Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського “ХАІ”

На правах рукопису

УДК 539.3

Танчік Євген Андрійович

Просторові задачі теорії пружності для деяких класів неосесиметричних багатозв’язних тіл

01.02.04 — Механіка деформованого твердого тіла

ДИСЕРТАЦІЯ

на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник

д. ф.-м. н., проф.

Ніколаєв Олексій Георгійович

Харків — 2017

Зміст

Вступ

Актуальність теми. Сучасний рівень розвитку техніки і технології в високотехнологічних областях накладає підвищені вимоги на точність і ефективність моделей матеріалів, які широко використовуються в авіації та ракетобудуванні. Однією з найбільш важливих характеристик матеріалів, які тут застосовуються, є така комплексна характеристика, як мала питома маса і одночасно висока міцність матеріалу. Такою характеристикою володіють матеріали типу композитів, в яких присутні конструктивно закладені неоднорідності. При сучасному рівні моделювання з'являється можливість конструювання матеріалів з наперед заданими властивостями спочатку на рівні моделі, визначаючи оптимальну структуру, геометричні розміри і механічні характеристики неоднорідностей. І тільки після цього отримані в результаті моделювання дані можна втілювати в реальному матеріалі.

По самому названию композиционный материал — это составной материал, обладающий гетерогенной структурой. Разнородные компоненты композита имеют различные физико-механические свойства. Особое сочетание этих свойств и геометрии неоднородностей приводит к качественно новым характеристикам композита, отличным от характеристик составляющих его фаз. Двухфазный композит — это однородный материал, армированный волокнами или зернами из другого материала. В зависимости от технологии изготовления армирующие элементы тем или иным способом пропитываются связующим веществом (матрицей), которое после застывания обеспечивает сплошность композиционной среды и идеальный механический и тепловой контакт между разнородными фазами. В качестве армирующих элементов обычно применяют материалы с кристаллической или аморфной микроструктурой, такие, как полимеры, стекла, металлы и др. К материалам заполнителя относятся полимеры, металлы, керамика. Свойства композита существенно зависят от физико-механических характеристик арматуры и матрицы, геометрии арматуры, структуры армирующих элементов, характера их упаковки, объемного содержания элементов, углов армирования и др. Укажем на те основные физико-механические характеристики композиционного материала, которые приводятся в нормативных документах и должны контролироваться в процессе его изготовления. Это модули упругости и пределы прочности на растяжение, сжатие и поперечный сдвиг, коэффициенты Пуассона и линейного температурного расширения вдоль и поперек волокон, удельная теплоемкость и др.

В настоящей работе будут рассмотрены композиционные и пористые материалы, обладающие регулярной структурой. Под регулярной структурой понимается периодическое расположение слоев, зерен или волокон в материале. Считается, что физико-механические характеристики включений одинаковые, но отличаются от характеристик матрицы. Далее будут рассмотрены только упругие модели деформирования этих материалов.

До настоящего времени многие важные задачи механики композиционных материалов остаются неизученными или недостаточно изученными. К ним относятся задачи определения напряженно-деформированного состояния образца из пористого и композиционного материалов в зависимости от приложенной внешней нагрузки, задачи выявления зон концентрации упругих напряжений как областей, в первую очередь подверженных разрушению, задачи анализа напряжений и деформаций в композиционном материале с отслоившимися включениями, задачи с межфазными и внутрифазными трещинами и др. Актуальной остается задача теоретического определения эффективных упругих модулей композиционных и пористых материалов. Все эти задачи в общей постановке относятся к классу весьма сложных задач механики деформированного твердого тела с многосвязной неоднородной структурой. До последнего времени эффективных методов решения подобных задач не существовало.

Связь работы с научными программами. Исследования по теме диссертации проводились в рамках госбюджетной научной темы “Новые методы исследования линейно и нелинейно деформируемых тел из композиционных материалов”, номер государственной регистрации № 0112U002135.

Цель и задачи исследования. Целью исследования является развитие обобщенного метода Фурье на решение неосесимметричных многосвязных задач теории упругости с большим числом компонент связности для канонических тел, ограниченных поверхностями цилиндра, сферы, вытянутого и сжатого сфероидов.

Объектом исследования являются изотропные упругие тела под действием одноосного и двуосного растяжения.

Предметом исследования является неосесимметричное напряженное состояние многосвязных или гетерогенных тел.

Методы исследования. Для достижения поставленной цели в работе развит обобщенный метод Фурье, получены теоремы сложения (переразложения) для модифицированных базисных частных решений уравнения Ламе для сферы, вытянутого и сжатого сфероидов. Данные теоремы позволяют представить общее решение задачи в системе координат, связанной с каждой из граничных поверхностей и обеспечить точное удовлетворение граничных условий.

Научная новизна полученных результатов состоит в развитии обобщенного метода Фурье для решения неосесимметричных многосвязных задач теории упругости для канонических тел, ограниченных координатными поверхностями цилиндра, сферы, вытянутого и сжатого сфероидов.

Практическое значение полученных результатов состоит в том, что развитый в диссертации метод позволяет вычислять напряженно-деформированное состояние в любых неосесимметричных телах описанной геометрии с большим числом компонент связности под действием одноосного, двуосного или всестороннего растяжения или сжатия упругого пространства.

Полученные результаты также использованы для вычисления упругих модулей пористых и зернистых композиционных материалов.

Личный вклад соискателя. Основные результаты получены соискателем самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты исследований докладывались и обговаривались на VIII и IX международных научных конференциях "Математические проблемы механики неоднородных структур" (Львов, 2010, 2014), "Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений" (Одесса, 2013), международной математической конференции им. В. Я. Скоробогатька (Дрогобыч, 2011), XVI International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation" (Киев, 2013), (Запорожье, 2012), "Человек и Космос" (Днепропетровск, 2010), “Интегрированные компьютерные технологии в машиностроении” (Харьков, 2010).

Публикации. Основные научные результаты опубликованы в 21 статьях в научных журналах и сборниках трудов, которые соответствуют требованиям ВАК Украины к опубликованию результатов диссертации в профильных изданиях.

Структура работы. Диссертация состоит из вступления, 4 глав, выводов, списка литературы из 140 наименований. Общий объем работы — N страниц.

Обзор литературы. Приведем обзор научных исследований, связанных с тематикой данной работы. Исследованию пространственных задач теории упругости для односвязных цилиндра, шара и сфероида посвящены работы [1, 5–7, 13, 20, 21, 28, 31–34, 45, 47, 56, 88–90, 96, 97, 110, 111, 114, 124, 137, 139, 140]. В них краевые задачи для указанных областей решены методом Фурье.

В работах А. Я. Александрова [3, 4] получил развитие метод интегральных наложений, позволивший связать пространственное напряженное состояние с плоским и, как следствие, выразить решения ряда пространственных задач для односвязных и многосвязных тел через аналитические функции комплексного переменного.

Г. Н. Положий на основе построенной им теории p–аналитических функций предложил метод решения осесимметричных задач теории упругости, аналогичный методу Колосова — Мусхелишвили для плоских задач. В дальнейшем этот метод был распространен на двусвязные тела в работах А. А. Капшивого, Л. Н. Ломоноса [43, 55].

Важный подход к решению пространственных задач теории упругости основан на применении методов теории потенциала. В работах В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегели, О. М. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе [11, 50] путём исследования сингулярных интегральных уравнений различных классов краевых задач теории упругости были установлены условия существования и единственности их решений. Параллельно были созданы алгоритмы численного решения задач методами теории потенциала [4]. Численные возможности трех последних методов в многосвязных неосесимметричных телах весьма ограничены.

Методы теории потенциала в простанственных задачах теории трещин были развиты в монографии [46].

В монографии [36] описан метод решения краевых задач теории упругости для областей, близких к каноническим, путем возмущения формы границы.

Приведем анализ методов решения пространственных задач для многосвязных тел. Прежде всего, заметим, что в этой области отсутствуют методы, близкие по общности и эффективности к методам решения плоских задач. Используемые здесь методы либо носят частный характер и предназначены для областей специального вида, не допуская распространения на более сложные области, либо, в виду своей общности, недостаточно эффективны при решении конкретных задач [111, 125, 130, 132].

Многие задачи решаются численными методами [39, 57]. Однако в телах с большим количеством неоднородностей эти методы неэффективны.

Остановимся на методах исследования механики композиционных материалов. Определение интегральных упругих характеристик композиционных материалов проводилось различными методами в работах: Н. С. Бахвалова [8], Л. Браутмана [48], А. С. Вавакина [12], Ван Фо Фы [14, 15], Г. А. Ванина [16–19, 58], А. Н. Власова, О. К. Гаришина [22], А. В. Головина, В. Т. Головчана [24–26, 116], В. Т. Гринченко [31–34], А. Н. Гузя [35], А. В. Дыскина [38], А. В. Ефименко, С. П. Киселёва, С. П. Копысова, Р. Кристенсен [49], Г. Н. Кувыркина, В. И. Куща [51], В. М. Левина [53], Б. П. Маслова, В. В. Мошева, А. А. Панькова, Б. Е. Победри [87], Ю. Н. Подильчука [88, 89], В. В. Полякова, Я. Я. Рущицкого, Р. Л. Салганик [92], К. Б. Устинова [98], А. Ф. Федотова [99], В. М. Фомина, Л. П. Хорошуна [101, 122, 123], Т. Д. Шермергора [104], Дж. Эшелби [105, 115], B. Budiansky [109], S. Boucher [108], R. M. Christensen [112, 113], Z. Hashin [117–120], M. Kachanov [121], S. Nemat-Nasser, M. Taya [127], A. S. Sangini, W. Lu [129], S. Torquato [133], R. W. Zimmerman [138] и др.

Один из первых подходов к определению эффективных упругих модулей был предложен в работах Дж. Эшелби [105, 115]. Он основан на решении задачи об одиночном включении в форме эллипсоида. Метод предполагает пренебрежение взаимодействием между включениями.

В работе [121] при анализе эффективных упругих свойств тела с трещинами использовался метод эффективного поля, в котором предполагается, что включения находятся в поле напряжений, соответствующему среднему полю напряжений в матрице.

В ряде работ [113] использовался метод самосогласования, в котором каждое включение находится в эквивалентной упругой среде, соответствующей матрице и остальным включениям, а также дифференциальный вариант метода самосогласования [12, 92, 138].

В работе [99] предложен метод расчета эффективных упругих модулей зернистых композитов, основанный на модели упругого деформирования пористых материалов. Отличительная особенность метода заключается в осреднении микроскопических напряжений и деформаций не по полному, а по эффективному объему фаз. Получены расчетные зависимости эффективных объемов осреднения от упругих модулей и объемного содержания фаз. Проведено сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными при различном сочетании упругих модулей и произвольной объемной концентрации фаз.

Модели многослойных материалов и конструкций исследовались в монографии [10].

В книге [23] рассматривается моделирование перколяционных кластеров фаз внутренних границ композиционных материалов.

В монографиях [30, 91] решаются плоские задачи для многосвязных тел с отверстиями.

В книге [39] метод конечных элементов применен при анализе напряжений в двухсвязных телах.

В статье [40] исследовано напряженно-деформированное состояние дисперсно наполненного полимерного композита с использованием объемных моделей.

В статьях [122, 123, 131, 134] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако поскольку уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В работе [116] проанализировано термонапряженное состояние в окрестности сферических включений в керамическом композите. Была строго решена краевая задача, которая соответствует приближенному моделированию механики композита парой включений. Численные результаты качественно согласуются с известными экспериментальными зависимостями.

В статье [140] получено явное аналитическое решение задачи с жестким сфероидальным включением в трансверсально изотропном упругом пространстве, где включению заданы контактные перемещения в направлении, перпендикулярном к оси симметрии материала. Для решения задачи использовано представление потенциала перемещений для равновесия трехмерного трансверсально изотропного тела.

В работе [137] исследован трансверсально изотропный стержень с цилиндрическим включением с осесимметричными собственными деформациями. Получено аналитическое упругое решение для перемещений, напряжений и энергии упругой деформации стержня.

В монографии [16] разработаны методы микромеханики композиционных сред с дискретной структурой и трещинами и некоторые их приложения к конкретным материалам. Рассмотрено влияние свойств компонентов и вида структуры неоднородных сред на их эффективные (интегральные) параметры и распределение внутренних полей. Наряду с задачами теории упругости исследуются другие физические свойства материалов.

В работе [103] построена математическая модель расчета эффективного модуля упругости полиминеральных горных пород. Суть исследований заключается в расчете эффективного упругого модуля характерного объема материала путем осреднения по всем реализациям случайного поля неоднородностей с учетом их концентрации и пространственной ориентации. В работе были использованы методы: теории обобщенных функций, тензорного исчисления, теории уравнений математической физики и интегро-дифференциальных уравнений.

В работе [37] дано построение модели межфазного слоя материала, содержащего жесткую частицу под действием растягивающей нагрузки. Предлагается вариант чисто конструктивной расчетной модели. Основанием для построения такой модели являются результаты исследований, где показано, что в окрестности границ включения возникает дополнительная межфазная зона, механические свойства которой являются переменными, изменяясь по экспоненциальному закону от жесткости включения до жесткости матрицы. В рамках полученной расчетной модели учитываются размеры включения и протяженность межфазной зоны. Учитываются также изменение модулей упругости при повороте частицы по отношению к действующей нагрузке и влияние соседних частиц на свойства межфазного слоя. Приведены примеры расчета.

В работе [2] методом конечных элементов исследовано влияние начального растяжения на концентрацию напряжений вокруг круговых отверстий в пластине-полосе, подверженной изгибу. Математическая формулировка соответствующей краевой задачи дается в рамках трехмерной линеаризованной теории упругости при плоском деформированном состоянии. Материал пластины-полосы — линейно-упругий, однородный и ортотропный. Представлены численные результаты, оценивающие влияние предварительного растяжения и взаимного расположения отверстий на концентрацию напряжений. Установлено, что начальное растяжение существенно уменьшает концентрацию напряжений в некоторых характерных точках на контуре отверстий.

В статье [106] разработана численно-аналитическая методика моделирования нелинейно-наследственного поведения композитов, имеющих пространственно-ориентированную структуру (пространственно-армированных композитов), позволяющая в дискретные моменты времени рассматривать такую композицию как нелинейно-упругую. Применение итерационного процесса типа метода переменных параметров упругости позволило линеаризовать определяющие соотношения и свести задачу расчета механического поведения рассматриваемого композита в дискретные моменты времени к серии линейно-упругих задач механики композитов.

В статье [9] предлагается корректная модель сред с микроструктурой (по определению Миндлина), которая определяется наличием свободных деформаций и обобщает известные модели Миндлина, Коссера и Аэро-Кувшинского. Корректность формулировки модели определяется использованием “кинематического” вариационного принципа, основанного на последовательном формальном описании кинематики сред, формулировке кинематических связей для сред разной сложности и построении соответствующей потенциальной энергии деформации с использованием процедуры множителей Лагранжа. Устанавливается система определяющих соотношений и формулируется согласованная постановка краевой задачи. Показывается, что исследуемая модель среды не только отражает масштабные эффекты, аналогичные когезионным взаимодействиям, но и является основой для описания широкого спектра адгезионных взаимодействий. В связи с анализом физической стороны модели предлагается трактовка физических характеристик, ответственных за неклассические эффекты, дается описание спектра адгезионных механических параметров.

В работе [22] разработаны модели структур многоуровневых волокнистых композитов с упрочняющими частицами в матрице и методы решения задач о плоском напряженном состоянии и разрушении. Предложен новый критерий хрупкого разрушения на основе интегралов, не зависящих от пути интегрирования. Найдены обобщенные равновесные термодинамические потенциалы неоднородных сред. Предложены методы определения поправок в состоянии материалов, возникающих от градиентных эффектов вблизи свободных и межфазных поверхностей, кончиков трещин, при высокочастотных волновых процессах. Указанные результаты оригинальны, и пока не известны их аналоги в литературе. Соотношения теории описывают состояние тел на выбранном масштабном уровне и связывают его с состоянием и процессами, протекающими на других масштабных уровнях неоднородных сред. Отмеченное представляет интерес в теории разрушения материалов, в задачах нанотехнологии и др.

Исследование напряженного состояния тела с однопериодической системой сферических полостей (осесимметричная задача) проводилось в работе [86].

Двусвязные осесимметричные задачи рассмотрены в работах [95, 107, 126, 135, 136]. Напряженно-деформированное состояние кусочно-однородных тел исследовано с помощью обобщенного метода Фурье в работах [63–85].

Приведенный обзор литературы показывает, что одной из актуальных проблем современной механики деформированного твердого тела является построение и анализ моделей напряженного состояния пористых и композиционных материалов, которые находят широкое применение в высокотехнологических областях техники, в частности в авиации и ракетостроении. Известные пространственные модели напряженного состояния указанных выше материалов не являются достаточно точными. Они учитывают неоднородную структуру материала или усредненно, или локально в окрестности только одного концентратора напряжений. При моделировании подобных материалов также используются разные типы стохастических моделей, которые, как правило, не являются полностью адекватными. Однако аэрокосмическая отрасль накладывает повышенные требования на прочностные характеристики материалов, управление которыми зависит от точности определения напряжений в теле. Создание более точных моделей указанных материалов позволит не только уточнить расчеты на прочность (коэффициенты концентрации напряжений на границе раздела фаз могут отличаться в 1.5–2 раза), но и на основе этих моделей проводить оптимальное проектирование материалов с заданными прочностью и массой. Обзор литературы показывает, что напряженное состояние в пористом и композиционном материалах традиционно моделируется напряженным состоянием представительской ячейки, содержащей одну неоднородность. Подобные модели используются при определении эффективных упругих модулей материалов с порами и включениями. Очевидно, эти модели заведомо не обладают высокой точностью. Основным их недостатком является тот факт, что они не вполне адекватны в локальных зонах концентрации напряжений в телах из пористых и композиционных материалов.

