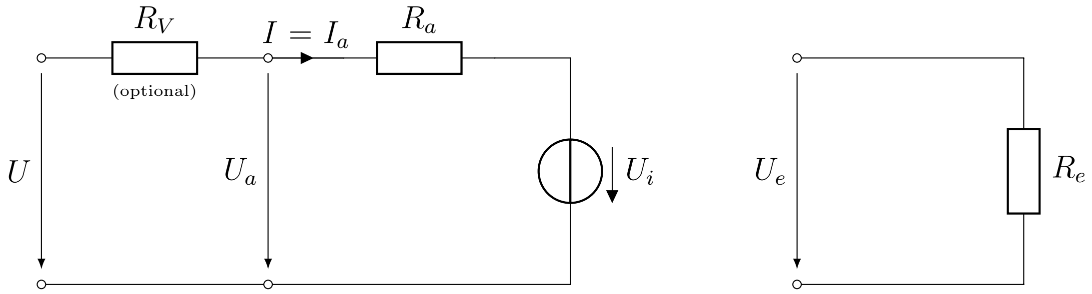
Gleichstrommaschine

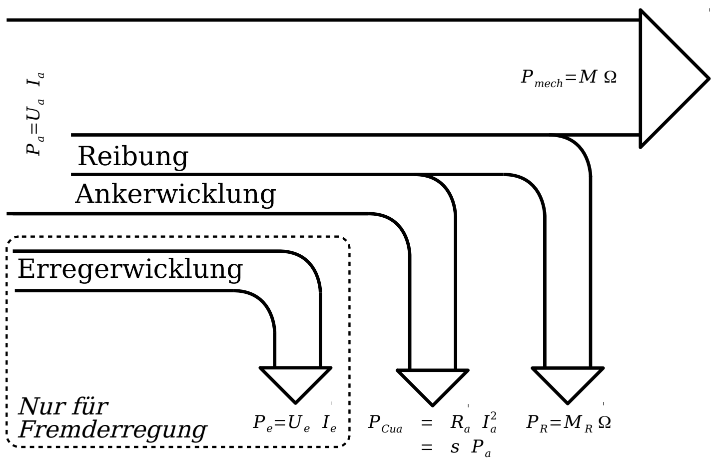
Einphasiges Ersatzschaltbild



Ersatzschaltbild des Ankers (Rotor, links) und des Erregers (Stator, rechts)

Sofern nicht anders beschrieben, gilt überall die Annahme $R_V = 0$!

Leistungsbilanz



s bezieht sich auf durch U_a hervorgerufene Leerlaufdrehzahl

Kenngrößen

Stillstand ($\Omega = 0$) Im Anker wird keine Spannung induziert, $U_i = 0$. Die Maschine bringt das Stillstandsdrehmoment $M_{st} = K\ \Phi\ \frac{U}{R_a} = K\ \Phi\ I_{st}$ auf. Im Ankerkreis fließt $I_{st} = \frac{U}{R_a}$

Leerlauf ($M_i = 0$) Es wird keine Leistung umgesetzt, d.h. $I = 0$. Folglich ist $U_i = U$. Für die Drehzahl folgt $\Omega_\ell = \frac{U}{K\ \Phi}$.

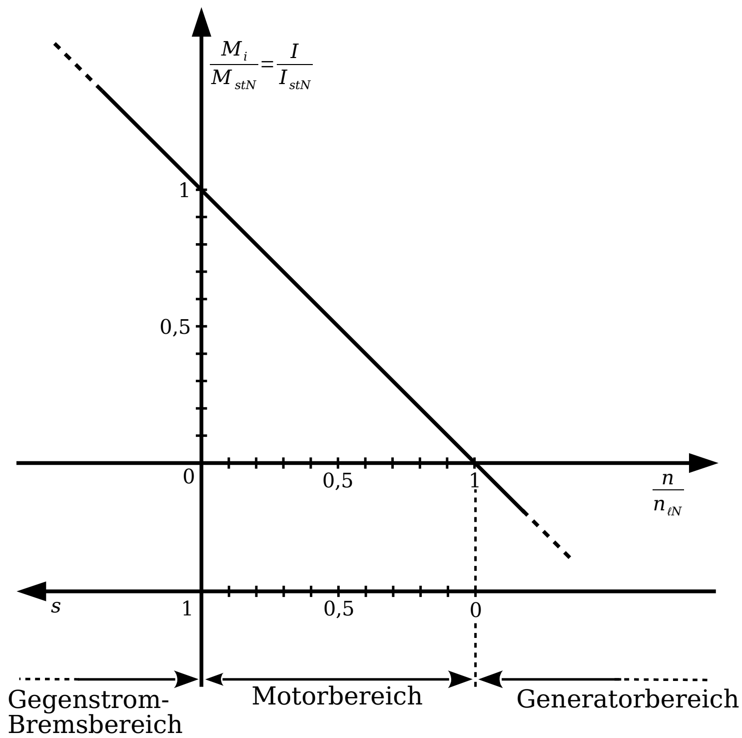
Nennwerte Es werden die maximalen Bemessungswerte U_N, I_N, I_{eN} angegeben, die nicht längerfristig überschritten werden dürfen.

Motorbereich GSM dreht sich langsamer als $n_{\ell N}$ vorwärts, d.h. $0 \leq s \leq 1$, $P_{mech} \approx P_{el} > 0$.

Generatorbereich GSM dreht sich schneller als $n_{\ell N}$ vorwärts, d.h. $s < 0$, $P_{mech} \approx P_{el} < 0$.

Gegenstrom-bremsbereich GSM dreht sich rückwärts, d.h. $s > 1$, $P_{mech} < 0$ und $P_{el} > 0$.

Momentenkennlinie



Der Verlauf der Kennlinie ist bei Fremd- / Permanenterregung linear

Beeinflussung der Kennlinie

Sei hier jeweils M_{stN} (Stillstandsdrehmoment für Nennbetrieb, d.h. für $R_V = 0$, $U = U_N$ und $\Phi = \Phi_N$) schon bekannt

Durch Ankervorschaltwiderstand R_V

Seien $U = U_N$ und $\Phi = \Phi_N$ konstant.

$\rightarrow$ In den Gleichungen muss R_a durch $R_a + R_v$ ersetzt werden!

Das Stillstandsdrehmoment wird kleiner, die Leerlaufdrehzahl bleibt jedoch gleich und die Kennlinie bleibt eine Gerade.

$$\frac{M_i}{M_{stN}} = \frac{1}{1 + \frac{R_v}{R_a}} \; s$$

Durch Ankerspannungsänderung

Seien $R_V = 0$ und $\Phi = \Phi_N$ konstant $\rightarrow$ In den Gleichungen wird U verändert!

Eine Spannungsänderung verschiebt die Kennlinie nach oben / unten.

$$\frac{M_i}{M_{stN}} = \frac{U}{U_N} - \frac{\Omega}{\Omega_{\ell N}}$$

Durch Flussänderung / Erregerstromänderung (Feldschwächbereich)

Seien $R_V = 0$ und $U = U_N$ konstant → In den Gleichungen wird Φ verändert!

