# 第 i 回
# 変分法と解析力学 (spm 事前ゼミゆーぐま担当範囲)

## 目次

## §i.1　汎関数と Lagrangian

まず Lagrangian というものはどのようなものかを見る為に, 汎関数という概念を見ていく.[*1]

**(汎関数の説明)**

関数 $f$ が与えられたとき, $f$ に対して, $S[f]$ という数値を返す対応 $S$ を**汎関数 (functional)** という.

- 汎関数の例: 関数のグラフの長さ

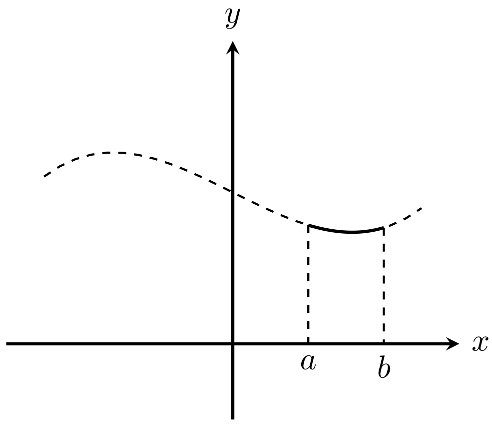


図 1: 曲線の長さ

$xy$ 平面に置ける $y = f(x)$ のグラフの $a \leq x \leq b$ における長さ $L[f]$ を考える. これは, $(x, f(x))$ と $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ を結ぶ線分の長さが

$$\sqrt{\Delta x^2 + (f(x+\Delta x) - f(x))^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{(f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)^2}\Delta x$$

となるので, $\Delta x \to 0$ の極限で,[*2]

$$L[f] = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)} dx$$

と計算できる. $L[f]$ は関数 $f(x)$ に対して数値を返すので汎関数の例である.

- 汎関数の変分について

[*1] $f$ の定義域を関数のなすベクトル空間 $V$, $S[f]$ を $V$ から $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ などの体への写像とすることが多い

[*2] これの正当化には $f(x)$ が $C^1$ 級の仮定が必要

まず, 微分に関して復習しよう. 滑らかな[*3]一変数関数 $f(x)$ があったときに, そこの極値を求めるときは, $f'(x)=0$ となるような $x$ を見つけるのであった. すなわち,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon}=0$$

という事である. ここで, $\varepsilon \to 0$ で $f(\varepsilon)$ 以下である事をしめすランダウの記号 $O(g(\varepsilon))$[*4]を用いると,

$$f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)=O(\varepsilon^2)$$

解析学の一分野である変分法は, これを関数の代わりに汎関数でやろうという試みである. 試しに汎関数 $S[q]$ を関数 $q_0(t)$ から $q_0(t)+\delta q(t)$ まで変化させてこれをやってみよう. 同じように書き換えてみると,

$$S[q_0+\delta q]-S[q_0]=O(\|\delta q\|^2)$$

ここでは $\|\delta q\| := \max_{i,t}\sqrt{\delta q_i^2}$ とする. 左辺は $S$ の変化量で, $\delta S$ と書かれ, **変分**と呼ぶ. すなわち,

$$\delta S = S[q_0+\delta q]-S[q_0]=O(\|\delta q\|^2) \tag{i.1.1}$$

という条件を考える. このような関数 $q_0$ を $S[q]$ の**停留点**と呼ぶ.[*5] この停留点が Lagrange 力学の要となってくる.

---

[*3] $C^1$ 級

[*4] $O(g(\varepsilon))$ は $\varepsilon$ の定義域 0 を含むように十分小さく取れば, $\varepsilon$ の関数 $O(\varepsilon)/g(\varepsilon)$ をある定数で抑えられる

[*5] これは関数のなすノルム空間 $V$ で Frèchet 微分したときに 0 になることと同義である.

• Lagrangian について

解析力学の一形式である **Lagrange 力学**は,

- **一般化座標** (これは極座標系でも直交座標系でも, どんな座標系を取ってきても大丈夫！)
$$q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$$
- **一般化速度**
$$\dot{q}(t) = (\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t))$$

に関するエネルギーの次元に値を持つ関数 **Lagrangian** $L(q, \dot{q}, t)$ で記述される. ここで, $L(q, \dot{q}, t)$ と書いてしまっているが, $L$ に関しては一般化座標や速度の組としてありえないものに関しても定義されているものとする. [*6]

• Euler-Lagrange 方程式

さて, Lagrange 力学はどのように記述されるか見てみよう. 以下の汎関数を考える.

