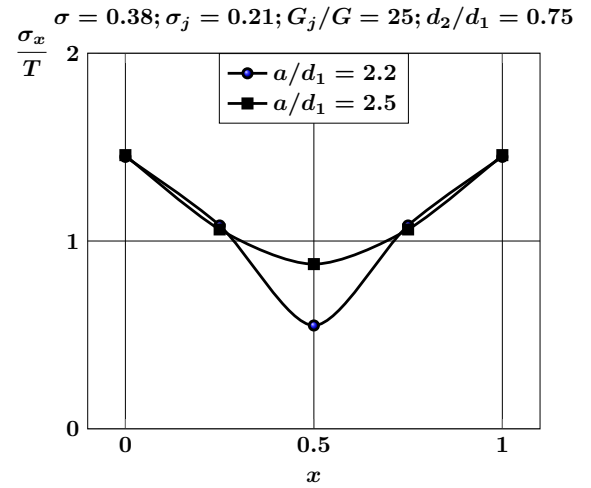


Рис. 4.76. Напряжения σ_x/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении

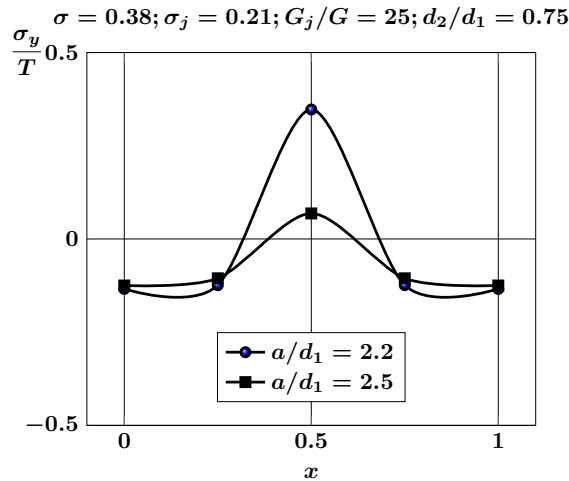


Рис. 4.77. Напряжения σ_y/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении

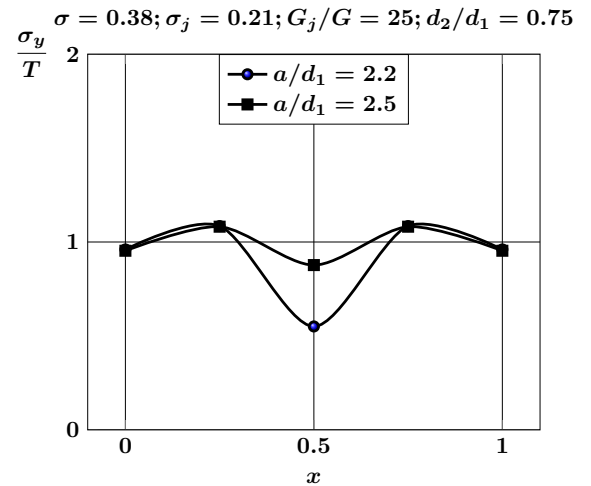


Рис. 4.78. Напряжения σ_y/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении

4.82 приведено сравнение нормальных напряжений на линии AB в одной ячейке центрированных тетрагональной и гексагональной структур при одноосном и двuosном растяжениях упругого пространства. Наблюдаются одинаковый характер в распределении напряжений и незначительные отличия в их величинах.

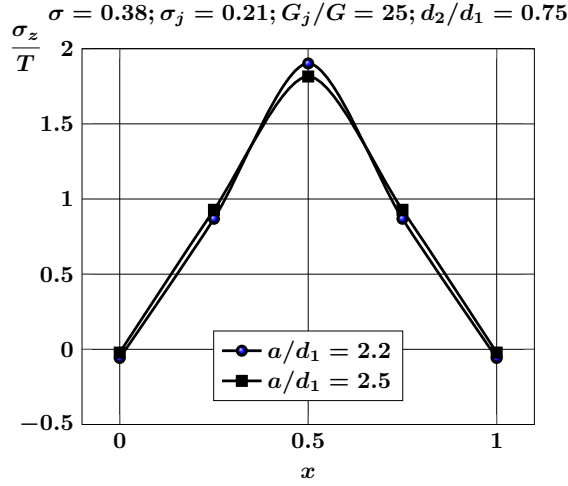


Рис. 4.79. Напряжения σ_z/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном растяжении

