Zweiseitige z-Transformation

Definition

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\ z^{-n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)\ z^{n-1}\ \mathrm{d}z$$

Eigenschaften

Spiegelung

$$x(-n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X\left(z^{-1}\right)$$

Wenn für $X(z)$ gilt $\mathrm{KB} = \{z \mid r < |z| < r_2\}$, dann ist nun $\mathrm{KB} = \left\{z \mid \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}\right\}$.

Konjugiert komplex

$$x^*(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X^*(z^*)$$

Keine Änderung des KB.

Linearität

$$\sum_i c_i\ x_i(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \sum_i c_i\ X_i(z)$$

Mindestens $\mathrm{KB} = \bigcap_i \mathrm{KB}_i$.

Verschiebung

$$x(n-k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-k}\ X(z)$$

Bleibt gleich, bis auf: $z = 0$ fällt weg für $k > 0$ und $z = \infty$ fällt weg für $k < 0$.

Dehnung in z-Ebene

$$a^n\ x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X\left(\frac{z}{a}\right) \quad \text{mit } a \neq 0$$

Wenn für $X(z)$ gilt $\mathrm{KB} = \{z \mid r < |z| < r_2\}$, dann ist nun $\mathrm{KB} = \{z \mid |a|\ r_1 < |z| < |a|\ r_2\}$.

Differentiation in z-Ebene

$$n\ x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} -z\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ X(z)$$

Keine Änderung des KB, sofern $X(z)$ rational.

Faltung

$$(x_1 * x_2)(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z)\ X_2(z)$$

Mindestens $\mathrm{KB} = \mathrm{KB}_1 \cap \mathrm{KB}_2$.

Moment

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\ x(n) = -z\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ X(z)\Big|_{z=1}$$

Anfangswert

$$x(0) = \begin{cases} X(\infty) & \text{wenn } x(n) \text{ rechtsseitig ist} \\ X(0) & \text{wenn } x(n) \text{ linksseitig ist} \end{cases}$$

Eindeutigkeit

$$x(n) \underset{\text{nur mit KB eindeutig}}{\overset{\text{eindeutig}}{\rightleftarrows}} X(z)$$

Fouriertransformation

$$X(e^{j\omega}) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\ e^{j\omega n} \overset{!}{=} X(z = e^{j\omega})$$

Wichtige zweiseitige z-Transformationen

$x(n)$	$\xrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X(z)$	Konvergenzbereich KB
$\delta(n)$	$\xrightarrow{\mathcal{Z}}$	1	$\mathbb{C}$
$\delta(n-k)$	$\xrightarrow{\mathcal{Z}}$	z^{-k}	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ wenn $k > 0$
			$\mathbb{C} \setminus \{\infty\}$ wenn $k < 0$
$a^n\ u(n)$	$\xrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n\ u(-n-1)$	$\xrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$n\ a^n\ u(n)$	$\xrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-n\ a^n\ u(-n-1)$	$\xrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$d_k(n)\ a^n\ u(n)$	$\xrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^k}$	$\|z\| > \|a\|$
$-d_k(n)\ a^n\ u(-n-k)$	$\xrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^k}$	$\|z\| < \|a\|$
$a^{\|n\|}$	$\xrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$	$\|a\| < \|z\| < \frac{1}{\|a\|}$
$a^n \cos(\omega_0 n)\ u(n)$	$\xrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1-a\ \cos(\omega_0)\ z^{-1}}{1-2a\ \cos(\omega_0)\ z^{-1}+a^2\ z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$

$$a^n\ \sin(\omega_0 n)\ u(n) \quad \xrightarrow{\mathcal{Z}} \quad \frac{a\ \sin(\omega_0)\ z^{-1}}{1-2a\ \cos(\omega_0)\ z^{-1}+a^2\ z^{-2}} \quad |z|>|a|$$

$$\frac{1}{n!}\ u(n) \quad \xrightarrow{\mathcal{Z}} \quad e^{z^{-1}} \quad \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Mit Abkürzung: $d_1(n)=1$, $d_2(n)=n+1$, $d_3(n)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $\mathrm{d}_k(n)=\sum_{i=0}^{n} d_{k-1}(i)$