В диссертации приводятся результаты исследований по моделированию напряженно-деформированного состояния упругого пористого и композиционного материалов с порами или включениями цилиндрической, сферической, вытянутой или сжатой сфероидальной формы. Пористый или композиционный материал моделируется упругой средой с конечным числом полостей или включений указанной выше формы. Число неоднородностей варьируется в широком диапазоне (от 2 до 30). Модели НДС указанных тел строятся на основе точных базисных решений уравнения Ламе в канонических пространственных областях [59, 60, 62]. Для определения параметров модели используется обобщенный метод Фурье. Аппарат обобщенного метода Фурье был развит в работах [59–62, 65].

Остановимся кратко на содержании диссертации.

В главе 1 приведен аппарат обобщенного метода Фурье. Кроме известных теорем сложения базисных решений уравнения Ламе в цилиндрических, сферических, вытянутых и сжатых сфероидальных системах координат, начала которых произвольно сдвинуты друг относительно друга, впервые получены теоремы сложения для модифицированных базисных решений уравнения Ламе в указанных системах координат. Эти теоремы впервые были получены в работах [75, 76].

В главе 2 исследована механика упругого деформирования волокнистых пористых и композиционных материалов. Волокна моделируются параллельно расположенными цилиндрическими полостями или включениями. Рассмотрены локальные модели, в которых напряженно-деформированное состояние определяется цилиндрической неоднородностью и ее ближайшими соседями. Изучены также глобальные модели, которые учитывают всю структуру материала. Основное внимание уделяется количественному и качественному анализу в распределении напряжений в представительской ячейке в зависимости от механических и геометрических характеристик матрицы и включений, а также от типа упаковки полостей или включений. Приведены сравнения разных типов моделей. Результаты этой главы получены в работах [71, 72, 74, 77, 84].

Глава 3 посвящена механике упругого деформирования зернистых композиционных и пористых материалов со сферическими зернами. Рассмотрены локальные модели, в которых напряженно-деформированное состояние определяется сферической неоднородностью и ее ближайшими соседями. Изучены также глобальные модели, которые учитывают всю структуру материала. Основное внимание уделяется количественному и качественному анализу в распределении напряжений в представительской ячейке в зависимости от механических и геометрических характеристик матрицы и включений, а также от типа упаковки полостей или включений. Рассмотрены тетрагональная и гексагональная типы упаковок неоднородностей в случаях отсутствия или наличия объемного центрирования. Приведены сравнения этих типов моделей. Результаты этой главы получены в работах [68, 78, 81, 83].

В главе 4 рассмотрены модели упругого деформирования пористых и композиционных материалов с вытянутыми сфероидальными полостями или включениями. Указанные материалы моделируются упругим пространством с конечным или бесконечным числом неоднородностей, центры которых расположены в узлах периодической решетки, обладающей определенной трансляционной симметрией. Предполагается, что оси симметрии включений одинаково направлены. Рассмотрены локальные модели, в которых напряженно-деформированное состояние определяется неоднородностью и ее ближайшими соседями. Изучены также глобальные модели, которые учитывают всю структуру материала. Приведен количественный и качественный анализ распределения напряжений в представительской ячейке в зависимости от механических и геометрических характеристик матрицы и включений, а также от типа упаковки неоднородностей. Рассмотрены тетрагональная и гексагональная типы упаковок неоднородностей в случаях отсутствия или наличия объемного центрирования. Приведены сравнения этих типов моделей. Результаты этой главы получены в работах [67, 69, 70, 75, 76, 79, 80, 82].

Розділ 1

Математический аппарат обобщенного метода Фурье

1.1. Теоремы сложения базисных гармонических функций в цилиндрических, сферических, вытянутых и сжатых сфероидальных системах координат со сдвинутыми началами

Рассмотрим пары $(i = 1, 2)$ однотипных одинаково направленных систем координат: декартовых (x_i, y_i, z_i), цилиндрических (ρ_i, z_i, φ_i), сферических $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$, вытянутых $(\xi_i, \eta_i, \varphi_i)$ и сжатых $\left(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, \varphi_i\right)$ сфероидальных. Их начала отнесены к точкам O_i, которые произвольно сдвинуты друг относительно друга. Будем считать, что декартовые координаты точки O_2 в декартовой системе координат с началом в точке O_1 задаются тройкой чисел (x_{12}, y_{12}, z_{12}). Тогда между декартовыми координатами справедливы соотношения

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_{12}, \\ y_1 = y_2 + y_{12}, \\ z_1 = z_2 + z_{12}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Связь между различными криволинейными координатами определяется формулами:

$$x_i = \rho_i \cos\varphi_i = r_i \sin\theta_i \cos\varphi_i = c_i \mathrm{sh}\xi_i \sin\eta_i \cos\varphi_i = \tilde{c}_i \mathrm{ch}\tilde{\xi}_i \sin\tilde{\eta}_i \cos\varphi_i,$$

$$y_i = \rho_i \sin\varphi_i = r_i \sin\theta_i \sin\varphi_i = c_i \mathrm{sh}\xi_i \sin\eta_i \sin\varphi_i = \tilde{c}_i \mathrm{ch}\tilde{\xi}_i \sin\tilde{\eta}_i \sin\varphi_i,$$

$$z_i = r_i \cos\theta_i = c_i \mathrm{ch}\xi_i \cos\eta_i = \tilde{c}_i \mathrm{sh}\tilde{\xi}_i \cos\tilde{\eta}_i, \tag{1.2}$$

где $x_i, y_i, z_i \in (-\infty; \infty)$; $\rho_i, r_i, \xi_i \in [0; \infty)$; $\eta_i \in [0; \pi]$; $\tilde{\xi}_i \in (-\infty, \infty)$; $\tilde{\eta}_i \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$; $\varphi \in [0; 2\pi]$; $c_i, \tilde{c}_i$ $(c_i, \tilde{c}_i > 0)$ — параметры сфероидальных систем координат.

В дальнейшем понадобятся базисные решения уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \tag{1.3}$$

регулярные вне (знак “+” в верхнем индексе), внутри (знак “–” в верхнем индексе) цилиндра $\Omega_3^\pm$, шара $\Omega_4^\pm$, вытянутого $\Omega_5^\pm$ и сжатого $\Omega_6^\pm$ сфероидов:

$$u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho,z,\varphi) = e^{i\lambda z + im\varphi}\left\{\begin{array}{c}\tilde{K}_m(\lambda\rho)\\ I_m(\lambda\rho)\end{array}\right\}, \qquad \lambda\in\mathbb{R}, \quad m\in\mathbb{Z}; \tag{1.4}$$

$$u_{n,m}^{\pm(4)}(r,\theta,\varphi) = \left\{\begin{array}{c}(n-m)!/r^{n+1}\\ r^n/(n+m)!\end{array}\right\} P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}; \tag{1.5}$$

$$n,m\in\mathbb{Z}, n\geq 0, |m|\leq n;$$

$$u_{n,m}^{\pm(5)}(\xi,\eta,\varphi) = \left\{\begin{array}{c}Q_n^{-m}(\mathrm{ch}\xi)\\ P_n^{-m}(\mathrm{ch}\xi)\end{array}\right\} P_n^m(\cos\eta)e^{im\varphi}; \tag{1.6}$$

$$n,m\in\mathbb{Z}, n\geq 0, |m|\leq n;$$

$$u_{n,m}^{\pm(6)}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right) = \left\{\begin{array}{c}Q_n^{-m}(i\mathrm{sh}\tilde{\xi})\\ P_n^{-m}(i\mathrm{sh}\tilde{\xi})\end{array}\right\} P_n^m(\cos\tilde{\eta})e^{im\varphi}; \tag{1.7}$$

$$n,m\in\mathbb{Z}, n\geq 0, |m|\leq n;$$

где $I_m(x)$ — модифицированная функция Бесселя,

$$\tilde{K}_m(x) = (\operatorname{sign} x)^m K_m(|x|),$$

$K_m(x)$ — функция Макдональьда, $P_n^m(x)$, $Q_n^m(x)$ — функции Лежандра первого и второго рода. Верхний (нижний) множитель в фигурных скобках соответствует верхнему (нижнему) знаку индекса $\{\pm\}$.

В дальнейшем важную роль играют теоремы сложения решений (1.4) – (1.7) в парах однотипных систем координат, описанных выше.

Теорема 1.1. *При $\rho_2 < \rho_{12}$ справедливо разложение*

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1,z_1,\varphi_1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l u_{m-l,\lambda}^{+(3)}(\rho_{12},z_{12},\varphi_{12})\, u_{l,\lambda}^{-(3)}(\rho_2,z_2,\varphi_2). \tag{1.8}$$

При $\rho_1 < \rho_{12}$ справедливо разложение

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}\left(\rho_2,z_2,\varphi_2\right)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(-1\right)^m u_{m-l,\lambda}^{+(3)}\left(\rho_{12},-z_{12},\varphi_{12}\right)u_{l,\lambda}^{-(3)}\left(\rho_1,z_1,\varphi_1\right). \qquad (1.9)$$

Теорема 1.2. *При* $r_2<r_{12}$ *справедливо разложение*

$$u_{n,m}^{+(4)}\left(r_1,\theta_1,\varphi_1\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}\left(-1\right)^{k+l}u_{n+k,m-l}^{+(4)}\left(r_{12},\theta_{12},\varphi_{12}\right)u_{k,l}^{-(4)}\left(r_2,\theta_2,\varphi_2\right). \qquad (1.10)$$

При $r_1<r_{12}$

$$u_{n,m}^{+(4)}\left(r_2,\theta_2,\varphi_2\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}\left(-1\right)^{n+l}u_{n+k,m-l}^{+(4)}\left(r_{12},\theta_{12},\varphi_{12}\right)u_{k,l}^{-(4)}\left(r_1,\theta_1,\varphi_1\right). \qquad (1.11)$$

Теорема 1.3. *При* $\xi_2\in(0;\gamma_2)$ *справедливо разложение*

$$u_{n,m}^{+(5)}\left(\xi_1,\eta_1,\varphi_1\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(-1\right)^{l+m}u_{s,l}^{-(5)}\left(\xi_2,\eta_2,\varphi_2\right)\times$$
$$\times\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{q!\Gamma\left(n+q+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{c_1}{2}\right)^{2q+n+1}\sum_{k=s}^{\infty}\left(-1\right)^k g_{k,l}^{-(45)s}(c_2)u_{2q+n+k,m-l}^{+(4)}\left(r_{12},\theta_{12},\varphi_{12}\right). \qquad (1.12)$$

При $\xi_1\in(0;\gamma_1)$ *справедливо разложение*

$$u_{n,m}^{+(5)}\left(\xi_2,\eta_2,\varphi_2\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(-1\right)^{l+m}u_{s,l}^{-(5)}\left(\xi_1,\eta_1,\varphi_1\right)\times$$
$$\times\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{q!\Gamma\left(n+q+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{c_2}{2}\right)^{2q+n+1}\sum_{k=s}^{\infty}\left(-1\right)^n g_{k,l}^{-(45)s}(c_1)u_{2q+n+k,m-l}^{+(4)}\left(r_{12},\theta_{12},\varphi_{12}\right). \qquad (1.13)$$

Выше использованы обозначения

$$\gamma_j=\mathrm{Arsh}\left[\frac{t_j^2+\rho_{12}^2-c_j^2+\sqrt{\left(t_j^2+\rho_{12}^2-c_j^2\right)^2+4\rho_{12}^2c_j^2}}{2c_j^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (1.14)$$

$t_j=\max(|z_{12}|-c_{3-j},0)$,

$$g_{k,l}^{-(45)s}(c_j)=\sqrt{\pi}\varepsilon_{ks}\left(\frac{c_j}{2}\right)^k\frac{s+\frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{s}{2}+\frac{3}{2}\right)}, \qquad (1.15)$$

$$\varepsilon_{ks} = \begin{cases} 1, & k-s=2p, \quad p\in\mathbb{Z}, \\ 0, & k-s=2p+1, \quad p\in\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1.16}$$

$\Gamma(x)$ — *гамма-функция Эйлера.*

Теорема 1.4. *При* $\tilde{\xi}_2 \in [0, \tilde{\gamma}_2)$ *справедливо разложение*

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{+(6)}\left(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1\right) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^{l+m}u_{s,l}^{-(6)}\left(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2\right)\times \\ \times\sqrt{\pi}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q(-i)^{n+1}}{q!\Gamma\left(n+q+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{\tilde{c}_1}{2}\right)^{2q+n+1}\times \\ \times\sum_{k=s}^{\infty}(-1)^k g_{k,l}^{-(46)s}(c_2)u_{2q+n+k,m-l}^{+(4)}\left(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}\right). \end{aligned} \tag{1.17}$$

При $\tilde{\xi}_1 \in [0, \tilde{\gamma}_1)$ *справедливо разложение*

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{+(6)}\left(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2\right) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^{l+m}u_{s,l}^{-(6)}\left(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1\right)\times \\ \times\sqrt{\pi}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q(-i)^{n+1}}{q!\Gamma\left(n+q+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{\tilde{c}_2}{2}\right)^{2q+n+1}\times \\ \times\sum_{k=s}^{\infty}(-1)^n g_{k,l}^{-(46)s}(c_1)u_{2q+n+k,m-l}^{+(4)}\left(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}\right). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Здесь использованы обозначения

$$\tilde{\gamma}_j = \operatorname{Arsh}\left[\frac{z_{12}^2+\rho_{12}^2-\tilde{c}_j^2+\sqrt{\left(z_{12}^2+\rho_{12}^2-\tilde{c}_j^2\right)^2+4z_{12}^2\tilde{c}_j^2}}{2\tilde{c}_j^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.19}$$

$$g_{k,l}^{-(46)s}(c_j) = \sqrt{\pi}\varepsilon_{ks}(-i)^k\left(\frac{\tilde{c}_j}{2}\right)^k\frac{s+\dfrac{1}{2}}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}-\dfrac{s}{2}+1\right)\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+\dfrac{s}{2}+\dfrac{3}{2}\right)}, \tag{1.20}$$

1.2. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в сфероидальных координатах

Приведенные в предыдущем параграфе свойства гармонических функций играют существенную роль при моделировании напряженно-деформированного состояния многосвязного упругого тела.

Будем рассматривать однородную изотропную упругую среду. Вектор перемещений $\mathbf{U}$ точек среды, как известно, описывается уравнением Ламе

$$\Delta\mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla div\mathbf{U} = 0, \tag{1.21}$$

где σ — коэффициент Пуассона; ∇ — оператор “набла”.

В работах [59, 60] были введены следующие частные решения уравнения (1.21) во внешности (внутренности) вытянутого сфероида $\Omega_5^\pm = \left\{(\xi,\eta,\varphi) : \xi \gtrless \xi_0\right\}$:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(5)}(\xi,\eta,\varphi) = \frac{c}{2n+1}\mathbf{D}_s\left[u_{n-1,m}^{\pm(5)}(\xi,\eta,\varphi) - u_{n+1,m}^{\pm(5)}(\xi,\eta,\varphi)\right];\ s=1,3; \tag{1.22}$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)}(\xi,\eta,\varphi) = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(5)}(\xi,\eta,\varphi) - c\,\mathrm{ch}^2\xi_0\mathbf{D}_1 u_{n\pm1,m}^{\pm(5)}(\xi,\eta,\varphi), \tag{1.23}$$

где $n=0,\,1,\,\ldots;\ |m|\le n+1;\ u_{n,m}^{\pm(5)}$ определены в (1.6);

$$\mathbf{D}_1 = \nabla = \mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z};$$

$$\mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi\mathbf{e}_z;\quad \mathbf{D}_3 = i\left[\nabla\times\mathbf{e}_z\right]; \tag{1.24}$$

$\chi = 3-4\sigma$, $\{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z\}$ — орты декартовой системы координат.

В развернутой координатной форме формулы (1.22) – (1.23) имеют вид:

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{n,m-1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{\pm(5)}\mathbf{e}_0; \tag{1.25}$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = qu_{1,n,m-1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_{-1} - qu_{1,n,m+1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_1 - \left[qu_{1,n,m}^{\pm(5)} + \chi u_{n,m}^{\pm(5)}\right]\mathbf{e}_0 + \\ + c\left(q^2-q_0^2\right)\nabla u_{n\pm1,m}^{\pm(5)}; \tag{1.26}$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(5)} = -u_{n,m-1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_1. \tag{1.27}$$

Здесь использованы обозначения

$$u_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{1,n,m}^{\pm}(\xi)P_n^m(\cos\eta)e^{im\varphi};\quad u_{1,n,m}^{\pm}(\xi) = \left\{\begin{array}{c}(n+m+1)Q_{n+1}^{-m}(q)\\ -(n-m)P_{n-1}^{-m}(q)\end{array}\right\};$$

$$q = \mathrm{ch}\xi, \quad q_0 = \mathrm{ch}\xi_0, \quad \mathbf{e}_{\mp 1} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y\right), \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z. \tag{1.28}$$

В работе [62] введено понятие базисности системы решений уравнения Ламе в односвязной канонической области и доказана базисность решений (1.22) – (1.24) в соответствующих областях $\Omega_5^{\pm}$.