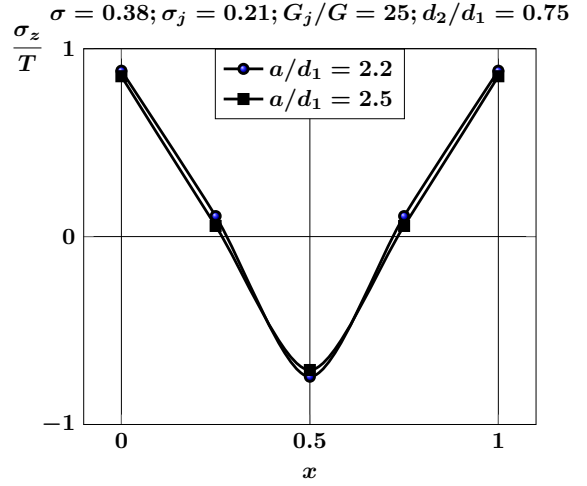


Рис. 4.80. Напряжения σ_z/T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между включениями при двuosном растяжении

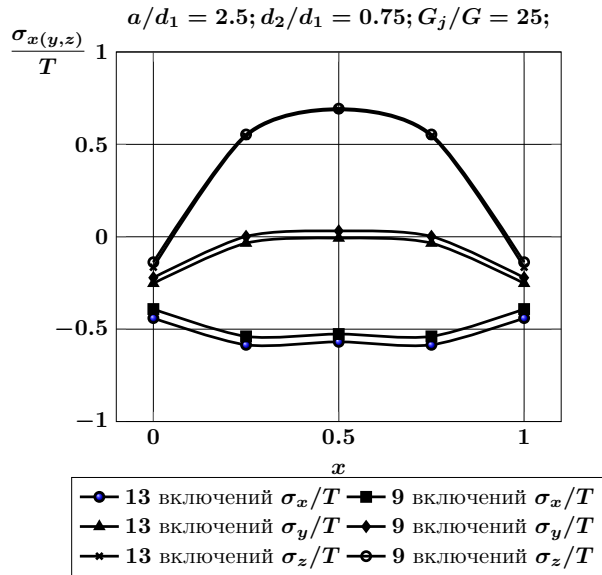


Рис. 4.81. Сравнение нормальных напряжений на линии AB в одной ячейке центрированных тетрагональной и гексагональной структур при одноосном растяжении

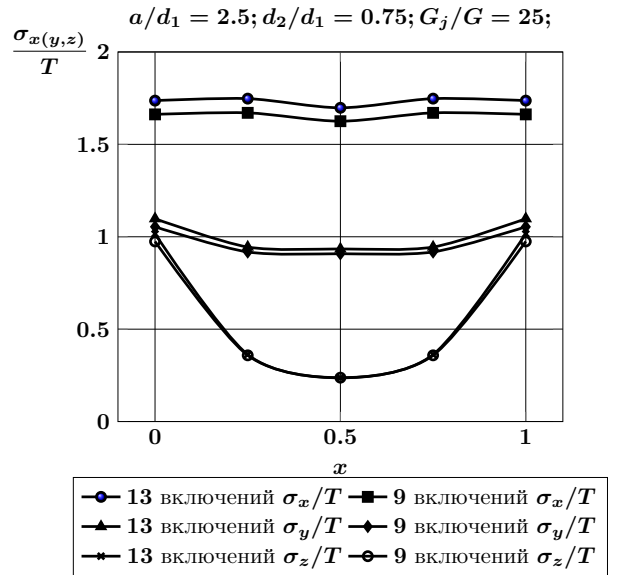


Рис. 4.82. Сравнение нормальных напряжений на линии AB в одной ячейке центрированных тетрагональной и гексагональной структур при двuosном растяжении

Выводы

В диссертации приведены результаты исследований, посвященные моделированию напряженно-деформированного состояния упругого материала, содержащего полости и включения. Рассмотрены глобальные модели, которые описывают поля напряжений и деформаций в реальных упругих пористых и композиционных материалах в областях между конечным числом концентраторов напряжений. В качестве таковых рассмотрены: цилиндры, шары, вытянутые сфероиды. Поля описываются аналитически точно при помощи базисных решений уравнения Ламе в канонических односвязных областях. Для определения параметров моделей при помощи обобщенного метода Фурье получены операторные уравнения с оптимальными свойствами, которые допускают эффективные численные решения. Приведен строгий аналитический анализ предложенных моделей, в результате которого определена область их эффективного применения. Создано программное обеспечение для численной реализации построенных моделей. На его основе проведен численный анализ и дана визуализация распределения напряжений в некоторых телах в зонах их максимальной концентрации. Исследована скорость сходимости приближенных методов решения операторных уравнений для определения параметров моделей. Проведено сравнение полученных результатов с результатами локальных моделей. По результатам исследований можно сделать следующие выводы:

1. Особенности полученных моделей являются:

- а) все построенные модели существенно неосесимметричны и неодносвязны;
- б) модели аналитически определяют поля перемещений, напряжений и деформаций в теле;
- в) модели позволяют точно учесть произвольную нагрузку, прикладываемую к телу;
- г) предложенная структура моделей обуславливает оптимальность операторных уравнений для определения параметров моделей;

- д) оптимальность связана с экспоненциальным убыванием матричных коэффициентов этих уравнений;
 - е) последнее свойство обеспечивает эффективную численную реализацию моделей, а также приближенные аналитические (в замкнутой форме) описания моделей.
2. Для проверки адекватности глобальные модели сравнивались с локальными моделями. Исследования показали, что первые можно заменять вторыми только в определенном диапазоне изменения геометрических и механических параметров.