Rationale z-Transformierte

Definition

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}$$

Polstellen p_i und Nullstellen n_i

$$X(z=p_i)=\infty \ \Leftrightarrow\ B(p_i)=\infty \text{ oder } A(p_i)=0$$

$$X(z=n_i)=0 \ \Leftrightarrow\ B(n_i)=0 \text{ oder } A(n_i)=\infty$$

Eigenschaften

- Keine Polstellen im KB von $X(z)$
- Ein Pol-Nullstellen-Diagramm legt $X(z)$ bis auf eine **Skalierung** fest

Pol-Nullstellen-Zerlegung

$$X(z)=\frac{b_0}{a_0}\ z^{N-M}\ \frac{(z-n_1)\cdot\ldots\cdot(z-n_M)}{(z-p_1)\cdot\ldots\cdot(z-p_N)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{M nicht triviale Nullstellen } n_1,\ldots,n_M \\ \text{N nicht triviale Polstellen } p_1,\ldots,p_N \end{cases}$$

$$+\begin{cases} N>M\text{: } N-M \text{ triviale Nullstellen an } z=0 \\ N<M\text{: } M-N \text{ triviale Polstellen an } z=0 \end{cases}$$

Pol-Nullstellen-Kürzung für $p_i=n_j$

- Reduzierte Systemordnung
- Mögliche Änderung von Stabilität und KB

Rücktransformation $X(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} x(n)$

Möglichkeit 1: Ablesen mit Potenzreihenentwicklung

Bringe durch Ausmultiplizieren oder Potenzreihenentwicklung auf Form:

$$X(z)\overset{!}{=}\sum_n x(n)\ z^{-n} \ \Rightarrow \ \text{dann direktes Ablesen von } x(n)$$

Möglichkeit 2: Partialbruchzerlegung für rationale z-Transformierte

$$\text{Sei } X(z)=\frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})} \text{ rationale } z\text{-Transformierte}$$

1. **Polynomdivision** falls Zählergrad $\geq$ Nennergrad ("negativste" Potenz zuerst)!
2. **Partialbruchzerlegung** und Bestimmung der Koeffizienten wie herkömmlich oder mit Regeln:

Koeffizient c_i für **einfache Polstelle** p_i

$$\frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})}=\frac{c_1}{1-p_1z^{-1}}+\cdots+\frac{c_N}{1-p_Nz^{-1}}$$

$$c_i=\frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})}\ (1-p_iz^{-1})\Big|_{z=p_i}$$

Koeffizienten $c_1,\ldots,c_m$ für **m-fache Polstellen** $p_1,\ldots,p_m$

$$\frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})}=\frac{c_1}{1-p_1z^{-1}}+\cdots+\frac{c_m}{(1-p_1z^{-1})^m}+\ldots$$

$$c_{m-i}=\frac{1}{i!\ (-p_1)^i}\ \frac{\mathrm{d}^i\gamma(w)}{\mathrm{d}w^i}\Big|_{w=p_1^{-1}} \text{ mit } 0\leq i<m$$

$$\gamma(w):=\frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})}\ \left(1-p_1z^{-1}\right)^m\Big|_{z^{-1}=w}$$

3. **Rücktransformation** mittels Tabelle bekannter z-Transformationen

LTI-Systeme / Filter und z-Transformation

Übertragungsfunktion

$$y(n) = (h * x)(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = H(z)\ X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})}$$

Differenzengleichung im Zeitbereich $\leftrightarrow$ $H(z)$ rational mit Pol-und Nullstellen