Eine Flussänderung verändert sowohl das Stillstandsdrehmoment als auch die Leerlaufdrehzahl.

$$\begin{aligned}\frac{M_i}{M_{stN}} &= \left(\frac{\Phi}{\Phi_N}\right)^2 s + \frac{\Phi}{\Phi_N} - \left(\frac{\Phi}{\Phi_N}\right)^2 \\ &= \frac{\Phi}{\Phi_N} - \left(\frac{\Phi}{\Phi_N}\right)^2 \frac{\Omega}{\Omega_{\ell N}}\end{aligned}$$

Gleichungen

Grundgleichung: Induzierte Spannung

$$U_i = K\ \Phi\ \Omega \implies \frac{U_i}{U_{i\ell N}} = \frac{U_i}{U_N} = \frac{\Omega}{\Omega_{\ell N}}$$

Grundgleichung: Inneres Drehmoment

$$M_i = K\ \Phi\ I \implies \frac{M_i}{M_{iN}} = \frac{I}{I_N}$$

Grundgleichung: Maschengleichung

$$I = \frac{U - U_i}{R_a}$$

Grundgleichung: Erregerfeld-Hauptfluss (nur bei Fremderregung)

$$\Phi = c_1\ I_e$$

Schlupf

$$s = 1 - \frac{n}{n_{\ell N}}$$

Proportionalitäten mit Schlupf (rechtes = gilt unabhängig von U, nur von Φ abhängig)

$$s = \frac{M_i}{M_{stN}} = \frac{I}{I_{stN}}$$

Induzierte Spannung aus Schlupf (folgt aus $s \propto n$ für $\Phi = const.$, s muss Schlupf bzgl. der durch U hervorgerufenen Leerlaufdrehzahl sein)

$$U_i = (1 - s)\ U$$

Drehmoment aus Nenndrehmoment

$$\frac{M_i}{M_{iN}} = \frac{s}{s_N}$$

Inneres Drehmoment

$$M_i = \frac{K\ \Phi}{R_a}\ (U - K\ \Phi\ \Omega)$$

Ankerwiderstand (gilt auch bei Reibung)

$$R_a = s\ \frac{U}{I}$$

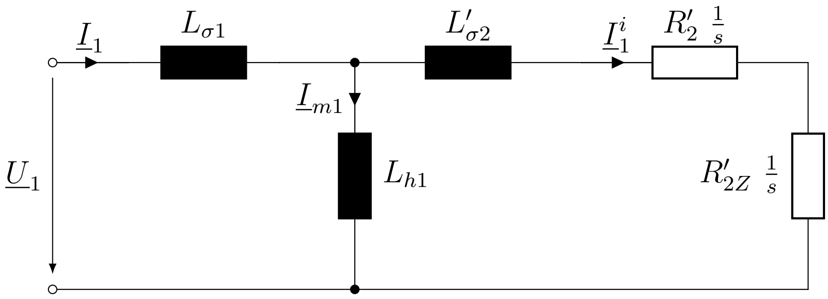
Proportionalität auf Nennpunkt bezogen (gilt unabhängig von U, nur von Φ abhängig)

$$\frac{M_i}{M_{iN}} = \frac{I}{I_N}$$

Indizes: **i** = Inneres Drehmoment, ℓ = Leerlauf, **N** = Nennbetrieb, d.h. $U = U_N$, $R_V = 0$ und $\Phi = \Phi_N$, **a** = Anker (Rotor), **e** = Erreger (Stator), **st** = Stillstand

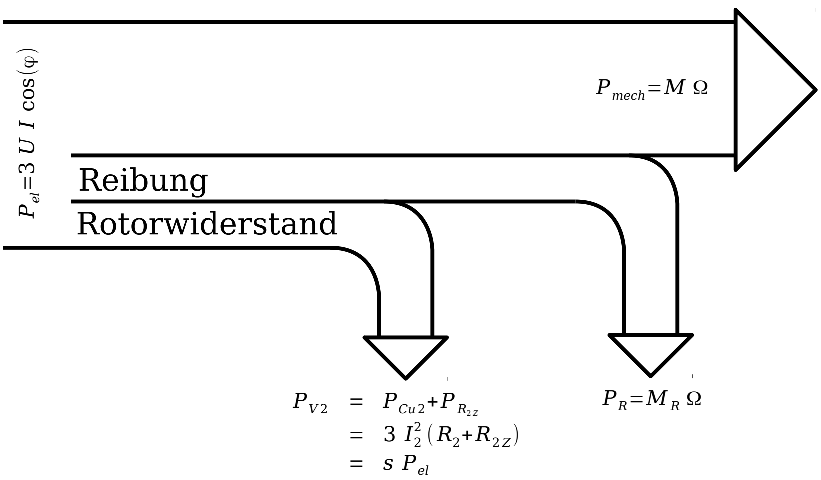
Asynchronmaschine

Einphasiges Ersatzschaltbild



Man beachte die schlupfabhängigen Widerstände

Leistungsbilanz



Sonstige Verluste vernachlässigt, mit $I_2 \ldots$ Läuferstrom, häufig gilt $R_{2Z} = 0$

Kenngrößen

Kippunkt Arbeitspunkt des maximalen Drehmoments (*Kippmoment* M_{iK}), welches die Maschine abgeben kann (bzw. im Generatorbetrieb aufnehmen kann). Es tritt der *Kippschlupf* s_K auf, wobei ein Zusammenhang über die Kloss'sche Formel gegeben ist.

Leerlaufpunkt Arbeitspunkt, an dem keine elektrische / mechanische Leistung umgesetzt wird. Es gilt $s = 0$ für den Schlupf und $M_i = 0$ für das Drehmoment, die Maschine dreht sich mit ihrer *Leerlaufdrehzahl* $n_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$.

Nennpunkt Arbiträr festgelegter, vorgesehener Betriebspunkt. Häufig dürfen Statorstrom und -spannung diese Nennwerte nicht überschreiten. Typischerweise $s = 2 \ldots 4\%$.

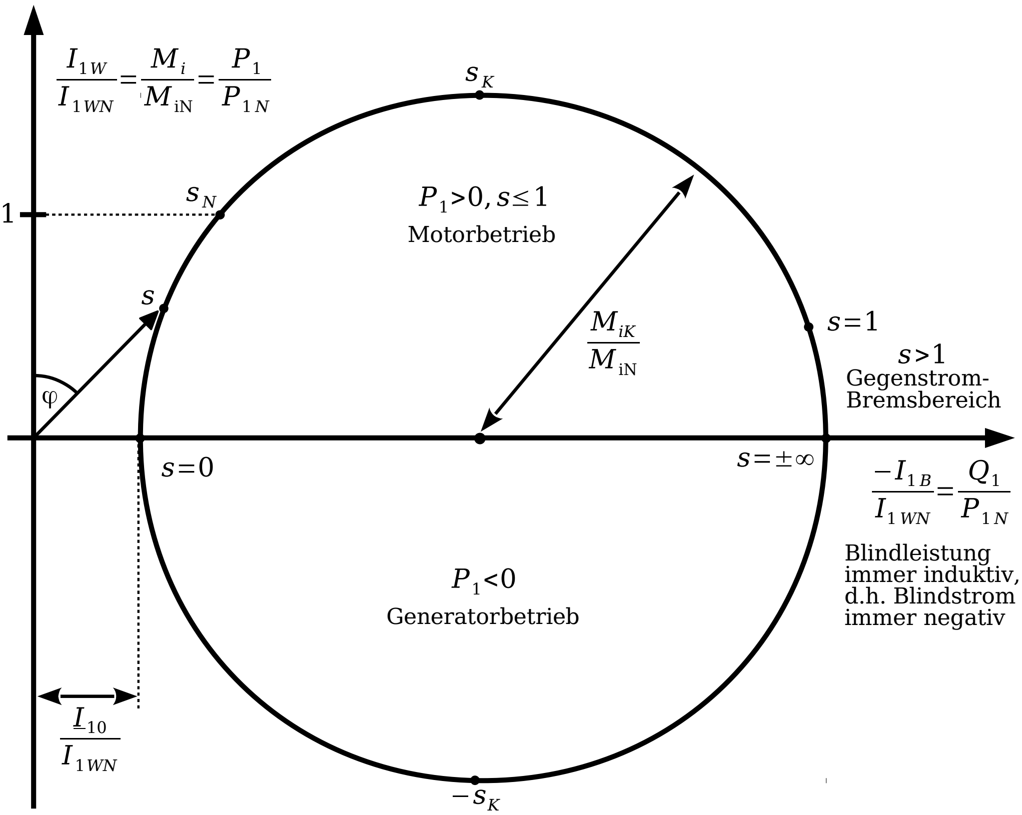
Anlaufpunkt Punkt, an dem die ASM stillsteht, d.h. $s = 1$. Das *Anlaufdrehmoment* berechnet sich mit der Kloss'schen Formel.