**作用積分**

ある時刻 $t = t_i, t_f$ を固定して, **作用** $S[q]$ を以下のように定義する:

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

この $S[q]$ の停留値問題として, Lagrange 力学は記述される. さて $S[q]$ の停留値問題を解く事を考えよう. そのために, 仮定として, 変化させる量 $\delta q$ に対し以下の**固定端条件**を課す.

$$\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0 \tag{$\spadesuit$}$$

このもとで, 式 i.1.1 つまり $\delta S = O(\varepsilon^2)$ を考えよう. $\dot{q}$ の変分

$$\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}(q + \delta q) - \dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q) \tag{$*$}$$

に注意して,

$$\begin{aligned}\delta S &= S[q + \delta q] - S[q] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt\{L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)\} \quad (\text{式}(*)\text{より}\frac{d}{dt}(q + \delta q) = \dot{q} + \delta\dot{q})\end{aligned}$$

[*6] 数学的に言えば, 空間は多様体 $M$ であるという前提の下で, 座標が座標近傍系 $(U, \varphi) = (U, q)$ で, 座標の表す点 $p = \varphi(q_1(t_0), \dots, q_n(t_0)) \in M$, 一般化速度は接ベクトル $q = \varphi(q_1(t_0), \dots, q_n(t_0)) \in T_pM$ に対応し, Lagrangian は接バンドル上の関数という前提条件である.

最右辺を Taylor 展開して,

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i + O(\delta q_i^2) \right) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i} \right) dt + O(\|\delta q\|^2)\end{aligned}$$

波線の項を部分積分することによって,

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right]_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right) dt + O(\|\delta q\|^2)$$

固定端条件 (♠) を考えると,

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt + O(\|\delta q\|^2)$$

よって $\delta S = O(\|\delta q\|^2)$ がどのような $\delta q_i$ でも成立するためには, 以下の Euler-Lagrange 方程式と呼ばれる方程式が条件になる.

**Euler-Lagrange 方程式**

すべての $i = 1, \ldots, n$ に対して,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

これが Lagrange 力学における運動方程式である. ここで, $L$ が $t$ に**陽に依存しない**とき, つまり $q$ と $\dot{q}$ のみで書けるとき, 以下の量が時間変化しないことが導ける. これは系に対称性があるならば, 対応する保存量があることを主張する **Noether の定理**の一例になっている.

**エネルギー**

以下の量をラグランジアンが $L$ の系で与えられる**エネルギー**という. (このような変換のことを **Legendre 変換**という. 後述.)

$$E(t) := \left( \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) - L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

$L$ が $t$ に依存しないとき, 時間変化しないことを実際に確かめてみよう. 積の微分法

則 (Leibniz 則) から,

$$(\text{右辺第一項の時間微分}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\ddot{q}_i(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} + \dot{q}_i(t)\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

また, $L$ が $t$ に依存しないという仮定に注意して, 第二項に合成関数の微分を適用して,

$$(\text{右辺第二項の時間微分}) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i(t)\frac{\partial L}{\partial q_i} + \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\ddot{q}_i(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}\right)$$

これらを足すと波線部が消えて,

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i(t)\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dot{q}_i(t)\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i(t)\left(\underline{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}}\right)\end{aligned}$$

よって, 傍線部が Euler-Lagrange 方程式より消えるので, $E(t)$ が保存することが導ける.

• <u>Newton 力学との対応</u>

この節の最後に, どんな Lagrangian をとれば Newton 力学と対応するか見てみよう. 結論から言えば,

**Newton 力学の運動方程式を与える Lagrangian(の一つ)**

$\boldsymbol{r}_i$ を直交座標系で書かれた座標とする. 質量 $m_i$ を持ち, ポテンシャル $U(\boldsymbol{r}_1(t),\dots,\boldsymbol{r}_n(t),t)$ 中を移動する (保存力しか働かない場合の) 質点系の Lagrangian は以下のように与えられる.

$$L(\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_n,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\dots,\dot{\boldsymbol{r}}_n,t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i(t)^2\right) - U(\boldsymbol{r}_1(t),\dots,\boldsymbol{r}_n(t),t)$$

となる. この Euler-Lagrange 方程式が Newton の運動方程式を与えるか確認してみよう. $\boldsymbol{r}_i$ の $j(j=1,2,3)$ 成分を $r_{ij}$ とする. $\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = \sum_j \dot{r}_{ij}^2$ に注意して,

$$0 = \frac{\partial L}{\partial r_{ij}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{ij}} = -\frac{\partial U}{\partial r_{ij}} - m\ddot{r}_{ij}$$