BIBO-Stabilität

System ist BIBO-stabil

$\Leftrightarrow$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

$\Leftrightarrow$ KB von $H(z)$ enthält den Einheitskreis $|z| = 1$

$\Leftrightarrow$ $h(n)$ ist kausal und $|p_i| < 1\ \forall i$

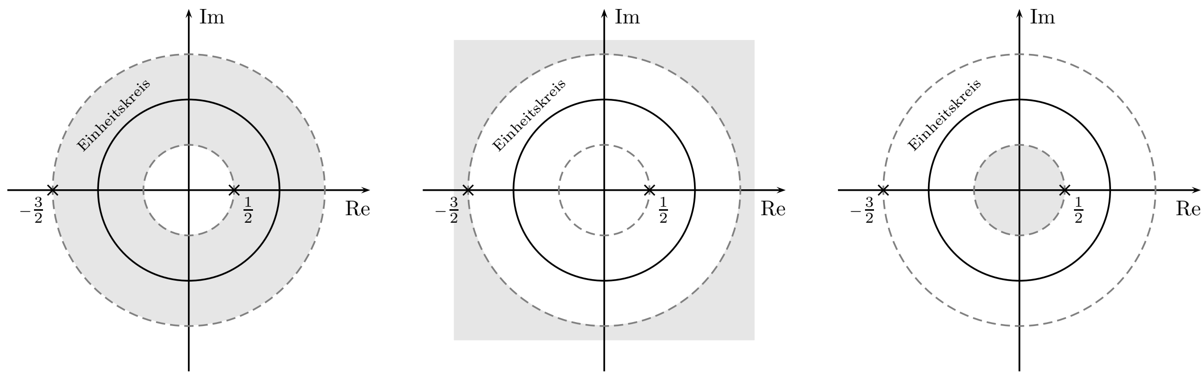
$\Leftrightarrow$ $h(n)$ ist antikausal und $|p_i| > 1\ \forall i$

Bezeichnungen FIR und IIR

Bezeichnung	Übertragungsfunktion	Eigenschaften
FIR(M)	$H(z) = \beta\left(z^{-1}\right)$	Nichtrekursive Differenzengleichung, endliche Impulsantwort, $\beta\left(z^{-1}\right)$ vom Grad M
IIR($N, 0$)	$H(z) = \frac{1}{\alpha(z^{-1})}$	Rein rekursive Differenzengleichung, nicht-endliche Impulsantwort, $\alpha\left(z^{-1}\right)$ vom Grad N
IIR(N, M)	$H(z) = \frac{\beta\left(z^{-1}\right)}{\alpha(z^{-1})}$	Allgemein rekursive Differenzengleichung, nicht-endliche Impulsantwort, $\beta\left(z^{-1}\right)$ vom Grad M, $\alpha\left(z^{-1}\right)$ vom Grad N

Stabilität und Kausalität im Pol-Nullstellen-Diagramm

Stabiles System - Einheitskreis im KB | **Kausales System - KB ist Äußeres** | **Antikausales System - KB ist Inneres**



Definitionen $H\left(e^{j\omega}\right)$, $A(\omega)$, $\theta(\omega)$, $\tau_g(\omega)$

Frequenzgang

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H\left(z = e^{j\omega}\right)$$

Amplitudengang

$$A(\omega) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

Phasengang

$$\theta(\omega) = \arg\left(H\left(e^{j\omega}\right)\right)$$

Gruppenlaufzeit

$$\tau_g(\omega) = -\frac{\mathrm{d}\theta(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

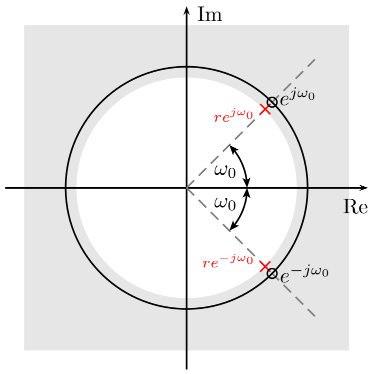
Kerbfilter

FIR-Kerbfilter hat nur Nullstelle:

$$H(z) = c\,\left(1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}\right)$$

IIR-Kerbfilter hat Polstelle mit $0 \ll r < 1$:

$$H(z) = c\,\frac{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\ \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2\ z^{-2}}$$

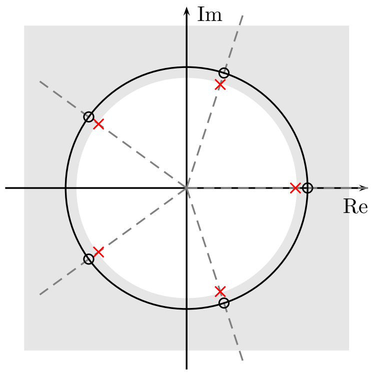


Kammfilter

Übertragungsfunktion des Kammfilters:

$$H(z) = c\,\frac{1 - z^{-N}}{1 - r\ z^{-N}}$$

Polstellen haben Betrag $|p_i| = \sqrt[N]{r}$

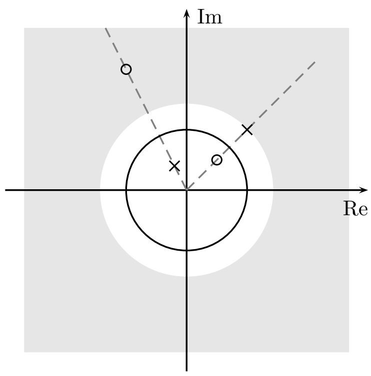


$N = 5$

Allpass

- Amplitudengang: $A(\omega) = \text{const.}\ \forall\omega$
- Pol- und Nullstellen symmetrisch zum Einheitskreis:
  $$n_i = \frac{1}{p_i^*}$$
- Kausaler, stabiler Allpass: $\tau_g(\omega) \geq 0\ \forall\omega$
- Polynome in Übertragungsfunktion $\beta(z^{-1})$, $\alpha(z^{-1})$ haben gleiche Ordnung:

$$H(z) = \frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})}$$



Minimalphasig

Für kausales, stabiles, minimalphasiges Filter gilt:

$$|p_i| < 1 \qquad |n_i| < 1$$

Filter hat *kleinste Gruppenlaufzeit* aller Filter mit gleichem Amplitudengang ($A(\omega) = A_{\min}(\omega)$) und *größte partielle Energie*:

$$\tau_g(\omega) \geq \tau_{g,\min}(\omega) \quad \forall\omega$$

$$\sum_{n=0}^{L} |h(n)|^2 \leq \sum_{n=0}^{L} |h_{\min}(n)|^2 \quad \forall L \geq 0$$

Maximalphasig

Für kausales, stabiles, maximalphasiges Filter gilt:

$$|p_i| < 1 \qquad |n_i| > 1$$

Filter hat *größte Gruppenlaufzeit* aller Filter mit gleichem Amplitudengang ($A(\omega) = A_{\max}(\omega)$) und *kleinste partielle Energie*:

$$\tau_g(\omega) \leq \tau_{g,\max}(\omega) \quad \forall\omega$$

$$\sum_{n=0}^{L} |h(n)|^2 \geq \sum_{n=0}^{L} |h_{\max}(n)|^2 \quad \forall L \geq 0$$

Sonst: Filter hat "gemischte Phase".

Linearphasig

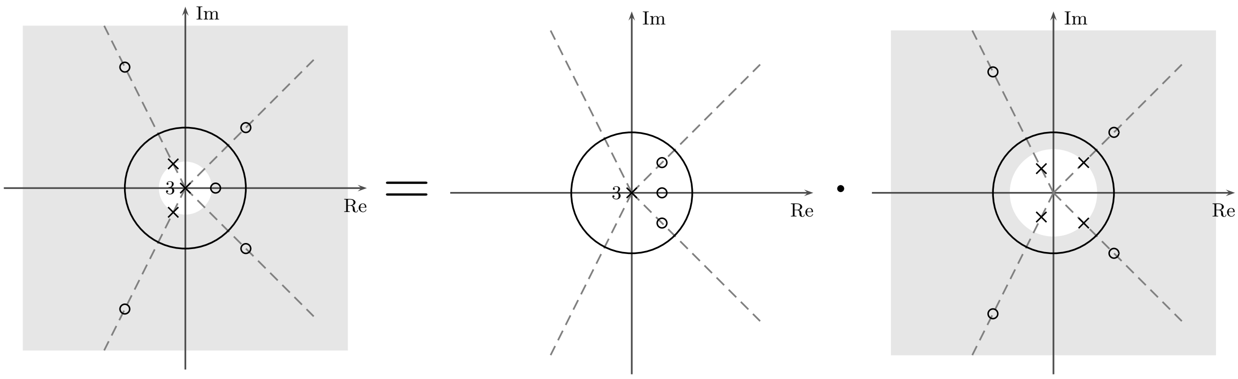
$$H(e^{j\omega}) \stackrel{!}{=} H_0(\omega)\ e^{j(\theta_0-\omega\alpha)}, \quad H_0(\omega) \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \tau_g(\omega) = -\frac{\mathrm{d}\theta(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \alpha = \mathrm{const.}$$

$$\forall\omega, \text{ wo } \theta(\omega) \text{ differenzierbar}$$

Zerlegung: Allpass und minimalphasiges Filter

Jedes beliebige *kausale und stabile* Filter kann ein ein minimalphasiges Filter und einen Allpass zerlegt werden.