Список литературы

1. Абрамян, Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра [Текст] / Б. Л. Абрамян // Докл. АН Арм. ССР. — 1954. — Т. 19, №1. — С. 3–12.
2. Акбаров, С. Д. Взаимодействие между двумя соседними круговыми отверстиями при изгибе предварительно растянутой шарнирно опертой ортотропной полосы [Текст] / С. Д. Акбаров, Н. Яхниоглу, У. Б. Есил // Механика композитных материалов. — Latvijas Universitates, Polimeru Mehanikas Instituts. — 2008. — Т. 44, №6. — С. 827–838.
3. Александров, А. Я. Пространственные задачи теории упругости [Текст] / А. Я. Александров, Ю. И. Соловьёв. — М.: Наука, 1978. — 464 с.
4. Александров, А. Я. Решение основных трёхмерных задач теории упругости для тел произвольной формы путём численной реализации метода интегральных уравнений [Текст] / А. Я. Александров // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 208, №2. — С. 291–294.
5. Амбарцумян, С. А. Разномодульная теория упругости [Текст] / С. А. Амбарцумян. — М.: Наука, 1967. — 266 с.
6. Определение напряжений в упругом пространстве со сферической полостью с учётом неоднородности [Текст] / В. И. Андреев, А. Б. Зотов, В. И. Прокопьев, В. Н. Сидоров // Строит. механика и расчёт сооружений. — 1980. — №6. — С. 37–40.
7. Арутюнян, Н. Х. Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболаидальными и цилиндрическими включениями или полостями [Текст] / Н. Х. Арутюнян, А. Б. Мовчан, С. А. Назаров // Успехи механики. — 1987. — Т. 10, №4. — С. 3–91.
8. Бахвалов, Н. С. Осредненные характеристики тел с периодической структурой / Н. С. Бахвалов // ДАН СССР. — 1974. — Т. 218, №5. — С. 1046–1048.
9. Белов, П. А. Континуальная модель микрогетерогенных сред [Текст] / П. А. Белов, С. А. Лурье // Прикладная математика и механика. — М.: Наука. — Т. 73, №5. — 2009. — С. 833–848.

10. Болотин, В. В. Механика многослойных конструкций [Текст] / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. — М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.
11. Бурчуладзе, Т. В. Развитие метода потенциала в теории упругости [Текст] / Т. В. Бурчуладзе, Т. Г. Гегелия. — Тбилиси: Мецниереба, 1985. — 226 с.
12. Вавакин, А.С. Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями / А. С. Вавакин, Р. Л. Салганик // Изв. АН СССР. МТТ. — 1978. — №2. — С. 95–107.
13. Валов, Г. М. Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины [Текст] / Г. М. Валов // Прикладная математика и механика. — 1962. — Т. 26. — Вып. 4. — С. 650–667.
14. Композиционные материалы волокнистого строения [Текст] / Г. А. Ван Фо Фы, В. Н. Грошева, Е. Н. Денбновецкая, Д. Н. Карпинос. — К.: Наук. думка, 1971. — 232 с.
15. Ван Фо Фы, Г. А. Теория армированных материалов [Текст] / Г. А. Ван Фо Фы. — К.: Наук. думка, 1971. — 232 с.
16. Ванин, Г. А. Микромеханика композиционных материалов [Текст] / Г. А. Ванин. — К.: Наук. думка. — 1985. — 304 с.
17. Ванин, Г. А. Новый метод учета взаимодействия в теории композиционных систем [Текст] / Г. А. Ванин // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1976. — №4. — С. 321–324.
18. Ванин, Г. А. Объемное упругое расширение среды с полыми сферическими включениями [Текст] / Г. А. Ванин // Прикл. механика. — 1980. — Т. 16, №7. — С. 127–129.
19. Ванин, Г. А. Продольный сдвиг многокомпонентной упругой среды с дефектами [Текст] / Г. А. Ванин // Прикл. механика. — 1977. — Т. 13, №8. — С. 35–41.
20. Вольперт, В. С. Осесимметричное напряжённое состояние пространства, содержащего систему сферических полостей или включений [Текст] / В. С. Вольперт, И. П. Олегин // Новосиб. ин-т инж. ж.-д. транспорта. — 1977. — 19 с. — Деп. в ВИНТИ. №3266–77.
21. Вольперт, В. С. Пространственная задача теории упругости для эллипсоида вращения и эллипсоидальной полости [Текст] / В. С. Вольперт // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. — 1967. — №3. — С. 118–124.