これはすべての $j$ で成立するから, これを第 $j$ 成分の等式だとみて, ベクトルにまとめると,

$$0 = -\nabla_{\boldsymbol{r}_i}U - m\ddot{r}_i$$

保存力しか働かない場合, ポテンシャルの勾配のマイナス倍がかかる力 $\boldsymbol{F}_i$ であったから,

$$m\ddot{r}_i = \boldsymbol{F}_i$$

となり, 導かれた. このように, Lagrangian を積分して得られる作用の停留値問題として力学を記述することを**停留作用の原理**という.

## §i.2　Noether の定理

Noether の定理を見る為に, 座標変換に対する対称性を見ていきたいが, そのまえに Lagrangian は一つではないことについて見ていく.

### §i.2.1　Lagrangian の存在条件 (やや脱線)

Lagrangian $L(q, \dot{q}, t)$ が与えられたとき, Euler-Lagrange 方程式は以下のように表された:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

第一項を合成関数の微分を使って計算すると,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k}\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{H-0}$$

左辺を $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$ と置くと, $\mathcal{D}_i = 0$ という方程式が現れる. 逆にこの方程式を与えるような Lagrangian の条件は以下のように記述される. (証明を飛ばす)

**定理** i.2.1 (Helmholtz **条件**)

微分方程式 $\mathcal{D}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0$ を導く Lagrangian が存在する必要十分条件は, $i, j = 1, 2, \ldots, N$ に対して以下の条件が成立することである.

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \ddot{q}_i} \tag{H-i}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \ddot{q}_j} \tag{H-ii}$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) \tag{H-iii}$$

**証明.)** Lagrangian が存在する場合, 式 (H-0) の左辺

$$\mathcal{D}_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

が $\mathcal{D}_i$ であった.

● Lagrangian の存在 $\Rightarrow$ (H-i)

$L$ とその偏微分は $\ddot{q}$ に依存しないことを考えて,

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \ddot{q}_i}$$

● Lagrangian の存在 $\Rightarrow$ (H-ii)

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \dot{q}_j} = \underline{\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j \partial q_k} \dot{q}_k} + \utilde{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}} + \underline{\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j \partial t}} - \utilde{\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j}} \quad (**)$$

同様に,

$$\frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \dot{q}_i} = \underline{\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i \partial q_k} \dot{q}_k} + \utilde{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i}} + \underline{\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i \partial t}} - \utilde{\frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}} \quad (***)$$

故に, 上の式と下の式を足すと, 傍線部の項は共通していて, 波線部の項は消えるので,

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \dot{q}_i} = 2\left( \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j \partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j \partial t} \right) = 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

故に,

$$\frac{1}{2}\left( \frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \ddot{q}_j}$$

● Lagrangian の存在 $\Rightarrow$ (H-iii)

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^3 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^3 L}{\partial q_j \partial q_k \partial \dot{q}_i} \dot{q}_k + \frac{\partial^3 L}{\partial q_j \partial t \partial \dot{q}_i} - \utilde{\frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial q_i}}$$

同様に

$$\frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^3 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^3 L}{\partial q_i \partial q_k \partial \dot{q}_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^3 L}{\partial q_i \partial t \partial \dot{q}_j} - \utilde{\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j}}$$

上の式から下の式を引くと,

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i}\right)$$

(H-ii) の時に使った式 (**)(***) を引き算して 2 で割ったものと比較して,

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

より示された.

- <u>(H-i)(H-ii)(H-iii) の書き換え</u>

(H-ii) を見てみる.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \ddot{q}_j} \tag{H-ii}$$

$\mathcal{D}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$ の $\ddot{q}$ に関する微分を考えると, 右辺には $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 \mathcal{D}_i}{\partial \ddot{q}_k \partial \ddot{q}_j} \dddot{q}_k$ という項が含まれるが, 左辺には含まれないので, $j, k = 1, 2, \ldots, N$ に対して,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{D}_i}{\partial \ddot{q}_k \partial \ddot{q}_j} = 0$$

よって, $\mathcal{D}_i$ は $\ddot{q}_j$ の一次式なので, $m_{ij}(q, \dot{q}, t)$, $f_i(q, \dot{q}, t)$ を用いて,

**書き換えられた表式**

$$\mathcal{D}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = \sum_{k=1}^{N} m_{ik}(q, \dot{q}, t)\ddot{q}_k + f_i(q, \dot{q}, t)$$

と置ける. この表式をもとに Helmholtz 条件を考える.