Gesamtes Filter | **Minimalphasiges Filter** | **Allpass**



Minimalphasiges Filter ist wie Gesamtfilter, aber mit Nullstellen $|n_i| > 1$ nach innen gespiegelt. Der Allpass kompensiert gespiegelte Nullstellen wieder.

Nullstellen mit $|n_i| > 1$ nach innen spiegeln:

$$n_{i,\min} = \frac{1}{n_i^*}$$

Nullstellen des minimalphasigen Filters mit Polstellen kompensieren:

$$p_{i,\mathrm{all}} = n_{i,\min} = \frac{1}{n_i^*}$$

Einseitige z-Transformation

Definition

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}^+} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\ z^{-n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X^+(z)\ z^{n-1} \mathrm{d}z \text{ mit } n \geq 0$$

$\mathcal{Z}^+$-Trafo

Eigenschaften

Spiegelung

$$x(-n) \xrightarrow{\mathcal{Z}^+} \text{nicht definiert}$$

konjugiert komplex

$$x^*(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}^+} X^{+*}(z^*)$$

Linearität

$$\sum_i c_i\ x_i(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}^+} \sum_i c_i\ X_i^+(z)$$

Verschiebung mit $k > 0$

$$x(n-k) \xrightarrow{\mathcal{Z}^+} z^{-k} \left[X^+(z) + \sum_{n=-k}^{-1} x(n)\ z^{-n} \right]$$

$$x(n+k) \xrightarrow{\mathcal{Z}^+} z^{k} \left[X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)\ z^{-n} \right]$$

Dehnung in z-Ebene

$$a^n\ x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}^+} X^+\left(\frac{z}{a}\right) \text{ mit } a \neq 0$$

Differentiation in z-Ebene

$$n\ x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}^+} -z\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} X^+(z)$$

Faltung

$$(x_1 * x_2)(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}^+} X_1^+(z)\ X_2^+(z) \text{ mit } x_i(n) \text{ rechtsseitig}$$

Moment

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\ x(n) = -z\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} X^+(z) \bigg|_{z=1}$$

Anfangswert

$$x(0) = X(\infty)$$

Lösen von Differenzengleichungen

1. Differenzengleichung einseitig z-transformieren und Anfangsbedingungen einsetzen

$$y(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}^+} Y^+(z), \quad y(n-1) \xrightarrow{\mathcal{Z}^+} z^{-1}\,Y^+(z) + y(-1), \quad y(n-2) = z^{-2}\,Y^+(z) + z^{-1}\,y(-1) + y(-2),$$

$$y(n-3) = z^{-3}\ Y^+(z)\ +\ z^{-2}\ y(-1)\ +\ z^{-1}\ y(-2)\ +\ y(-3), \text{ usw.}$$

2. Einseitige z-Transformierte nach $Y^+(z)$ umformen
3. Durch Rücktransformation $y^+(n)$ bestimmen, z.B. mit Partialbruchzerlegung
4. $y(n)$ aus Anfangsbedingungen und $y^+(n)$ bestimmen

Korrelationsanalyse

Korrelation der Signale $x(n)$, $y(n) \in \mathbb{C}$, $1 \leq n \leq N$:

$$r_{xy} = \alpha \sum_{n=1}^{N} x(n)\ y^*(n)$$

Wähle üblicherweise $\alpha = 1$ oder $\alpha = \frac{1}{N}$

Kovarianz ($\hat{=}$ mittelwertbereinigte Korrelation) der Signale $x(n)$, $y(n) \in \mathbb{C}$, $1 \leq n \leq N$:

$$c_{xy} = \alpha \sum_{n=1}^{N} (x(n) - m_x)\ (y(n) - m_y)^*$$

$$m_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x(n) \qquad m_y = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y(n)$$