22. Гаришин, О. К. Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя [Текст] / О. К. Гаришин, Л. А. Комар // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2003. — Т. 9, №3. — С. 278–286.
23. Гергега, А. Н. Физические аспекты процессов самоорганизации в компози-тах. 1. Моделирование перколяционных кластеров фаз внутренних границ [Текст] / А. Н. Гергега // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2013. — Т. 19, №3. — С. 406–419.
24. Головчан, В. Т. До розв'язку граничних задач статички пружного тіла, обмеженого сферичними поверхнями [Текст] / В. Т. Головчан // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1974. — №1. — С. 61–64.
25. Механика композитов [Текст] / В. Т. Головчан, А. Н. Гузь, Ю. В. Коханенко, В. И. Куц. — К.: Наук. думка, 1993. — Т. 1: Статистика материалов. — 457 с.
26. Головчан, В. Т. Анизотропия физико-механических свойств композитных материалов. — К.: Наук. думка, 1987. — 304 с.
27. Голотина, Л. А. Численное моделирование реологических свойств зернистого композита с использованием структурного подхода [Текст] / Л. А. Голотина, Л. Л. Кожевникова, Т. Б. Кошкина // Механика композитных материалов. — 2008. — Т. 44, №6. — С. 895–906.
28. Гомилко, А. М. Однородные решения в задаче о равновесии упругого цилиндра конечной длины [Текст] / А. М. Гомилко, В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко // Теор. и прикл. механика. — 1989. — №20. — С. 3–9.
29. Гордеев, А. В. Моделирование свойств композиционного материала, армированного короткими волокнами [Текст] / А. В. Гордеев // Механика композиционных материалов и конструкций. — М.: ИПМ РАН. — 2010. — Т. 16, №1. — С. 106–116.
30. Григолюк, Э. И. Перфорированные пластины и оболочки [Текст] / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. — М.: Наука, 1970. — 556 с.
31. Гринченко, В. Т. Осесимметричная задача теории упругости для полубесконечного кругового цилиндра [Текст] / В. Т. Гринченко // Прикл. механика. — 1965. — Т. 1, №1. — С. 109–119.

32. Гринченко, В. Т. Осесимметричная задача теории упругости для толстостенного цилиндра конечной длины [Текст] / В. Т. Гринченко // Прикл. механика. — 1967. — Т. 3, №8. — С. 93–103.
33. Гринченко, В. Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности [Текст] / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко. — К.: Наук. думка, 1985. — Т. 3: Равновесие упругих тел канонической формы. — 280 с.
34. Гринченко, В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров [Текст] / В. Т. Гринченко. — К.: Наук. думка, 1978. — 264 с.
35. Гузь, А. Н. О решении двумерных и трехмерных задач механики сплошной среды для многосвязных областей [Текст] / А. Н. Гузь // Концентрация напряжений. — К.: Наук. думка. — 1968. — Вып. 2. — С. 54–58.
36. Гузь, А. Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности [Текст] / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. — К.: Наук. думка, 1984. — Т. 2: Статика упругих тел неканонической формы. — 280 с.
37. Дудченко, А. А. Структурная модель межфазного слоя для наполненных композиционных материалов [Текст] / А. А. Дудченко, С. А. Лурье, Н. П. Шумова // Конструкции из композиционных материалов. — 2006. — №3. — С. 3–11.
38. Дыскин, А. В. К расчету эффективных деформационных характеристик материала с трещинами / А. В. Дыскин // Изв. АН СССР. МТТ. — 1985. — №4. — С. 130–135.
39. Ержанов, Ж. С. Метод конечных элементов в задачах механики горных пород [Текст] / Ж. С. Ержанов, Т. Д. Каримбаев. — Алма-Ата: Наука, 1975. — 238 с.
40. Исследование напряженно-деформированного состояния дисперсно наполненного полимерного композита с использованием объемных моделей [Текст] / А. С. Жарков, И. И. Анисимов, А. В. Шемелинин и др. // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2012. — Т. 18, №1. — С. 16–34.
41. Канаун, С. К. Пуассоновское множество трещин в упругой сплошной среде / С. К. Канаун // ПММ. — 1980. — Т. 44, №6. — С. 1129–1139.