(H-i) は以下の式だったから.

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \ddot{q}_i} \tag{H-i}$$

これは,

$$m_{ij} = m_{ji} \tag{H-i'}$$

を意味する.

(H-iii) は以下の式だった.

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) \tag{H-iii}$$

よって, (H-iii) の右辺の微分の中身は, 書き換えられた表式を使って,

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{N} \left( \frac{\partial m_{ik}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial \dot{q}_i} \right) \ddot{q}_k + \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial q_j}{\partial q_i}$$

これの時間微分である (H-iii) の右辺には $\sum_{k=1}^{N} \left( \frac{\partial m_{ik}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dddot{q}_k$ という項が含まれるが, 左辺には $\dddot{q}_k$ が含まれないため, すべての $i, j, k = 1, 2, \ldots, N$ に対して,

$$\frac{\partial m_{ik}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial m_{jk}}{\partial \dot{q}_i} \tag{H-iv'}$$

という条件が付き, そのもとで,

$$\begin{aligned}
((\text{H-iii})\text{の右辺}) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial^2 f_j}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} \right) \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \left( \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} \right)
\end{aligned}$$

一方で, (H-iii) の左辺は, 書き換えられた表式を使って,

$$((\text{H-iii})\text{の左辺}) = \sum_{k=1}^{N} \left( \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i} \right) \ddot{q}_k + \frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i}$$

と表されるので, この二式を比較して, すべての $i, j, k = 1, 2, \ldots, N$ に対し,

$$\frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial^2 f_j}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} \right) \tag{H-ii''}$$

すべての $i, j = 1, 2, \ldots, N$ に対し,

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \left( \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} \right) \tag{H-iii'}$$

最後に,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \ddot{q}_j} \tag{H-ii}$$

を書き換えられた表式を用いて計算する.

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{N} \left( \frac{\partial m_{ik}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial m_{jk}}{\partial \dot{q}_i} \right) \ddot{q}_k + \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial q_j}{\partial q_i}$$

(H-iv') と (H-i') より, $\frac{\partial m_{\heartsuit\diamondsuit}}{\partial \dot{q}_{\clubsuit}}$ の添え字は自由に入れ替えていいので,

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{N} 2 \frac{\partial m_{ij}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial f_j}{\partial q_i}$$

よって,

$$(\text{H-iiの左辺}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial m_{ij}}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial f_j}{\partial q_i}\right)$$

一方で, (H-ii) の微分の中身は, $\dfrac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \ddot{q}_j} = m_{ij}$ なので,

$$(\text{H-iiの右辺}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial m_{ij}}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k}\right) m_{ij}$$

これらを比較して,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k}\right) m_{ij} \tag{H-ii'}$$

以上をまとめると, 以下の四式が得られる

**Helmholtz 条件の書き換え**

$$\mathcal{D}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = \sum_{k=1}^{N} m_{ik}(q, \dot{q}, t)\ddot{q}_k + f_i(q, \dot{q}, t) \tag{$\mathcal{D}$}$$

とすると,

$$m_{ij} = m_{ji} \tag{H-i'}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k}\right) m_{ij} \tag{H-ii'}$$

$$\frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial^2 f_j}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i}\right) \tag{H-ii''}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k}\right)\left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}\right) \tag{H-iii'}$$

$$\frac{\partial m_{ik}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial m_{jk}}{\partial \dot{q}_i} \tag{H-iv'}$$

なお, (H-ii") については (H-ii') と (H-iv') から導かれるため独立ではない.

- (H-i)(H-ii)(H-iii) $\Rightarrow$ Lagrangian の存在

(まだ紹介していないが) 荷電粒子の Lagrangian の類似で,

$$L(q, \dot{q}, t) = K(q, \dot{q}, t) + \sum_{k=1}^{N} A_k(q, t)\dot{q}_k - \phi(q, t)$$

と置けるとすると, 式 (H-0) あたりの定義の

$$\mathcal{D}_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k}\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

に気を付けて, Euler-Lagrange 方程式は,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_i = &\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i}\ddot{q}_k + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k}\right)\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i}\\ &+ \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial q_i}\end{aligned}$$