В дальнейшем нам понадобятся теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в одинаково направленных вытянутых сфероидальных системах координат, начала которых сдвинуты согласно соотношениям (1.1).

Теорема 1.5. *При $\xi_2, \xi_{20} \in (0; \gamma_2)$ справедливы разложения*

$$\mathbf{U}^{+(5)}_{s,n,m}\left(\xi_1, \eta_1, \varphi_1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f^{+(55)k,l}_{n,m} \mathbf{U}^{-(5)}_{s,k,l}\left(\xi_2, \eta_2, \varphi_2\right), \; s = 1,\, 3; \tag{1.29}$$

$$\mathbf{U}^{+(5)}_{2,n,m}\left(\xi_1, \eta_1, \varphi_1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Big[f^{+(55)k,l}_{n,m} \mathbf{U}^{-(5)}_{2,k,l}\left(\xi_2, \eta_2, \varphi_2\right) +$$
$$+ \tilde{f}^{+(55)k,l}_{n,m} \mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,l}\left(\xi_2, \eta_2, \varphi_2\right) \Big], \tag{1.30}$$

где

$$f^{+(55)k,l}_{n,m} = \sum_{j=n}^{\infty} g^{+(54)j}_{n,m}(c_1) f^{(45)k,l}_{j,m}(c_2); \tag{1.31}$$

$$g^{+(54)j}_{n,m}(c_1) = (-1)^m \sqrt{\pi} \Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{j+1} \frac{\varepsilon_{jn}}{\Gamma\left(\frac{j-n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{j+n}{2}+\frac{3}{2}\right)}; \tag{1.32}$$

$$f^{(45)k,l}_{j,m}(c_2) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l} \sqrt{\pi} \Big(\frac{c_2}{2}\Big)^{p} \frac{\varepsilon_{pk}\left(k+\frac{1}{2}\right) u^{+(4)}_{j+p,m-l}\left(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p+k}{2}+\frac{3}{2}\right)}; \tag{1.33}$$

$$\tilde{f}^{+(55)k,l}_{n,m} = \sum_{j=n}^{\infty} \Big[c_2 q_{20}^2 \frac{2k+1}{2k+3} g^{+(54)j}_{n,m}(c_1) f^{(45)k+1,l}_{j+1,m}(c_2) +$$
$$+ z_{12} g^{+(54)j}_{n,m}(c_1) f^{(45)k,l}_{j+1,m}(c_2) - c_1 q_{10}^2 g^{+(54)j-1}_{n+1,m}(c_1) f^{(45)k,l}_{j,m}(c_2) \Big]. \tag{1.34}$$

При $\xi_1, \xi_{10} \in (0; \gamma_1)$ справедливы разложения

$$\mathbf{U}^{+(5)}_{s,n,m}\left(\xi_2, \eta_2, \varphi_2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f^{-(55)k,l}_{n,m} \mathbf{U}^{-(5)}_{s,k,l}\left(\xi_1, \eta_1, \varphi_1\right), \; s = 1,\, 3; \tag{1.35}$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{+(5)}(\xi_2,\eta_2,\varphi_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Big[f_{n,m}^{-(55)k,l}\mathbf{U}_{2,k,l}^{-(5)}(\xi_1,\eta_1,\varphi_1)+$$
$$+\tilde{f}_{n,m}^{-(55)k,l}\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)}(\xi_1,\eta_1,\varphi_1)\Big], \quad (1.36)$$

где

$$f_{n,m}^{-(55)k,l}=\sum_{j=k}^{\infty}f_{n,m}^{(54)j,l}(c_2)g_{j,l}^{-(45)k}(c_1); \quad (1.37)$$

$$f_{n,m}^{(54)j,l}(c_2)=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p+l+m}\sqrt{\pi}\Big(\frac{c_2}{2}\Big)^{p+1}\frac{\varepsilon_{pn}u_{p+j,m-l}^{+(4)}(r_{12},\theta_{12},\varphi_{12})}{\Gamma\left(\frac{p-n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p+n}{2}+\frac{3}{2}\right)}; \quad (1.38)$$

$$\tilde{f}_{n,m}^{-(55)k,l}=\sum_{j=k}^{\infty}\Big[c_2q_{20}^2f_{n+1,m}^{(54)j+1,l}(c_2)g_{j,l}^{-(45)k}(c_1)+z_{12}f_{n,m}^{(54)j+1,l}(c_2)g_{j,l}^{-(45)k}(c_1)-$$
$$-c_1q_{10}^2\frac{2k+1}{2k+3}f_{n,m}^{(54)j,l}(c_2)g_{j-1,l}^{-(45)k+1}(c_1)\Big], \quad (1.39)$$

$g_{j,l}^{-(45)k}(c_1)$ *описано формулой* (1.15).

Теперь рассмотрим частные решения уравнения Ламе для сжатого сфероида $\Omega_6^{\pm}=\left\{(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi):\ \tilde{\xi}\gtrless\tilde{\xi}_0\right\}$ [60]:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(6)}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)=\frac{-i\tilde{c}}{2n+1}\mathbf{D}_s\left[u_{n-1,m}^{\pm(6)}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)-u_{n+1,m}^{\pm(6)}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)\right];\ s=1,3; \quad (1.40)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(6)}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)=\mathbf{D}_2u_{n,m}^{\pm(6)}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)-i\tilde{c}\,\mathrm{sh}^2\tilde{\xi}_0\mathbf{D}_1u_{n\pm1,m}^{\pm(6)}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right), \quad (1.41)$$

где $n=0,\,1,\,\ldots;\ |m|\le n+1;\ m,n\in\mathbb{Z},\ u_{n,m}^{\pm(6)}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)$; $\mathbf{D}_s$ определены в (1.7), (1.24).

Приведем координатную форму перемещений (1.40), (1.41)

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(6)}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)=u_{n,m-1}^{\pm(6)}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)\mathbf{e}_{-1}-u_{n,m+1}^{\pm(6)}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)\mathbf{e}_1-$$
$$-u_{n,m}^{\pm(6)}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)\mathbf{e}_0; \quad (1.42)$$

$$\mathbf{U}^{\pm(6)}_{2,n,m}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)=\bar{\tilde{i}}qu^{\pm(6)}_{1,n,m-1}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)\mathbf{e}_{-1}-\bar{\tilde{i}}qu^{\pm(6)}_{1,n,m+1}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)\mathbf{e}_{1}-$$
$$-\left[\bar{\tilde{i}}qu^{\pm(6)}_{1,n,m}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)+\chi u^{\pm(6)}_{n,m}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)\right]\mathbf{e}_{0}+i\tilde{c}\left(\bar{\tilde{q}}^{2}-\bar{\tilde{q}}_{0}^{2}\right)\nabla u^{\pm(6)}_{n\pm1,m}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right); \tag{1.43}$$

$$\mathbf{U}^{\pm(6)}_{3,n,m}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)=-u^{\pm(6)}_{n,m-1}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)\mathbf{e}_{-1}-u^{\pm(6)}_{n,m+1}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)\mathbf{e}_{1}; \tag{1.44}$$

$\bar{\tilde{q}}=\mathrm{sh}\tilde{\xi}$, $\bar{\tilde{q}}_0=\mathrm{sh}\tilde{\xi}_0$,

$$u^{\pm(6)}_{1,n,m}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\varphi\right)=\tilde{u}^{\pm(6)}_{1,n,m}(\tilde{\xi})P^{m}_{n}(\cos\tilde{\eta})e^{im\varphi}, \tag{1.45}$$

$$\tilde{u}^{\pm(6)}_{1,n,m}(\tilde{\xi})=\left\{\begin{array}{l}(n+m+1)Q^{-m}_{n+1}(\bar{\tilde{i}}q)\\ -(n-m)P^{-m}_{n-1}(\bar{\tilde{i}}q)\end{array}\right\}. \tag{1.46}$$

В работе [62] установлена базисность решений (1.40), (1.41) в областях $\Omega^{\pm}_{6}$.

Теорема 1.6. *При* $\tilde{\xi}_2$, $\tilde{\xi}_{20}\in[0;\tilde{\gamma}_2)$ *справедливы разложения*

$$\mathbf{U}^{+(6)}_{s,n,m}\left(\tilde{\xi}_1,\tilde{\eta}_1,\varphi_1\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}f^{+(66)k,l}_{n,m}\mathbf{U}^{-(6)}_{s,k,l}\left(\tilde{\xi}_2,\tilde{\eta}_2,\varphi_2\right),\quad s=1,\,3; \tag{1.47}$$

$$\mathbf{U}^{+(6)}_{2,n,m}\left(\tilde{\xi}_1,\tilde{\eta}_1,\varphi_1\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[f^{+(66)k,l}_{n,m}\mathbf{U}^{-(6)}_{2,k,l}\left(\tilde{\xi}_2,\tilde{\eta}_2,\varphi_2\right)+\right.$$
$$\left.+\tilde{f}^{+(66)k,l}_{n,m}\mathbf{U}^{-(6)}_{1,k,l}\left(\tilde{\xi}_2,\tilde{\eta}_2,\varphi_2\right)\right], \tag{1.48}$$

где

$$f^{+(66)k,l}_{n,m}=\sum_{j=n}^{\infty}g^{+(64)j}_{n,m}(\tilde{c}_1)f^{(46)k,l}_{j,m}(\tilde{c}_2); \tag{1.49}$$

$$g^{+(64)j}_{n,m}(\tilde{c}_1)=(-1)^m\sqrt{\pi}(-i)^{j+1}\left(\frac{\tilde{c}_1}{2}\right)^{j+1}\frac{\varepsilon_{jn}}{\Gamma\left(\frac{j-n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{j+n}{2}+\frac{3}{2}\right)}; \tag{1.50}$$

$$f^{(46)k,l}_{j,m}(\tilde{c}_2)=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p+l}\sqrt{\pi}(-i)^p\left(\frac{\tilde{c}_2}{2}\right)^p\frac{\varepsilon_{pk}\left(k+\frac{1}{2}\right)u^{+(4)}_{j+p,m-l}\left(r_{12},\theta_{12},\varphi_{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p+k}{2}+\frac{3}{2}\right)}; \tag{1.51}$$

$$\tilde{f}^{+(66)k,l}_{n,m} = \sum_{j=n}^{\infty} \left[i\tilde{c}_2 \bar{\bar{q}}^2_{20} \frac{2k+1}{2k+3} g^{+(64)j}_{n,m} f^{(46)k+1,l}_{j+1,m} + z_{12} g^{+(64)j}_{n,m} f^{(46)k,l}_{j+1,m} - \right.$$

$$\left. - \; i\tilde{c}_1 \bar{\bar{q}}^2_{10} g^{+(64)j-1}_{n+1,m} f^{(46)k,l}_{j,m} \right], \quad (1.52)$$

$\bar{\bar{q}}_{j0} = \mathrm{sh}\tilde{\xi}_{j0}$.

При $\tilde{\xi}_1$, $\tilde{\xi}_{10} \in [0; \tilde{\gamma}_1)$ *справедливы разложения*

$$\mathbf{U}^{+(6)}_{s,n,m}\left(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f^{-(66)k,l}_{n,m} \mathbf{U}^{-(6)}_{s,k,l}\left(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1\right), \quad s = 1,\, 3; \qquad (1.53)$$

$$\mathbf{U}^{+(6)}_{2,n,m}\left(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \varphi_2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[f^{-(66)k,l}_{n,m} \mathbf{U}^{-(6)}_{2,k,l}\left(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1\right) + \right.$$

$$\left. + \tilde{f}^{-(66)k,l}_{n,m} \mathbf{U}^{-(6)}_{1,k,l}\left(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \varphi_1\right) \right], \quad (1.54)$$

где

$$f^{-(66)k,l}_{n,m} = \sum_{j=k}^{\infty} f^{(64)j,l}_{n,m}(\tilde{c}_2) g^{-(46)k}_{j,l}(\tilde{c}_1); \qquad (1.55)$$

$$f^{(64)j,l}_{n,m}(\tilde{c}_2) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+l+m} \sqrt{\pi} (-i)^{p+1} \left(\frac{\tilde{c}_2}{2}\right)^{p+1} \frac{\varepsilon_{pn} u^{+(4)}_{p+j,m-l}\left(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p+n}{2}+\frac{3}{2}\right)}; \quad (1.56)$$

$$\tilde{f}^{-(66)k,l}_{n,m} = \sum_{j=k}^{\infty} \left[i\tilde{c}_2 \bar{\bar{q}}^2_{20} f^{(64)j+1,l}_{n+1,m}(\tilde{c}_2) g^{-(46)k}_{j,l}(\tilde{c}_1) + \right.$$

$$\left. + \; z_{12} f^{(64)j+1,l}_{n,m}(\tilde{c}_2) g^{-(46)k}_{j,l}(\tilde{c}_1) - \; i\tilde{c}_1 \bar{\bar{q}}^2_{10} \frac{2k+1}{2k+3} f^{(64)j,l}_{n,m}(\tilde{c}_2) g^{-(46)k+1}_{j-1,l}(\tilde{c}_1) \right], \quad (1.57)$$

$g^{-(46)k}_{j,l}$ *описано формулой* (1.20).

1.3. Теоремы сложения решений уравнения Ламе в сфероидальных координатах для модифицированного базиса

Приведенные в предыдущем параграфе внешние решения уравнения Ламе не при всех значениях параметров n и m регулярны, а система внутренних решений не является линейно независимой. В работе [60] были построены такие системы решений уравнения (1.21) в областях $\Omega_5^{\pm}$, которые являются линейными комбинациями решений (1.22), (1.23) и удовлетворяют всем свойствам базисности [62]. Положим

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(5)} = \mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(5)}; \quad s = \overline{1,3}; \quad n = 1, 2, \ldots, |m| \leq n-1; \tag{1.58}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{+(5)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{\pm(5)} \mp \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{\pm(5)}; \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{1.59}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,0,0}^{+(5)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,1}^{+(5)} + (1+\chi)\mathbf{U}_{3,0,1}^{+(5)} + \mathbf{U}_{2,0,1}^{+(5)}; \tag{1.60}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{+(5)} = \mathbf{U}_{2,n,\pm n}^{+(5)}; \quad n = 0, 1, \ldots; \tag{1.61}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{+(5)} = -\chi \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{+(5)} \pm (1+\chi)\mathbf{U}_{3,n,\pm(n+1)}^{+(5)} + \mathbf{U}_{2,n,\pm(n+1)}^{+(5)}; \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{1.62}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{+(5)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,-1}^{+(5)} - (1+\chi)\mathbf{U}_{3,0,-1}^{+(5)} + \mathbf{U}_{2,0,-1}^{+(5)}; \tag{1.63}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{-(5)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{-(5)}; \quad n = 0, 1, \ldots; \tag{1.64}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{-(5)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{-(5)}; \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{1.65}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{-(5)} = \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{-(5)}; \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{1.66}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(5)} = \mathbf{U}_{1,0,1}^{-(5)}; \tag{1.67}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(5)} = \mathbf{U}_{1,0,-1}^{-(5)}. \tag{1.68}$$

В работе [75] получены теоремы сложения для решений (1.58) — (1.68).