42. Канторович, Л. В. Функциональный анализ [Текст] / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 742 с.
43. Капшивый, А. А. Осесимметричное напряжённое состояние шара с неконцентрической шаровой полостью [Текст] / А. А. Капшивый, Н. П. Копыстра, Л. Н. Ломонос // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1980. — №9. — С. 50–55.
44. Каримбаев, Т. Д. Подходы при моделировании деформаций композиционных материалов [Текст] / Т. Д. Каримбаев // Космонавтика и ракетостроение. — 2009. — Т. 54, №1. — С. 103–122.
45. Кауфман, Р. Н. Сжатие упругого шара с неконцентрической шаровой полостью [Текст] / Р. Н. Кауфман // Прикл. математика и механика. — 1964. — Т. 28. — Вып. 4. — С. 787–790.
46. Кит, Г. С. Метод потенциалов в трёхмерных задачах термоупругости тел с трещинами [Текст] / Г. С. Кит, М. В. Хай. — К.: Наук. думка, 1989. — 288 с.
47. Концентрация напряжений в упругом шаре с неконцентрической сферической полостью [Текст] / В. С. Колесов, Н. М. Власов, Л. О. Тисовский, И. П. Шацкий // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1989. — №30. — С. 37–41.
48. Композиционные материалы / под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. — В 8 т. — М.: Мир, 1978. — Т. 2: Механика композиционных материалов. — 566 с.
49. Кристенсен, Р. Введение в механику композитов [Текст] / Р. Кристенсен. — М.: Мир, 1982. — 334 с.
50. Трёхмерные задачи математической теории упругости [Текст] / В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелия, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе — М.: Наука, 1976. — 664 с.
51. Куш, В. И. Напряжённое состояние и эффективные упругие модули среды, нормированной периодически расположенными сфероидальными включениями [Текст] / В. И. Куш // Прикл. механика. — 1995. — Т. 31, №3. — С. 32–39.
52. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения [Текст] / Н. Н. Лебедев // М.: Физ.-мат. лит., 1963. — 358 с.
53. Левин, В. М. К определению эффективных упругих модулей композиционных материалов [Текст] / В. М. Левин // ДАН СССР. Сер. мат.-физ., 1975. — Т. 220, №5. — С. 1042–1054.
54. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела [Текст] / С. Г. Лехницкий. — М.: Наука, 1977. — 416 с.

55. Ломонос, Л. Н. Первая основная задача об осесимметричном напряженном состоянии пространства с двумя сферическими полостями [Текст] / Л. Н. Ломонос // Мат. физика и нелинейная механика. — 1990. — №13. — С. 51–56.
56. Лурье, А. И. Пространственные задачи теории упругости [Текст] / А. И. Лурье. — М.: Гостехиздат, 1955. — 492 с.
57. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике [Текст]. — М.: Мир, 1978. — 210 с.
58. Моделирование процессов деформирования и разрушения многоуровневых композитных материалов при высоких градиентных полях / Г. А. Ванин, А. В. Березин, В. С. Добрынин и др. // НИР/НИОКР РФФИ: 94-01-00523-а. — 1994.
59. Николаев, А. Г. Формулы переразложения векторных решений уравнения Ламе в сферической и сфероидальной системах координат [Текст] / А. Г. Николаев // Мат. методы анализа динамических систем. — Х.: ХАИ. — 1984. — Вып. 8. — С. 100–104.
60. Николаев, А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе. — Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. — 109 с. — Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, №1178 — Ук 93.
61. Николаев, А. Г. Интегральные представления гармонических функций и теоремы сложения [Текст] / А. Г. Николаев // Доп. НАН України. — 1998. №4. — С. 36–40.
62. Николаев, А. Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей [Текст] / А. Г. Николаев // Доп. НАН України. — 1998. — №2. — С. 78–83.
63. Николаев, А. Г. Температурные напряжения в упругом пространстве, содержащем периодическую систему упругих шаровых включений [Текст] / А. Г. Николаев, С. С. Куреннов // Теор. и прикл. механика. — 2003. — Вып. 37. — С. 37–41.
64. Николаев, А. Г. Термоупругие напряжения в пространстве с периодически расположенными упругими шаровыми включениями [Текст] / А. Г. Николаев, С. С. Куреннов // Проблемы машиностроения. — 2004. — №1. — С. 35–48.
65. Николаев, А. Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости [Текст]: монография / А. Г. Николаев, В. С. Проценко. — Х.:

- Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского “Харьк. авиац. ин-т”, 2011. — 344 с.
66. Николаев, А. Г. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 2(58). — Х., 2009. — С. 48–58.
67. Николаев, А. Г. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вестн. Харьк. Нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 922. — С. 4–19.
68. Николаев, А. Г. Распределение напряжений в упругом пространстве с двумя параллельно расположенными сферическими полостями [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 4(72). — Х., 2012. — С. 92–99.
69. Николаев, А. Г. Трехмерная периодическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Методы решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела: сб. науч. тр. Днепропетр. нац. ун-та им. О. Гончара. — Дп.: Лира. — 2012. — Вып. 13. — С. 287–293.
70. Николаев, А. Г. Развитие локальной модели напряженного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2013. — №1(98). — С. 14–18.
71. Николаев, А. Г. Распределение напряжений в цилиндрическом образце материала с двумя параллельными цилиндрическими полостями [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 4(76). — Х., 2013. — С. 40–49.
72. Николаев, А. Г. Напряженное состояние в цилиндрическом образце с двумя параллельными цилиндрическими волокнами [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2013. — №6(103). — С. 32–38.