Motorbereich ASM dreht sich langsamer als n_0 vorwärts, d.h. $0 \leq s \leq 1$, $P_{mech} \approx P_{el} > 0$.

Generatorbereich ASM dreht sich schneller als n_0 vorwärts, d.h. $s < 0$, $P_{mech} \approx P_{el} < 0$.

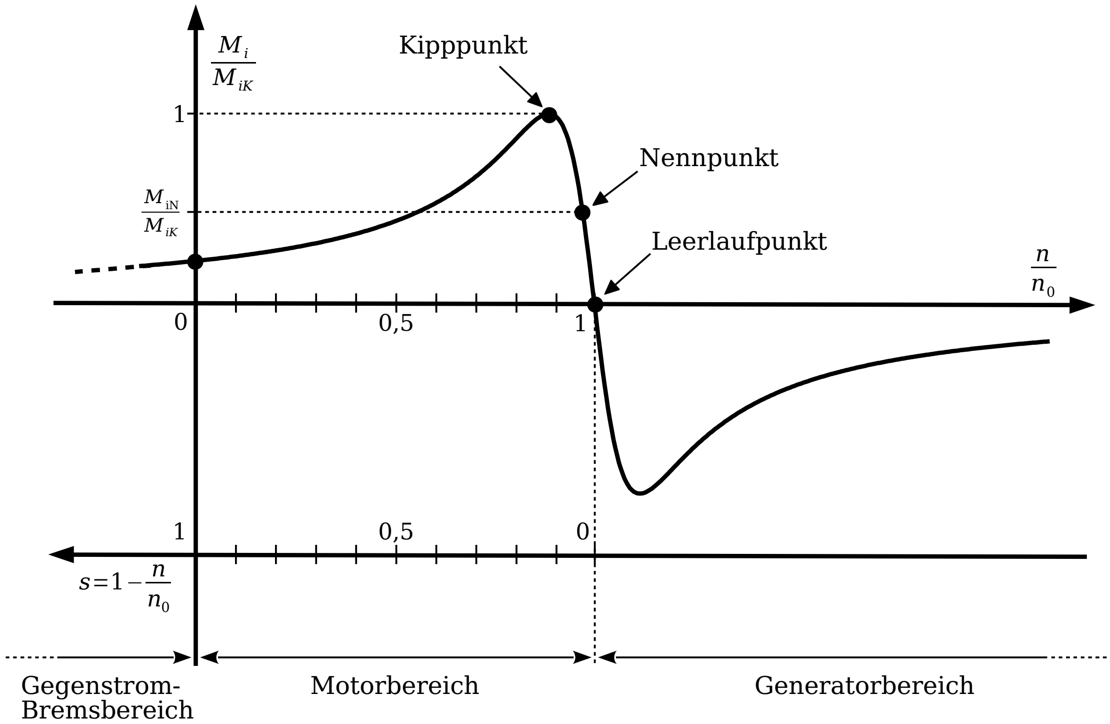
Gegenstrom-bremsbereich ASM dreht sich rückwärts, d.h. $s > 1$, $P_{mech} < 0$ und $P_{el} > 0$.

Stromortskurve (Heylandkreis)



Der Schlupf auf dem Kreisbogen kann entsprechend Anhang A abgelesen werden

Momentenkennlinie



Der Verlauf der Kennlinie ist durch die Kloss'sche Formel gegeben

Gleichungen

Schlupf

$$s = 1 - \frac{n}{n_0}$$

Mech. und el. Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega_0 = \frac{\omega_0}{p}$$

Kloss'sche Formel

$$\frac{M_i}{M_{iK}} = \frac{2}{\frac{s}{s_K} + \frac{s_K}{s}}$$

Kippschlupf (⇔ Kloss'sche Formel)

$$s_K = s \left(\frac{M_{iK}}{M_i} \pm \sqrt{\left(\frac{M_{iK}}{M_i}\right)^2 - 1} \right)$$

Rotordrehstromfrequenz

$$\omega_2 = s\ \omega_1$$

Frequenzumrichterbetrieb bei ω_1 und U_1

$$\frac{n_0}{n_{0N}} = \frac{\omega_1}{\omega_{1N}}\ ,\ \frac{s_K}{s_{KN}} = \frac{\omega_{1N}}{\omega_1}\ ,\ \frac{M_{iK}}{M_{iKN}} = \left(\frac{U_1\ \omega_{1N}}{U_{1N}\ \omega_1}\right)^2$$

Proportionalitäten

$$\frac{M_i}{M_{iN}} = \frac{I_{1W}}{I_{1WN}} = \frac{P_1}{P_{1N}} \quad \text{und} \quad \frac{-I_{1B}}{I_{1WN}} = \frac{Q_1}{P_{1N}}$$

Verweis: Weitere Gleichungen zu elektrischen Größen und zum Läuferzusatzwiderstand R_{2Z} im Umdruck.

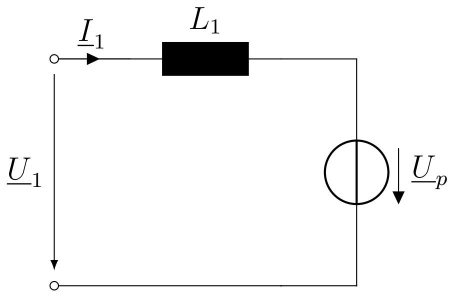
Indizes: **0** = Leerlauf, **1** = Stator, **2** = Rotor, **K** = Kipppunkt, **N** = Nennbetrieb, **W** = Wirkstrom, **B** = Blindstrom, **i** = inneres Drehmoment

Synchronmaschine

Ersatzschaltbilder

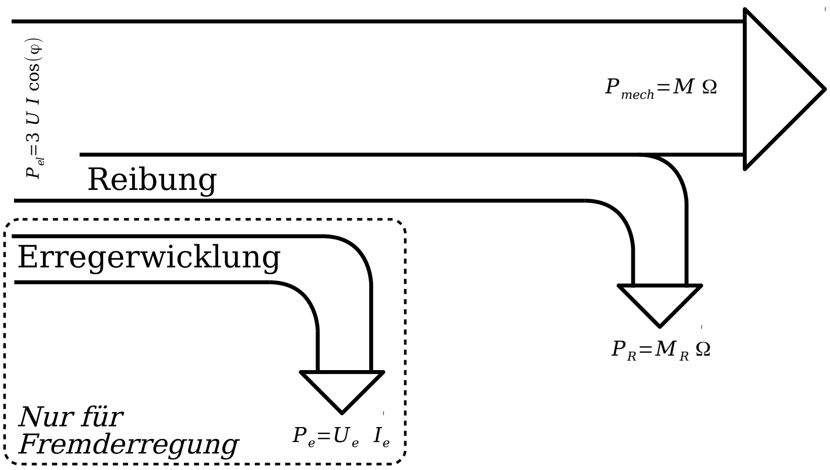
Detailliertere Ersatzschaltbilder sind in Anhang B zu finden.