これを式 ($\mathcal{D}$)

$$\mathcal{D}_i(q,\dot{q},\ddot{q},t) = \sum_{k=1}^{N} m_{ik}(q,\dot{q},t)\ddot{q}_k + f_i(q,\dot{q},t) \tag{$\mathcal{D}$}$$

と比較すると,

**$m_{ij}$, $f_i$ と $K$, $A$, $\phi$ の関係**

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \tag{条件 I}$$

$$f_i = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k}\right)\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \tag{条件 II}$$

このような条件を満たす $K, A, \phi$ を見つければいいことが分かる. その前に, ポテンシャルの存在条件を表す Poincarè の補題についてみておこう.[*7]

**定理 i.2.2 Poincarè の補題 (の特殊なケース)**

$n$ 次元の単連結な (穴の開いていない) 領域について

$$f_i(x) = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$$

となるような $U(x)$ が存在するための必要十分条件はすべての $i, j = 1, \ldots, n$ に

[*7] これは微分形式によって記述されることが多い. 単連結な領域ならば閉形式がかならず完全形式になる (言いかえると de Rham コホモロジーが自明) なことを述べる定理である. ここから, 例えば 1-form $\eta_f = \sum_i f_i dx^i$ が, $U$ の全微分 $dU = \eta_f$ と表される必要十分条件が $d\eta_f = \sum_{i\neq j} \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \sum_{i<j}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} - \frac{\partial f_j}{\partial x^i}\right) dx^j \wedge dx^i = 0$ と言うことが分かり上の主張と一致する.

対して,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

また,

$$\frac{\partial A_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j(x)}{\partial x_i} = B_{ij}$$

となるような $A_i(x)(i = 1, 2, \ldots, n)$ が存在するための必要十分条件はすべての $i, j, k = 1, \ldots, n$ に対して,

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial B_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial B_{ki}}{\partial x_j} = 0$$

- $K$ の存在について

(H-iv')

$$\frac{\partial m_{ik}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial m_{jk}}{\partial \dot{q}_i} \tag{H-iv'}$$

と Poincarè の補題から,

$$m_{ik} = \frac{\partial v_k(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \tag{i.2.1}$$

という $v_k(q, \dot{q}, t)$ が存在し, この式と (H-i')

$$m_{ij} = m_{ji} \tag{H-i'}$$

と Poincarè の補題から,

$$v_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial K(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \tag{i.2.2}$$

式 (i.2.1), (i.2.2) から (条件 I) を満たすような $K$ の存在が確かめられる.

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \tag{条件 I}$$

- $A, \phi$ の存在について

(条件 II)

$$f_i = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{N} \left( \frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \tag{条件 II}$$

の式を $\dot{q}_j$ で微分することを考える.

$$\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k}\right) \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} + \underline{\left(\frac{\partial^2 K}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial^2 K}{\partial q_i \partial \dot{q}_j}\right) + \left(\frac{\partial A_i}{\partial q_j} - \frac{\partial A_j}{\partial q_i}\right)}$$

この式の $i, j$ を入れ替えたものをこの式から引くと傍線部の二倍が残って,

$$\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} = 2\left(\frac{\partial^2 K}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial^2 K}{\partial q_i \partial \dot{q}_j}\right) + 2\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_j} - \frac{\partial A_j}{\partial q_i}\right)$$

よって,

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_j} - \frac{\partial A_j}{\partial q_i} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial^2 K}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial^2 K}{\partial q_i \partial \dot{q}_j}\right)}_{=B_{ij}} \tag{★}$$

この右辺の量を $B_{ij}$ と置くと, (条件 I), (H-ii”) を用いて,

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i}\right) - \left(\underbrace{\frac{\partial^3 K}{\partial q_j \partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i}}_{=\frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j}} - \underbrace{\frac{\partial^3 K}{\partial q_i \partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j}}_{=\frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i}}\right) = 0$$

よって, $B_{ij}$ は $q, t$ にのみ依存することが分かる.