73. Николаев, А. Г. Хрупкое разрушение цилиндрического стержня с круговой трещиной при кручении [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик, И. С. Тарасевич // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского "ХАИ". — Вып. 2(74). — Х., 2013. — С. 64–73.
74. Николаев, А. Г. Распределение напряжений в ячейке однонаправленного композиционного материала, образованного четырьмя цилиндрическими волокнами [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вісник Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. — 2013. — Т. 18. — Вип. 4(20). — С. 64–73.
75. Николаев, А. Г. Новые теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе для вытянутых сфероидов и их применение к моделированию пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2014. — №5(112). — С. 46–54.
76. Николаев, А. Г. Развитие аппарата обобщенного метода Фурье на некоторые многосвязные области и его использование для моделирования пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2014. — №6(113). — С. 48–56.
77. Ніколаєв, О. Г. Напруження в нескінченному круговому циліндрі з чотирма циліндричними порожнинами [Текст] / О. Г. Ніколаєв, Є. А. Танчік // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2014. — Т. 57, №3. — С. 51–60.
78. Николаев, А. Г. Анализ напряженного состояния в окрестности двух сферических включений в упругом пространстве [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2014. — №3(110). — С. 26–32.
79. Николаев, А. Г. Упругое пространство с четырьмя сфероидальными включениями под действием внешней нагрузки [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2014. — №4(111). — С. 49–55.
80. Николаев, А. Г. Напряженное состояние пористого материала в области между четырьмя сфероидальными порами [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вісник нац. техн. ун-ту "ХПІ". Математичне моделювання в техніці і технологіях. — 2014. — №6(1049). — С. 151–160.

81. Николаев, А. Г. Модель зернистого композита со сферическими зернами [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вісник нац. техн. ун-ту “ХПІ”. Математичне моделювання в техніці і технологіях. — 2014. — №39(1082). — С. 141–152.
82. Николаев, А. Г. Напряженное состояние в окрестности двух сфероидальных зерен в композите [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 1(77). — Х., 2014. — С. 73–86.
83. Николаев, А. Г. Напряжения в упругом материале со сферическими пораами под действием внешней нагрузки [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 2(78). — Х., 2014. — С. 99–110.
84. Николаев, А. Г. Первая краевая задача теории упругости для цилиндра с N цилиндрическими полостями [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Сиб. журн. вычисл. математики, РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск. — 2015. — Т. 18, №2. — С. 177–188.
85. Николаев, А. Г. Напряженное состояние трансверсального изотропного пространства с двумя сфероидальными полостями [Текст] / А. Г. Николаев, Ю. А. Щербакова // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 4(51). — Х., 2007. — С. 49–54.
86. Олегин, И. П. Пространственное напряженное состояние тела, содержащего периодическую систему сферических полостей / И. П. Олегин // Динамика и прочность авиац. конструкций. — Новосибирск. — 1989. — С. 85–91.
87. Победря, Б. Е. Механика композиционных материалов [Текст] / Б. Е. Победря. — М.: МГУ, 1984. — 336 с.
88. Подильчук, Ю. Н. Деформация упругого сфероида / Ю. Н. Подильчук // Прикл. механика. — 1967. — Т. 3, №12. — С. 34–42.
89. Подильчук, Ю. Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности / Ю. Н. Подильчук — Т. 1. Граничные задачи статики упругих тел. — К.: Наук. думка, 1984. — 304 с.