Vereinfachtes ESB 2. Art



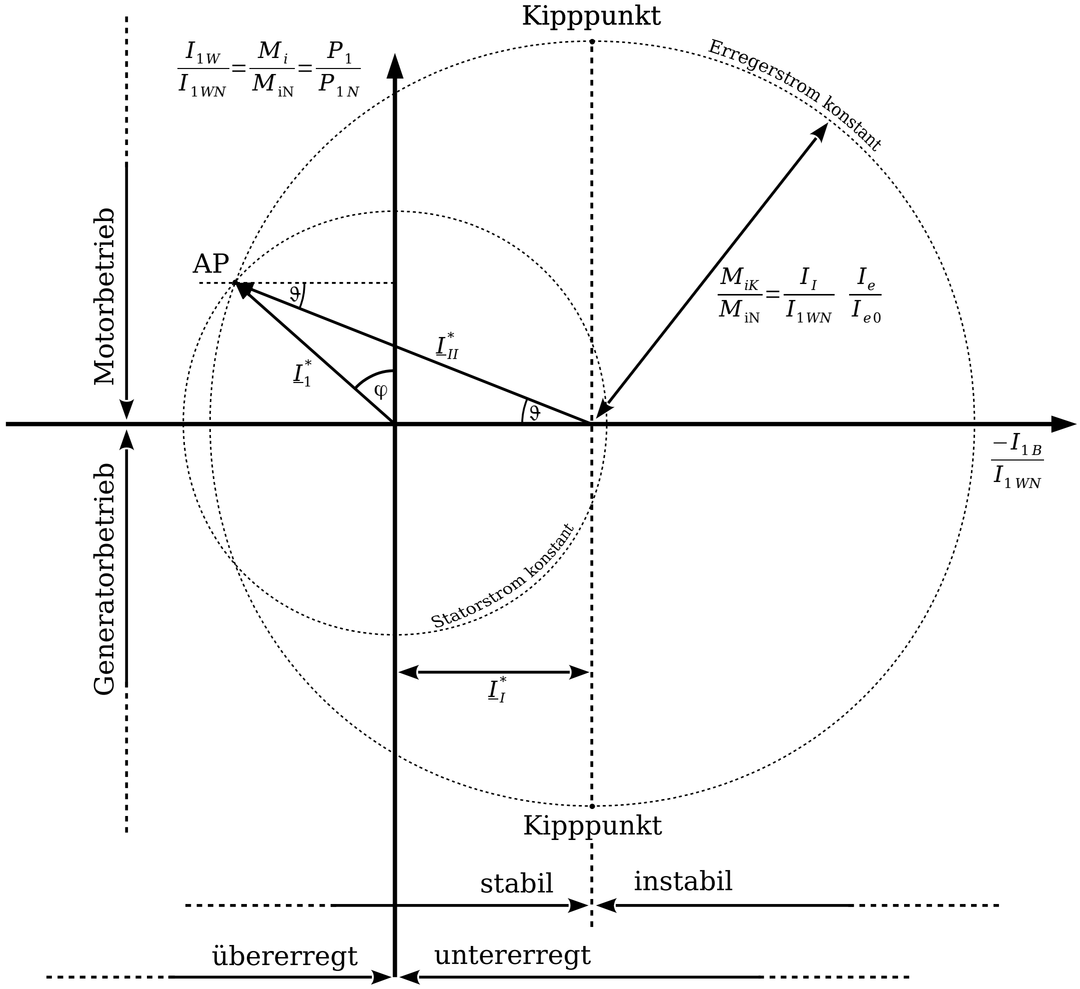
$$L_1 = L_{\sigma 1} + L_{h1}$$

Leistungsbilanz



Die Leistung P_e zur Erregung der Läuferspule geht vollständig verloren.
Da der Widerstand auf der Ständerseite vernachlässigbar ist ($P_{Cu1} << P_i$), gilt das vereinfachte ESB 2. Art und $P_{el} = P_{mech,i}$.

Stromortskurve und Kenngrößen



* = Diese Größen seien auch auf I_{1WN} normiert

Man beachte, dass die Ortskurve relativ zu einer **rein reellen Spannung** $\underline{U}_1$ gezeichnet wird, das heißt es gilt z.B. im Generatorbetrieb

$$\underline{I}_1 = \frac{U_1}{\text{Lastimpedanz}}$$

Ströme I_I und I_{II}

Aus vereinfachtem ESB 2. Art folgt:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_p}{j\omega L_1} = \underbrace{-j\ \frac{\underline{U}_1}{\omega L_1}}_{\underline{I}_I} + \underbrace{j\ \frac{\underline{U}_p}{\omega L_1}}_{\underline{I}_{II}}$$

Da $\underline{U}_1$ meist schon durch ein starres Netz vorgegeben ist, kann $\underline{I}_I$ als konstant betrachtet werden. $\underline{I}_{II}$ hingegen variiert mit sich ändernder Belastung (d.h. bei sich änderndem ϑ) und sich änderndem Erregerstrom I_e.

SM

Mechanische (Ω) und elektrische (ω) Winkelgeschwindigkeit

Elektrische Drehzahl $\omega = 2\pi f_N$, wobei f_N die Netzfrequenz ist.

$\rightarrow$ Läuferdrehzahl ist um den Faktor $\frac{1}{p}$ kleiner: $\Omega = \frac{\omega}{p}$

Erregerstrom I_e

Man spricht vom **untereregten** Betrieb, wenn die Maschine induktive Blindleistung aufnimmt bzw. kapazitive abgibt $\rightarrow$ Der Stromzeiger I_1 zeigt in die rechte Halbebene.
Man spricht vom **übereregten** Betrieb, wenn die Maschine induktive Blindleistung abgibt bzw. kapazitive aufnimmt $\rightarrow$ Der Stromzeiger I_1 zeigt in die linke Halbebene.

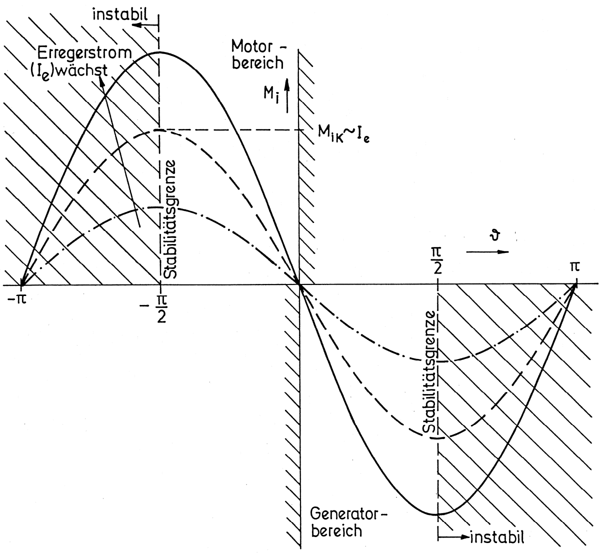
Leerlauferregerstrom I_{e0}

Der Leerlauferregerstrom ist der Erregerstrom, der fließen muss, um bei Nenndrehzahl und Nennspannung einen Betriebspunkt zu ermöglichen, bei dem kein Strom I_1 fließt, d.h. die induzierte Polradspannung U_p entspricht der anliegenden Spannung U_{1N}.