Wähle üblicherweise $\alpha = 1$ oder $\alpha = \frac{1}{N}$

Varianz des Signals $x(n) \in \mathbb{C}$, $1 \leq n \leq N$:

$$c_{xx} = \alpha \sum_{n=1}^{N} |x(n) - m_x|^2 \geq 0$$

Wähle üblicherweise $\alpha = 1$ oder $\alpha = \frac{1}{N}$

Korrelationskoeffizient (normierte Kovarianz) der Signale $x(n), y(n) \in \mathbb{C}$, $1 \leq n \leq N$:

$$\rho_{xy} = \frac{c_{xy}}{\sqrt{c_{xx}\ c_{yy}}}$$

Wähle üblicherweise $\alpha = 1$ oder $\alpha = \frac{1}{N}$

Kreuzkorrelationsfunktion zwischen Signalen $x(n) \in \mathbb{C}, 1 \leq n \leq M$ und $y(n) \in \mathbb{C}, 1 \leq n \leq N$ mit $M > N$:

$$r_{xy}(k) = \alpha \sum_{n=1}^{N} x(n+k)\, y^*(n), \quad 0 \leq k \leq M-N$$

Wähle üblicherweise $\alpha = 1$ oder $\alpha = \frac{1}{N}$

Kreuzkovarianzfunktion zwischen Signalen $x(n) \in \mathbb{C}, 1 \leq n \leq M$ und $y(n) \in \mathbb{C}, 1 \leq n \leq N$ mit $M > N$:

$$c_{xy}(k) = \alpha \sum_{n=1}^{N} \tilde{x}(n+k)\ \tilde{y}^*(n), \quad 0 \leq k \leq M-N$$

$$\tilde{x}(n+k) = x(n+k) - m_x \qquad \tilde{y}(n) = y(n) - m_y$$

$$m_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x(n+k) \qquad m_y = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y(n)$$

Wähle üblicherweise $\alpha = 1$ oder $\alpha = \frac{1}{N}$

$(x \underset{\circledast}{\star} y)(n)$

Zirkulare Faltung

Zirkulare Faltung der Länge N der Signale $x_1(n)$ mit $0 \leq n \leq N_1$ und $x_2(n)$ mit $0 \leq n \leq N_2$ ist gegeben durch

$$(x_1 \circledast x_2)(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_{p,1}(m)\ x_{p,2}(n-m)$$

mit $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ und $x_{p,i}$ ... periodische Fortsetzungen:

$$x_{p,i} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_i(n + lN_i) = x_i(m \bmod N_i)$$

Damit zirkulare Faltung $\equiv$ lineare Faltung, wähle $N \geq N_1 + N_2 - 1 =$ Länge von $(x_1 * x_2)(n)$.

Rechenbeispiel

$$x(n) = \left\{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\right\} \qquad h(n) = \left\{\underset{\uparrow}{1}, 2, 1\right\} \qquad y(n) = (x \circledast h)(n)$$

$h_p(0)\ x_p(n)$	1	2	3	4
$h_p(1)\ x_p(n-1)$	8	2	4	6
$h_p(2)\ x_p(n-2)$	3	4	1	2
$y(n)$	12	8	8	12

Diskrete Fouriertransformation DFT

Definition

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)\ e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\ e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad \text{mit}\ \ x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n+lN)$$

Eigenschaften (zirkular)

Nyquist-Bedingung

$$\text{Länge von } X(k) = N \geq L = \text{Länge von } x(n)$$
$$\Longrightarrow \text{Rekonstruktion von } x(n) \text{ aus } x_p(n)$$

Spiegelung

$$x_p(-n) \xrightarrow{\text{DFT}_N} X(-k)$$

Konjugiert komplex

$$x_p^*(n) \xrightarrow{\text{DFT}_N} X^*(-k)$$

Linearität

$$\sum_i c_i\ x_{p,i}(n) \xrightarrow{\text{DFT}_N} \sum_i c_i\ X_i(k)$$

Symmetrie

$$\begin{array}{rcl} x_p(n) \text{ gerade reell} & \Longleftrightarrow & X(k) \text{ gerade reell} \\ x_p(n) \text{ gerade imaginär} & \Longleftrightarrow & X(k) \text{ gerade imaginär} \\ x_p(n) \text{ ungerade reell} & \Longleftrightarrow & X(k) \text{ ungerade imaginär} \\ x_p(n) \text{ ungerade imaginär} & \Longleftrightarrow & X(k) \text{ ungerade reell} \end{array}$$