Теорема 1.7. *Справедливы разложения внешних модифицированных базисных решений уравнения Ламе в вытянутой сфероидальной системе координат с началом в точке O_j по внутренним модифицированным решениям в вытянутой сфероидальной системе координат с началом в точке O_α при $\xi_\alpha \in (0, \beta_{j\alpha})$:*

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^{3} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k} \tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,l,\alpha} \tilde{U}_{t,k,l}^{-(5)}(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \varphi_\alpha), \tag{1.69}$$

где

$$\beta_{j\alpha} = \mathrm{Arsh}\frac{\sqrt{t_{j\alpha}^2 + \rho_{j\alpha}^2 - c_\alpha^2 + \sqrt{\left(t_{j\alpha}^2 + \rho_{j\alpha}^2 - c_\alpha^2\right)^2 + 4c_\alpha^2\rho_{j\alpha}^2}}}{c_\alpha\sqrt{2}},$$

$$t_{j\alpha} = \max(|z_{j\alpha}| - c_j, 0);$$

$$\tilde{T}^{t,k,\ell,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{t,k,\ell,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1, |\ell| \leq k-1;$$

$$\tilde{T}^{1,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} + \chi T^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,k,k+1,\alpha}_{s,n,m,j} - T^{3,k,k+1,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}^{3,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{3,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} + (1+\chi)T^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}^{1,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} + \chi T^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,k,-k-1,\alpha}_{s,n,m,j} + T^{3,k,-k-1,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}^{3,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{3,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} - (1+\chi)T^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}^{3,0,0,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,0,-1,\alpha}_{s,n,m,j} + T^{3,0,-1,\alpha}_{s,n,m,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{s,n,m,j} = \delta_{st}\mathrm{f1}^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} + \delta_{s2}\delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j}, \quad (n \geq 1) \wedge (|m| \leq n-1);$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{1,n,n,j} = (\delta_{t1} - \delta_{t3})\mathrm{f1}^{k,\ell,\alpha}_{n,n,j}, \quad (-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1);$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{1,n,n,j} = 0, \quad n \geq 1;$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{1,n,-n,j} = (\delta_{t1} + \delta_{t3})\mathrm{f1}^{k,\ell,\alpha}_{n,-n,j}, \quad (-k-1 \leq \ell \leq k) \wedge (n \geq 1);$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{1,0,0,j} = \tilde{\delta}_t\mathrm{f1}^{k,\ell,\alpha}_{0,1,j} + \delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,\ell,\alpha}_{0,1,j}, \quad 1-k \leq \ell \leq k+1;$$

$$T^{t,k,-k,\alpha}_{1,0,0,j} = \delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,-k,\alpha}_{0,1,j};$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{1,0,0,j} = \delta_{t1}\mathrm{g2}^{k,-k-1,\alpha}_{0,1,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{2,n,n,j} = \delta_{t2}\mathrm{f1}^{k,\ell,\alpha}_{n,n,j} + \delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,\ell,\alpha}_{n,n,j}, \quad -k \leq \ell \leq k;$$

$$T^{t,k,k+1,\alpha}_{2,n,n,j} = \delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,k+1,\alpha}_{n,n,j};$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{2,n,n,j} = \delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,-k-1,\alpha}_{n,n,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{2,n,-n,j} = \delta_{t2}\mathrm{f1}^{k,\ell,\alpha}_{n,-n,j} + \delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,\ell,\alpha}_{n,-n,j}, \quad -k \leq \ell \leq k;$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{2,n,-n,j} = \delta_{t,1}\mathrm{g}1^{k,-k-1,\alpha}_{n,-n,j};$$

$$T^{t,k,k+1,\alpha}_{2,n,-n,j} = \delta_{t,1}\mathrm{g}1^{k,k+1,\alpha}_{n,-n,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{3,n,n,j} = \tilde{\delta}_t\mathrm{f}1^{k,\ell,\alpha}_{n,n+1,j} + \delta_{t1}\mathrm{g}1^{k,\ell,\alpha}_{n,n+1,j}, \quad (1-k \le \ell \le k+1) \wedge (n \ge 1);$$

$$T^{t,k,-k,\alpha}_{3,n,n,j} = \delta_{t1}\mathrm{g}1^{k,-k,\alpha}_{n,n+1,j}, \quad n \ge 1;$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{3,n,n,j} = \delta_{t1}\mathrm{g}2^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j}, \quad n \ge 1;$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{3,n,-n,j} = \hat{\delta}_t\mathrm{f}1^{k,\ell,\alpha}_{n,-n-1,j} + \delta_{t1}\mathrm{g}1^{k,\ell,\alpha}_{n,-n-1,j}, \quad -k-1 \le \ell \le k-1;$$

$$T^{t,k,k,\alpha}_{3,n,-n,j} = \delta_{t1}\mathrm{g}1^{k,k,\alpha}_{n,-n-1,j};$$

$$T^{t,k,k+1,\alpha}_{3,n,-n,j} = \delta_{t1}\mathrm{g}3^{k,k+1,\alpha}_{n,-n-1,j};$$

$$\mathrm{g}1^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} = q^2_{j0}\mathrm{f}2^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} + q^2_{\alpha 0}\mathrm{f}3^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} + z_{j\alpha}\mathrm{f}4^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j};$$

$$\mathrm{g}2^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} = q^2_{j0}\mathrm{f}2^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} + q^2_{\alpha 0}\mathrm{f}3^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} + \mathrm{f}5^{k,\alpha}_{n,j};$$

$$\mathrm{g}3^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} = q^2_{j0}\mathrm{f}2^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} + q^2_{\alpha 0}\mathrm{f}3^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} + \mathrm{f}6^{k,\alpha}_{n,j};$$

$$\tilde{\delta}_t = -\chi\delta_{t1} + (\chi+1)\delta_{t3} + \delta_{t2};$$

$$\hat{\delta}_t = -\chi\delta_{t1} - (\chi+1)\delta_{t3} + \delta_{t2};$$

$$\mathrm{f}1^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = (-1)^{m+l}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma^{kp\alpha}_{nrj}u^{+(4)j,\alpha}_{p+r,m-\ell};$$

$$\mathrm{f}2^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = (-1)^{m+l}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n+2}^{\infty}(n-r)\Gamma^{kp\alpha}_{nrj}u^{+(4)j,\alpha}_{p+r,m-\ell};$$

$$\mathrm{f}3^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = (-1)^{m+l}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k+2}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}(k-p)\Gamma^{kp\alpha}_{nrj}u^{+(4)j,\alpha}_{p+r,m-\ell};$$

$$\mathrm{f}4^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = (-1)^{m+l}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma^{kp\alpha}_{nrj}u^{+(4)j,\alpha}_{p+r+1,m-\ell};$$

$$\mathrm{f}5^{k,\alpha}_{n,j} = (-1)^{n-k}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma^{kp\alpha}_{nrj}v^{j,\alpha}_{p+r,n,k};$$

$$\mathrm{f6}_{n,j}^{k,\alpha} = (-1)^{k-n}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma_{nrj}^{kp\alpha}w_{p+r,n,k}^{j,\alpha};$$

$$\Gamma_{nrj}^{kp\alpha} = \frac{1}{\gamma_{kp}\gamma_{nr}}(-1)^{p}\varepsilon_{kp}\varepsilon_{nr}\left(\frac{c_j}{2}\right)^{r+1}\left(\frac{c_\alpha}{2}\right)^{p};$$

$$\gamma_{kp} = \Gamma\left(\frac{p-k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k+p}{2}+\frac{3}{2}\right);$$

$$v_{\nu,n,k}^{j,\alpha} = \begin{cases} u_{\nu,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha}u_{\nu+1,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \ge n+k+2, \\ \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3}u_{n+k+2,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \le n+k+1, \end{cases}$$

$$w_{\nu,n,k}^{j,\alpha} = \begin{cases} u_{\nu,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha}u_{\nu+1,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \ge n+k+2, \\ \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3}u_{n+k+2,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha}, & \nu \le n+k+1, \end{cases}$$

$$u_{n,m}^{+(4)j,\alpha} = \begin{cases} \frac{(n-m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}}P_n^m(\cos\theta_{j\alpha})e^{im\varphi_{j\alpha}}, \ n \ge m, \\ \frac{(-1)^m(n+m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}}P_n^{-m}(\cos\theta_{j\alpha})e^{im\varphi_{j\alpha}}, \ n < m, \end{cases}$$

$(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$ — *сферические координаты точки* O_α *в системе координат с началом в точке* O_j.

Доведення. Формулы (1.29), (1.30) из параграфа 1.2 могут быть записаны в виде одной формулы

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j,\eta_j,\varphi_j) = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k+1}\left\{\delta_{st}\mathrm{f1}_{n,m,j}^{k,l,\alpha} + \delta_{t1}\delta_{s2}\left[q_{j0}^2\mathrm{f2}_{n,m,j}^{k,l,\alpha} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + q_{\alpha0}^2\mathrm{f3}_{n,m,j}^{k,l,\alpha} + z_{j\alpha}\mathrm{f4}_{n,m,j}^{k,l,\alpha}\right]\right\}\mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)}(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\varphi_\alpha). \quad (1.70)$$

Преобразуем вектор-функцию $\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,n}^{+(5)}$, используя формулу (1.70):

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,n}^{+(5)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k+1}\mathrm{f1}_{n,n,j}^{k,l,\alpha}\left[\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)} - \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(5)}\right]. \quad (1.71)$$

Учитывая, что справедливо соотношение

$$\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(5)} - \mathbf{U}_{3,k,l}^{-(5)} = 2u_{k,l-1}^{-(5)}\mathbf{e}_{-1} - u_{k,l}^{-(5)}\mathbf{e}_0 = \begin{cases} 0, & l=-k-1, \\ -u_{k,-k}^{-(5)}\mathbf{e}_0, & l=-k, \end{cases}$$

разложение (1.71) можно представить в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{1,n,n} = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k+1}(\delta_{t1}-\delta_{t3})\mathrm{f1}^{k,l,\alpha}_{n,n,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,k,l}, \quad n \geq 1. \tag{1.72}$$

Аналогично вектор-функция $\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{1,n,-n}$ с учетом соотношения

$$\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,l} + \mathbf{U}^{-(5)}_{3,k,l} = -2u^{-(5)}_{k,l+1}\mathbf{e}_1 - u^{-(5)}_{k,l}\mathbf{e}_0 = \begin{cases} 0, \quad l = k+1, \\ -u^{-(5)}_{k,k}\mathbf{e}_0, \quad l = k, \end{cases}$$

представима разложением

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{1,n,-n} = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k}(\delta_{t1}+\delta_{t3})\mathrm{f1}^{k,l,\alpha}_{n,-n,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,k,l}. \tag{1.73}$$

Запишем разложение перемещения $\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{3,n,n}$:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{3,n,n} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k+1}\Big\{ -\chi\mathrm{f1}^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,l} + (1+\chi)\mathrm{f1}^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{3,k,l} + \\ + \mathrm{f1}^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{2,k,l} + \mathrm{g1}^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,l}\Big\}. \tag{1.74}$$

Заметим, что выполняется равенство

$$-\chi\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,l} + (1+\chi)\mathbf{U}^{-(5)}_{3,k,l} + \mathbf{U}^{-(5)}_{2,k,l} = \begin{cases} -u^{-(5)}_{k,-k}\mathbf{e}_1, \quad l = -k-1; \\ 0, \quad l = -k. \end{cases} \tag{1.75}$$

Теперь можо перегруппировать слагаемые в формуле (1.74) следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{3,n,n} = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k+1}^{k+1}\Big\{\Big[-\chi\delta_{t1} + (1+\chi)\delta_{t3} + \delta_{t2}\Big]\mathrm{f1}^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j} + \\ + \delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j}\Big\}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,k,l} + \sum_{k=0}^{\infty}\Big[\mathrm{f1}^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j} + \mathrm{g1}^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j}\Big]\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{g1}^{k,-k,\alpha}_{n,n+1,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,-k}. \tag{1.76}$$

С помощью рекуррентных формул для функций Лежандра преобразуем сумму

$$\mathrm{f1}^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j}+z_{j\alpha}\mathrm{f4}^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j}=(-1)^{n-k}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma^{kp\alpha}_{nrj}\left[u^{+(4)j,\alpha}_{p+r,n+k+2}+z_{j\alpha}u^{+(4)j,\alpha}_{p+r+1,n+k+2}\right]. \quad (1.77)$$

Так как справедливо соотношение

$$u^{+(4)j,\alpha}_{n+k,n+k+2}+z_{j\alpha}u^{+(4)j,\alpha}_{n+k+1,n+k+2}=\frac{r^2_{j\alpha}}{2n+2k+3}u^{+(4)j,\alpha}_{n+k+2,n+k+2},$$

то равенство (1.77) может быть записано в виде

$$\mathrm{f1}^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j}+z_{j\alpha}\mathrm{f4}^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j}=(-1)^{n-k}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma^{kp\alpha}_{nrj}v^{j,\alpha}_{r+p,n,k}\equiv\mathrm{f5}^{k,\alpha}_{n,j},$$

где $v^{j,\alpha}_{r+p,n,k}$ определено в условии теоремы. Подставляя эту формулу в разложение (1.76), получаем

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{3,n,n}=\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k+1}^{k+1}\left\{\left[-\chi\delta_{t1}+(1+\chi)\delta_{t3}+\delta_{t2}\right]\mathrm{f1}^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j}+\right.$$
$$\left.+\delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j}\right\}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,k,l}+\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{g2}^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,-k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{g1}^{k,-k,\alpha}_{n,n+1,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,-k}. \quad (1.78)$$

Подобным образом можно записать

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{3,n,-n}=\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k-1}\left\{\left[-\chi\delta_{t1}-(1+\chi)\delta_{t3}+\delta_{t2}\right]\mathrm{f1}^{k,l,\alpha}_{n,-n-1,j}+\right.$$
$$\left.+\delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,l,\alpha}_{n,-n-1,j}\right\}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,k,l}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\mathrm{f1}^{k,k+1,\alpha}_{n,-n-1,j}+\mathrm{g1}^{k,k+1,\alpha}_{n,-n-1,j}\right]\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{g1}^{k,k,\alpha}_{n,-n-1,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,k}, \quad (1.79)$$

причем

$$\mathrm{f1}^{k,k+1,\alpha}_{n,-n-1,j}+z_{j\alpha}\mathrm{f4}^{k,k+1,\alpha}_{n,-n-1,j}==(-1)^{k-n}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma^{kp\alpha}_{nrj}w^{j,\alpha}_{r+p,n,k}\equiv\mathrm{f6}^{k,\alpha}_{n,j},$$

где $w^{j,\alpha}_{r+p,n,k}$ приведено в условии теоремы. Используя этот результат, получаем

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{3,n,-n} = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k-1}\Bigg\{\Bigg[-\chi\delta_{t1} - (1+\chi)\delta_{t3} + \delta_{t2}\Bigg]\mathrm{f1}^{k,l,\alpha}_{n,-n-1,j} +$$
$$+ \delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,l,\alpha}_{n,-n-1,j}\Bigg\}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,k,l} + \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{g3}^{k,k+1,\alpha}_{n,-n-1,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{g1}^{k,k,\alpha}_{n,-n-1,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,k}. \quad (1.80)$$

Заметим, что перемещения $\mathbf{U}^{-(5)}_{2,k,l} = 0$ при $l = \pm(k+1)$. Поэтому из (1.70) следует разложение

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{2,n,n} = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}\Bigg\{\delta_{t2}\mathrm{f1}^{k,l,\alpha}_{n,n,j} + \delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,l,\alpha}_{n,n,j}\Bigg\}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,k,l} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{g1}^{k,k+1,\alpha}_{n,n,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{g1}^{k,-k-1,\alpha}_{n,n,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,-k-1}. \quad (1.81)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{2,n,-n} = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}\Bigg\{\delta_{t2}\mathrm{f1}^{k,l,\alpha}_{n,-n,j} + \delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,l,\alpha}_{n,-n,j}\Bigg\}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,k,l} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{g1}^{k,k+1,\alpha}_{n,-n,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{g1}^{k,-k-1,\alpha}_{n,-n,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,-k-1}. \quad (1.82)$$

Таким образом, доказана формула

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{s,n,m}(\xi_j,\eta_j,\varphi_j) = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k+1} T^{t,k,l,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,k,l}(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\varphi_\alpha), \quad (1.83)$$

где коэффициенты $T^{t,k,l,\alpha}_{s,n,m,j}$ описаны в условии теоремы.

Из формул (1.64) — (1.68) следуют соотношения

$$\mathbf{U}^{-(5)}_{2,k,k} = \chi\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{1,k,k} + (1+\chi)\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{3,k,k}; \quad (1.84)$$

$$\mathbf{U}^{-(5)}_{2,k,-k} = \chi\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{1,k,-k} - (1+\chi)\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{3,k,-k}; \quad (1.85)$$

$$\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,k+1} = \tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{2,k,k}, \quad \mathbf{U}^{-(5)}_{2,k,k+1} = 0, \quad \mathbf{U}^{-(5)}_{3,k,k+1} = -\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{2,k,k}; \quad (1.86)$$

$$\mathbf{U}^{-(5)}_{1,k,-k-1} = \tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{2,k,-k}, \quad \mathbf{U}^{-(5)}_{2,k,-k-1} = 0, \quad \mathbf{U}^{-(5)}_{3,k,-k-1} = \tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{2,k,-k}; \quad (1.87)$$

$$\mathbf{U}^{-(5)}_{1,0,1} = \tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{2,0,0}, \quad \mathbf{U}^{-(5)}_{1,0,-1} = \tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{3,0,0}, \quad \mathbf{U}^{-(5)}_{2,0,\pm1} = 0; \quad (1.88)$$

$$\mathbf{U}^{-(5)}_{3,0,1} = -\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{2,0,0},\ \mathbf{U}^{-(5)}_{3,0,-1} = \tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{3,0,0},\ \mathbf{U}^{-(5)}_{2,0,0} = \chi\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{1,0,0},\ \mathbf{U}^{-(5)}_{3,0,0} = 0. \qquad (1.89)$$

Преобразуем разложение (1.83), учитывая равенства (1.84) — (1.89):

$$\begin{gathered}
\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{s,n,m} = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=-k+1}^{k-1} T^{t,k,l,\alpha}_{s,n,m,j}\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{t,k,l} + \\
+ \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty} T^{t,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,k,k} + \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty} T^{t,k,k+1,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,k,k+1} + \\
+ \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty} T^{t,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,k,-k} + \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty} T^{t,k,-k-1,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,k,-k-1} + \\
+ \sum_{t=1}^{3} T^{t,0,-1,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,0,-1} + \sum_{t=1}^{3} T^{t,0,0,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,0,0} + \sum_{t=1}^{3} T^{t,0,1,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(5)}_{t,0,1} = \\
= \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=-k+1}^{k-1} T^{t,k,l,\alpha}_{s,n,m,j}\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{t,k,l} + \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\delta_{t1}\left[T^{1,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} + \chi T^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}\right] + \right. \\
\left. + \delta_{t2}\left[T^{1,k,k+1,\alpha}_{s,n,m,j} - T^{3,k,k+1,\alpha}_{s,n,m,j}\right] + \delta_{t3}\left[T^{3,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} + (1+\chi)T^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}\right]\right\}\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{t,k,k} + \\
+ \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\delta_{t1}\left[T^{1,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} + \chi T^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}\right] + \delta_{t2}\left[T^{1,k,-k-1,\alpha}_{s,n,m,j} + T^{3,k,-k-1,\alpha}_{s,n,m,j}\right] + \right. \\
\left. + \delta_{t3}\left[T^{3,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} - (1+\chi)T^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}\right]\right\}\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{t,k,-k} + \sum_{t=1}^{3}\left\{\delta_{t1}\left[T^{1,0,0,\alpha}_{s,n,m,j} + \chi T^{2,0,0,\alpha}_{s,n,m,j}\right] + \right. \\
\left. + \delta_{t2}\left[T^{1,0,1,\alpha}_{s,n,m,j} - T^{3,0,1,\alpha}_{s,n,m,j}\right] + \delta_{t3}\left[T^{1,0,-1,\alpha}_{s,n,m,j} + T^{3,0,-1,\alpha}_{s,n,m,j}\right]\right\}\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{t,0,0}. \qquad (1.90)
\end{gathered}$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{s,n,m}(\xi_j,\eta_j,\varphi_j) = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k} \tilde{T}^{t,k,l,\alpha}_{s,n,m,j}\tilde{U}^{-(5)}_{t,k,l}(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\varphi_\alpha), \qquad (1.91)$$

где коэффиценты $\tilde{T}^{t,k,l,\alpha}_{s,n,m,j}$ приведены в формулировке теоремы. Теорема доказана.