$B_{ij}$ を $q_k$ で微分すると,

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial \dot{q}_j \partial q_k}\right) - \left(\frac{\partial^3 K}{\partial q_k \partial q_j \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial^3 K}{\partial q_k \partial q_i \partial \dot{q}_j}\right)$$

同様に,

$$\frac{\partial B_{jk}}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial \dot{q}_k \partial q_i} - \frac{\partial^2 f_j}{\partial \dot{q}_k \partial q_i}\right) - \left(\frac{\partial^3 K}{\partial q_i \partial q_k \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial^3 K}{\partial q_i \partial q_j \partial \dot{q}_k}\right)$$

$$\frac{\partial B_{ki}}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 f_k}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\right) - \left(\frac{\partial^3 K}{\partial q_j \partial q_i \partial \dot{q}_k} - \frac{\partial^3 K}{\partial q_j \partial q_k \partial \dot{q}_i}\right)$$

この三式を足し合わせて, $\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}}$ でまとめると,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial B_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial B_{jk}}{\partial q_i} + \frac{\partial B_{ki}}{\partial q_j} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial f_k}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_k}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_i}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i} - \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\right) \end{aligned} \tag{♡}$$

これを

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^{N} \dot{q}_l \frac{\partial}{\partial q_l}\right)\left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}\right) \tag{H-iii'}$$

を $\dot{q}$ で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_k} + \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^{N} \dot{q}_l \frac{\partial}{\partial q_l}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}}\right)\left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_i} + \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^{N} \dot{q}_l \frac{\partial}{\partial q_l}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}}\right)\left(\frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial f_k}{\partial q_i} - \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_j} + \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^{N} \dot{q}_l \frac{\partial}{\partial q_l}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}}\right)\left(\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_k}\right)$$

これらを足すと, $\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}}$ のところが打ち消しあって, 波線部が消えて

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_j}\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial f_k}{\partial q_i} - \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial f_k}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_k}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_i}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i} - \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_j}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial f_k}{\partial q_i} - \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i}\right)
\end{aligned}$$

より, (最左辺) $= -\dfrac{1}{2}$(最左辺) となり, (最左辺) $= 0$ となることから, 式 (♡) の最右辺はこの式の二辺目と等しいので,

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial B_{jk}}{\partial q_i} + \frac{\partial B_{ki}}{\partial q_j} = 0$$

より, 式 (★) を満たすような ($B_{ij}$ は $q, t$ のみに依存したので)$A_i(q,t)$ が存在する.

最後に, 条件 II を移項して,

$$-\frac{\partial \phi}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k}\right)\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k - f_i}_{=E_i}$$

と書き直す. 右辺の量を $E_i$ と定義すると, 式 (条件 I)(★) より,

$$\frac{\partial E_i}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k}\right) \underbrace{\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}}_{=m_{ij}} - \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} + \underbrace{\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} + \frac{\partial A_i}{\partial q_j} - \frac{\partial A_j}{\partial q_i}}_{=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}\right)}$$

式 (H-ii') で第一項を置き換えると, この量は 0 となるので, $E_i$ は $q, t$ にのみ依存する. さらに,

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_i}{\partial q_j} - \frac{\partial E_j}{\partial q_i} + \frac{\partial B_{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial E_i}{\partial q_j} - \frac{\partial E_j}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_j} - \frac{\partial A_j}{\partial q_i}\right) & \text{(式★)} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k}\right)\left(\underbrace{\frac{\partial^2 K}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial^2 K}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} + \frac{\partial A_i}{\partial q_j} - \frac{\partial A_j}{\partial q_i}}_{=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}\right)}\right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i}\right) & (E_i \text{ の定義})\end{aligned}$$

これは, (H-ii') より 0 となるので,

$$\frac{\partial(-E_i)}{\partial q_j} - \frac{\partial(-E_j)}{\partial q_i} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial t}$$

なので, Poincarè の補題より, (条件 II) を書き換えた

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} = -E_i$$

を満たすような $E_i$ の存在が導かれる. 以上より示された. ■

(戻る)

## §i.2.2 Lagrangian の不定性

この条件を満たす $\mathcal{D}_i$ が与えられると, 対応する $L$ は以下の変形を除いて一意に定まることが知られている.

**Lagrangian の不定性**

$$\widetilde{L}(q(t), \dot{q}(t), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{d}{dt} f(q(t), t)$$

とおいても, $\widetilde{L}$ は Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_i}$$

を満たす.

これは,

$$\begin{aligned}\widetilde{S}[q] &= \int_{t_i}^{t_f} \widetilde{L}(q,\dot{q},t)dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} L(q,\dot{q},t)dt + \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}f(q(t),t)dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} L(q,\dot{q},t)dt + f(q(t_f),t_f) - f(q(t_i),t_i)\end{aligned}$$

同様に, 固定端条件 (♠)$\delta(q_f)=\delta(q_i)=0$ より,

$$\widetilde{S}[q+\delta q] = \int_{t_i}^{t_f} L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)dt + f(q(t_f),t_f) - f(q(t_i),t_i)$$

より $\delta S = \delta\widetilde{S}$ となるからである. ただし, Euler-Lagrange 方程式を保つ変換はこれだけではないことに注意しよう.