Periodizität

$$x_p(n+N) = x_p(n) \qquad X(k+N) = X(k)$$

Verschiebung

$$x_p(n-n_0) \xrightarrow{\text{DFT}_N} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}\ X(k)$$

$$e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}\ x_p(n) \xrightarrow{\text{DFT}_N} X(k-k_0)$$

Faltung

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_{p,1}(m)\ x_{p,2}(n-m) \xrightarrow{\text{DFT}_N} X_1(k)\ X_2(k)$$

$$x_{p,1}(n)\ x_{p,2}(n) \xrightarrow{\text{DFT}_N} \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X_1(m)\ X_2(k-m)$$

Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_{p,1}(n)\ x_{p,2}^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_1(k)\ X_2^*(k)$$

DFT und iDFT als Matrixoperation

Mit DFT_N-**Faktor** $w_N := e^{-\frac{2\pi}{N}}$ schreibt sich die DFT_N als:

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_N^0 & w_N^0 & w_N^0 & w_N^0 & \cdots & w_N^0 \\ w_N^0 & w_N^1 & w_N^2 & w_N^3 & \cdots & w_N^{N-1} \\ w_N^0 & w_N^2 & w_N^4 & w_N^6 & \cdots & w_N^{2(N-1)} \\ w_N^0 & w_N^3 & w_N^6 & w_N^9 & \cdots & w_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_N^0 & w_N^{N-1} & w_N^{2(N-1)} & w_N^{3(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{X}}_{N\times 1} = \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{N\times N} \cdot \underline{\mathbf{x}}_{N\times 1}$$

Analog die iDFT_N:

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} w_N^0 & w_N^0 & w_N^0 & w_N^0 & \cdots & w_N^0 \\ w_N^0 & (w_N^*)^1 & (w_N^*)^2 & (w_N^*)^3 & \cdots & (w_N^*)^{N-1} \\ w_N^0 & (w_N^*)^2 & (w_N^*)^4 & (w_N^*)^6 & \cdots & (w_N^*)^{2(N-1)} \\ w_N^0 & (w_N^*)^3 & (w_N^*)^6 & (w_N^*)^9 & \cdots & (w_N^*)^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_N^0 & (w_N^*)^{N-1} & (w_N^*)^{2(N-1)} & (w_N^*)^{3(N-1)} & \cdots & (w_N^*)^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{x}}_{N\times 1} = \frac{1}{N}\underline{\underline{\mathbf{W}}}^H_{N\times N} \cdot \underline{\mathbf{X}}_{N\times 1}$$

Beispiel DFT_4

$$\underline{\underline{W}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}$$

Beispiel iDFT_4

$$\frac{1}{N}\underline{\underline{W}}^H = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix}$$

DFT

Mathematik

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha)\ \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$
$$\cos(\alpha)\ \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin(\alpha)\ \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\ \cos(\beta)+\cos(\alpha)\ \sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\ \cos(\beta)-\cos(\alpha)\ \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\ \cos(\beta)-\sin(\alpha)\ \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\ \cos(\beta)+\sin(\alpha)\ \sin(\beta)$$

$$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = 1$$
$$\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha)$$
$$\cos(x)^2 = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right) \qquad \sin(x)^2 = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)$$

Mathe

Hyperbolische Funktionen

$$\cosh(x) := \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) := \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x)^2-\sinh(x)^2 = 1$$

Eulersche Formel

$$e^{jx} = \cos(x)+j\sin(x)$$
$$\cos(x) = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen

$$\sin(x) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \qquad -\sin(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cos(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \qquad -\cos(x) = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Summenformeln

$$\sum_{k=M}^{N-1} q^k = \frac{q^M-q^N}{1-q},\ q\neq 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q},\ |q|<1$$
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2}$$

Sinus-Cosinus-Wertetabelle

	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$	$105°$	$120°$	$135°$	$150°$	$165°$	$180°$
$\sin(x)$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	-1

	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π
	$195°$	$210°$	$225°$	$240°$	$255°$	$270°$	$285°$	$300°$	$315°$	$330°$	$345°$	$360°$
$\sin(x)$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
$\cos(x)$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1