Приведенные в предыдущем параграфе внешние решения уравнения Ламе не при всех значениях параметров n и m регулярны, а система внутренних решений не является линейно независимой. В работе [60] были построены такие системы решений уравнения (1.21) в областях $\Omega_6^{\pm}$, которые являются линейными комбинациями решений (1.40), (1.41) и удовлетворяют всем свойствам базисности [62]. Положим

$$\tilde{\mathbf{U}}^{\pm(6)}_{s,n,m} = \mathbf{U}^{\pm(6)}_{s,n,m}; \quad s = \overline{1,3}; \quad n = 1, 2, \ldots, |m| \leq n-1; \tag{1.92}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(6)}_{1,n,\pm n} = \mathbf{U}^{\pm(6)}_{1,n,\pm n} \mp \mathbf{U}^{\pm(6)}_{3,n,\pm n}; \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{1.93}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(6)}_{1,0,0} = -\chi \mathbf{U}^{+(6)}_{1,0,1} + (1+\chi)\mathbf{U}^{+(6)}_{3,0,1} + \mathbf{U}^{+(6)}_{2,0,1}; \tag{1.94}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(6)}_{2,n,\pm n} = \mathbf{U}^{+(6)}_{2,n,\pm n}; \quad n = 0, 1, \ldots; \tag{1.95}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(6)}_{3,n,\pm n} = -\chi \mathbf{U}^{+(6)}_{1,n,\pm(n+1)} \pm (1+\chi)\mathbf{U}^{+(6)}_{3,n,\pm(n+1)} + \mathbf{U}^{+(6)}_{2,n,\pm(n+1)}; \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{1.96}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(6)}_{3,0,0} = -\chi \mathbf{U}^{+(6)}_{1,0,-1} - (1+\chi)\mathbf{U}^{+(6)}_{3,0,-1} + \mathbf{U}^{+(6)}_{2,0,-1}; \tag{1.97}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{-(6)}_{1,n,\pm n} = \mathbf{U}^{-(6)}_{1,n,\pm n}; \quad n = 0, 1, \ldots; \tag{1.98}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{-(6)}_{2,n,\pm n} = \mathbf{U}^{-(6)}_{1,n,\pm(n+1)}; \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{1.99}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{-(6)}_{3,n,\pm n} = \mathbf{U}^{-(6)}_{3,n,\pm n}; \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{1.100}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{-(6)}_{2,0,0} = \mathbf{U}^{-(6)}_{1,0,1}; \tag{1.101}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{-(6)}_{3,0,0} = \mathbf{U}^{-(6)}_{1,0,-1}. \tag{1.102}$$

В работе [75] получены теоремы сложения для решений (1.92) — (1.102).

Теорема 1.8. *Справедливы разложения внешних модифицированных базисных решений уравнения Ламе в сжатой сфероидальной системе координат с началом в точке O_j по внутренним модифицированным решениям в сжатой сфероидальной системе координат с началом в точке O_α при $\tilde{\xi}_\alpha \in (0, \beta_{j\alpha})$:*

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(6)}_{s,n,m}(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^{3} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k} \tilde{T}^{t,k,l,\alpha}_{s,n,m,j} \tilde{U}^{-(6)}_{t,k,l}(\tilde{\xi}_\alpha, \tilde{\eta}_\alpha, \varphi_\alpha), \tag{1.103}$$

где

$$\beta_{j\alpha} = \mathrm{Arsh} \frac{\sqrt{t^2_{j\alpha} + \rho^2_{j\alpha} - c^2_\alpha + \sqrt{\left(t^2_{j\alpha} + \rho^2_{j\alpha} - c^2_\alpha\right)^2 + 4c^2_\alpha \rho^2_{j\alpha}}}}{c_\alpha \sqrt{2}},$$

$$t_{j\alpha} = \max(|z_{j\alpha}| - c_j, 0);$$

$$\tilde{T}^{t,k,\ell,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{t,k,\ell,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1, |\ell| \leq k-1;$$

$$\tilde{T}^{1,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} + \chi T^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,k,k+1,\alpha}_{s,n,m,j} - T^{3,k,k+1,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}^{3,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{3,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} + (1+\chi) T^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}^{1,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} + \chi T^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,k,-k-1,\alpha}_{s,n,m,j} + T^{3,k,-k-1,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}^{3,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{3,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} - (1+\chi) T^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}^{3,0,0,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,0,-1,\alpha}_{s,n,m,j} + T^{3,0,-1,\alpha}_{s,n,m,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{s,n,m,j} = \delta_{st} \mathrm{f1}^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} + \delta_{s2}\delta_{t1} \mathrm{g1}^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j}, \quad (n \geq 1) \wedge (|m| \leq n-1);$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{1,n,n,j} = (\delta_{t1} - \delta_{t3}) \mathrm{f1}^{k,\ell,\alpha}_{n,n,j}, \quad (-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1);$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{1,n,n,j} = 0, \quad n \geq 1;$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{1,n,-n,j} = (\delta_{t1} + \delta_{t3}) \mathrm{f1}^{k,\ell,\alpha}_{n,-n,j}, \quad (-k-1 \leq \ell \leq k) \wedge (n \geq 1);$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{1,0,0,j} = \tilde{\delta}_t \mathrm{f1}^{k,\ell,\alpha}_{0,1,j} + \delta_{t1} \mathrm{g1}^{k,\ell,\alpha}_{0,1,j}, \quad 1-k \leq \ell \leq k+1;$$

$$T^{t,k,-k,\alpha}_{1,0,0,j} = \delta_{t1} \mathrm{g1}^{k,-k,\alpha}_{0,1,j};$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{1,0,0,j} = \delta_{t1} \mathrm{g2}^{k,-k-1,\alpha}_{0,1,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{2,n,n,j} = \delta_{t2} \mathrm{f1}^{k,\ell,\alpha}_{n,n,j} + \delta_{t1} \mathrm{g1}^{k,\ell,\alpha}_{n,n,j}, \quad -k \leq \ell \leq k;$$

$$T^{t,k,k+1,\alpha}_{2,n,n,j} = \delta_{t1} \mathrm{g1}^{k,k+1,\alpha}_{n,n,j};$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{2,n,n,j} = \delta_{t1} \mathrm{g1}^{k,-k-1,\alpha}_{n,n,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{2,n,-n,j} = \delta_{t2} \mathrm{f1}^{k,\ell,\alpha}_{n,-n,j} + \delta_{t1} \mathrm{g1}^{k,\ell,\alpha}_{n,-n,j}, \quad -k \leq \ell \leq k;$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{2,n,-n,j} = \delta_{t,1} \mathrm{g1}^{k,-k-1,\alpha}_{n,-n,j};$$

$$T^{t,k,k+1,\alpha}_{2,n,-n,j} = \delta_{t,1} \mathrm{g1}^{k,k+1,\alpha}_{n,-n,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{3,n,n,j} = \tilde{\delta}_t \mathrm{f1}^{k,\ell,\alpha}_{n,n+1,j} + \delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,\ell,\alpha}_{n,n+1,j}, \quad (1-k \le \ell \le k+1) \wedge (n \ge 1);$$

$$T^{t,k,-k,\alpha}_{3,n,n,j} = \delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,-k,\alpha}_{n,n+1,j}, \quad n \ge 1;$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{3,n,n,j} = \delta_{t1}\mathrm{g2}^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j}, \quad n \ge 1;$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{3,n,-n,j} = \hat{\delta}_t \mathrm{f1}^{k,\ell,\alpha}_{n,-n-1,j} + \delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,\ell,\alpha}_{n,-n-1,j}, \quad -k-1 \le \ell \le k-1;$$

$$T^{t,k,k,\alpha}_{3,n,-n,j} = \delta_{t1}\mathrm{g1}^{k,k,\alpha}_{n,-n-1,j};$$

$$T^{t,k,k+1,\alpha}_{3,n,-n,j} = \delta_{t1}\mathrm{g3}^{k,k+1,\alpha}_{n,-n-1,j};$$

$$\mathrm{g1}^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} = -\bar{q}^2_{j0}\mathrm{f2}^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} - \bar{q}^2_{\alpha 0}\mathrm{f3}^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} + z_{j\alpha}\mathrm{f4}^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j};$$

$$\mathrm{g2}^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} = -\bar{q}^2_{j0}\mathrm{f2}^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} - \bar{q}^2_{\alpha 0}\mathrm{f3}^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} + \mathrm{f5}^{k,\alpha}_{n,j};$$

$$\mathrm{g3}^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} = -\bar{q}^2_{j0}\mathrm{f2}^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} - \bar{q}^2_{\alpha 0}\mathrm{f3}^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} + \mathrm{f6}^{k,\alpha}_{n,j};$$

$$\tilde{\delta}_t = -\chi\delta_{t1} + (\chi+1)\delta_{t3} + \delta_{t2};$$

$$\hat{\delta}_t = -\chi\delta_{t1} - (\chi+1)\delta_{t3} + \delta_{t2};$$

$$\mathrm{f1}^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = (-1)^{m+l}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma^{kp\alpha}_{nrj}u^{+(4)j,\alpha}_{p+r,m-\ell};$$

$$\mathrm{f2}^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = (-1)^{m+l}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n+2}^{\infty}(n-r)\Gamma^{kp\alpha}_{nrj}u^{+(4)j,\alpha}_{p+r,m-\ell};$$

$$\mathrm{f3}^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = (-1)^{m+l}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k+2}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}(k-p)\Gamma^{kp\alpha}_{nrj}u^{+(4)j,\alpha}_{p+r,m-\ell};$$

$$\mathrm{f4}^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = (-1)^{m+l}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma^{kp\alpha}_{nrj}u^{+(4)j,\alpha}_{p+r+1,m-\ell};$$

$$\mathrm{f5}^{k,\alpha}_{n,j} = (-1)^{n-k}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma^{kp\alpha}_{nrj}v^{j,\alpha}_{p+r,n,k};$$

$$\mathrm{f6}^{k,\alpha}_{n,j} = (-1)^{k-n}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma^{kp\alpha}_{nrj}w^{j,\alpha}_{p+r,n,k};$$

$$\Gamma^{kp\alpha}_{nrj} = \frac{1}{\gamma_{kp}\gamma_{nr}}(-1)^p(-i)^{p+r+1}\varepsilon_{kp}\varepsilon_{nr}\left(\frac{c_j}{2}\right)^{r+1}\left(\frac{c_\alpha}{2}\right)^p;$$

$$\gamma_{kp} = \Gamma\left(\frac{p-k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k+p}{2}+\frac{3}{2}\right);$$

$$v^{j,\alpha}_{\nu,n,k} = \begin{cases} u^{+(4)j,\alpha}_{\nu,n+k+2} + z_{j\alpha} u^{+(4)j,\alpha}_{\nu+1,n+k+2}, & \nu \geq n+k+2, \\ \frac{r^2_{j\alpha}}{2n+2k+3} u^{+(4)j,\alpha}_{n+k+2,n+k+2}, & \nu \leq n+k+1, \end{cases}$$

$$w^{j,\alpha}_{\nu,n,k} = \begin{cases} u^{+(4)j,\alpha}_{\nu,-n-k-2} + z_{j\alpha} u^{+(4)j,\alpha}_{\nu+1,-n-k-2}, & \nu \geq n+k+2, \\ \frac{r^2_{j\alpha}}{2n+2k+3} u^{+(4)j,\alpha}_{n+k+2,-n-k-2}, & \nu \leq n+k+1, \end{cases}$$

$$u^{+(4)j,\alpha}_{n,m} = \begin{cases} \frac{(n-m)!}{r^{n+1}_{j\alpha}} P^m_n(\cos\theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, \ n \geq m, \\ \frac{(-1)^m (n+m)!}{r^{n+1}_{j\alpha}} P^{-m}_n(\cos\theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, \ n < m, \end{cases}$$

$(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$ *— сферические координаты точки* O_α *в системе координат с началом в точке* O_j.

Теорема 1.8 может быть доказана аналогично теореме 1.7.

1.4. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в сферических координатах

В работе [59] были введены следующие частные решения уравнения Ламе (1.21) во внешности (внутренности) шара $\Omega^{\pm}_4 = \left\{(r,\theta,\varphi) : r \gtrless r_0\right\}$:

$$\mathbf{U}^{\pm(4)}_{s,n,m}(r,\theta,\varphi) = \mathbf{D}_s u^{\pm(4)}_{n\mp 1,m}(r,\theta,\varphi); \qquad s = 1,\, 3; \tag{1.104}$$

$$\mathbf{U}^{\pm(4)}_{2,n,m}(r,\theta,\varphi) = \mathbf{D}_2 u^{\pm(4)}_{n,m}(r,\theta,\varphi) - \frac{r_0^2}{2(n\pm 1)+1}\mathbf{D}_1 u^{\pm(4)}_{n\pm 1,m}(r,\theta,\varphi), \tag{1.105}$$

где $n = 0,\, 1,\, \ldots;\ |m| \leq n+1;\ m,n \in \mathbb{Z},\ u^{\pm(4)}_{n,m}(r,\theta,\varphi)$; $\mathbf{D}_s$ определены формулами (1.5), (1.24).

Приведем координатную форму перемещений (1.104), (1.105):

$$\mathbf{U}^{\pm(4)}_{1,n,m}(r,\theta,\varphi) = -u^{\pm(4)}_{n,m-1}(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e}_{-1} + u^{\pm(4)}_{n,m+1}(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e}_1 \mp u^{\pm(4)}_{n,m}(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e}_0; \tag{1.106}$$

$$\mathbf{U}^{+(4)}_{2,n,m}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{2n+3}\Big\{-(n-m+2)(n+m)u^{+(4)}_{n,m-1}(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e}_{-1}+$$
$$+(n-m)(n+m+2)u^{+(4)}_{n,m+1}(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e}_1 - [(n-m+1)(n+m+1)+\chi(2n+3)]\times$$
$$\times u^{+(4)}_{n,m}(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e}_0 + \left(r^2 - r_0^2\right)\nabla u^{+(4)}_{n+1,m}(r,\theta,\varphi)\Big\}; \quad (1.107)$$

$$\mathbf{U}^{-(4)}_{2,n,m}\Big(r,\theta,\varphi\Big) = \frac{1}{2n-1}\Big\{-(n-m+1)(n+m-1)u^{-(4)}_{n,m-1}\Big(r,\theta,\varphi\Big)\mathbf{e}_{-1}+$$
$$+(n-m-1)(n+m+1)u^{-(4)}_{n,m+1}\Big(r,\theta,\varphi\Big)\mathbf{e}_1+$$
$$+\Big[(n-m)(n+m)-\chi(2n-1)\Big]u^{-(4)}_{n,m}\Big(r,\theta,\varphi\Big)\mathbf{e}_0+\Big(r^2-r_0^2\Big)\nabla u^{-(4)}_{n-1,m}\Big(r,\theta,\varphi\Big)\Big\};$$
$$(1.108)$$

$$\mathbf{U}^{\pm(4)}_{3,n,m}(r,\theta,\varphi) = u^{\pm(4)}_{n,m-1}(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e}_{-1} + u^{\pm(4)}_{n,m+1}(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e}_1. \quad (1.109)$$

В работе [62] доказана базисность решений (1.104), (1.105) в областях $\Omega_4^{\pm}$.