- 点変換

Euler-Lagrange 方程式を保つ変換として, 座標の書き換えがある.

**点変換**

$Q_i = Q_i(q,t)$ なる変換をしても,

$$\widetilde{L}(Q(t),\dot{Q}(t),t) := L\left(q(Q(t),t), \frac{d}{dt}q(Q(t),t), t\right)$$

に関して, Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{Q}_i} = 0$$

が成立する.

**導出.)**

$$\frac{\partial\dot{Q}_j}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\frac{dQ_j}{dt} = \frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_k \dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\right)Q_j = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$$

また,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{Q}_j}{\partial\dot{q}_i} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_k \dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\right)\frac{\partial}{\partial q_i}Q_j = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_k \dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\right)Q_j = \frac{\partial\dot{Q}_j}{\partial q_i}$$

の二式に気を付けて, (そして, $L$ に $(q,\dot{q},t)$ を代入した値を単に $L$, $\widetilde{L}$ に $(Q,\dot{Q},t)$ を代入した値を単に $\widetilde{L}$ と書くと, $L=\widetilde{L}$ である．微分も同様. 以下では全部代入した値を表す.)

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_j} && (t, Q \text{ は } \dot{q} \text{ に依存しない}) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_j} && (\text{上に挙げた一式目})\end{aligned}$$

よって

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_j} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\right)\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_j}\right)$$

同様に,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q_j} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\right)\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_j}\right)$$

上の式から下の式を引いて

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q_j}\right)$$

両辺に $\dfrac{\partial q_i}{\partial Q_k}$ を掛けて $i$ に関する和を取れば, 逆変換の Jacobi 行列が逆行列になることに気を付けて,

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_j}$$

■

ということで, 座標変換をしても Euler-Lagrange が変わらないことが分かる．これがどんな Lagrangian はどんな座標を選んでもいいと言った理由である.

- 点変換の例

抽象的にやりすぎてしまったので, 例をはさむ．二次元平面上の質量 $m$ の質点で, 距離に反比例するポテンシャル $U=-\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 中を移動しているものを考える．この時, 前に紹介した Newton 力学を与える Lagrangian は

$$L(x,y,\dot{x},\dot{y},t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

となるが, Euler-Lagrange 方程式は,

$$m\ddot{x} = \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

と

$$m\ddot{y} = \frac{d}{dy}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

となる. 一方で, 座標として $r, \theta$ を取れば, その Lagrangian は

$$L(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta},t) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}$$

となり,

$$m\ddot{r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2}$$

$$2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

となり, 座標変換が容易にできるというメリットがある.

ところで, このような中心力のみ働く場合は, 物体の軌道が閉じることが知られている. このように軌道が閉じるようなポテンシャルは反比例のポテンシャルか, $U = \frac{1}{2}kr^2$ のような調和振動子のポテンシャルしかないことが知られている. (Bertrand の定理[*8]) 特に惑星運動に関して太陽の影響のみ考えるならば, このようなポテンシャルになるはずだが, 実際の観測で水星は他の惑星の影響では説明できないほど軌道が動いている事が知られている (水星の近日点移動). これは相対論の影響を考慮して Schwarzschild 解の外部解を用いると, ポテンシャルが Schwarzschild 半径 $r_s$, 角運動量の定数倍 $j$ を用いて,

$$U = -\frac{r_s}{2r} - r_s\frac{j^2}{2r^3}$$

(須藤相対論参照, 自然単位系) と表されるからである.

### §i.2.3　Noether の定理

少し本と書き方を変える. 　以降適宜微小量 $\varepsilon$ の二次の微小量を省略する.

[*8] なお, 自然数 $n$ に対して, $n < p \leq 2n$ となるような素数 $p$ が存在するという仮説を 1845 年に提唱した Joseph Bertrand と同一人物である. Bertrand の定理は 1873 年に彼が証明した. 彼は数論のほかに, 経済学, 確率論, 熱力学などの分野でも活躍した.