Bildlich gesprochen verläuft die Ortskurve des Statorstroms bei $I_e = I_{e0}$ durch den Ursprung.

Momentenkennlinie

Die Synchronmaschine weist bei jedem abgegebenen oder abverlangten Moment unterhalb des Polradwinkels $\frac{\pi}{2}$ die gleiche Drehzahl Ω auf. Es verändert sich lediglich der Polradwinkel ϑ.



SM

Gleichungen

Mech. und el. Polradwinkel

$$\alpha_p = \frac{\vartheta}{p}$$

Mech. und el. Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{\omega}{p}$$

Drehmoment-Polradwinkel-Kennlinie

$$M_i = M_{iK}\ \sin(-\vartheta)$$

Proportionalitäten aus Leistungsbilanz (für U_1 und Ω_0 konstant)

$$\frac{M_i}{M_{iN}} = \frac{I_{1W}}{I_{1WN}} = \frac{P_i}{P_{iN}} = \frac{P_1}{P_{1N}}$$

Skalierung Ortskurvenkreis

$$\frac{I_e}{I_{e0}} = \frac{I_{II}}{I_I} = \frac{U_p}{U_{1N}}$$

Kippschlupf aus elektrischen Größen

$$M_{iK} = 3\ \frac{p}{\omega^2\ L_1}\ U_1\ U_{1N}\ \frac{I_e}{I_{e0}}$$

Verhältnis von I_{1W} zum elektrischen Polradwinkel

$$I_{1W} = \frac{U_p}{\omega L_1}\ \sin(-\vartheta)$$

Indizes: **i** = inneres Drehmoment, **W** = Wirkstrom / -leistung, **N** = Nennwert, **K** = Kippmoment, d.h. für $\vartheta = 90°$, **0** (bei Ω_0) = Rotationsgeschwindigkeit des Drehfelds, **1** = Stator, **e** = Erreger, **e0** = Leerlauferregerstrom

Transformator

Schaltgruppen

Typische Verschaltungen von Drehstromtransformatoren sind: Dreieckschaltung ($\triangle$, D), Sternschaltung ($\curlywedge$, Y) und Zickzackschaltung (Z).

Die Schaltgruppenbezeichnung besteht aus

1. Kennbuchstabe	Schaltung der Oberspannungsseite (Y, D, Z)
2. Kennbuchstabe	Schaltung der Unterspannungsseite (y, d, z)
3. Kennzahl n	Stundenzahl, die Zeiger der Unterspannungsseite eilen denen der Oberspannungsseite um $n \cdot 30°$ nach

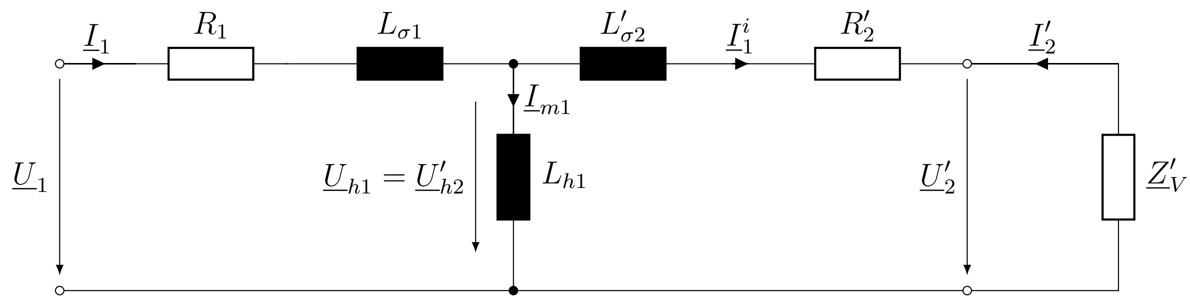
Trafo

Übertragungsverhältnis nach Schaltgruppe

$ü = \frac{w_1}{w_2}$	$ü = \frac{w_1}{\sqrt{3}\ w_2}$	$ü = \frac{\sqrt{3}\ w_1}{w_2}$	$ü = \frac{2\ w_1}{\sqrt{3}\ w_2}$
Yy0	Dy5	Yd5	Yz5
Dd0	Dy11	Yd11	

Ersatzschaltbilder

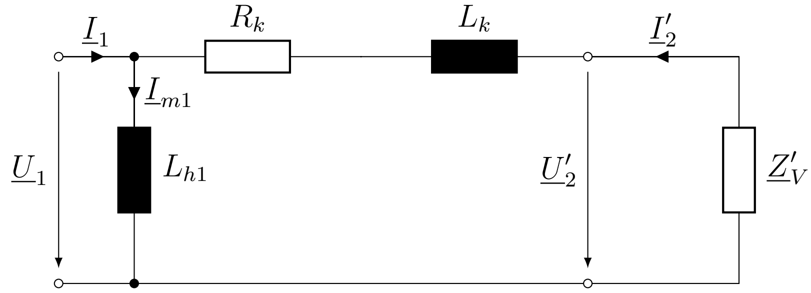
Vollständiges Ersatzschaltbild ohne idealen Transformator



Gestrichene (′) Größen sind auf die Primärseite bezogen

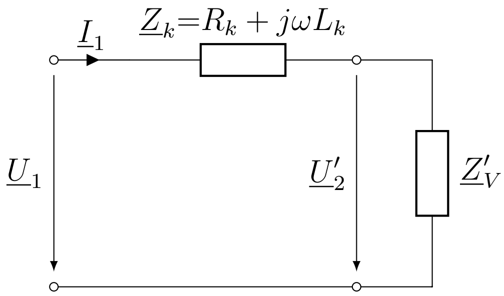
Vereinfachtes Ersatzschaltbild 1. Art

Näherung $|\underline{I}_{m1}| \ll |\underline{I}_1^i|$ ergibt mit $R_k = R_1 + R'_2$ und $L_k = L_{\sigma 1} + L'_{\sigma 2}$

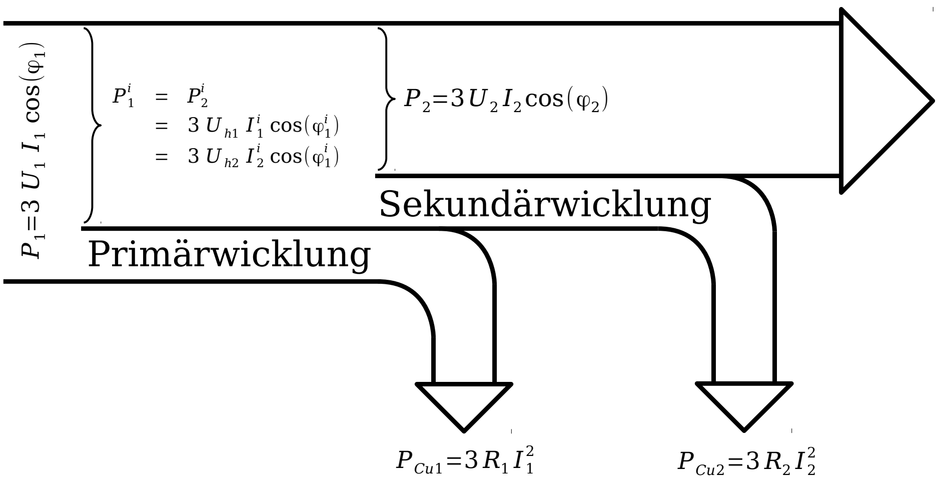


Vereinfachtes Ersatzschaltbild 2. Art

Näherung $|\underline{I}_{m1}| \approx 0$ ergibt:



Leistungsbilanz



Faktor 3 ist spezifisch für dreiphasigen Drehstromtransformator

Impedanzwandlung

Das Übertragunsverhältnis $\ddot{u}$ wird (meist) so angegeben, dass $\ddot{u} > 1$. Für $\underline{Z}_{HV}$ auf der Hochspannungsseite und $\underline{Z}_{LV}$ auf der Niederspannungsseite gilt:

$$\underline{Z}_{HV} = \ddot{u}^2\ \underline{Z}_{LV}$$

Die auf die Hochspannungsebene bezogene Impedanz ist größer!

Kenngrößen

Kurzschlussspannung

Die *Nennkurzschlussspannung* $\underline{U}_{1k}$ ist die Sternspannung, die an den Primärklemmen anliegt, wenn bei kurzgeschlossenen Sekundärklemmen an den Primärklemmen reeller Nennstrom fließt, d.h. $\arg(\underline{I}) = 0$. Wird U_{1k} bzw. u_{1k} rein betragsmäßig angegeben, so handelt es sich um den positiven Imaginärteil des Wertes ($\rightarrow$ Kurzschlussimpedanz ist reine Reaktanz).

Häufig wird die auf die Nennspannung bezogene *relative Nennkurzschlussspannung* $\underline{u}_{kN}$ angegeben mit:

$$\underline{u}_{kN} = \frac{\underline{U}_{1kN}}{U_{1N}} = \frac{\sqrt{3}\,\underline{U}_{1k\curlywedge}}{U_{1N}}$$

Kurzschlussimpedanz

Die *Kurzschlussimpedanz* $\underline{Z}_k$ entspricht der Impedanz im vereinfachten ESB 2. Art. Es gilt:

$$\underline{Z}_k = \underline{u}_{kN}\,\frac{U_N^2}{S_N}, \text{ wobei } \underline{Z}_k \text{ bezogen auf Seite mit Spannung } U_N$$

Indizes: **1** = Primärseite, **2** = Sekundärseite, **N** = Nennwert (insbes. △-Schaltung), **k** = sekundärseitiger Kurzschluss

Trafo

Parallelbetrieb

Parallelbetrieb ist erlaubt wenn

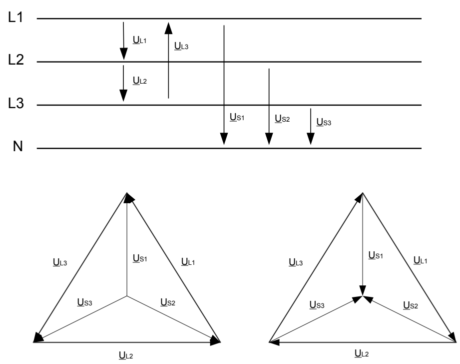
- Gleiches Übersetzungsverhältnis
- Gleiche Stundenzahl der Schaltgruppe
- Keiner der Transformatoren wird außerhalb des zulässigen Betriebsbereichs betrieben (die Ströme teilen sich nach dem ESB 2. Art gemäß den Kurzschlussimpedanzen auf → Stromteiler).

Die Belastung der Transformatoren erfolgt automatisch proportional zu den Nennleistungenen, wenn beide die gleichen (relativen) Kurzschlussspannungen aufweisen.

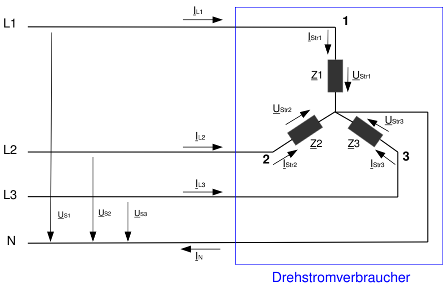
Drehstromverbraucher

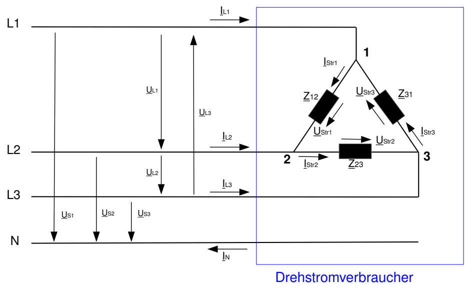
Schaltbilder

Stern- und Leiterspannung in vektorieller Form



Sternschaltung & Dreieckschaltung, △-⅄-Wandlung





$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1\ \underline{Z}_2}{\underline{Z}_{sd}}$$
$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2\ \underline{Z}_3}{\underline{Z}_{sd}}$$
$$\underline{Z}_{31} = \frac{\underline{Z}_3\ \underline{Z}_1}{\underline{Z}_{sd}}$$
$$\text{mit} \quad \frac{1}{\underline{Z}_{sd}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}\ \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{ds}}$$
$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{23}\ \underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{ds}}$$
$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{31}\ \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{ds}}$$
$$\text{mit} \quad \underline{Z}_{ds} = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}$$

Bei vollständiger Symmetrie:

$$\underline{Z}_{\triangle} = 3\ \underline{Z}_{\Ydown}$$

Kenngrößen

Wirkleistung P Die vom Verbraucher in andere Energieformen (z.B. mechanische, thermische oder chemische) umgewandelte elektrische Leistung. Sie entspricht dem Realteil der Scheinleistung im Leistungszeigerdiagramm.
Einheit: Watt [W]

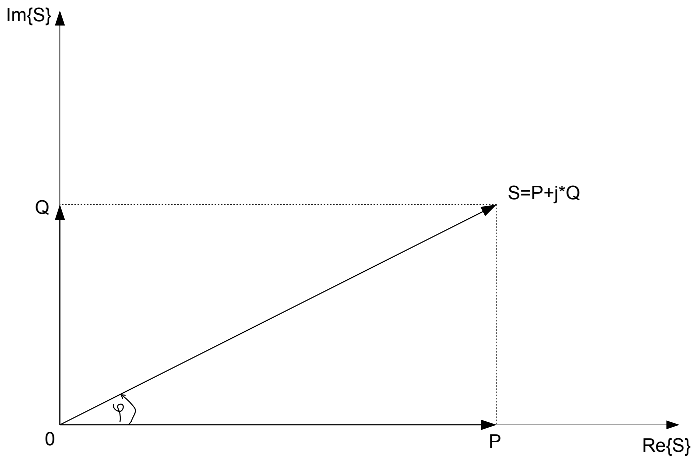
Blindleistung Q Der Teil der Gesamtenergie, der im Netz mit induktivem Verbraucher (z.B. Spule, Transformator, Asynchronmotor) zum Aufbau des Magnetfeldes bzw. im Netz mit kapazitivem Verbraucher (z.B. Kondensator, Erdkabel) zum Aufbau des elektrischen Feldes verwendet und beim Abbau wieder ans Netz zurückgegeben wird. Sie entspricht dem Imaginärteil der Scheinleistung im Leistungszeigerdiagramm.
Einheit: Voltampere Reaktiv [var]