90. Прокопов, В. К. Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра / В. К. Прокопов // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. — 1950. — №2. — С. 286–304.
91. Савин, Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. — К.: Наук. думка, 1968. — 888 с.
92. Салганик, Р. Л. Механика тел с большим числом трещин / Р. Л. Салганик // Изв. АН СССР. МТТ. — 1973. — №4. — С. 149–158.
93. Сендецки, Дж. Упругие свойства композитов [Текст] / Дж. Сендецки // Механика композиционных материалов: в 8 т. — М.: Мир, 1978. — Т. 2. — С. 61–101.
94. Скудра, А. М. Структурная теория армированных пластиков [Текст] / А. М. Скудра, Ф. Я. Булавс. — Рига: Зинатне, 1978. — 192 с.
95. Смирнов, Л. Г. Упругие напряжения в сфере с инородным эксцентрическим сферическим включением / Л. Г. Смирнов, И. И. Федик // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1990. — №31. — С. 79–83.
96. Токовий, Ю. В. Осесиметричні напруження в скінченному пружному циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні [Текст] / Ю. В. Токовий // Прикл. проблеми мех. та мат. — 2010. — Вип. 8. — С. 144–151.
97. Улитко, А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости / А. Ф. Улитко. — К.: Наук. думка, 1979. — 265 с.
98. Устинов, К. Б. Об определении эффективных упругих характеристик двухфазных сред. Случай изолированных неоднородностей в форме эллипсоидов вращения / К. Б. Устинов // Успехи механики. — 2003. — №2. — С. 126–168.
99. Федотов, А. Ф. Приложение модели деформирования пористых материалов к расчёту эффективных упругих модулей зернистых композитов [Текст] / А. Ф. Федотов // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2011. — Т. 17, №1. — С. 3–18.
100. Фудзии, Т. Механика разрушения композиционных материалов [Текст] / Т. Фудзии, М. Дзако. — М.: Мир, 1982. — 232 с.

101. Хорошун, Л. П. Зернистые материалы [Текст] / Л. П. Хорошун, Б. П. Маслов. — Механика композитных материалов и элементов конструкций: в 3 т. — К.: Наук. думка, 1982. — С. 191–284.
102. Методы расчета механических характеристик пороматериалов малой плотности (обзор) / Д. А. Черноус, Е. М. Петроковец, Д. А. Конек, С. В. Шилько // Механика композиционных материалов и конструкций. — М.: ИПМ РАН. — 2001. — Т. 7, №4. — С. 533–545.
103. Шайлиев, Р. Ш. Математическая модель расчета эффективных свойств композиционных материалов на примере полиминеральных горных пород [Текст] / Р. Ш. Шайлиев // Электронный науч. журнал “Современные проблемы науки и образования”. — 2011. — №5.
104. Шермергор, Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред [Текст] / Т. Д. Шермергор. — М.: Наука, 1977. — 400 с.
105. Эшелби, Дж. Континуальная теория дислокаций [Текст] / Дж. Эшелби. — М.: Мир, 1963. — 247 с.
106. Янковский, А. П. Моделирование механического поведения композитов с пространственной структурой армирования из нелинейно-наследственных материалов [Текст] / А. П. Янковский // Конструкции из композиционных материалов. — 2012. — №2. — С. 12–25.
107. Atsumi, A. Stresses in a transversely isotropic half space having a spherical cavity / A. Atsumi, S. Iton // Trans. ASME. E. — 1974. — V. 41, №3. — P. 708–712.
108. Boucher, S. On the effective moduli of isotropic two-phase elastic composites / S. Boucher // J. Comp. Mater. — 1974. — V. 8. — P. 82–90.
109. Budiansky, B. Elastic moduli of a cracked solid / B. Budiansky, R. J. O’Connell // Int. J. Solids Struct. — 1976. — V. 12. — P. 81–97.
110. Chen, H.-S. The effective elastic moduli of composite materials containing spherical inclusions at non-dilute concentrations / H.-S. Chen, A. Acrivos // Int. J. Solids and Structures. — 1978. — V. 14. — P. 349–360.
111. Chen, H.-S. The solution of the equations of linear elasticity for an infinite region containing two spherical inclusions / H.-S. Chen, A. Acrivos // Int. J. Solids and Structures. — 1978. — V. 14. — P. 331–348.