Теорема 1.9. *При r_2, $r_{20} < r_{12}$ справедливы разложения*

$$\mathbf{U}^{+(4)}_{s,n,m}(r_1,\theta_1,\varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^{k+l+1} f^{(44)k,l}_{n,m}\mathbf{U}^{-(4)}_{s,k,l}(r_2,\theta_2,\varphi_2)\,,\ s=1,\,3; \quad (1.110)$$

$$\mathbf{U}^{+(4)}_{2,n,m}(r_1,\theta_1,\varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^{k+l}\Big[f^{(44)k,l}_{n,m}\mathbf{U}^{-(4)}_{2,k,l}(r_2,\theta_2,\varphi_2)+$$
$$+\tilde{f}^{+(44)k,l}_{n,m}\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,l}(r_2,\theta_2,\varphi_2)\Big], \quad (1.111)$$

где

$$f^{(44)k,l}_{n,m} = u^{+(4)}_{n+k,m-l}(r_{12},\theta_{12},\varphi_{12})\,; \quad (1.112)$$

$$\tilde{f}^{+(44)k,l}_{n,m} = \frac{r_{20}^2}{2k+3}f^{(44)k+2,l}_{n,m} - z_{12}f^{(44)k+1,l}_{n,m} + \frac{r_{10}^2}{2n+3}f^{(44)k+1,l}_{n+1,m}. \quad (1.113)$$

При r_1, $r_{10} < r_{12}$ справедливы разложения

$$\mathbf{U}^{+(4)}_{s,n,m}(r_2,\theta_2,\varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+l+1} f^{(44)k,l}_{n,m}\mathbf{U}^{-(4)}_{s,k,l}(r_1,\theta_1,\varphi_1)\,;\ s=1,\,3; \quad (1.114)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{+(4)}(r_2,\theta_2,\varphi_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+l}\Big[f_{n,m}^{(44)k,l}\mathbf{U}_{2,k,l}^{-(4)}(r_1,\theta_1,\varphi_1)+$$
$$+\tilde{f}_{n,m}^{-(44)k,l}\mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)}(r_1,\theta_1,\varphi_1)\Big], \quad (1.115)$$

где

$$\tilde{f}_{n,m}^{-(44)k,l}=\frac{r_{10}^2}{2k+3}f_{n,m}^{(44)k+2,l}-z_{12}f_{n,m}^{(44)k+1,l}+\frac{r_{20}^2}{2n+3}f_{n+1,m}^{(44)k+1,l}. \quad (1.116)$$

1.5. Теоремы сложения решений уравнения Ламе для модифицированного базиса в сферических координатах

Приведенные в предыдущем параграфе внешние решения уравнения Ламе не при всех значениях параметров n и m регулярны, а система внутренних решений не является линейно независимой. В работе [60] были построены такие системы решений уравнения (1.21) в областях $\Omega_4^{\pm}$, которые являются линейными комбинациями решений (1.104), (1.105) и удовлетворяют всем свойствам базисности [62]. Положим

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)}=\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(4)};\quad s=\overline{1,3};\quad n=1,2,\ldots,|m|\le n-1; \quad (1.117)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{+(4)}=\mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{\pm(4)}\mp\mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{\pm(4)};\quad n=1,2,\ldots; \quad (1.118)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,0,0}^{+(4)}=-\chi\mathbf{U}_{1,0,1}^{+(4)}+(1+\chi)\mathbf{U}_{3,0,1}^{+(4)}+\mathbf{U}_{2,0,1}^{+(4)}; \quad (1.119)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{+(4)}=\mathbf{U}_{2,n,\pm n}^{+(4)};\quad n=0,1,\ldots; \quad (1.120)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{+(4)}=-\chi\mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{+(4)}\pm(1+\chi)\mathbf{U}_{3,n,\pm(n+1)}^{+(4)}+\mathbf{U}_{2,n,\pm(n+1)}^{+(4)};\quad n=1,2,\ldots; \quad (1.121)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{+(4)}=-\chi\mathbf{U}_{1,0,-1}^{+(4)}-(1+\chi)\mathbf{U}_{3,0,-1}^{+(4)}+\mathbf{U}_{2,0,-1}^{+(4)}; \quad (1.122)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{-(4)}=\mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{-(4)};\quad n=0,1,\ldots; \quad (1.123)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{-(4)}=\mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{-(4)};\quad n=1,2,\ldots; \quad (1.124)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{-(4)}=\mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{-(4)};\quad n=1,2,\ldots; \quad (1.125)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{2,0,0} = \mathbf{U}^{-(4)}_{1,0,1}; \tag{1.126}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{3,0,0} = \mathbf{U}^{-(4)}_{1,0,-1}. \tag{1.127}$$

Теорема 1.10. *Справедливы разложения внешних модифицированных базисных решений уравнения Ламе в сферической системе координат с началом в точке O_j по внутренним модифицированным решениям в сферической системе координат с началом в точке O_α при $r_\alpha < r_{j\alpha}$:*

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{s,n,m}(r_j,\theta_j,\varphi_j) = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k} \tilde{T}^{t,k,l,\alpha}_{s,n,m,j}\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{t,k,l}(r_\alpha,\theta_\alpha,\varphi_\alpha), \tag{1.128}$$

где

$$\tilde{T}^{t,k,\ell,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{t,k,\ell,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1, |\ell| \leq k-1;$$

$$\tilde{T}^{1,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} - \chi T^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,k,k+1,\alpha}_{s,n,m,j} - T^{3,k,k+1,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{T}^{3,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{3,k,k,\alpha}_{s,n,m,j} - (1+\chi)T^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}^{1,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} - \chi T^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,k,-k-1,\alpha}_{s,n,m,j} + T^{3,k,-k-1,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}^{3,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{3,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j} + (1+\chi)T^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}, \quad k \geq 1;$$

$$\tilde{T}^{3,0,0,\alpha}_{s,n,m,j} = T^{1,0,-1,\alpha}_{s,n,m,j} + T^{3,0,-1,\alpha}_{s,n,m,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{s,n,m,j} = (-1)^{k+l+s}\left\{\delta_{st} f^{k,l,\alpha}_{n,m,j} + \delta_{s2}\delta_{t1} g^{k,l,\alpha}_{n,m,j}\right\}, \quad (n \geq 1, |m| \leq n-1);$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{1,n,n,j} = (-1)^{k+l+1}(\delta_{t1} - \delta_{t3}) f^{k,\ell,\alpha}_{n,n,j}, \quad (-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1);$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{1,n,n,j} = 0, \quad n \geq 1;$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{1,n,-n,j} = (-1)^{k+l+1}(\delta_{t1} + \delta_{t3}) f^{k,\ell,\alpha}_{n,-n,j}, \quad (-k-1 \leq \ell \leq k) \wedge (n \geq 1);$$

$$T^{t,k,k+1,\alpha}_{1,n,-n,j} = 0, \quad n \geq 1;$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{1,0,0,j} = (-1)^{k+l+1}(\tilde{\delta}_t f^{k,\ell,\alpha}_{0,1,j} - \delta_{t1} g^{k,\ell,\alpha}_{0,1,j}), \quad 1-k \leq \ell \leq k+1;$$

$$T^{t,k,-k,\alpha}_{1,0,0,j} = \delta_{t1} g^{k,-k,\alpha}_{0,1,j};$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{1,0,0,j} = \delta_{t1} \tilde{g}^{k,-k-1,\alpha}_{0,1,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{2,n,n,j} = (-1)^{k+l}(\delta_{t2} f^{k,\ell,\alpha}_{n,n,j} + \delta_{t1} g^{k,\ell,\alpha}_{n,n,j}), \quad -k \le \ell \le k;$$

$$T^{t,k,k+1,\alpha}_{2,n,n,j} = -\delta_{t1} g^{k,k+1,\alpha}_{n,n,j};$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{2,n,n,j} = -\delta_{t1} g^{k,-k-1,\alpha}_{n,n,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{2,n,-n,j} = (-1)^{k+l}(\delta_{t2} f^{k,\ell,\alpha}_{n,-n,j} + \delta_{t1} g^{k,\ell,\alpha}_{n,-n,j}), \quad (-k \le \ell \le k) \wedge (n \ge 1);$$

$$T^{t,k,k+1,\alpha}_{2,n,-n,j} = -\delta_{t,1} g^{k,k+1,\alpha}_{n,-n,j}, \quad n \ge 1;$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{2,n,-n,j} = -\delta_{t,1} g^{k,-k-1,\alpha}_{n,-n,j}, \quad n \ge 1;$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{3,n,n,j} = (-1)^{k+l+1}(\tilde{\delta}_t f^{k,\ell,\alpha}_{n,n+1,j} - \delta_{t1} g^{k,\ell,\alpha}_{n,n+1,j}), \quad (1-k \le \ell \le k+1) \wedge (n \ge 1);$$

$$T^{t,k,-k,\alpha}_{3,n,n,j} = \delta_{t1} g^{k,-k,\alpha}_{n,n+1,j}, \quad n \ge 1;$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{3,n,n,j} = \delta_{t1} \tilde{g}^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j}, \quad n \ge 1;$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{3,n,-n,j} = (-1)^{k+l+1}(\hat{\delta}_t f^{k,\ell,\alpha}_{n,-n-1,j} - \delta_{t1} g^{k,\ell,\alpha}_{n,-n-1,j}), \quad -k-1 \le \ell \le k-1;$$

$$T^{t,k,k,\alpha}_{3,n,-n,j} = \delta_{t1} g^{k,k,\alpha}_{n,-n-1,j};$$

$$T^{t,k,k+1,\alpha}_{3,n,-n,j} = \delta_{t1} \tilde{g}^{k,k+1,\alpha}_{n,-n-1,j};$$

$$g^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = \left(\frac{r^2_{j0}}{2n+3} + \frac{r^2_{\alpha 0}}{2k+3} \right) f^{k+2,l,\alpha}_{n,m,j} - z_{j\alpha} f^{k+1,l,\alpha}_{n,m,j};$$

$$\tilde{g}^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = \left(\frac{r^2_{j\alpha}}{2n+2k+3} - \frac{r^2_{j0}}{2n+3} - \frac{r^2_{\alpha 0}}{2k+3} \right) f^{k+1,l,\alpha}_{n+1,m,j};$$

$$\tilde{\delta}_t = -\chi \delta_{t1} + (\chi+1)\delta_{t3} - \delta_{t2};$$

$$\hat{\delta}_t = -\chi \delta_{t1} - (\chi+1)\delta_{t3} - \delta_{t2};$$

$$f^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = u^{+(4)j,\alpha}_{n+k,m-\ell};$$

$$u^{+(4)j,\alpha}_{n,m} = \begin{cases} \frac{(n-m)!}{r^{n+1}_{j\alpha}} P^m_n(\cos\theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, \ n \ge m, \\ \frac{(-1)^m (n+m)!}{r^{n+1}_{j\alpha}} P^{-m}_n(\cos\theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, \ n < m; \end{cases}$$

$(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$ — *сферические координаты точки* O_α *в системе координат с началом в точке* O_j.

Доведення. Формулы (1.110), (1.111) из параграфа 1.4 могут быть записаны в виде одной формулы

$$\mathbf{U}^{+(4)}_{s,n,m}=\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k+1}(-1)^{k+l+s}\Bigg\{\delta_{st}f^{k,l,\alpha}_{n,m,j}+$$
$$+\delta_{t1}\delta_{s2}\Bigg[\left(\frac{r^2_{j0}}{2n+3}+\frac{r^2_{\alpha0}}{2k+3}\right)f^{k+2,l,\alpha}_{n,m,j}-z_{j\alpha}f^{k+1,l,\alpha}_{n,m,j}\Bigg]\Bigg\}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,k,l}. \quad (1.129)$$

Преобразуем вектор-функцию $\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{1,n,n}$, используя формулу (1.129):

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{1,n,n}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k+1}f^{k,l,\alpha}_{n,n,j}\Big[\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,l}-\mathbf{U}^{-(4)}_{3,k,l}\Big]. \quad (1.130)$$

Учитывая, что справедливо соотношение

$$\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,l}-\mathbf{U}^{-(4)}_{3,k,l}=-2u^{-(4)}_{k,l-1}\mathbf{e}_{-1}+u^{-(4)}_{k,l}\mathbf{e}_0=\begin{cases}0, & l=-k-1,\\ u^{-(4)}_{k,-k}\mathbf{e}_0, & l=-k,\end{cases}$$

разложение (1.130) можно представить в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{1,n,n}=\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k+1}(-1)^{k+l+1}(\delta_{t1}-\delta_{t3})f^{k,l,\alpha}_{n,n,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,k,l},\quad n\geq 1. \quad (1.131)$$

Аналогично вектор-функция $\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{1,n,-n}$ с учетом соотношения

$$\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,l}+\mathbf{U}^{-(4)}_{3,k,l}=2u^{-(4)}_{k,l+1}\mathbf{e}_1+u^{-(4)}_{k,l}\mathbf{e}_0=\begin{cases}0, & l=k+1,\\ u^{-(4)}_{k,k}\mathbf{e}_0, & l=k,\end{cases}$$

представима разложением

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{1,n,-n}=\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k}(-1)^{k+l+1}(\delta_{t1}+\delta_{t3})f^{k,l,\alpha}_{n,-n,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,k,l}. \quad (1.132)$$

Запишем разложение перемещения $\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{3,n,n}$:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{3,n,n}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k+1}(-1)^{k+l+1}\Bigg\{-\chi f^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,l}+(1+\chi)f^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{3,k,l}-$$
$$-f^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{2,k,l}-g^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,l}\Bigg\}. \quad (1.133)$$

Заметим, что выполняется равенство

$$
-\chi\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,l} + (1+\chi)\mathbf{U}^{-(4)}_{3,k,l} - \mathbf{U}^{-(4)}_{2,k,l} = \begin{cases} u^{-(4)}_{k,-k}\mathbf{e}_1, & l = -k-1; \\ 0, & l = -k. \end{cases} \tag{1.134}
$$

Теперь можо перегруппировать слагаемые в формуле (1.133) следующим образом:

$$
\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{3,n,n} = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k+1}^{k+1}(-1)^{k+l+1}\Bigg\{\Big[-\chi\delta_{t1} + (1+\chi)\delta_{t3} - \delta_{t2}\Big]f^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j} -
$$
$$
-\delta_{t1}g^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j}\Bigg\}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,k,l} + \sum_{k=0}^{\infty}\Big[f^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j} - g^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j}\Big]\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty}g^{k,-k,\alpha}_{n,n+1,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,-k}. \tag{1.135}
$$

С помощью рекуррентных формул для функций Лежандра преобразуем сумму

$$
f^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j} + z_{j\alpha}f^{k+1,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j} = u^{+(4)j,\alpha}_{n+k,n+k+2} + z_{j\alpha}u^{+(4)j,\alpha}_{n+k+1,n+k+2}. \tag{1.136}
$$

Так как справедливо соотношение

$$
u^{+(4)j,\alpha}_{n+k,n+k+2} + z_{j\alpha}u^{+(4)j,\alpha}_{n+k+1,n+k+2} = \frac{r^2_{j\alpha}}{2n+2k+3}u^{+(4)j,\alpha}_{n+k+2,n+k+2},
$$

то равенство (1.136) может быть записано в виде

$$
f^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j} + z_{j\alpha}f^{k+1,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j} = \frac{r^2_{j\alpha}}{2n+2k+3}u^{+(4)j,\alpha}_{n+k+2,n+k+2}.
$$

Подставляя эту формулу в разложение (1.135), получаем

$$
\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{3,n,n} = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k+1}^{k+1}(-1)^{k+l+1}\Bigg\{\Big[-\chi\delta_{t1} + (1+\chi)\delta_{t3} - \delta_{t2}\Big]f^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j} -
$$
$$
-\delta_{t1}g^{k,l,\alpha}_{n,n+1,j}\Bigg\}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,k,l} + \sum_{k=0}^{\infty}g^{k,-k,\alpha}_{n,n+1,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,-k} +
$$
$$
+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r^2_{j\alpha}}{2n+2k+3} - \frac{r^2_{j0}}{2n+3} - \frac{r^2_{\alpha 0}}{2k+3}\right)f^{k+2,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,-k-1}. \tag{1.137}
$$

Подобным образом можно записать

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{3,n,-n} = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k-1}(-1)^{k+l+1}\Big\{\Big[-\chi\delta_{t1}-(1+\chi)\delta_{t3}-\delta_{t2}\Big]f^{k,l,\alpha}_{n,-n-1,j}-$$
$$-\delta_{t1}g^{k,l,\alpha}_{n,-n-1,j}\Big\}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,k,l}+\sum_{k=0}^{\infty}g^{k,k,\alpha}_{n,-n-1,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,k}+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r^2_{j\alpha}}{2n+2k+3}-\frac{r^2_{j0}}{2n+3}-\frac{r^2_{\alpha 0}}{2k+3}\right)f^{k+2,k+1,\alpha}_{n,-n-1,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,k+1}. \quad (1.138)$$

Заметим, что перемещение $\mathbf{U}^{-(4)}_{2,k,l}=0$ при $l=\pm(k+1)$. Поэтому из (1.129) следует разложение

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{2,n,n} = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}(-1)^{k+l}\Big\{\delta_{t2}f^{k,l,\alpha}_{n,n,j}+\delta_{t1}g^{k,l,\alpha}_{n,n,j}\Big\}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,k,l}-$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}g^{k,k+1,\alpha}_{n,n,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}g^{k,-k-1,\alpha}_{n,n,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,-k-1}, \quad (1.139)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{2,n,-n} = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}(-1)^{k+l}\Big\{\delta_{t2}f^{k,l,\alpha}_{n,-n,j}+\delta_{t1}g^{k,l,\alpha}_{n,-n,j}\Big\}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,k,l}-$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}g^{k,k+1,\alpha}_{n,-n,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}g^{k,-k-1,\alpha}_{n,-n,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,-k-1}. \quad (1.140)$$

Таким образом, доказана формула

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{s,n,m}(r_j,\theta_j,\varphi_j) = \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k+1}T^{t,k,l,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,k,l}(r_\alpha,\theta_\alpha,\varphi_\alpha), \quad (1.141)$$

где коэффициенты $T^{t,k,l,\alpha}_{s,n,m,j}$ описаны в условии теоремы.