**定理** i.2.3(Noether **の定理** , **非時間依存**)

座標と時間の微小変換 $(q,t) \mapsto (q',t)$ を

$$q'_i = q_i + \delta q_i$$

で定めると, 微小な定数 $\epsilon$ と, $q, \dot{q}, t$ に依存する $Q_i$ を用いて

$$\delta q_i = \epsilon Q_i$$

と書けるとする. この変換に関して, 関数 $L$ に $(q', \dot{q}', t)$ を代入した量 $L' := L(q', \dot{q}', t)$ と関数 $L$ に $(q, \dot{q}, t)$ を代入した量 $L := L(q, \dot{q}, t)$ に対して,

$$L' = L + \frac{df(q,t)}{dt}$$

となり (このことを変換に対して**対称性を持つ**という),

$$\mathcal{Q} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} Q_i - \Lambda(q(t), t)$$

は時間微分が 0 となり, 保存量となる. これを **Noether 保存量**という. ただし, $\Lambda$ は, $L' - L$ が $\varepsilon$ のオーダーであることから,

$$\Lambda(q(t), t) = \frac{1}{\epsilon} \int_{t_0}^{t} (L' - L) d\tilde{t} \qquad (\square)$$

と定義される量である. ただし, 積分変数 $\tilde{t}$ は文字の重複を避ける為に導入したパラメータであり, $L', L$ の $t$ のところに $\tilde{t}$ を代入して積分する事を指す.

**導出.)**

式 ($\square$) を時間微分すると,

$$L' - L = \epsilon \frac{d\Lambda}{dt}$$

一方で, 一次の Taylor 展開より,

$$\begin{aligned}
L' - L &= \epsilon \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} Q_i + \frac{dQ_i}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \\
&= \epsilon \sum_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} Q_i + \frac{dQ_i}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) && \text{(Euler-Lagrange 方程式)} \\
&= \epsilon \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} Q_i
\end{aligned}$$

なので,　上の二式を比較して,

$$\epsilon\frac{d\Lambda}{dt} = \epsilon\frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}Q_i$$

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}Q_i - \frac{d\Lambda}{dt} = 0$$

なので, $\dfrac{d\mathcal{Q}}{dt} = 0$ より, $\mathcal{Q}$ は保存量. ■

この定理はある変換に対して**連続的な対称性があるならば, 対応する保存量が出てくる**という事を主張している. 時間依存する場合は少し変更を加えなければいけないが, 定義出来て少し形は変わるが Noether の定理が成立する. もちろん, 離散的な対称性も時間依存しなければ上で定義したように定義できるが, Noether の定理は使えない. たとえば $q' = -q$ のような変換に関して Lagrangian が対称性を持つならば, **空間反転対称性を持つ**という.

特に $q(t)$ として $\boldsymbol{r}(t)$ を採用した場合, 点変換

$$r_i'^{\alpha}(t) = r_i^{\alpha}(t) + \epsilon F_i^{\alpha}(\boldsymbol{r}(t), t)$$

に対する Noether 保存量は

$$\mathcal{Q} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{\alpha=1}^{d} F_i^{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i^{\alpha}} - \Lambda$$

となる. ($i$ は粒子の添え字, $\alpha$ は空間の添え字)

表にまとめると以下のようになる. ただし, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ は Edinton のイプシロンあるいは **Levi-Civita 記号**である.　$\epsilon^{123} = 1$ で, 一回入れ替えたら符号が逆になって (例: $\epsilon^{213} = -1$), 同じものがあったら 0 になる (例: $\epsilon^{113} = 0$). これを使って三次元の回転が書ける. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^i = \sum_{j,k}\epsilon^{ijk}a_j b_k$$

である.

| 連続対称性 | 変換 | 物理的な意味 | Noether 保存量 $\mathcal{Q}$ |
|---|---|---|---|
| 空間並進対称性 | $r_i'^{\beta} = r_i^{\beta} + \epsilon\delta^{\alpha\beta}$ | 空間の一様性 | 運動量 |
| 時間並進対称性 | $t' = t + \epsilon$ | 時間の一様性 | エネルギー |
| 空間回転対称性 | $r_i'^{\beta} = r_i^{\beta} - \epsilon\sum_{\gamma=1}^{3}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}r_i^{\gamma}$ | 空間の等方性 | 角運動量 |
| Galilei 対称性 | $r_i'^{\alpha} = r_i^{\alpha} + v_0^{\alpha}t$ | 時間の一様性 | $\sum_{i=1}^{M} m_i\boldsymbol{r}_i(t) - t\boldsymbol{P}$ |

## 参考文献


[1] 渡辺悠樹,『解析力学: 基礎の基礎から発展的なトピックまで』, 共立出版, 2024.

[2] 須藤靖,『一般相対論入門［改訂版］』, 日本評論社, 2019.