Scheinleistung S Die vektorielle Addition von Wirk- und Blindleistungszeigern.
Einheit: Voltampere [VA]

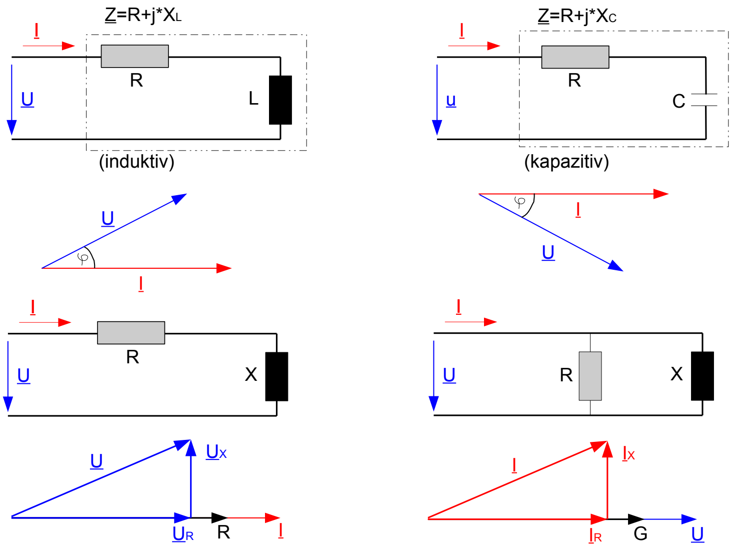
Phasenverschiebung Winkel φ: Gegen den Uhrzeigersinn vom Strom zur Spannung

$Q > 0$	$X > 0$	$0 < \varphi < 180°$	$\sin(\varphi) > 0$	Induktiver Verbraucher
$Q < 0$	$X < 0$	$-180° < \varphi < 0$	$\sin(\varphi) < 0$	Kapazitiver Verbraucher

Schein-, Wirk- & Blindleistungsdiagramm



Phasenwinkel der komplexen Netzwerke



Gleichungen

Nur für symmetrischen Fall, d.h. $U_{L1} = U_{L2} = U_{L3} = U_{\triangle}$ und $U_{S1} = U_{S2} = U_{S3} = U_{⅄}$.

Spannungsangaben

$$\text{Scheitelwert} = \sqrt{2}\ \text{Effektivwert}$$

$$\text{Gesamtscheinleistung} = 3\ \text{Strangleistung}$$

$$\text{Dreieckspannung} = \sqrt{3}\ \text{Sternspannung}$$

Scheinleistung S

$$\underline{S} = \underline{U}\ \underline{I}^* = P + jQ = |\underline{S}|\ (\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$$

mit $\cos(\varphi)$ Leistungsfaktor, $\sin(\varphi)$ Blindfaktor

Betrag von S

$$S = |\underline{S}| = U\ I = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Dreieckschaltung △

$$I_{Str} = \frac{I_L}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad U_{Str} = U_{\triangle} = U_L$$

$$\underline{S} = 3\ \underline{U}_{\triangle}\ \underline{I}^*_{Str} = \frac{3\ U^2_{\triangle}}{\underline{Z}^*} = \frac{9\ U^2_{⅄}}{\underline{Z}^*}$$

Sternschaltung ⅄

$$I_{Str} = I_L \quad \text{und} \quad U_{Str} = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$$

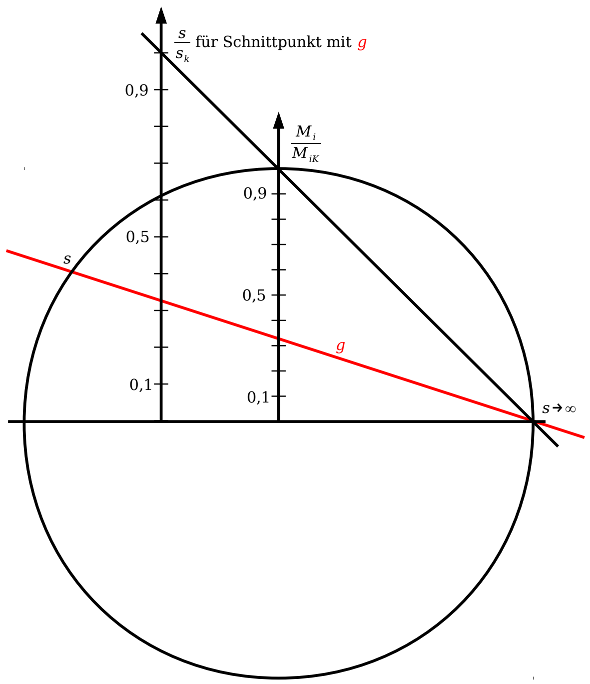
$$\underline{S} = 3\ \underline{U}_{Str}\ \underline{I}^*_L = \frac{3\ U^2_{⅄}}{\underline{Z}^*} = \frac{U^2_{\triangle}}{\underline{Z}^*}$$

Kapazität / Induktivität aus Reaktanz

$$L = \frac{X_L}{\omega} \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{\omega X_C}$$

Anhang

A Herleitung Schlupfgerade Asynchronmaschine

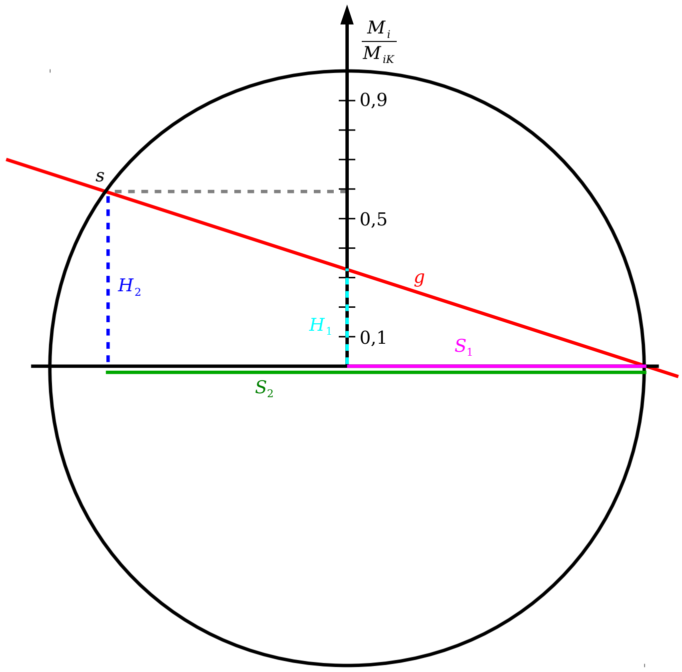


Heylandkreis - Der Schlupf an Stelle s soll bestimmt werden

Problem: Wir möchten den Wert des Schlupfes für einen beliebigen Punkt auf dem Heylandkreis (die Ortskurve des Statorstroms in der komplexen Ebene) bestimmen. Der Schlupf hat allerdings keinen linearen Zusammenhang mit dem Mittelpunktswinkel. Der Kippschlupf sei bekannt.