Из формул (1.123) — (1.127) следуют соотношения

$$\mathbf{U}^{-(4)}_{2,k,k} = -\chi\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{1,k,k}-(1+\chi)\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{3,k,k}; \quad (1.142)$$

$$\mathbf{U}^{-(4)}_{2,k,-k} = -\chi\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{1,k,-k}+(1+\chi)\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{3,k,-k}; \quad (1.143)$$

$$\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,k+1} = \tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{2,k,k}, \quad \mathbf{U}^{-(4)}_{2,k,k+1}=0, \quad \mathbf{U}^{-(4)}_{3,k,k+1} = -\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{2,k,k}; \quad (1.144)$$

$$\mathbf{U}^{-(4)}_{1,k,-k-1} = \tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{2,k,-k}, \quad \mathbf{U}^{-(4)}_{2,k,-k-1}=0, \quad \mathbf{U}^{-(4)}_{3,k,-k-1} = \tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{2,k,-k}; \quad (1.145)$$

$$\mathbf{U}^{-(4)}_{1,0,1}=\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{2,0,0},\quad \mathbf{U}^{-(4)}_{1,0,-1}=\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{3,0,0},\quad \mathbf{U}^{-(4)}_{2,0,\pm1}=0,\quad \mathbf{U}^{-(4)}_{3,0,0}=0; \tag{1.146}$$

$$\mathbf{U}^{-(4)}_{3,0,1}=-\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{2,0,0},\ \mathbf{U}^{-(4)}_{3,0,-1}=\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{3,0,0},\ \mathbf{U}^{-(4)}_{2,0,0}=-\chi\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{1,0,0}. \tag{1.147}$$

Преобразуем разложение (1.141), учитывая равенства (1.142) — (1.147):

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{s,n,m}&=\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=-k+1}^{k-1}T^{t,k,l,\alpha}_{s,n,m,j}\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{t,k,l}+\\
&+\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}T^{t,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,k,k}+\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}T^{t,k,k+1,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,k,k+1}+\\
&+\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}T^{t,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,k,-k}+\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}T^{t,k,-k-1,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,k,-k-1}+\\
&+\sum_{t=1}^{3}T^{t,0,-1,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,0,-1}+\sum_{t=1}^{3}T^{t,0,0,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,0,0}+\sum_{t=1}^{3}T^{t,0,1,\alpha}_{s,n,m,j}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,0,1}=\\
&=\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=-k+1}^{k-1}T^{t,k,l,\alpha}_{s,n,m,j}\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{t,k,l}+\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\delta_{t1}\Big[T^{1,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}-\chi T^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}\Big]+\\
&+\delta_{t2}\Big[T^{1,k,k+1,\alpha}_{s,n,m,j}-T^{3,k,k+1,\alpha}_{s,n,m,j}\Big]+\delta_{t3}\Big[T^{3,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}-(1+\chi)T^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}\Big]\Bigg\}\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{t,k,k}+\\
&+\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\delta_{t1}\Big[T^{1,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}-\chi T^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}\Big]+\delta_{t2}\Big[T^{1,k,-k-1,\alpha}_{s,n,m,j}+T^{3,k,-k-1,\alpha}_{s,n,m,j}\Big]+\\
&+\delta_{t3}\Big[T^{3,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}+(1+\chi)T^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}\Big]\Bigg\}\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{t,k,-k}+\sum_{t=1}^{3}\Bigg\{\delta_{t1}\Big[T^{1,0,0,\alpha}_{s,n,m,j}-\chi T^{2,0,0,\alpha}_{s,n,m,j}\Big]+\\
&+\delta_{t2}\Big[T^{1,0,1,\alpha}_{s,n,m,j}-T^{3,0,1,\alpha}_{s,n,m,j}\Big]+\delta_{t3}\Big[T^{1,0,-1,\alpha}_{s,n,m,j}+T^{3,0,-1,\alpha}_{s,n,m,j}\Big]\Bigg\}\tilde{\mathbf{U}}^{-(4)}_{t,0,0}.
\end{aligned} \tag{1.148}$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(4)}_{s,n,m}(r_j,\theta_j,\varphi_j)=\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}\tilde{T}^{t,k,l,\alpha}_{s,n,m,j}\tilde{U}^{-(4)}_{t,k,l}(r_\alpha,\theta_\alpha,\varphi_\alpha), \tag{1.149}$$

где коэффиценты $\tilde{T}^{t,k,l,\alpha}_{s,n,m,j}$ приведены в формулировке теоремы. Теорема доказана.

1.6. Теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе в цилиндрических координатах

В работе [60] были введены следующие частные решения уравнения Ламе (1.21) во внешности (внутренности) цилиндра $\Omega_3^{\pm} = \left\{(\rho, z\varphi) : \rho \gtrless \rho_0\right\}$:

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \lambda^{-1}\mathbf{D}_s u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi); \qquad s = 1,\, 3; \tag{1.150}$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \lambda^{-1}\mathbf{B}_2 u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi), \qquad \lambda \in \mathbb{R}; \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{1.151}$$

где

$$\mathbf{B}_2 = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla - \chi\left[\mathbf{e}_z \times \left[\nabla \times \mathbf{e}_z\right]\right]; \tag{1.152}$$

функции $u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi)$ определены в (1.4).

Приведем координатную форму перемещений (1.150), (1.151):

$$\mathbf{U}_{1,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \mp u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi)\,\mathbf{e}_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi)\,\mathbf{e}_1 + iu_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi)\,\mathbf{e}_0; \tag{1.153}$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \mp(D - \chi)\Big[u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi)\,\mathbf{e}_{-1} + u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi)\,\mathbf{e}_1\Big] + iDu_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi)\,\mathbf{e}_0; \tag{1.154}$$

$$\mathbf{U}_{3,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi) = \pm u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi)\,\mathbf{e}_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, z, \varphi)\,\mathbf{e}_1, \tag{1.155}$$

где $D = \rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}$.

В работе [62] установлена базисность решений (1.150), (1.151).

Теорема 1.11. *При $\rho_2,\, \rho_{20} \in (0; \rho_{12})$ справедливы разложения*

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l f_{\lambda,m}^{+(33)l}\mathbf{U}_{s,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2), \tag{1.156}$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, z_1, \varphi_1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l\Big[f_{\lambda,m}^{+(33)l}\mathbf{U}_{2,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2) + \tilde{f}_{\lambda,m}^{+(33)l}\mathbf{U}_{1,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, z_2, \varphi_2)\Big], \tag{1.157}$$

где

$$f_{\lambda,m}^{\pm(33)l} = u_{\lambda,m-l}^{+(3)}\left(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}\right); \tag{1.158}$$

$$\tilde{f}_{\lambda,m}^{\pm(33)l} = \rho_{12}\frac{\partial}{\partial\rho_{12}}u_{\lambda,m-l}^{+(3)}\left(\rho_{12}, z_{12}, \varphi_{12}\right). \tag{1.159}$$

При ρ_1, $\rho_{10} \in (0;\rho_{12})$ *справедливы разложения*

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}\left(\rho_2, z_2, \varphi_2\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^m f_{\lambda,m}^{-(33)l}\mathbf{U}_{s,\lambda,l}^{-(3)}\left(\rho_1, z_1, \varphi_1\right), \tag{1.160}$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{+(3)}\left(\rho_2, z_2, \varphi_2\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^m\Big[f_{\lambda,m}^{-(33)l}\mathbf{U}_{2,\lambda,l}^{-(3)}\left(\rho_1, z_1, \varphi_1\right) + \\ + \tilde{f}_{\lambda,m}^{-(33)l}\mathbf{U}_{1,\lambda,l}^{-(3)}\left(\rho_1, z_1, \varphi_1\right)\Big]. \tag{1.161}$$

Список литературы

1. Абрамян, Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра [Текст] / Б. Л. Абрамян // Докл. АН Арм. ССР. — 1954. — Т. 19, №1. — С. 3–12.
2. Акбаров, С. Д. Взаимодействие между двумя соседними круговыми отверстиями при изгибе предварительно растянутой шарнирно опертой ортотропной полосы [Текст] / С. Д. Акбаров, Н. Яхниоглу, У. Б. Есил // Механика композитных материалов. — Latvijas Universitates, Polimeru Mehanikas Instituts. — 2008. — Т. 44, №6. — С. 827–838.
3. Александров, А. Я. Пространственные задачи теории упругости [Текст] / А. Я. Александров, Ю. И. Соловьёв. — М.: Наука, 1978. — 464 с.
4. Александров, А. Я. Решение основных трёхмерных задач теории упругости для тел произвольной формы путём численной реализации метода интегральных уравнений [Текст] / А. Я. Александров // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 208, №2. — С. 291–294.
5. Амбарцумян, С. А. Разномодульная теория упругости [Текст] / С. А. Амбарцумян. — М.: Наука, 1967. — 266 с.
6. Определение напряжений в упругом пространстве со сферической полостью с учётом неоднородности [Текст] / В. И. Андреев, А. Б. Зотов, В. И. Прокопьев, В. Н. Сидоров // Строит. механика и расчёт сооружений. — 1980. — №6. — С. 37–40.
7. Арутюнян, Н. Х. Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболоидальными и цилиндрическими включениями или полостями [Текст] / Н. Х. Арутюнян, А. Б. Мовчан, С. А. Назаров // Успехи механики. — 1987. — Т. 10, №4. — С. 3–91.
8. Бахвалов, Н. С. Осредненные характеристики тел с периодической структурой / Н. С. Бахвалов // ДАН СССР. — 1974. — Т. 218, №5. — С. 1046–1048.
9. Белов, П. А. Континуальная модель микрогетерогенных сред [Текст] / П. А. Белов, С. А. Лурье // Прикладная математика и механика. — М.: Наука. — Т. 73, №5. — 2009. — С. 833–848.

10. Болотин, В. В. Механика многослойных конструкций [Текст] / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. — М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.
11. Бурчуладзе, Т. В. Развитие метода потенциала в теории упругости [Текст] / Т. В. Бурчуладзе, Т. Г. Гегелия. — Тбилиси: Мецниереба, 1985. — 226 с.
12. Вавакин, А.С. Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями / А. С. Вавакин, Р. Л. Салганик // Изв. АН СССР. МТТ. — 1978. — №2. — С. 95–107.
13. Валов, Г. М. Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины [Текст] / Г. М. Валов // Прикладная математика и механика. — 1962. — Т. 26. — Вып. 4. — С. 650–667.
14. Композиционные материалы волокнистого строения [Текст] / Г. А. Ван Фо Фы, В. Н. Грошева, Е. Н. Денбновецкая, Д. Н. Карпинос. — К.: Наук. думка, 1971. — 232 с.
15. Ван Фо Фы, Г. А. Теория армированных материалов [Текст] / Г. А. Ван Фо Фы. — К.: Наук. думка, 1971. — 232 с.
16. Ванин, Г. А. Микромеханика композиционных материалов [Текст] / Г. А. Ванин. — К.: Наук. думка. — 1985. — 304 с.
17. Ванин, Г. А. Новый метод учета взаимодействия в теории композиционных систем [Текст] / Г. А. Ванин // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1976. — №4. — С. 321–324.
18. Ванин, Г. А. Объемное упругое расширение среды с полыми сферическими включениями [Текст] / Г. А. Ванин // Прикл. механика. — 1980. — Т. 16, №7. — С. 127–129.
19. Ванин, Г. А. Продольный сдвиг многокомпонентной упругой среды с дефектами [Текст] / Г. А. Ванин // Прикл. механика. — 1977. — Т. 13, №8. — С. 35–41.
20. Вольперт, В. С. Осесимметричное напряжённое состояние пространства, содержащего систему сферических полостей или включений [Текст] / В. С. Вольперт, И. П. Олегин // Новосиб. ин-т инж. ж.-д. транспорта. — 1977. — 19 с. — Деп. в ВИНИТИ. №3266–77.
21. Вольперт, В. С. Пространственная задача теории упругости для эллипсоида вращения и эллипсоидальной полости [Текст] / В. С. Вольперт // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. — 1967. — №3. — С. 118–124.

22. Гаришин, О. К. Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя [Текст] / О. К. Гаришин, Л. А. Комар // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2003. — Т. 9, №3. — С. 278–286.
23. Герега, А. Н. Физические аспекты процессов самоорганизации в композитах. 1. Моделирование перколяционных кластеров фаз внутренних границ [Текст] / А. Н. Герега // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2013. — Т. 19, №3. — С. 406–419.
24. Головчан, В. Т. До розв'язку граничних задач статики пружного тіла, обмеженого сферичними поверхнями [Текст] / В. Т. Головчан // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1974. — №1. — С. 61–64.
25. Механика композитов [Текст] / В. Т. Головчан, А. Н. Гузь, Ю. В. Коханенко, В. И. Кущ. — К.: Наук. думка, 1993. — Т. 1: Статистика материалов. — 457 с.
26. Головчан, В. Т. Анизотропия физико-механических свойств композитных материалов. — К.: Наук. думка, 1987. — 304 с.
27. Голотина, Л. А. Численное моделирование реологических свойств зернистого композита с использованием структурного подхода [Текст] / Л. А. Голотина, Л. Л. Кожевникова, Т. Б. Кошкина // Механика композитных материалов. — 2008. — Т. 44, №6. — С. 895–906.
28. Гомилко, А. М. Однородные решения в задаче о равновесии упругого цилиндра конечной длины [Текст] / А. М. Гомилко, В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко // Теор. и прикл. механика. — 1989. — №20. — С. 3–9.
29. Гордеев, А. В. Моделирование свойств композиционного материала, армированного короткими волокнами [Текст] / А. В. Гордеев // Механика композиционных материалов и конструкций. — М.: ИПМ РАН. — 2010. — Т. 16, №1. — С. 106–116.
30. Григолюк, Э. И. Перфорированные пластины и оболочки [Текст] / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. — М.: Наука, 1970. — 556 с.
31. Гринченко, В. Т. Осесимметричная задача теории упругости для полубесконечного кругового цилиндра [Текст] / В. Т. Гринченко // Прикл. механика. — 1965. — Т. 1, №1. — С. 109–119.

32. Гринченко, В. Т. Осесимметричная задача теории упругости для толстостенного цилиндра конечной длины [Текст] / В. Т. Гринченко // Прикл. механика. — 1967. — Т. 3, №8. — С. 93–103.
33. Гринченко, В. Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности [Текст] / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко. — К.: Наук. думка, 1985. — Т. 3: Равновесие упругих тел канонической формы. — 280 с.
34. Гринченко, В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров [Текст] / В. Т. Гринченко. — К.: Наук. думка, 1978. — 264 с.
35. Гузь, А. Н. О решении двумерных и трехмерных задач механики сплошной среды для многосвязных областей [Текст] / А. Н. Гузь // Концентрация напряжений. — К.: Наук. думка. — 1968. — Вып. 2. — С. 54–58.
36. Гузь, А. Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности [Текст] / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. — К.: Наук. думка, 1984. — Т. 2: Статика упругих тел неканонической формы. — 280 с.
37. Дудченко, А. А. Структурная модель межфазного слоя для наполненных композиционных материалов [Текст] / А. А. Дудченко, С. А. Лурье, Н. П. Шумова // Конструкции из композиционных материалов. — 2006. — №3. — С. 3–11.
38. Дыскин, А. В. К расчету эффективных деформационных характеристик материала с трещинами / А. В. Дыскин // Изв. АН СССР. МТТ. — 1985. — №4. — С. 130–135.
39. Ержанов, Ж. С. Метод конечных элементов в задачах механики горных пород [Текст] / Ж. С. Ержанов, Т. Д. Каримбаев. — Алма-Ата: Наука, 1975. — 238 с.
40. Исследование напряженно-деформированного состояния дисперсно наполненного полимерного композита с использованием объемных моделей [Текст] / А. С. Жарков, И. И. Анисимов, А. В. Шемелинин и др. // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2012. — Т. 18, №1. — С. 16–34.
41. Канаун, С. К. Пуассоновское множество трещин в упругой сплошной среде / С. К. Канаун // ПММ. — 1980. — Т. 44, №6. — С. 1129–1139.

42. Канторович, Л. В. Функциональный анализ [Текст] / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 742 с.
43. Капшивый, А. А. Осесимметричное напряжённое состояние шара с неконцентрической шаровой полостью [Текст] / А. А. Капшивый, Н. П. Копыстра, Л. Н. Ломонос // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1980. — №9. — С. 50–55.
44. Каримбаев, Т. Д. Подходы при моделировании деформаций композиционных материалов [Текст] / Т. Д. Каримбаев // Космонавтика и ракетостроение. — 2009. — Т. 54, №1. — С. 103–122.
45. Кауфман, Р. Н. Сжатие упругого шара с неконцентрической шаровой полостью [Текст] / Р. Н. Кауфман // Прикл. математика и механика. — 1964. — Т. 28. — Вып. 4. — С. 787–790.
46. Кит, Г. С. Метод потенциалов в трёхмерных задачах термоупругости тел с трещинами [Текст] / Г. С. Кит, М. В. Хай. — К.: Наук. думка, 1989. — 288 с.
47. Концентрация напряжений в упругом шаре с неконцентрической сферической полостью [Текст] / В. С. Колесов, Н. М. Власов, Л. О. Тисовский, И. П. Шацкий // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1989. — №30. — С. 37–41.
48. Композиционные материалы / под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. — В 8 т. — М.: Мир, 1978. — Т. 2: Механика композиционных материалов. — 566 с.
49. Кристенсен, Р. Введение в механику композитов [Текст] / Р. Кристенсен. — М.: Мир, 1982. — 334 с.
50. Трехмерные задачи математической теории упругости [Текст] / В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелия, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе — М.: Наука, 1976. — 664 с.
51. Кущ, В. И. Напряжённое состояние и эффективные упругие модули среды, нормированной периодически расположенными сфероидальными включениями [Текст] / В. И. Кущ // Прикл. механика. — 1995. — Т. 31, №3. — С. 32–39.
52. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения [Текст] / Н. Н. Лебедев // М.: Физ.-мат. лит., 1963. — 358 с.
53. Левин, В. М. К определению эффективных упругих модулей композиционных материалов [Текст] / В. М. Левин // ДАН СССР. Сер. мат.-физ., 1975. — Т. 220, №5. — С. 1042–1054.
54. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела [Текст] / С. Г. Лехницкий. — М.: Наука, 1977. — 416 с.