112. Christensen, R. M. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models / R. M. Christensen, R. H. Lo // J. Mech. and Phys. Solids, 1979. — V. 27, №4.
113. Christensen, R. M. A critical evaluation of a class of micro-mechanics models / R. M. Christensen // J. Mech. and Phys. Solids, 1990. — V. 38. — P. 379–404.
114. Edwards, R. H. Stress concentrations around spheroidal inclusions and cavities / R. H. Edwards // J. Appl. Mech. — 1951. — V. 18, №1. — P. 13–35.
115. Eshelby, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems / J. D. Eshelby // Proc. R. Soc. London. Ser. A. — 1957. — V. 241. — P. 376–396.
116. Golovchan, V. T. Double-particle approximation analysis of the residual thermostressed state of granular composites / V. T. Golovchan, N. V. Litoshenko // International Applied Mechanics. — 2000. — V. 36, No 12. — P. 1612–1619.
117. Hashin, Z. The elastic moduli of fiber reinforced materials / Z. Hashin, W. Rosen // J. Appl. Mech., 1964. — V. 31. — P. 223–232.
118. Hashin, Z. Analysis of composite materials — a survey / Z. Hashin // J. Appl. Mech., 1983. — V. 50. — P. 481–505.
119. Hashin, Z. The differential scheme and its application to cracked materials / Z. Hashin // J. Mech. Phys. Solids. — 1988. — V. 36. — P. 719–733.
120. Hashin, Z. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials / Z. Hashin, S. A. Shtrikman // J. Mech. Phys. Solids. — 1963. — V. 11. — P. 128–140.
121. Kachanov, M. Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts / M. Kachanov // Appl. Mech. Rev. — 1992. — V. 45. — P. 304–335.
122. Khoroshun, L. P. Theory of short-term micro damageability of granular composite materials / L. P. Khoroshun, E. N. Shikula // International Applied Mechanics. — 2000. — V. 36, No 8. — P. 1060–1066.
123. Khoroshun, L. P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites / L. P. Khoroshun // International Applied Mechanics. — 2000. — V. 36, No 10. — P. 1284–1316.
124. Meleshko, V. V. Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loading / V. V. Meleshko, Yu. V. Tokovyy // J. Eng. Math. — 2013. — V. 78. — P. 143–166.

125. Miyamoto, H. On the problem of the theory of elasticity for a region, containing more than two spherical cavities / H. Miyamoto // Bull. JSME. — 1958. — V. 1, №2. — P. 103–115.
126. Mura, T. Two-ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method / T. Mura, Z. A. Moschovidis // Trans. ASME. E. — 1975. — V. 42, №4. — P. 847–852.
127. Nemat-Nasser, S. On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids: comments and corrections / S. Nemat-Nasser, M. Taya // Quart. Appl. Math. — 1985. — V. 43. — P. 187–188.
128. Nikolaev, A. G. On the distribution of stresses in circular infinite cylinder with cylindrical cavities / A. G. Nikolaev, E. A. Tanchik // Visn. Khark. Nat. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mekh. — 2014. — V. 1120, Issue 69. — P. 4–19.
129. Sangini, A. S. Elastic coefficients of composites containing sperical inclusions in a periodic array / A. S. Sangini, W. Lu // J. Mech. Phys. Solids. — 1987. — V. 35, №1. — P. 1–21.
130. Sheikh, M. A. Microstructural finite-element modeling of a ceramic matrix composite to predict experimental measurements of its macro thermal properties / M. A. Sheikh, S. C. Taylor, D. R. Hayhurst, R. Taylor // Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering. — 2001. — V. 9, No 1. — P. 7–23.
131. Scalon, J. A model-based analysis of particle size distributions in composite materials / J. Scalon, N. R. J. Fieller, E. C. Stillman, H. V. Atkinson // Acta Materialia. — 2003. — V. 51, No 4. — P. 997–1006.
132. Strenberg, E. On the axisymmetric problem of elasticity for an infinite region containing two spherical cavities / E. Strenberg, M. A. Sadowsky // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1952. — V. 74. — P. 19–27.
133. Torquato, S. Random heterogeneous media: microstructure and improved bounds on effective properties / S. Torquato // Appl. Mech. Rev. — 1991. — V. 44. — P. 37–76.
134. Trias, D. Random models versus periodic models for fibre reinforced composites / D. Trias, J. Costa, J. A. Mayugo, J. E. Hurtado // Computational Materials Science. — 2006. — V. 38, No 2. — P. 316–324.

135. Tsuchida, E. On the asymmetric problem of elasticity theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions / E. Tsuchida, I. Nakahara, M. Kodama // Bull. JSME. — 1980. — V. 23, №181. — P. 1072–1080.
136. Tsuchida, E. On the asymmetric problem of elasticity theory for an infinite elastic solid containing some spherical cavities / E. Tsuchida, N. Uchiyama, I. Nakahara, M. Kodama // Bull. JSME. — 1979. — V. 22, №164. — P. 141–147.
137. Zhong, Z. Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains / Z. Zhong, Q. P. Sun // Int. Journal of Solids and Structures. — 2002. — V. 39, Issue 23. — P. 5753–5765.
138. Zimmerman, R. W. Behaviour of the Poisson ratio of a two-phase composite materials in the high-concentration limit / R. W. Zimmerman // Appl. Mech. Rev. — 1994. — V. 47. — P. 38–44.
139. Zureick, A. H. The asymmetric displacement of a rigid spheroidal inclusion embedded in transversely isotropic medium / A. H. Zureick // Acta. mech. — 1989. — V. 77, No 1-2. — P. 101–110.
140. Zureick, A. H. Transversely isotropic medium with a rigid spheroidal inclusion under an axial pull / A. H. Zureick // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1988. — V. 55, №2. — P. 495–497.