Behauptung: Durch Konstruktion einer Skala $\frac{s}{s_k}$ wie in der obigen Grafik, sodass der Wert $1,0$ der Skala durch die Gerade vom Punkt $s \to \infty$ durch den Punkt des Kippschlupfes ("oben" im Kreis) gegeben ist, lässt sich der Schlupf eines beliebigen Punktes s auf dem Heylandkreis ablesen. Dazu wird eine Gerade g durch den Punkt $s \to \infty$ und s konstruiert. Der Wert $\frac{s}{s_k}$ kann nun am Schnittpunkt dieser Gerade mit der Skala abgelesen werden.

Beweis: Zeige die Behauptung erst für den Fall, dass sich die $\frac{s}{s_k}$-Skala im horizontalen Mittelpunkt des Kreises befindet und verallgemeinere dann. Der Kreis habe den Radius 1, da der Zusammenhang $\frac{M_i}{M_{iN}} = \frac{I_{1W}}{I_{1WN}}$ gilt (d.h. Normierung des Stroms auf ein Drehmoment ist erlaubt, ohne die Grafik zu verzerren) und da hier auf das Kippdrehmoment M_{iK} normiert wurde. Für diese Herleitung liege der abzulesende Punkt in der linken Halbebene des Kreises.



Schlupfgerade mit Strecken für Strahlensatz

Der 2. Strahlensatz lässt mit den Bezeichnungen der Grafik formulieren:

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{S_1}{S_2} \implies H_1 = H_2 \, \frac{S_1}{S_2}$$

Sei nun das innere Drehmoment des abzulesenden Punktes M_i sowie M_{ik} bekannt. So gilt sofort mit der Normierung auf M_{iK} (Kreisradius 1):

$$H_2 = \frac{M_i}{M_{iK}} \quad \text{und} \quad S_1 = 1$$

S_2 kann außerdem einfach aus dem bekannten H_2 und dem bekannten Kreisradius 1 berechnet werden:

$$H_2^2 + (S_2 - S_1)^2 = 1 \implies S_2 = \sqrt{1 - H_2^2} + S_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{M_i}{M_{iK}}\right)^2} + 1$$

Somit ergibt sich für H_1 durch einsetzen in den Strahlensatz:

$$H_1 = \frac{\frac{M_i}{M_{iK}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{M_i}{M_{iK}}\right)^2} + 1}$$

Die Behauptung ist nun, dass $H_1 \overset{!}{=} \frac{s}{s_k}$. Dies ist gezeigt, wenn H_1 die Kloss'sche Formel erfüllt, d.h.:

$$\frac{M_i}{M_{iK}} = \frac{2}{\frac{s}{s_K} + \frac{s_K}{s}} \overset{!}{=} \frac{2}{H_1 + \frac{1}{H_1}}$$

Berechne $H_1 + \frac{1}{H_1}$:

$$
\begin{aligned}
H_1 + \frac{1}{H_1} &= \frac{\frac{M_i}{M_{iK}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{M_i}{M_{iK}}\right)^2} + 1} + \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{M_i}{M_{iK}}\right)^2} + 1}{\frac{M_i}{M_{iK}}} \\
&= \frac{M_i}{\sqrt{M_{iK}^2 - M_i^2} + M_{iK}} + \frac{\sqrt{M_{iK}^2 - M_i^2} + M_{iK}}{M_i} = \frac{M_i^2 + \left(\sqrt{M_{iK}^2 - M_i^2} + M_{iK}\right)^2}{\left(\sqrt{M_{iK}^2 - M_i^2} + M_{iK}\right)\ M_i} \\
&= \frac{M_i^2 + M_{iK}^2 - M_i^2 + M_{iK}^2 + 2\ M_{iK}\ \sqrt{M_{iK}^2 - M_i^2}}{\left(\sqrt{M_{iK}^2 - M_i^2} + M_{iK}\right)\ M_i} \\
&= \frac{2\ M_{iK}^2 + 2\ M_{iK}\ \sqrt{M_{iK}^2 - M_i^2}}{\left(\sqrt{M_{iK}^2 - M_i^2} + M_{iK}\right)\ M_i} = \frac{2\ M_{iK}}{M_i}\ \frac{M_{iK} + \sqrt{M_{iK}^2 - M_i^2}}{\sqrt{M_{iK}^2 - M_i^2} + M_{iK}} = 2\ \frac{M_{iK}}{M_i}
\end{aligned}
$$

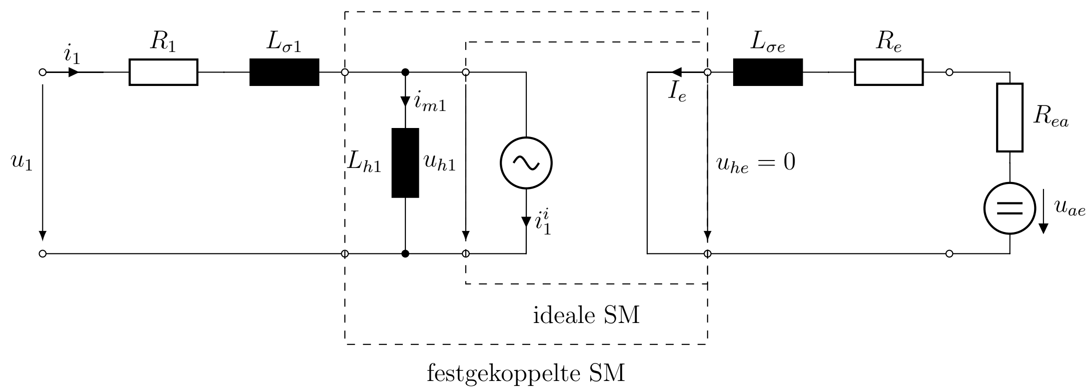
Einsetzen in die Kloss'sche Formel ergibt:

$$
\frac{M_i}{M_{iK}} \overset{!}{=} \frac{2}{2\ \frac{M_{iK}}{M_i}} \Leftrightarrow 1 = 1
$$

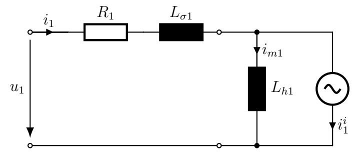
Das heißt, der auf der vertikalen Gerade durch den Kreismittelpunkt abgelesene, normierte Wert ist tatsächlich das gesuchte $\frac{s}{s_k}$-Verhältnis. Ein Verschieben der Gerade ändert bei entsprechender Anpassung der Skala den abgelesenen Wert nicht (→ Strahlensatz), somit gilt auch die anfängliche Behauptung. Der Beweis für Punkte auf dem Kreis in anderen Quadranten erfolgt analog. □

B Weitere Ersatzschaltbilder der Synchronmaschine

Vollständiges ESB der Synchronmaschine

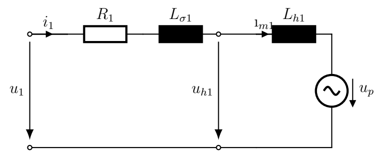


Ständerseitiges ESB 1. Art



$$i_1^i = \hat{i}_1^i \ \cos(\omega \ t) = \frac{2}{3} \ \frac{w_e \ \xi_e}{w_1 \ \xi_1} \ I_e \ \cos(\omega \ t)$$

Ständerseitiges ESB 2. Art



$$u_p = \omega \ L_{h1} \ \frac{2}{3} \ \frac{w_e \ \xi_e}{w_1 \ \xi_1} \ I_e \ \sin(\omega \ t)$$