55. Ломонос, Л. Н. Первая основная задача об осесимметричном напряженном состоянии пространства с двумя сферическими полостями [Текст] / Л. Н. Ломонос // Мат. физика и нелинейная механика. — 1990. — №13. — С. 51–56.
56. Лурье, А. И. Пространственные задачи теории упругости [Текст] / А. И. Лурье. — М.: Гостехиздат, 1955. — 492 с.
57. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике [Текст]. — М.: Мир, 1978. — 210 с.
58. Моделирование процессов деформирования и разрушения многоуровневых композитных материалов при высоких градиентных полях / Г. А. Ванин, А. В. Березин, В. С. Добрынин и др. // НИР/НИОКР РФФИ: 94-01-00523-а. — 1994.
59. Николаев, А. Г. Формулы переразложения векторных решений уравнения Ламе в сферической и сфероидальной системах координат [Текст] / А. Г. Николаев // Мат. методы анализа динамических систем. — Х.: ХАИ. — 1984. — Вып. 8. — С. 100–104.
60. Николаев, А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе. — Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. — 109 с. — Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, №1178 — Ук 93.
61. Николаев, А. Г. Интегральные представления гармонических функций и теоремы сложения [Текст] / А. Г. Николаев // Доп. НАН України. — 1998. №4. — С. 36–40.
62. Николаев, А. Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей [Текст] / А. Г. Николаев // Доп. НАН України. — 1998. — №2. — С. 78–83.
63. Николаев, А. Г. Температурные напряжения в упругом пространстве, содержащем периодическую систему упругих шаровых включений [Текст] / А. Г. Николаев, С. С. Куреннов // Теор. и прикл. механика. — 2003. — Вып. 37. — С. 37–41.
64. Николаев, А. Г. Термоупругие напряжения в пространстве с периодически расположенными упругими шаровыми включениями [Текст] / А. Г. Николаев, С. С. Куреннов // Проблемы машиностроения. — 2004. — №1. — С. 35–48.
65. Николаев, А. Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости [Текст]: монография / А. Г. Николаев, В. С. Проценко. —

Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского “Харьк. авиац. ин-т”, 2011. — 344 с.
66. Николаев, А. Г. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 2(58). — Х., 2009. — С. 48–58.
67. Николаев, А. Г. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вестн. Харьк. Нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 922. — С. 4–19.
68. Николаев, А. Г. Распределение напряжений в упругом пространстве с двумя параллельно расположенными сферическими полостями [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 4(72). — Х., 2012. — С. 92–99.
69. Николаев, А. Г. Трехмерная периодическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Методы решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела: сб. науч. тр. Днепропетр. нац. ун-та им. О. Гончара. — Дп.: Лира. — 2012. — Вып. 13. — С. 287–293.
70. Николаев, А. Г. Развитие локальной модели напряженного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2013. — №1(98). — С. 14–18.
71. Николаев, А. Г. Распределение напряжений в цилиндрическом образце материала с двумя параллельными цилиндрическими полостями [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 4(76). — Х., 2013. — С. 40–49.
72. Николаев, А. Г. Напряженное состояние в цилиндрическом образце с двумя параллельными цилиндрическими волокнами [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2013. — №6(103). — С. 32–38.

73. Николаев, А. Г. Хрупкое разрушение цилиндрического стержня с круговой трещиной при кручении [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик, И. С. Тарасевич // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского "ХАИ". — Вып. 2(74). — Х., 2013. — С. 64–73.
74. Николаев, А. Г. Распределение напряжений в ячейке однонаправленного композиционного материала, образованного четырьмя цилиндрическими волокнами [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вісник Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. — 2013. — Т. 18. — Вип. 4(20). — С. 64–73.
75. Николаев, А. Г. Новые теоремы сложения базисных решений уравнения Ламе для вытянутых сфероидов и их применение к моделированию пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2014. — №5(112). — С. 46–54.
76. Николаев, А. Г. Развитие аппарата обобщенного метода Фурье на некоторые многосвязные области и его использование для моделирования пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2014. — №6(113). — С. 48–56.
77. Ніколаєв, О. Г. Напруження в нескінченному круговому циліндрі з чотирма циліндричними порожнинами [Текст] / О. Г. Ніколаєв, Є. А. Танчік // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2014. — Т. 57, №3. — С. 51–60.
78. Николаев, А. Г. Анализ напряженного состояния в окрестности двух сферических включений в упругом пространстве [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2014. — №3(110). — С. 26–32.
79. Николаев, А. Г. Упругое пространство с четырьмя сфероидальными включениями под действием внешней нагрузки [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2014. — №4(111). — С. 49–55.
80. Николаев, А. Г. Напряженное состояние пористого материала в области между четырьмя сфероидальными порами [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вісник нац. техн. ун-ту "ХПІ". Математичне моделювання в техніці і технологіях. — 2014. — №6(1049). — С. 151–160.

81. Николаев, А. Г. Модель зернистого композита со сферическими зернами [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вісник нац. техн. ун-ту “ХПІ”. Математичне моделювання в техніці і технологіях. — 2014. — №39(1082). — С. 141–152.
82. Николаев, А. Г. Напряженное состояние в окрестности двух сфероидальных зерен в композите [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 1(77). — Х., 2014. — С. 73–86.
83. Николаев, А. Г. Напряжения в упругом материале со сферическими порами под действием внешней нагрузки [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 2(78). — Х., 2014. — С. 99–110.
84. Николаев, А. Г. Первая краевая задача теории упругости для цилиндра с N цилиндрическими полостями [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Сиб. журн. вычисл. математики, РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск. — 2015. — Т. 18, №2. — С. 177–188.
85. Николаев, А. Г. Напряженное состояние трансверсального изотропного пространства с двумя сфероидальными полостями [Текст] / А. Г. Николаев, Ю. А. Щербакова // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — Вып. 4(51). — Х., 2007. — С. 49–54.
86. Олегин, И. П. Пространственное напряженное состояние тела, содержащего периодическую систему сферических полостей / И. П. Олегин // Динамика и прочность авиац. конструкций. — Новосибирск. — 1989. — С. 85–91.
87. Победря, Б. Е. Механика композиционных материалов [Текст] / Б. Е. Победря. — М.: МГУ, 1984. — 336 с.
88. Подильчук, Ю. Н. Деформация упругого сфероида / Ю. Н. Подильчук // Прикл. механика. — 1967. — Т. 3, №12. — С. 34–42.
89. Подильчук, Ю. Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности / Ю. Н. Подильчук — Т. 1. Граничные задачи статики упругих тел. — К.: Наук. думка, 1984. — 304 с.

90. Прокопов, В. К. Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра / В. К. Прокопов // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. — 1950. — №2. — С. 286–304.
91. Савин, Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. — К.: Наук. думка, 1968. — 888 с.
92. Салганик, Р. Л. Механика тел с большим числом трещин / Р. Л. Салганик // Изв. АН СССР. МТТ. — 1973. — №4. — С. 149–158.
93. Сендецки, Дж. Упругие свойства композитов [Текст] / Дж. Сендецки // Механика композиционных материалов: в 8 т. — М.: Мир, 1978. — Т. 2. — С. 61–101.
94. Скудра, А. М. Структурная теория армированных пластиков [Текст] / А. М. Скудра, Ф. Я. Булавс. — Рига: Зинатне, 1978. — 192 с.
95. Смирнов, Л. Г. Упругие напряжения в сфере с инородным эксцентрическим сферическим включением / Л. Г. Смирнов, И. И. Федик // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1990. — №31. — С. 79–83.
96. Токовий, Ю. В. Осесиметричні напруження в скінченному пружному циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні [Текст] / Ю. В. Токовий // Прикл. проблеми мех. та мат. — 2010. — Вип. 8. — С. 144–151.
97. Улитко, А .Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости / А. Ф. Улитко. — К.: Наук. думка, 1979. — 265 с.
98. Устинов, К. Б. Об определении эффективных упругих характеристик двухфазных сред. Случай изолированных неоднородностей в форме эллипсоидов вращения / К. Б. Устинов // Успехи механики. — 2003. — №2. — С. 126–168.
99. Федотов, А. Ф. Приложение модели деформирования пористых материалов к расчёту эффективных упругих модулей зернистых композитов [Текст] / А. Ф. Федотов // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2011. — Т. 17, №1. — С. 3–18.
100. Фудзии, Т. Механика разрушения композиционных материалов [Текст] / Т. Фудзии, М. Дзако. — М.: Мир, 1982. — 232 с.

101. Хорошун, Л. П. Зернистые материалы [Текст] / Л. П. Хорошун, Б. П. Маслов. — Механика композитных материалов и элементов конструкций: в 3 т. — К.: Наук. думка, 1982. — С. 191–284.
102. Методы расчета механических характеристик пороматериалов малой плотности (обзор) / Д. А. Черноус, Е. М. Петроковец, Д. А. Конек, С. В. Шилько // Механика композиционных материалов и конструкций. — М.: ИПМ РАН. — 2001. — Т. 7, №4. — С. 533–545.
103. Шайлиев, Р. Ш. Математическая модель расчета эффективных свойств композиционных материалов на примере полиминеральных горных пород [Текст] / Р. Ш. Шайлиев // Электронный науч. журнал “Современные проблемы науки и образования”. — 2011. — №5.
104. Шермергор, Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред [Текст] / Т. Д. Шермергор. — М.: Наука, 1977. — 400 с.
105. Эшелби, Дж. Континуальная теория дислокаций [Текст] / Дж. Эшелби. — М.: Мир, 1963. — 247 с.
106. Янковский, А. П. Моделирование механического поведения композитов с пространственной структурой армирования из нелинейно-наследственных материалов [Текст] / А. П. Янковский // Конструкции из композиционных материалов. — 2012. — №2. — С. 12–25.
107. Atsumi, A. Stresses in a transversely isotropic half space having a spherical cavity / A. Atsumi, S. Iton // Trans. ASME. E. — 1974. — V. 41, №3. — P. 708–712.
108. Boucher, S. On the effective moduli of isotropic two-phase elastic composites / S. Boucher // J. Comp. Mater. — 1974. — V. 8. — P. 82–90.
109. Budiansky, B. Elastic moduli of a cracked solid / B. Budiansky, R. J. O’Connell // Int. J. Solids Struct. — 1976. — V. 12. — P. 81–97.
110. Chen, H.-S. The effective elastic moduli of composite materials containing spherical inclusions at non-dilute concentrations / H.-S. Chen, A. Acrivos // Int. J. Solids and Structures. — 1978. — V. 14. — P. 349–360.
111. Chen, H.-S. The solution of the equations of linear elasticity for an infinite region containing two spherical inclusions / H.-S. Chen, A. Acrivos // Int. J. Solids and Structures. — 1978. — V. 14. — P. 331–348.

112. Christensen, R. M. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models / R. M. Christensen, R. H. Lo // J. Mech. and Phys. Solids, 1979. — V. 27, №4.
113. Christensen, R. M. A critical evaluation of a class of micro-mechanics models / R. M. Christensen // J. Mech. and Phys. Solids, 1990. — V. 38. — P. 379–404.
114. Edwards, R. H. Stress concentrations around spheroidal inclusions and cavities / R. H. Edwards // J. Appl. Mech. — 1951. — V. 18, №1. — P. 13–35.
115. Eshelby, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems / J. D. Eshelby // Proc. R. Soc. London. Ser. A. — 1957. — V. 241. — P. 376–396.
116. Golovchan, V. T. Double-particle approximation analysis of the residual thermostressed state of granular composites / V. T. Golovchan, N. V. Litoshenko // International Applied Mechanics. — 2000. — V. 36, No 12. — P. 1612–1619.
117. Hashin, Z. The elastic moduli of fiber reinforced materials / Z. Hashin, W. Rosen // J. Appl. Mech., 1964. — V. 31. — P. 223–232.
118. Hashin, Z. Analysis of composite materials — a survey / Z. Hashin // J. Appl. Mech., 1983. — V. 50. — P. 481–505.
119. Hashin, Z. The differential scheme and its application to cracked materials / Z. Hashin // J. Mech. Phys. Solids. — 1988. — V. 36. — P. 719–733.
120. Hashin, Z. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials / Z. Hashin, S. A. Shtrikman // J. Mech. Phys. Solids. — 1963. — V. 11. — P. 128–140.
121. Kachanov, M. Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts / M. Kachanov // Appl. Mech. Rev. — 1992. — V. 45. — P. 304–335.
122. Khoroshun, L. P. Theory of short-term micro damageability of granular composite materials / L. P. Khoroshun, E. N. Shikula // International Applied Mechanics. — 2000. — V. 36, No 8. — P. 1060–1066.
123. Khoroshun, L. P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites / L. P. Khoroshun // International Applied Mechanics. — 2000. — V. 36, No 10. — P. 1284–1316.
124. Meleshko, V. V. Equilibrium of an elastic finite cylinder under axi-symmetric discontinuous normal loading / V. V. Meleshko, Yu. V. Tokovyy // J. Eng. Math. — 2013. — V. 78. — P. 143–166.

125. Miyamoto, H. On the problem of the theory of elasticity for a region, containing more than two spherical cavities / H. Miyamoto // Bull. JSME. — 1958. — V. 1, №2. — P. 103–115.
126. Mura, T. Two-ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method / T. Mura, Z. A. Moschovidis // Trans. ASME. E. — 1975. — V. 42, №4. — P. 847–852.
127. Nemat-Nasser, S. On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids: comments and corrections / S. Nemat-Nasser, M. Taya // Quart. Appl. Math. — 1985. — V. 43. — P. 187–188.
128. Nikolaev, A. G. On the distribution of stresses in circular infinite cylinder with cylindrical cavities / A. G. Nikolaev, E. A. Tanchik // Visn. Khark. Nat. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mekh. — 2014. — V. 1120, Issue 69. — P. 4–19.
129. Sangini, A. S. Elastic coefficients of composites containing sperical inclusions in a periodic array / A. S. Sangini, W. Lu // J. Mech. Phys. Solids. — 1987. — V. 35, №1. — P. 1–21.
130. Sheikh, M. A. Microstructural finite-element modeling of a ceramic matrix composite to predict experimental measurements of its macro thermal properties / M. A. Sheikh, S. C. Taylor, D. R. Hayhurst, R. Taylor // Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering. — 2001. — V. 9, No 1. — P. 7–23.
131. Scalon, J. A model-based analysis of particle size distributions in composite materials / J. Scalon, N. R. J. Fieller, E. C. Stillman, H. V. Atkinson // Acta Materialia. — 2003. — V. 51, No 4. — P. 997–1006.
132. Strenberg, E. On the axisymmetric problem of elasticity for an infinite region containing two spherical cavities / E. Strenberg, M. A. Sadowsky // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1952. — V. 74. — P. 19–27.
133. Torquato, S. Random heterogeneous media: microstructure and improved bounds on effective properties / S. Torquato // Appl. Mech. Rev. — 1991. — V. 44. — P. 37–76.
134. Trias, D. Random models versus periodic models for fibre reinforced composites / D. Trias, J. Costa, J. A. Mayugo, J. E. Hurtado // Computational Materials Science. — 2006. — V. 38, No 2. — P. 316–324.

135. Tsuchida, E. On the asymmetric problem of elasticity theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions / E. Tsuchida, I. Nakahara, M. Kodama // Bull. JSME. — 1980. — V. 23, №181. — P. 1072–1080.
136. Tsuchida, E. On the asymmetric problem of elasticity theory for an infinite elastic solid containing some spherical cavities / E. Tsuchida, N. Uchiyama, I. Nakahara, M. Kodama // Bull. JSME. — 1979. — V. 22, №164. — P. 141–147.
137. Zhong, Z. Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains / Z. Zhong, Q. P. Sun // Int. Journal of Solids and Structures. — 2002. — V. 39, Issue 23. — P. 5753–5765.
138. Zimmerman, R. W. Behaviour of the Poisson ratio of a two-phase conposite materials in the high-concentration limit / R. W. Zimmerman // Appl. Mech. Rev. — 1994. — V. 47. — P. 38–44.
139. Zureick, A. H. The asymmetric displacement of a rigid spheroidal inclusion embedded in transversely isotropic medium / A. H. Zureick // Acta. mech. — 1989. — V. 77, No 1-2. — P. 101–110.
140. Zureick, A. H. Transversely isotropic medium with a rigid spheroidal inclusion under an axial pull / A. H. Zureick // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1988. — V. 55, №2. — P. 495–497.